Decomposizione estremale di polinomi non negativi e numero di Carathéodory

Tesi di Laurea Magistrale

18 Aprile 2012

Relatore

Prof. Giorgio Ottaviani

Correlatore

Prof. Marco Longinetti

Candidato: Simone Naldi

Domanda

Dato $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ omogeneo di grado m, non negativo, esistono F_i, $i \in \{1, \dots, t\}$, tali che

$$F = \sum_{i=1}^{t} F_i^2?$$

Per quali coppie $(n, m) \in \mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$ questa decomposizione è possibile per ogni polinomio non negativo di grado m su $x_1, \dots, x_n$?

Teorema (Hilbert, 1888)

Ogni polinomio omogeneo in n indeterminate $x_1, \ldots x_n$ di grado m, non negativo, è somma di quadrati di polinomi omogenei di grado $\frac{m}{2}$ se e solo se si verifica almeno uno dei seguenti casi:

- $n = 2$ (forme binarie)
- $m = 2$ (forme quadratiche)
- $(n, m) = (3, 4)$ (quartiche piane)

Esempio

La dimostrazione di Hilbert non produsse esempi diretti di polinomi non negativi che non sono somme di quadrati.

Primi esempi

- Robinson per $(3, 6)$

  $\mathrm{R} = x^6+y^6+z^6-(x^4y^2+x^2y^4+x^4z^2+x^2z^4+y^4z^2+y^2z^4)+3x^2y^2z^2$

- Motzkin per $(n, 2n)$

  $\mathrm{M}_n = (x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 - nx_n^2) \cdot x_1^2 \cdots x_{n-1}^2 + x_n^{2n}$

- Choi-Lam per $(4, 4)$

  $Q = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + w^4 - 4xyzw$

Sia H uno spazio vettoriale reale a dimensione finita.

Definizione

Un sottoinsieme $C \subseteq H$ si dice **cono** se

$$\text{per ogni } a \in C \text{ e ogni } \alpha \gneq 0 \text{ allora } \alpha a \in C.$$

Chiamiamo **dimensione** di un cono convesso C la dimensione del suo inviluppo affine.

Definizione

Sia C un cono. Un elemento $e \in C$ si dice **punto estremale** di C se avviene che: se $e = f_1 + f_2$ con $f_i \in C$, allora $f_i = c_i e$ per certi $c_i \geq 0$. Indicheremo l'insieme dei punti estremali di C con $\mathrm{Est}(C)$.

Osservazione

Se C è un cono convesso, allora $\mathrm{Est}(C) \subseteq \partial C$.

Sia H uno spazio vettoriale reale a dimensione finita.

Definizione

Un sottoinsieme $C \subseteq H$ si dice **cono** se

$$\text{per ogni } a \in C \text{ e ogni } \alpha \gneq 0 \text{ allora } \alpha a \in C.$$

Chiamiamo **dimensione** di un cono convesso C la dimensione del suo inviluppo affine.

Definizione

Sia C un cono. Un elemento $e \in C$ si dice **punto estremale** di C se avviene che: se $e = f_1 + f_2$ con $f_i \in C$, allora $f_i = c_i e$ per certi $c_i \geq 0$. Indicheremo l'insieme dei punti estremali di C con $\mathrm{Est}(C)$.

Osservazione

Se C è un cono convesso, allora $\mathrm{Est}(C) \subseteq \partial C$.

Teorema (Milmann)

Un cono convesso che non contiene rette è inviluppo convesso dei suoi punti estremali.

Teorema (Carathéodory)

Sia C un cono convesso di dimensione n, e sia $z = \sum_{j=1}^{b} x_j$ con $x_j \in C$. Allora esiste $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq C$ tale che $z = \sum_{i=1}^{n} y_i$ e tale che, per ogni i, $y_i = \epsilon_j x_j$ per qualche x_j, con $\epsilon_j \leq 1$.

Corollario

Sia C un cono convesso di dimensione n che non contiene rette. Allora ogni $x \in C$ si scrive come somma di al più n punti estremali di C.

Teorema (Milmann)

Un cono convesso che non contiene rette è inviluppo convesso dei suoi punti estremali.

Teorema (Carathéodory)

Sia C un cono convesso di dimensione n, e sia $z = \sum_{j=1}^{b} x_j$ con $x_j \in C$. Allora esiste $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq C$ tale che $z = \sum_{i=1}^{n} y_i$ e tale che, per ogni i, $y_i = \epsilon_j x_j$ per qualche x_j, con $\epsilon_j \leq 1$.

Corollario

Sia C un cono convesso di dimensione n che non contiene rette. Allora ogni $x \in C$ si scrive come somma di al più n punti estremali di C.

Sia C un cono convesso.

Definizione

Dato $x \in C$, si definisce **altezza** di x il numero intero

$$\mathrm{h}(x) = \min \left\{ r \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{r} e_i,\;\; e_i \in \mathrm{Est}(C) \right\}.$$

Definizione

Si definisce **numero di Carathéodory** del cono C il numero intero

$$\mathfrak{C}(C) = \max_{x \in C} \left\{ \mathrm{h}(x) \right\}.$$

Osservazione

$\mathfrak{C}(C) \leq \dim(C)$.

Sia C un cono convesso.

Definizione

Dato $x \in C$, si definisce **altezza** di x il numero intero

$$\mathrm{h}(x) = \min \left\{ r \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{r} e_i,\ \ e_i \in \mathrm{Est}(C) \right\}.$$

Definizione

Si definisce **numero di Carathéodory** del cono C il numero intero

$$\mathfrak{C}(C) = \max_{x \in C} \left\{ \mathrm{h}(x) \right\}.$$

Osservazione

$\mathfrak{C}(C) \leq \dim(C)$.

$\mathfrak{C}$ per i coni di Hilbert

Sia $\mathbf{F}_{n,m} = \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]_m$. Definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{F}_{n,m}$:

- $\mathbf{P}_{n,m} \overset{def}{=} \left\{F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F(X) \geq 0 \text{ per ogni } X \in \mathbb{R}^n\right\}$, insieme dei polinomi non-negativi;
- $\mathbf{\Sigma}_{n,m} \overset{def}{=} \left\{F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F = \sum_{j=1}^{r} h_j^2 \text{ dove } h_j \in \mathbf{F}_{n,\frac{m}{2}} \text{ e } r \in \mathbb{N}\right\}$, le somme di quadrati;

Valgono i risultati

Proposizione

1. $\mathbf{\Sigma}_{n,m} \subseteq \mathbf{P}_{n,m}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$
2. $\mathbf{P}_{n,m}$ e $\mathbf{\Sigma}_{n,m}$ sono coni convessi chiusi di $\mathbf{F}_{n,m}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$
3. $F \in \partial\mathbf{P}_{n,m}$ se e solo se ha almeno una radice reale (doppia).

$\mathfrak{C}$ per i coni di Hilbert

Sia $\mathbf{F}_{n,m} = \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]_m$. Definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{F}_{n,m}$:

- $\mathbf{P}_{n,m} \stackrel{def}{=} \left\{F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F(X) \geq 0 \text{ per ogni } X \in \mathbb{R}^n\right\}$, insieme dei polinomi non-negativi;
- $\mathbf{\Sigma}_{n,m} \stackrel{def}{=} \left\{F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F = \sum_{j=1}^{r} h_j^2 \text{ dove } h_j \in \mathbf{F}_{n,\frac{m}{2}} \text{ e } r \in \mathbb{N}\right\}$, le somme di quadrati;

Valgono i risultati

Proposizione

1. $\mathbf{\Sigma}_{n,m} \subseteq \mathbf{P}_{n,m}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$
2. $\mathbf{P}_{n,m}$ e $\mathbf{\Sigma}_{n,m}$ sono coni convessi chiusi di $\mathbf{F}_{n,m}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$
3. $F \in \partial \mathbf{P}_{n,m}$ se e solo se ha almeno una radice reale (doppia).

$\mathfrak{C}$ per i coni di Hilbert

Sia $\mathbf{F}_{n,m} = \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]_m$. Definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{F}_{n,m}$:

- $\mathbf{P}_{n,m} \stackrel{def}{=} \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F(X) \geq 0 \text{ per ogni } X \in \mathbb{R}^n \right\}$, insieme dei polinomi non-negativi;
- $\mathbf{\Sigma}_{n,m} \stackrel{def}{=} \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F = \sum_{j=1}^{r} h_j^2 \text{ dove } h_j \in \mathbf{F}_{n,\frac{m}{2}} \text{ e } r \in \mathbb{N} \right\}$, le somme di quadrati;

Valgono i risultati

Proposizione

1. $\mathbf{\Sigma}_{n,m} \subseteq \mathbf{P}_{n,m}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$
2. $\mathbf{P}_{n,m}$ e $\mathbf{\Sigma}_{n,m}$ sono coni convessi chiusi di $\mathbf{F}_{n,m}$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$
3. $F \in \partial \mathbf{P}_{n,m}$ se e solo se ha almeno una radice reale (doppia).

Problema

Data la coppia (n, m) tale che $\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{\Sigma}_{n,m}$, è dunque necessario:

1. isolare e caratterizzare il sottoinsieme $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,m})$
2. studiare le altezze dei polinomi di $\mathbf{P}_{n,m}$
3. calcolare $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m})$.

Osservazione

Se $\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{\Sigma}_{n,m}$, allora $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,m}) \subseteq \mathbf{F}^2_{n,\frac{m}{2}} = \left\{ P^2 \;\middle|\; F \in \mathbf{F}_{n,\frac{m}{2}} \right\}$. Dunque

$$\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,m}) \subseteq \mathbf{F}^2_{n,\frac{m}{2}} \cap \partial \mathbf{P}_{n,m}.$$

e quindi calcolare $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m})$ quando $\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{\Sigma}_{n,m}$ equivale a considerare le rappresentazioni dei polinomi come somma di quadrati *estremali*.

Problema

Data la coppia (n, m) tale che $\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{\Sigma}_{n,m}$, è dunque necessario:

1. isolare e caratterizzare il sottoinsieme $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,m})$
2. studiare le altezze dei polinomi di $\mathbf{P}_{n,m}$
3. calcolare $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m})$.

Osservazione

Se $\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{\Sigma}_{n,m}$, allora $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,m}) \subseteq \mathbf{F}^2_{n,\frac{m}{2}} = \left\{ P^2 \;\middle|\; F \in \mathbf{F}_{n,\frac{m}{2}} \right\}$. Dunque

$$\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,m}) \subseteq \mathbf{F}^2_{n,\frac{m}{2}} \cap \partial\mathbf{P}_{n,m}.$$

e quindi calcolare $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m})$ quando $\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{\Sigma}_{n,m}$ equivale a considerare le rappresentazioni dei polinomi come somma di quadrati *estremali*.

Forme quadratiche

$F \in \mathbf{P}_{n,2}$ è rappresentata da una matrice M_F a coefficienti reali, simmetrica e semidefinita positiva.

Proposizione

L'insieme degli estremali $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,2})$ coincide con l'insieme dei polinomi F tali che $\mathrm{rk}(M_F) = 1$, $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,2}) = \mathbf{F}^2_{n,1}$.

$$F(X) = X^t M_F X = \sum_{j=1}^{\mathrm{rk}(M_F)} (T_j \cdot X)^2$$

per ogni $X \in \mathbb{R}^n$, per qualche $T_j \in \mathbb{R}^n$. Dunque

$$\mathrm{h}(F) = \mathrm{rk}(M_F).$$

Forme quadratiche

$F \in \mathbf{P}_{n,2}$ è rappresentata da una matrice M_F a coefficienti reali, simmetrica e semidefinita positiva.

Proposizione

L'insieme degli estremali $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,2})$ coincide con l'insieme dei polinomi F tali che $\mathrm{rk}(M_F) = 1$, $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,2}) = \mathbf{F}^2_{n,1}$.

$$F(X) = X^t M_F X = \sum_{j=1}^{\mathrm{rk}(M_F)} (T_j \cdot X)^2$$

per ogni $X \in \mathbb{R}^n$, per qualche $T_j \in \mathbb{R}^n$. Dunque

$$\mathrm{h}(F) = \mathrm{rk}(M_F).$$

Teorema

Il numero di Carathéodory per il cono $\mathbf{P}_{n,2}$ è $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,2}) = n$.

Osservazione

Detto $G_n = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ si ha che
$\left\{ \text{rapprentazioni di } G_n \text{ come somma di } n \text{ quadrati} \right\} \sim \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

Forme binarie

Una forma binaria non-negativa è un polinomio omogeneo della forma

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \zeta_i x^i y^{m-i} \geq 0 \text{ per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Osservazione

Ogni forma binaria non negativa è somma di **due** quadrati.

$$\begin{aligned} F &= \prod_{j=1}^{\frac{r}{2}} (a_j x - b_j y)^2 \prod_{j=r+1}^{r+c} (c_j x - d_j y) \prod_{j=r+1}^{r+c} (\overline{c}_j x - \overline{d}_j y) \\ &= H^2(x,y)(A(x,y) + iB(x,y))(A(x,y) - iB(x,y)) \\ &= H^2(x,y)(A^2(x,y) + B^2(x,y)) = (HA)^2(x,y) + (HB)^2(x,y). \end{aligned}$$

Non è detto, però, che questi quadrati siano estremali.

Teorema

F è estremale per il cono $\mathbf{P}_{2,m}$ se e solo se è il quadrato di un polinomio con sole radici reali.

Definizione

Sia $F \in \mathbf{P}_{2,m}$. Chiamiamo una **partizione delle radici** di F una coppia $A(x,y), \overline{A}(x,y) \in \mathbf{F}_{2,\frac{m}{2}}$ tali che

1. Ogni forma lineare $L|F$ appare nella fattorizzazione di A o $\overline{A}$;
2. Per ogni α radice di F, α è radice di A se e solo se $\overline{\alpha}$ è radice di $\overline{A}$;
3. $F = A \cdot \overline{A} = \mathrm{Re}(A)^2 + \mathrm{Im}(A)^2$.

Teorema

Sia $F = G^2 + H^2$ una forma binaria di grado m pari, con G, H polinomi a coefficienti reali. Allora esiste una decomposizione $(A, \overline{A})$ delle radici di F per cui, senza perdita di generalità, si ha $G = \mathrm{Re}(A)$ e $H = \mathrm{Im}(A)$.

Teorema

F è estremale per il cono $\mathbf{P}_{2,m}$ se e solo se è il quadrato di un polinomio con sole radici reali.

Definizione

Sia $F \in \mathbf{P}_{2,m}$. Chiamiamo una **partizione delle radici** di F una coppia $A(x,y), \overline{A}(x,y) \in \mathbf{F}_{2,\frac{m}{2}}$ tali che

1. Ogni forma lineare $L|F$ appare nella fattorizzazione di A o $\overline{A}$;
2. Per ogni α radice di F, α è radice di A se e solo se $\overline{\alpha}$ è radice di $\overline{A}$;
3. $F = A \cdot \overline{A} = \mathrm{Re}(A)^2 + \mathrm{Im}(A)^2$.

Teorema

Sia $F = G^2 + H^2$ una forma binaria di grado m pari, con G, H polinomi a coefficienti reali. Allora esiste una decomposizione $(A, \overline{A})$ delle radici di F per cui, senza perdita di generalità, si ha $G = \mathrm{Re}(A)$ e $H = \mathrm{Im}(A)$.

Quartiche

Osservazione

Se $F \in \partial \mathbf{P}_{2,4}$ allora $\mathrm{h}(F) \leq 2$.

Altrimenti si ha

$$F = (x - \alpha y)(x - \overline{\alpha} y)(x - \beta y)(x - \overline{\beta} y).$$

Chiamiamo

$$\begin{aligned} A &= (x - \alpha y)(x - \beta y) = \\ &= \left(x^2 - (\alpha_1 + \beta_1)xy + (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)y^2\right) + \\ &\quad + i \cdot \left((\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)y^2 - (\alpha_2 + \beta_2)xy\right). \end{aligned}$$

Teorema

Il numero di Carathéodory per il cono $\mathbf{P}_{2,4}$ è $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,4}) = 2$.

Quartiche

Osservazione

Se $F \in \partial\mathbf{P}_{2,4}$ allora $\mathrm{h}(F) \leq 2$.

Altrimenti si ha

$$F = (x - \alpha y)(x - \overline{\alpha} y)(x - \beta y)(x - \overline{\beta} y).$$

Chiamiamo

$$\begin{aligned} A = (x - \alpha y)(x - \beta y) = \\ = \Big(x^2 - (\alpha_1 + \beta_1)xy + (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)y^2\Big) + \\ + i \cdot \Big((\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)y^2 - (\alpha_2 + \beta_2)xy\Big). \end{aligned}$$

Teorema

Il numero di Carathéodory per il cono $\mathbf{P}_{2,4}$ è $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,4}) = 2$.

Proposizione (Unicità)

Se $F \in \partial \mathbf{P}_{2,4}$, allora F ha una unica decomposizione come somma di al più due estremali. Esiste inoltre una ipersuperficie quadrica di $\mathbb{R}^4$ che divide $\mathbf{P}_{2,4}$ in due regioni, formate rispettivamente dalle quartiche con una e due rappresentazioni possibili come somma di al più due estremali.

Esempio (Unica rappresentazione)

$$F_t = (x^2+y^2)(x^2+t^2y^2) = \left(x^2 - ty^2\right)^2 + \left((1+t)xy\right)^2.$$

Esempio (Due rappresentazioni distinte)

$F = x^4 - 6x^3y + 11x^2y^2 - 6xy^3 + 10y^4$: la quartica di radici $\{\pm i, 3 \pm i\}$.

1. se $A = A_1 = \left(x - (3+i)y\right)\left(x - iy\right)$ si ottiene
   $$F = \left(x^2 - 3xy - y^2\right)^2 + \left(-2xy + 3y^2\right)^2$$
2. se $A = A_2 = \left(x - (3+i)y\right)\left(x + iy\right)$ si ottiene
   $$F = \left(x^2 - 3xy + y^2\right)^2 + \left(3y^2\right)^2.$$

Sestiche

Se $F \in \partial \mathbf{P}_{2,6}$ allora

$$F = (ax-by)^2 G = (ax-by)^2(G_1^2+G_2^2) = \Big((ax-by)G_1\Big)^2+\Big((ax-by)G_2\Big)^2,$$

quindi F ha altezza ≤ 2. Altrimenti

$$F = (x-\alpha y)(x-\overline{\alpha}y)(x-\beta y)(x-\overline{\beta}y)(x-\gamma y)(x-\overline{\gamma}y).$$

Sia

$$A = (x-\alpha y)(x-\beta y)(x-\gamma y),$$

corrispondente alla partizione

$$\Big\{\{\alpha,\beta,\gamma\},\{\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}\}\Big\}.$$

Calcolate Re(A) e Im(A) si ottiene un sistema di condizioni su α, β, γ :

$$\begin{cases} \mathrm{Im}^2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) - 4\mathrm{Im}(\alpha\beta\gamma)\Big(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2\Big) \geq 0 \\ \mathrm{Re}^2(\alpha\beta\gamma) - \frac{1}{27}\mathrm{Re}^2(\alpha+\beta+\gamma)\mathrm{Re}^2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) - \\ -\frac{2}{3}\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\gamma)\mathrm{Re}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\mathrm{Re}(\alpha\beta\gamma) + \\ +\frac{4}{27}\mathrm{Re}^3(\alpha+\beta+\gamma)\mathrm{Re}(\alpha\beta\gamma) + \frac{4}{27}\mathrm{Re}^3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \leq 0. \end{cases}$$

Se α, β, γ sono immaginari puri

$$\begin{cases} \alpha_2\beta_2\gamma_2 \cdot (\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \geq 0 \\ \alpha_2\beta_2+\alpha_2\gamma_2+\beta_2\gamma_2 \geq 0. \end{cases}$$

Calcolate Re(A) e Im(A) si ottiene un sistema di condizioni su α, β, γ :

$$\begin{cases} \mathrm{Im}^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 4\mathrm{Im}(\alpha\beta\gamma)\Big(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2\Big) \geq 0 \\ \mathrm{Re}^2(\alpha\beta\gamma) - \frac{1}{27}\mathrm{Re}^2(\alpha + \beta + \gamma)\mathrm{Re}^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \\ -\frac{2}{3}\mathrm{Re}(\alpha + \beta + \gamma)\mathrm{Re}(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\mathrm{Re}(\alpha\beta\gamma) + \\ +\frac{4}{27}\mathrm{Re}^3(\alpha + \beta + \gamma)\mathrm{Re}(\alpha\beta\gamma) + \frac{4}{27}\mathrm{Re}^3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \leq 0. \end{cases}$$

Se α, β, γ sono immaginari puri

$$\begin{cases} \alpha_2\beta_2\gamma_2 \cdot (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 0 \\ \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_2 \geq 0. \end{cases}$$

Se $F \in \mathbf{P}_{2,6}$ possiamo supporre

$$F = F_{\omega,\gamma_1,\gamma_2}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+\omega^2y^2\right)(x-\gamma y)(x-\overline{\gamma}y),$$

con $\omega \geq 0$ e $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$.

Quattro partizioni:

1. $\left\{\{i,\omega i,\gamma\},\{-i,-\omega i,\overline{\gamma}\}\right\}$

$$\begin{cases}(1+\omega)^2\gamma_1^2+4\omega\gamma_2(1+\omega+\gamma_2)\geq 0\\ \omega^2\gamma_1^2-\frac{1}{27}\gamma_1^2(\omega+\gamma_2+\omega\gamma_2)^2-\frac{2}{3}\omega\gamma_1^2(\omega+\gamma_2+\omega\gamma_2)-\\ -\frac{4}{27}\omega\gamma_1^4-\frac{4}{27}(\omega+\gamma_2+\omega\gamma_2)^3\leq 0.\end{cases}$$

2. $\left\{\{i,-\omega i,\gamma\},\{-i,\omega i,\overline{\gamma}\}\right\}$

$$\begin{cases}(1-\omega)^2\gamma_1^2-4\omega\gamma_2(1-\omega+\gamma_2)\geq 0\\ \omega^2\gamma_1^2-\frac{1}{27}\gamma_1^2(\omega-\gamma_2+\omega\gamma_2)^2-\frac{2}{3}\omega\gamma_1^2(\omega-\gamma_2+\omega\gamma_2)+\\ +\frac{4}{27}\omega\gamma_1^4+\frac{4}{27}(\omega-\gamma_2+\omega\gamma_2)^3\leq 0.\end{cases}$$

3. $\left\{\{-i,\omega i,\gamma\},\{i,-\omega i,\overline{\gamma}\}\right\}$

$$\begin{cases}(1-\omega)^2\gamma_1^2-4\omega\gamma_2(-1+\omega+\gamma_2)\geq 0\\ \omega^2\gamma_1^2-\frac{1}{27}\gamma_1^2(\omega+\gamma_2-\omega\gamma_2)^2-\frac{2}{3}\omega\gamma_1^2(\omega+\gamma_2-\omega\gamma_2)+\\ +\frac{4}{27}\omega\gamma_1^4+\frac{4}{27}(\omega+\gamma_2-\omega\gamma_2)^3\leq 0.\end{cases}$$

4. $\left\{\{-i,-\omega i,\gamma\},\{i,\omega i,\overline{\gamma}\}\right\}$

$$\begin{cases}(1+\omega)^2\gamma_1^2+4\omega\gamma_2(-1-\omega+\gamma_2)\geq 0\\ \omega^2\gamma_1^2-\frac{1}{27}\gamma_1^2(\omega-\gamma_2-\omega\gamma_2)^2-\frac{2}{3}\omega\gamma_1^2(\omega-\gamma_2-\omega\gamma_2)-\\ -\frac{4}{27}\omega\gamma_1^4-\frac{4}{27}(\omega-\gamma_2-\omega\gamma_2)^3\leq 0.\end{cases}$$

Se $F \in \mathbf{P}_{2,6}$ possiamo supporre

$$F = F_{\omega,\gamma_1,\gamma_2}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+\omega^2y^2\right)(x-\gamma y)(x-\overline{\gamma}y),$$

con $\omega \geq 0$ e $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$.

Quattro partizioni:

1. $$\left\{\{i,\omega i,\gamma\},\{-i,-\omega i,\overline{\gamma}\}\right\}$$
$$\begin{cases} (1+\omega)^2\gamma_1^2 + 4\omega\gamma_2(1+\omega+\gamma_2) \geq 0 \\ \omega^2\gamma_1^2 - \frac{1}{27}\gamma_1^2(\omega+\gamma_2+\omega\gamma_2)^2 - \frac{2}{3}\omega\gamma_1^2(\omega+\gamma_2+\omega\gamma_2) - \\ -\frac{4}{27}\omega\gamma_1^4 - \frac{4}{27}(\omega+\gamma_2+\omega\gamma_2)^3 \leq 0. \end{cases}$$

2. $$\left\{\{i,-\omega i,\gamma\},\{-i,\omega i,\overline{\gamma}\}\right\}$$
$$\begin{cases} (1-\omega)^2\gamma_1^2 - 4\omega\gamma_2(1-\omega+\gamma_2) \geq 0 \\ \omega^2\gamma_1^2 - \frac{1}{27}\gamma_1^2(\omega-\gamma_2+\omega\gamma_2)^2 - \frac{2}{3}\omega\gamma_1^2(\omega-\gamma_2+\omega\gamma_2) + \\ +\frac{4}{27}\omega\gamma_1^4 + \frac{4}{27}(\omega-\gamma_2+\omega\gamma_2)^3 \leq 0. \end{cases}$$

3. $$\left\{\{-i,\omega i,\gamma\},\{i,-\omega i,\overline{\gamma}\}\right\}$$
$$\begin{cases} (1-\omega)^2\gamma_1^2 - 4\omega\gamma_2(-1+\omega+\gamma_2) \geq 0 \\ \omega^2\gamma_1^2 - \frac{1}{27}\gamma_1^2(\omega+\gamma_2-\omega\gamma_2)^2 - \frac{2}{3}\omega\gamma_1^2(\omega+\gamma_2-\omega\gamma_2) + \\ +\frac{4}{27}\omega\gamma_1^4 + \frac{4}{27}(\omega+\gamma_2-\omega\gamma_2)^3 \leq 0. \end{cases}$$

4. $$\left\{\{-i,-\omega i,\gamma\},\{i,\omega i,\overline{\gamma}\}\right\}$$
$$\begin{cases} (1+\omega)^2\gamma_1^2 + 4\omega\gamma_2(-1-\omega+\gamma_2) \geq 0 \\ \omega^2\gamma_1^2 - \frac{1}{27}\gamma_1^2(\omega-\gamma_2-\omega\gamma_2)^2 - \frac{2}{3}\omega\gamma_1^2(\omega-\gamma_2-\omega\gamma_2) - \\ -\frac{4}{27}\omega\gamma_1^4 - \frac{4}{27}(\omega-\gamma_2-\omega\gamma_2)^3 \leq 0. \end{cases}$$

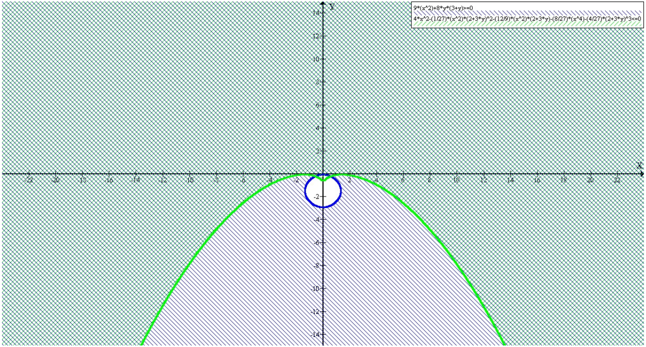

Figura: Primo sistema, $\omega = 2$.

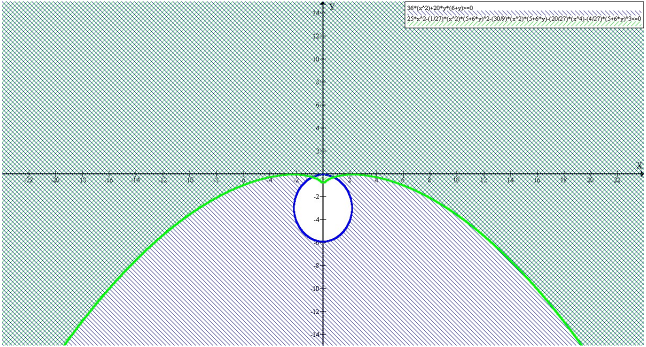

Figura: Primo sistema, $\omega = 5$.

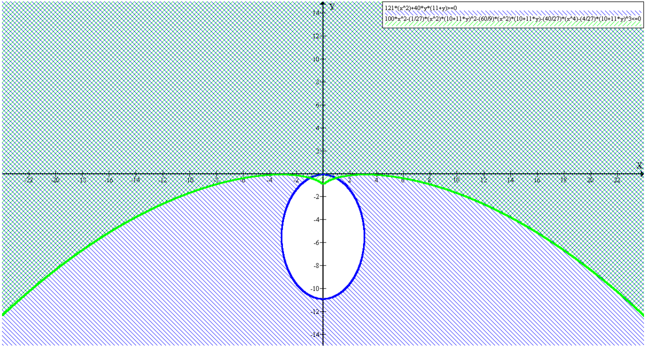

Figura: Primo sistema, $\omega = 10$.

Teorema

Se $\gamma_2 \geq 0$, è verificato il primo sistema per ogni $\omega \geq 0$ e per ogni $\gamma_1 \in \mathbb{R}$. Se invece $\gamma_2 \leq 0$ allora è verificato il quarto sistema per ogni $\omega \geq 0$ e per ogni $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.

Segue che

Teorema

Il numero di Carathéodory per $\mathbf{P}_{2,6}$ è $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,6}) = 2$.

Teorema

Se $\gamma_2 \geq 0$, è verificato il primo sistema per ogni $\omega \geq 0$ e per ogni $\gamma_1 \in \mathbb{R}$. Se invece $\gamma_2 \leq 0$ allora è verificato il quarto sistema per ogni $\omega \geq 0$ e per ogni $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.

Segue che

Teorema

Il numero di Carathéodory per $\mathbf{P}_{2,6}$ è $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,6}) = 2$.

Risultati induttivi su $\mathrm{h}(F)$

Teorema

Sia $m \geq 4$ pari. Se $F \in \partial \mathbf{P}_{2,m}$ e $F = (ax - by)^{2t} \cdot G$, dove $2t \geq 2$ è la molteplicità di $ax - by$ nella fattorizzazione di F, allora

$$\mathrm{h}(F) \leq \mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,m-2t}).$$

Corollario

Sia $m \geq 4$ pari, $F \in \partial \mathbf{P}_{2,m}$. Se gli zeri reali di F formano la varietà $V(F) = L_1^{2t_1} \cup \cdots \cup L_k^{2t_k}$ con $m = \sum 2t_i + R$, allora $\mathrm{h}(F) \leq \mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,R})$.

Conclusioni

1. $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,2}) = n$, per ogni $n \geq 2$. Inoltre $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{n,2}) = \mathbf{F}^2_{n,1}$;
2. Per ogni $m \in 2\mathbb{N}$, $\mathrm{Est}(\mathbf{P}_{2,m}) \subsetneq \mathbf{F}^2_{2,\frac{m}{2}}$;
3. $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,4}) = 2$;
4. $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,6}) = 2$;
5. Nuove limitazioni per $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,m})$:

m	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,m})$	$m+1$
4, 6	$\mathfrak{C} = 2$	5, 7
8, 10, 12	$\mathfrak{C} \leq 4$	9, 11, 13
14, 16, 18	$\mathfrak{C} \leq 8$	15, 17, 19
20, 22, 24	$\mathfrak{C} \leq 16$	21, 23, 25

6. Non c'è unicità globale su $\mathbf{P}_{2,m}$ né su $\mathbf{P}_{n,2}$.

Decomposizione estremale di polinomi non negativi e numero di Carathéodory

Tesi di Laurea Magistrale

18 Aprile 2012

Relatore

Prof. Giorgio Ottaviani

Candidato: Simone Naldi

Correlatore

Prof. Marco Longinetti