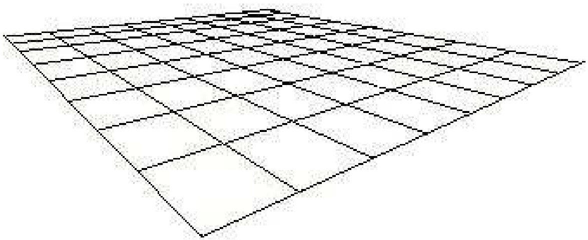
Dalla prospettiva piana alla geometria proiettiva: approfondimenti e spunti didattici.

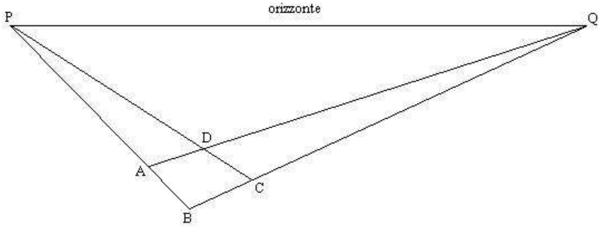
di Nadia Ricchetti

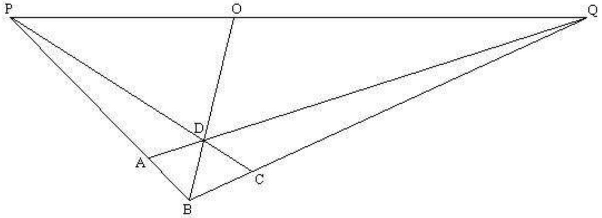
relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

19 marzo 2010

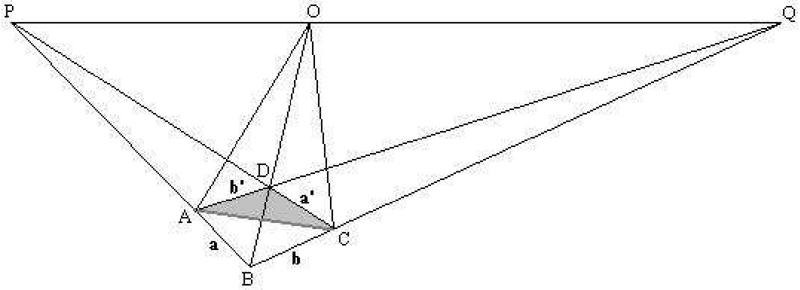
Pavimentazioni realizzate sotto altri punti di vista

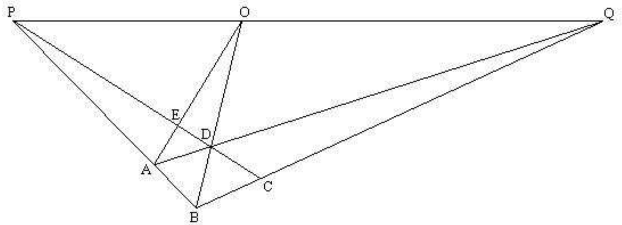


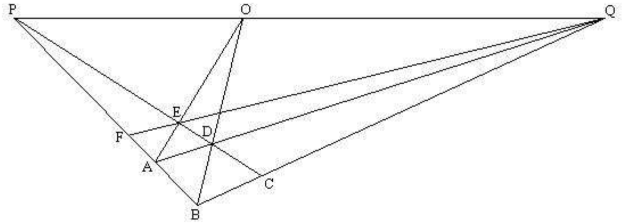

orizzonte
P
Q
D
A
C
B

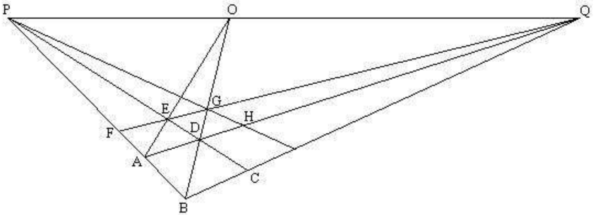

P
O
Q
D
A
C
B

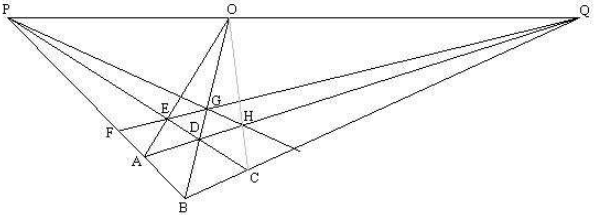
La costruzione della prima mattonella è ben posta...




P
O
Q
E
D
A
C
B

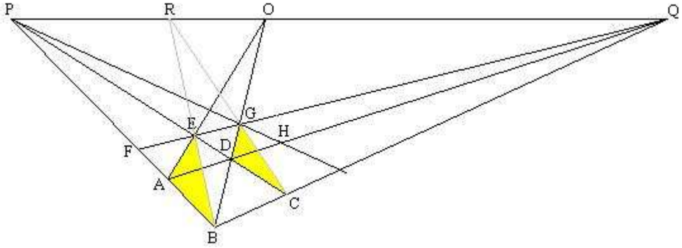

P
O
Q
E
F
D
A
C
B

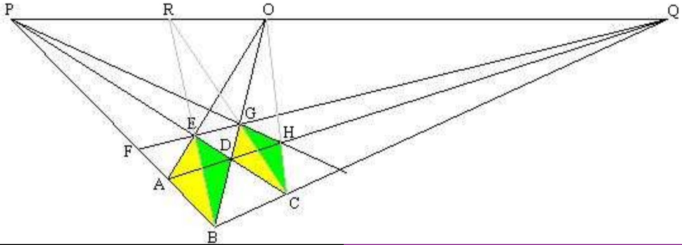




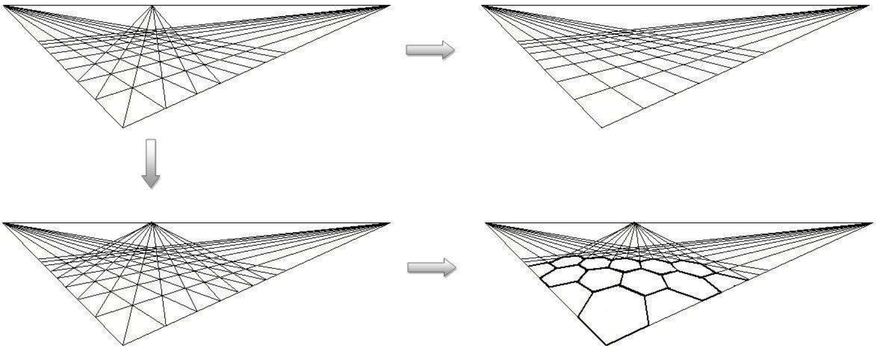
... ma anche i passaggi successivi sono ben costruiti!

Infatti, per il teorema di Desargues:

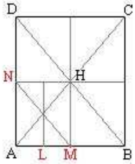


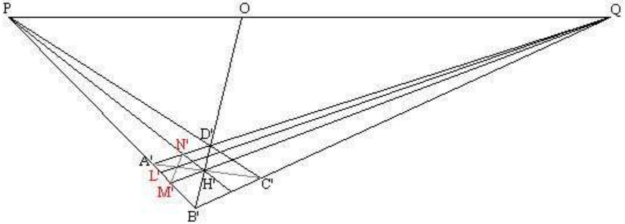


Non solo pavimentazioni con mattonelle quadrate...

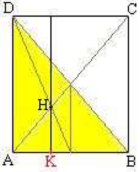


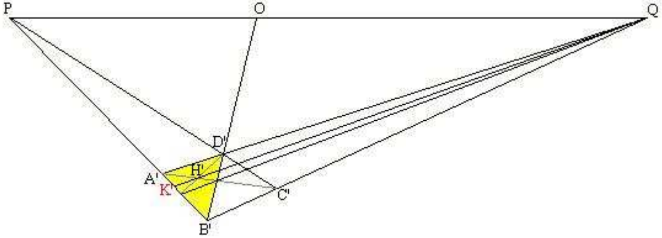
Costruire il punto medio



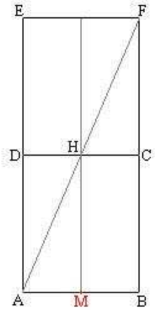


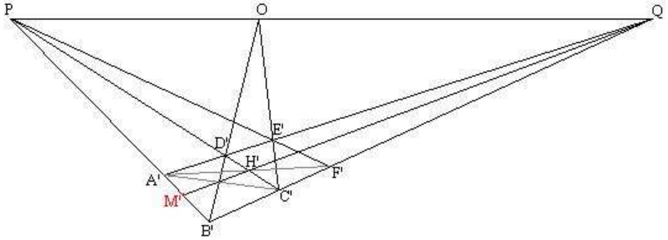
Costruire un terzo del lato



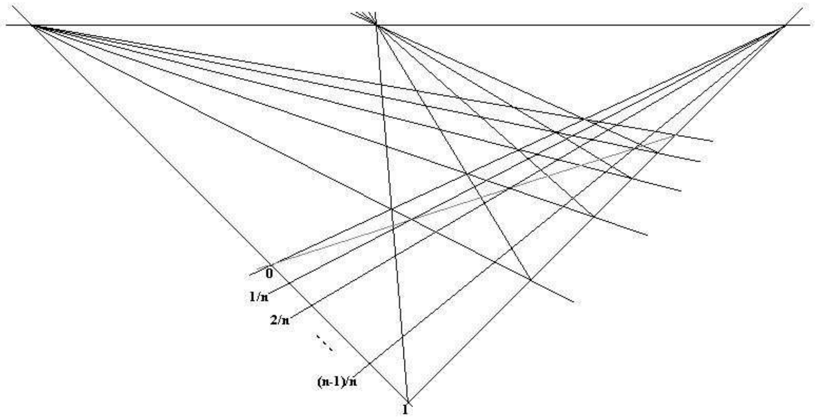


Un altro metodo per costruire il punto medio

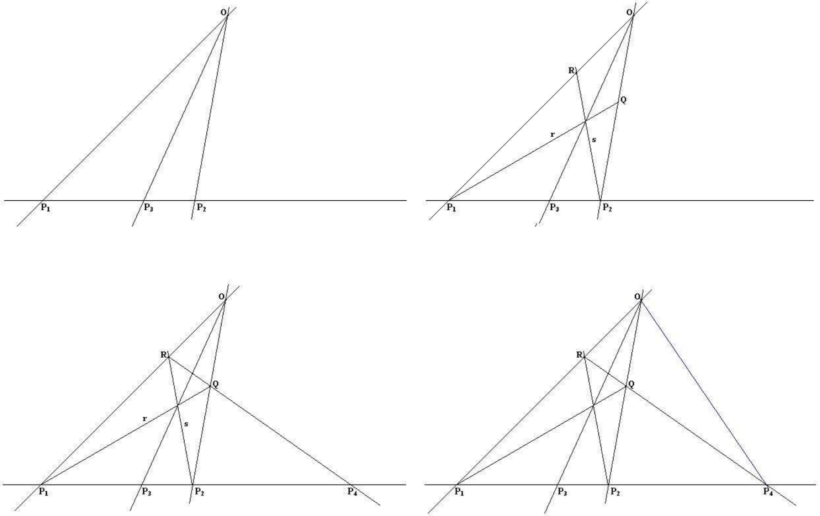




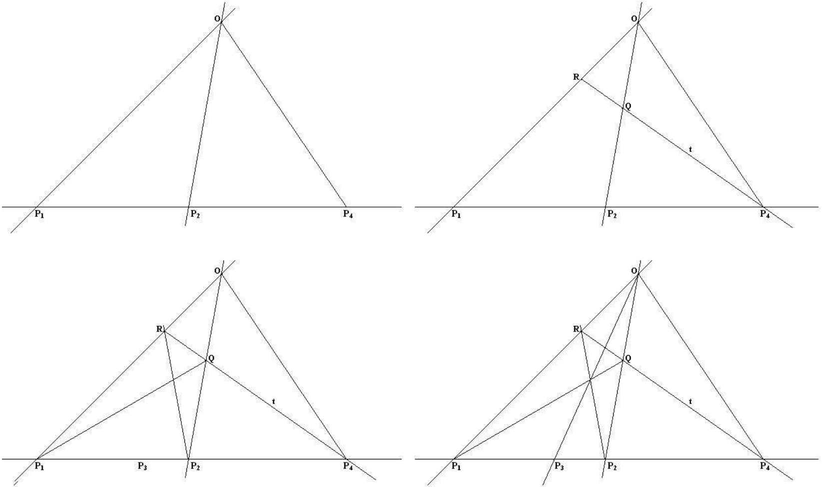
Costruire un qualsiasi razionale



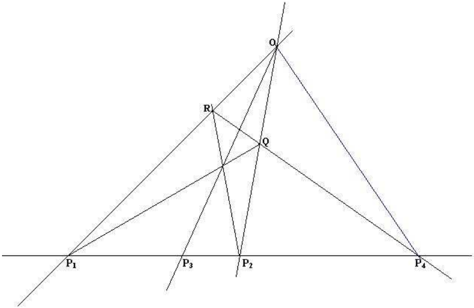
Costruiamo il quarto armonico: dati P_1, P_2, P_3, troviamo P_4

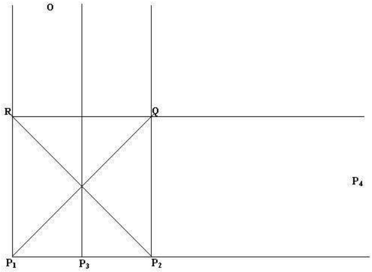


Viceversa: dati P_1, P_2, P_4, troviamo P_3

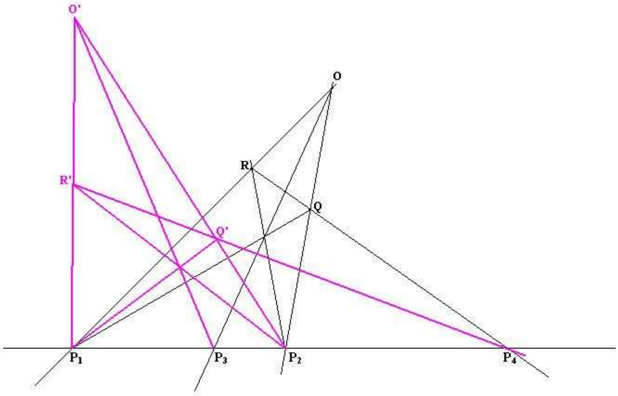


P_3 non è che il punto medio del lato P_1P_2 del trapezio P_1P_2QR e OP_4 è la linea di orizzonte...

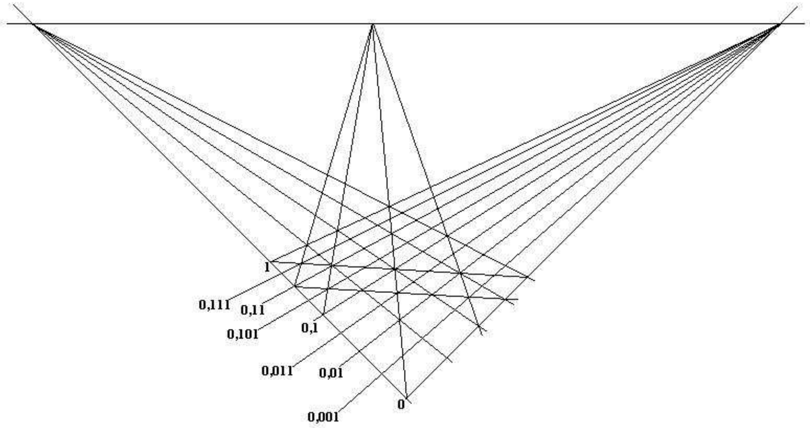




La costruzione non dipende dalla scelta di O

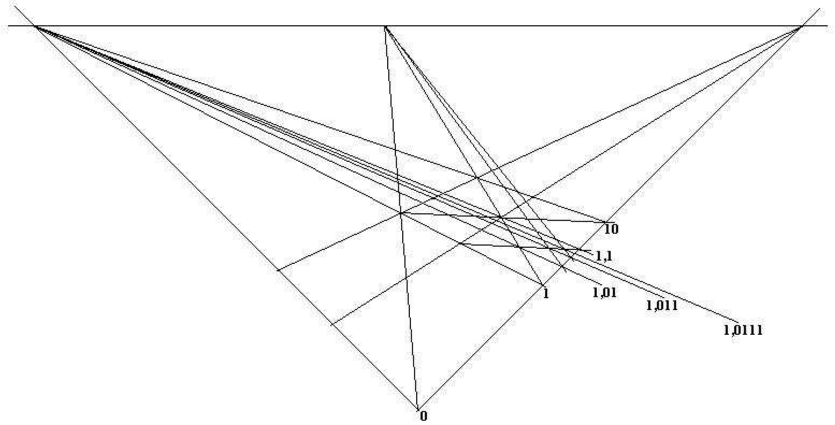


Realizzare i numeri binari tra 0 e 1



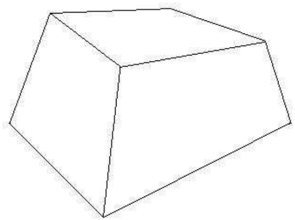
$$[0]_2 = 0\,, \quad [1]_2 = 1\,, \quad \left[\tfrac{1}{2}\right]_2 = 0.1\,, \quad \left[\tfrac{1}{4}\right]_2 = 0.01\,, \quad \left[\tfrac{1}{8}\right]_2 = 0.001 \ \ldots$$

Approssimazione di $\sqrt{2}$



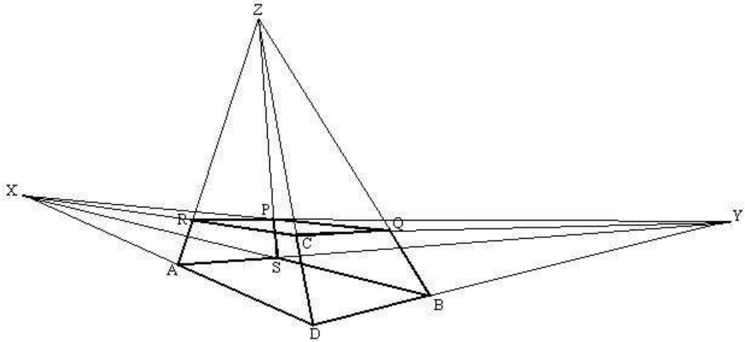
I punti trovati approssimano $\sqrt{2} = 1.0110101...$ un po' dall'alto e un po' dal basso.

Dal 2D al 3D: rappresentare una scatola rettangolare in prospettiva

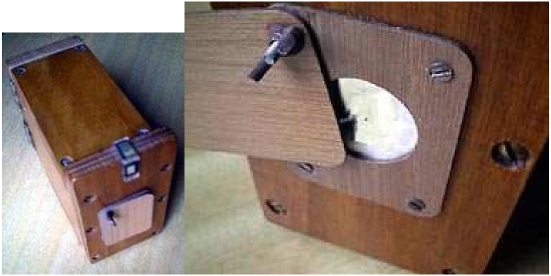


Proposizione

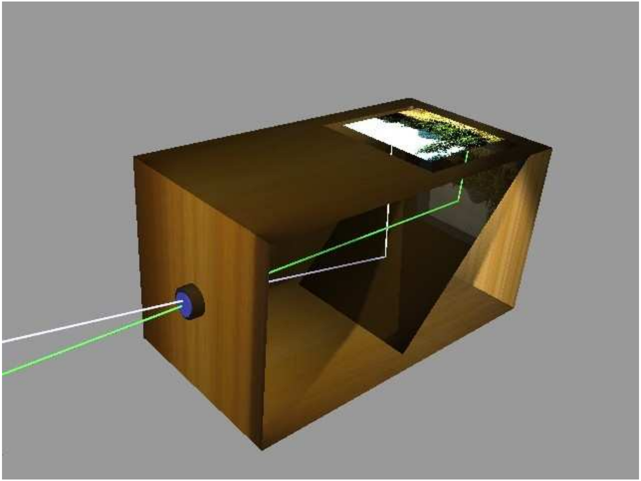
Siano A, B, C, D, S cinque punti in una qualsiasi posizione su un piano e siano $X = AD \cap BS$ e $Y = BD \cap AS$. Prendiamo un qualsiasi punto Z su DC e siano $R = CX \cap AZ$, $Q = CY \cap BZ$, $P = RY \cap SZ$. Allora X, P, Q sono allineati.

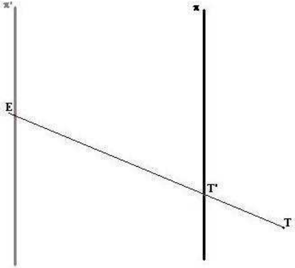


Esempio di camera obscura e zoom del foro stenopeico

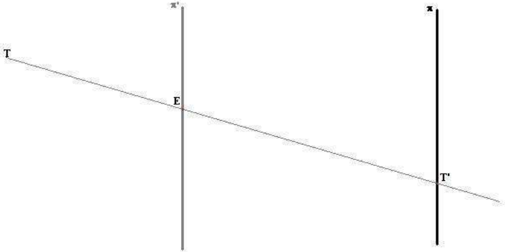


Proiezione generata dal foro stenopeico



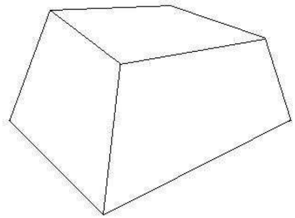


artista-tela



camera obscura

La proiezione di T in T' definisce una funzione continua da $\mathbb{R}^3 - \pi'$ in π, che si estende ad una funzione da $\mathbb{RP}^3 - \{E\}$ a $\mathbb{RP}^2$ in cui il piano π è identificato con $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$ e i punti di $\pi' - \{E\}$ vengono proiettati nei punti all'infinito di $\mathbb{RP}^2$.

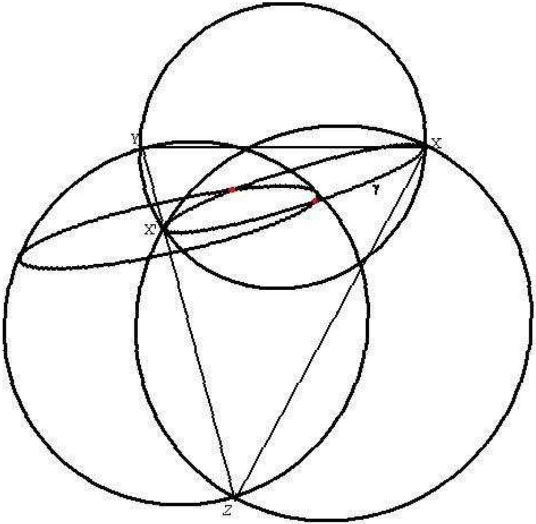


La rappresentazione di una scatola come quella vista è realmente ottenuta dalla proiezione dell'occhio di un pittore sulla tela o da un foro stenopeico sulla pellicola... **Sarà vero?**

Metodo geometrico

Teorema

Siano X, Y, Z tre punti su un piano π di $\mathbb{R}^3$. Se tutti gli angoli del triangolo XYZ sono acuti, allora ci sono esattamente due posizioni per un punto $E \in \mathbb{R}^3$ tali che EX, EY ed EZ sono perpendicolari tra loro. Se invece uno degli angoli di XYZ non è acuto, allora non c'è una tale posizione per E.

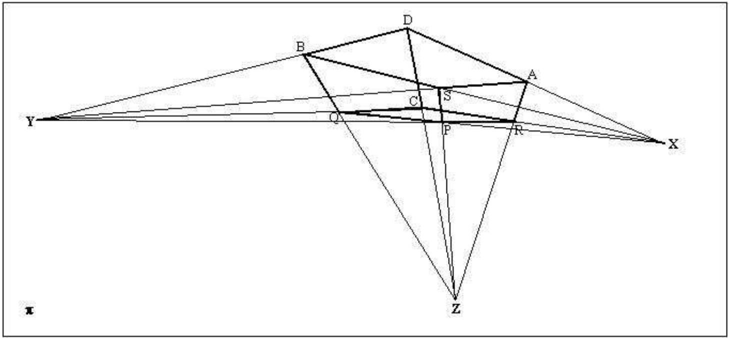

Y
X
γ
X'
Z

Immaginiamo adesso di avere la fotografia di una scatola rettangolare.

- scegliamo un sistema di coordinate in $\mathbb{R}^3$ con x, y, z paralleli agli spigoli della scatola e con l'origine sul foro E della camera obscura.
- La pellicola sia in un certo piano π in $\mathbb{R}^3$.
- Nel piano della foto, costruiamo i punti X, Y, Z prolungando le immagini degli spigoli paralleli finché non si incontrano. Questi sono proprio le immagini degli assi x, y e z.

Per il teorema precedente, la posizione di E è determinata rispetto alle posizioni di X, Y, Z su π e, in particolare, la distanza tra il foro stenopeico e la pellicola coincide con la distanza di E da π.

Dobbiamo immaginarci qualcosa di simile



- Siano $d, a \in \mathbb{R}^3$ due vertici adiacenti della scatola e supponiamo che $D, A \in \pi$ siano le loro immagini nella foto. Supponiamo che X sia il punto di fuga di DA.
- Posizioniamo $EXYZ$, corrispondente alla camera obscura, in modo tale che EX, EY, EZ siano parallele ai corrispondenti spigoli della scatola e D si trovi sulla retta dE, con E posto fra d e D.
- esiste un'unica posizione di $EXYZ$ tale che la retta aE passa per A.

Quindi la posizione e l'orientazione della camera obscura in $\mathbb{R}^3$ risultano completamente e univocamente determinate in relazione alla scena.

Metodo algebrico

Definizione

Il **birapporto** *di quattro punti allineati* F_1, F_2, F_3, F_4 *è dato da*

$$R(F_1, F_2, F_3, F_4) = \frac{\overline{F_1F_3} \cdot \overline{F_4F_2}}{\overline{F_3F_2} \cdot \overline{F_1F_4}} \tag{1}$$

Teorema

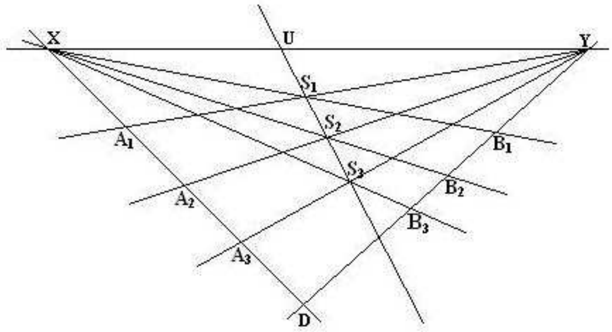
Siano $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{V})$ *e* $\mathbf{P}' = \mathbf{P}(\mathbf{V}')$ *rette proiettive e siano* F_1, F_2, F_3, $F_4 \in \mathbf{P}$, G_1, G_2, G_3, $G_4 \in \mathbf{P}'$ *, con* F_1, F_2, F_3 *e* G_1, G_2, G_3 *distinti.*
Allora esiste un isomorfismo $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ *tale che*

$$f(P_i) = Q_i, \ \ per \ \ i = 1, ..., 4$$

se e solo se $R(F_1, F_2, F_3, F_4) = R(G_1, G_2, G_3, G_4)$.

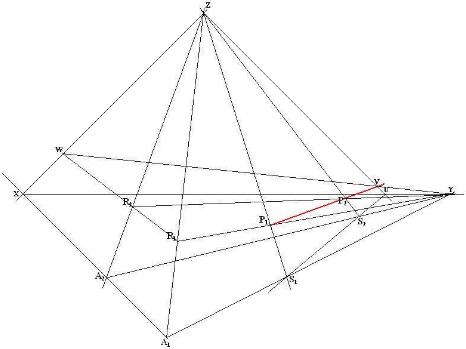
Lemma

Siano D, X, Y, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 punti in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{RP}^2$) tali che A_1, A_2, A_3 stiano sulla retta DX e B_1, B_2, B_3 stiano sulla retta DY. Siano $S_i = B_iX \cap A_iY$, per $i = 1, 2, 3$.
Allora S_1, S_2, S_3 sono allineati $\Leftrightarrow R(A_1, A_2, A_3, X) = R(B_1, B_2, B_3, Y)$.



Proposizione

Siano X, Y, Z, A_1 quattro punti qualsiasi nel piano $\mathbb{R}^2$. Scegliamo dei punti arbitrari: A_2 su XA_1, W su XZ, R_1 su A_1Z, U su XY, S_1 su A_1Y. Siano $R_2 = WR_1 \cap A_2Z$, $S_2 = US_1 \cap A_2Y$, $P_1 = R_1Y \cap S_1Z$ e $P_2 = R_2Y \cap S_2Z$. Allora P_1, P_2, $V = UZ \cap WY$ sono allineati.



Lemma

Siano D, X, Y, Z punti in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{RP}^2$). Siano A_1, A_2, A_3 punti su DX, B_1, B_2, B_3 punti su DY e C_1, C_2, C_3 punti su DZ.
Costruisco, per $i = 1, 2, 3$,

$$S_i = A_i Y \cap B_i X \,, \quad R_i = A_i Z \cap C_i X \,, \quad Q_i = C_i Y \cap B_i Z \,.$$

Siano $P_i = R_i Y \cap S_i Z$.
Se vale $R(A_1, A_2, A_3, X) = R(B_1, B_2, B_3, Y) = R(C_1, C_2, C_3, Z)$, allora i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati.

In generale non vale il viceversa.

Sia M una matrice 3×4 a coefficienti reali e sia $\mathbf{x} = (x, y, z, w)^t$. Poiché

$$M(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(M\mathbf{x}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

allora, se $K_M = \big\{[x, y, z, w] \in \mathbb{RP}^3 : M\mathbf{x} = 0\big\}$, si può definire una funzione

$$f_M : \mathbb{RP}^3 - K_M \longrightarrow \mathbb{RP}^2$$

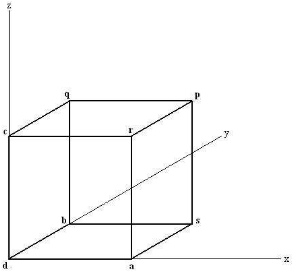
ponendo $f_M([x, y, z, w]) = (M\mathbf{x})^t$.

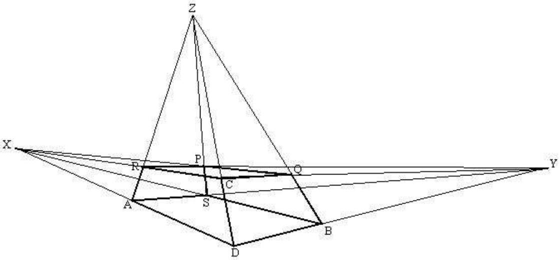
- f_M rispetta gli allineamenti.
- Esiste uno spazio di dimensione 11 di tali funzioni f_M.
- Queste sono le uniche funzioni continue f da un sottinsieme denso di $\mathbb{RP}^3$ in $\mathbb{RP}^2$ che rispettano gli allineamenti.

Teorema

Siano d, a, s, b, c, r, p, q i vertici di un cubo in $\mathbb{R}^3$ *e sia z il punto all'infinito della retta dc. Siano D, A, S, B, C punti qualsiasi di* $\mathbb{RP}^2$ *e sia Z un punto arbitrario su DC. Allora esiste un'unica funzione continua f da un sottoinsieme denso di* $\mathbb{RP}^3$ *in* $\mathbb{RP}^2$ *tale che f rispetta gli allineamenti e*

$$f(d) = D,\ f(a) = A,\ f(s) = S,\ f(b) = B,\ f(c) = C,\ f(z) = Z.$$





Formula per le posizioni relative della scatola, del foro stenopeico E della camera obscura e del piano π della pellicola in $\mathbb{R}^3$.

- Scegliamo un sistema di coordinate di $\mathbb{R}^3$ con l'origine in E e gli assi paralleli agli spigoli della scatola.
- Sia $n_1x + n_2y + n_3z = b$ l'equazione del piano π, dove $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ è il versore normale a π. Il punto più vicino ad E su π è $O = (n_1b, n_2b, n_3b)$.
- Sia $T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $T \notin \pi'$, dove π' è il piano parallelo a π passante per E. Allora il punto di intersezione di ET con π è dato da $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, con $\lambda = \frac{b}{n_1x+n_2y+n_3z}$.
- Scegliamo un sistema di coordinate (u, v) sul piano π, in cui O sia l'origine, l'asse u sia dato dalla direzione $(n_2, -n_1, 0)$ e l'asse v abbia direzione data dal prodotto vettoriale $(n_1, n_2, n_3) \times (n_2, -n_1, 0)$.

Troviamo le coordinate (u, v) del punto (x', y', z'):

$$u = (x' - n_1 b, y' - n_2 b, z' - n_3 b) \cdot \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 + {n_2}^2}}(n_2, -n_1, 0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - {n_3}^2}}(n_2 x' - n_1 y')$$

$$v = (x' - n_1 b, y' - n_2 b, z' - n_3 b) \cdot \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 + {n_2}^2}}(n_1 n_3, n_2 n_3, {n_3}^2 - 1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - {n_3}^2}}(n_1 n_3 x' + n_2 n_3 y' + ({n_3}^2 - 1)z')$$

In linguaggio matriciale abbiamo perciò che, in coordinate omogenee, $[u, v, 1]^T$ rappresenta lo stesso punto di $M[x, y, z, 1]^T$, dove M è la matrice 3×4

$$M = \begin{pmatrix} bn_2 & -bn_1 & 0 & 0 \\ bn_1 n_3 & bn_2 n_3 & -bk^2 & 0 \\ n_1 k & n_2 k & n_3 k & 0 \end{pmatrix}$$

e $k = (1 - {n_3}^2)^{\frac{1}{2}}$. In particolare troviamo le coordinate (u, v) dei punti X, Y e Z dove rispettivamente gli assi x, y, z tagliano π:

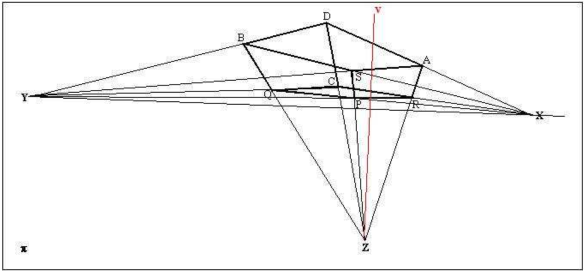
$$u_X = \frac{bn_2}{n_1 k}, \quad v_X = \frac{bn_3}{k} \tag{2}$$

$$u_Y = -\frac{bn_1}{n_2 k}, \quad v_Y = \frac{bn_3}{k} \tag{3}$$

$$u_Z = 0, \quad v_Z = -\frac{bk}{n_3} \tag{4}$$

Esplicitiamo come trovare n_1, n_2, n_3, b dalla fotografia:

- X, Y, Z possono essere trovati sul piano della fotografia poiché sono i punti di fuga degli spigoli paralleli della scatola.
- poiché $v_X = v_Y$ e $u_Z = 0$, l'asse v passa per Z ed è perpendicolare alla retta XY. Non siamo, invece, ancora in grado di dire dove si trovi l'asse u.



- misuriamo sulla foto le distanze di Z da XY e quelle di X e Y dall'asse v:

$$v_X - v_Z = \frac{bn_3}{k} + \frac{bk}{n_3} = \frac{bn_3{}^2 + bk^2}{kn_3} = \frac{b}{kn_3} \tag{5}$$

$$u_X = \frac{bn_2}{n_1 k}, \quad u_Y = -\frac{bn_1}{n_2 k} \tag{6}$$

- Combinando le (5) e (6), abbiamo che

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = -\frac{u_X}{u_Y}, \quad \frac{n_2 n_3}{n_1} = \frac{u_X}{v_X - v_Z} \tag{7}$$

- utilizzando tali relazioni, insieme al fatto che $n_1{}^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2 = 1$, troviamo le componenti del versore normale n_1, n_2, n_3 in funzione di u_X, u_Y, $(v_X - v_Z)$.

- Noti n_1, n_2, n_3, possiamo trovare anche b, usando ad esempio

$$u_X = \frac{bn_2}{n_1 k}\,.$$

- Siamo in grado di disegnare il sistema (u, v) sul piano π della pellicola. Trovando le coordinate (x, y, z) di un vertice della scatola, diciamo d, possiamo collocare la camera obscura nella scena. Le coordinate (x, y, z), $\mathbf{x}(u, v)$ di un generico punto $(u, v) \in \pi$ sono date da

$$\mathbf{x}(u, v) = (bn_1, bn_2, bn_3) + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

  dove **i** e **j** sono i versori lungo gli assi u e v.

- Troviamo dalla foto le coordinate (u, v), (u_A, v_A) e (u_D, v_D), di A e D (proiezioni su π degli spigoli a e d della scatola) e calcoliamo le coordinate $\mathbf{x}(u_A, v_A)$ e $\mathbf{x}(u_D, v_D)$ in $\mathbb{R}^3$.

- Le coordinate dei punti a e d, saranno $\lambda_1 \mathbf{x}(u_A, v_A)$ e $\lambda_2 \mathbf{x}(u_D, v_D)$ rispettivamente, per qualche λ_1, λ_2 costanti. Scegliendo a e d come vertici di uno stesso spigolo, essi avranno coordinate y (o z) uguali e questo ci permette di scrivere (diciamo) λ_1 in termini di λ_2.
- Supponiamo nota la lunghezza dello spigolo ad. Allora è noto

$$ad = \|\lambda_1 \mathbf{x}(u_A, v_A) - \lambda_2 \mathbf{x}(u_D, v_D)\|$$

e possiamo dunque dedurre il valore di λ_2.

Abbiamo individuato la posizione del vertice d rispetto al sistema xyz.
Le coordinate (x, y, z) di d ci permettono di posizionare il foro stenopeico della camera obscura esattamente sull'origine del sistema di riferimento, mentre l'inclinazione esatta della fotocamera sarà individuata dall'allinearsi degli spigoli della scatola con i rispettivi punti di fuga X, Y, Z su π.