Sperimentazione didattica della geometria proiettiva attraverso la prospettiva piana

di Nadia Ricchetti

relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

5 marzo 2010

Motivazioni della tesi:

- Verifica sul campo di un'inclinazione personale verso l'insegnamento con l'aiuto di un "maestro"
- Sperimentazione insieme a ragazzi del liceo del fatto che la matematica è un metodo di conoscenza della realtà
- Possibilità di gustare di più la bellezza presente sia nella matematica che nella storia dell'arte, scoprendo il legame tra prospettiva piana e geometria proiettiva

Struttura della tesi:

- Piano delle lezioni e obiettivi della sperimentazione
- Svolgimento effettivo della sperimentazione
- Approfondimenti teorici

Lezioni

La sperimentazione si è attuata presso la classe IV H del Liceo scientifico statale Leonardo da Vinci, grazie alla Prof.sa Roberta Rigato e sotto la supervisione sua e di quella del Prof. Pedolicchio, docenti rispettivamente di matematica e di disegno e storia dell'arte in quella classe.

Sono state impiegate:

- otto ore di lezione, distribuite su quattro settimane
- un'ora per il test finale

Le lezioni sono state svolte sia in modo frontale che interattivo facendo uso anche di:

- presentazioni power point e animazioni dal CD di *Le geometrie della visione*, di L. Catastini e F. Ghione
- dispense fornite ad ogni lezione con esercizi e approfondimenti
- lavoro di gruppo per risolvere esercizi
- cubi e immagini stampate per piccoli esperimenti sulla visione
- fogli da disegno e squadre per provare i metodi prospettici spiegati

Obiettivi generali

- Suscitare nei ragazzi l'interesse per la matematica, materia spesso trascurata perché ritenuta troppo astratta o troppo difficile.
- Puntare ad un collegamento tra matematica e realtà, attraverso un problema noto storicamente, cioè la prospettiva.
- Permettere così ai ragazzi di cominciare a vedere la matematica come uno dei metodi di conoscenza del reale.

Test di ingresso a risposte aperte:

- verifica della conoscenza delle nozioni di geometria euclidea necessarie da parte dei ragazzi per adattare le lezioni
- conoscenza dei ragazzi, del loro modo di ragionare, di come osservano e come si muovono davanti a problemi nuovi

Esercizi del test:

1. Completare l'affermazione *Un piano nello spazio è determinato in modo unico da* ...
2. Rispondere ai quesiti: quali sono le posizioni reciproche di due rette nello spazio? E di due piani nello spazio? Dare la definizione di distanza tra due rette.
3. Dare la definizione di cubo. Provare a disegnare il cubo di Rubik sul proprio tavolo e descriverne le caratteristiche.
4. Data la foto di un'azione da goal durante una partita di calcio decidere se essa permette di stabilire se la palla è in rete o no, giustificando la risposta.
5. Osservare e confrontare due dipinti di periodi diversi e scrivere le proprie osservazioni.

Esito del test:

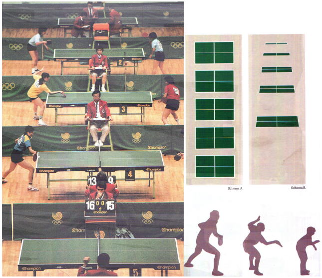
- Buone conoscenze delle nozioni di geometria euclidea da parte dei ragazzi: quasi tutti hanno svolto gli esercizi 1 e 2, sono stati disorientati solo dalla definizione della distanza tra due rette.
- L'esercizio 3 è sembrato loro strano: uno solo di loro ha analizzato il disegno riportato in figura per le sue proprietà grafiche come cubo; quasi tutti si sono concentrati sul fatto che il cubo fosse composto da cubi più piccoli e colorati. Inoltre la definizione di cubo non sempre è precisa. Da notare anche che hanno disegnato il cubo quasi tutti dallo stesso punto di vista.
- Per quanto riguarda l'esercizio 4, a parte rispondere "dentro" e "fuori", non pochi di loro (circa la metà) hanno risposto che non si poteva determinare e hanno dato delle giustificazioni ragionevoli.
- Nell'ultimo esercizio alcuni hanno parlato di prospettiva lineare, centrale e accidentale nei due quadri; quindi avevano già visto ed erano in grado di distinguere alcuni tipi di prospettiva nei dipinti.

Prima lezione: geometria della visione.

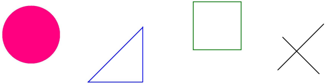
Obiettivi: Introdurre i ragazzi ad una conoscenza della propria percezione naturale degli oggetti. Astrarre e modellizzare matematicamente questa percezione. Verificare la validità del modello.

- esperimenti a gruppi e osservazioni di immagini per prendere coscienza della visione degli oggetti.[Ricordare ai ragazzi che dietro a tutto ci sta un po' di semplice geometria euclidea insieme ad una buona percezione dello spazio]
- cenni dell'Ottica di Euclide, come modello di geometria della visione.
- verifica della corrispondenza tra il modello e le osservazioni intuitive iniziali, tramite alcuni principali risultati dell'Ottica di Euclide. Introduzione delle nozioni di punto di vista, apparente allineamento, cono visivo.

Sono stati svolti piccoli esperimenti per individuare come l'occhio umano percepisce in modo naturale gli oggetti che vede.



Il passo seguente è stato vedere le proprietà geometriche che si conservano o che si modificano:



Dalle osservazioni al modello: l'ottica euclidea.
Alcune delle proprietà fondamentali della visione dimostrate e/o verificate sperimentalmente:

- Punti allineati si vedono allineati (ovvero una retta si vede ancora come una retta).
- Segmenti paralleli si vedono convergenti.
- I rapporti tra le lunghezze e le misure degli angoli risultano alterati.
- Linee che si intersecano si vedono ancora intersecanti.
- Oggetti di 3 dimensioni si possono vedere come di 2 o, apparentemente, di 1 dimensione a seconda del punto di vista scelto.

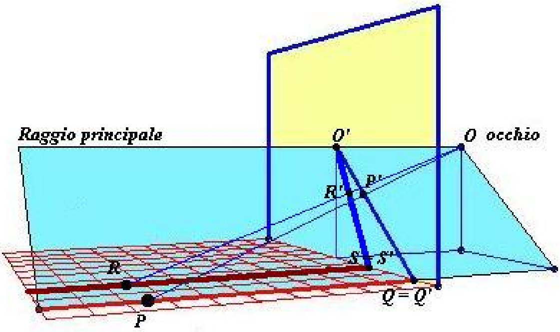
Seconda lezione: verso la prospettiva.

Obiettivi: Stimolare i ragazzi attraverso la difficoltà del concetto di prospettiva; saper disegnare in modo verosimile la realtà è difficile: necessita di riorganizzare le proprie convinzioni. Acquisire le prime nozioni di prospettiva piana.

- cos'è la prospettiva, a cosa serve, note storiche [brevi] e proiezione di diapositive di alcuni quadri notando le caratteristiche riscontrabili in essi.
- introduzione dei termini matematici nella prospettiva piana, fra cui punto di fuga e linea di orizzonte.
- il problema di realizzare una pavimentazione in prospettiva. Metodi inesatti. Il modo ottimo di Alberti. Provare la costruzione di Alberti e capirne il funzionamento.

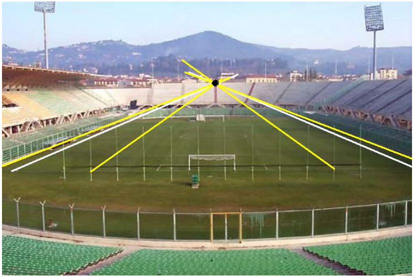
Sono stati definiti:

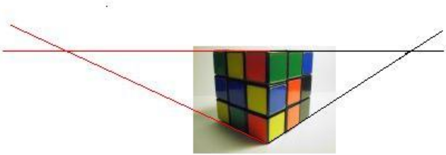
- *linea di terra*, l'intersezione tra il piano del pavimento (o *piano di terra*) con il piano del quadro.
- *linea trasversa*, ogni linea ad essa parallela.
- *punto centrico*, il punto di intersezione O' tra il raggio principale e il piano del quadro.
- *punto di fuga* e *linea di orizzonte*.



Proposizione

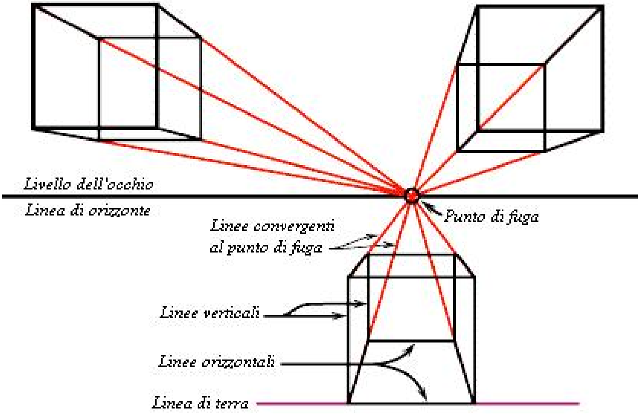
Oggetti che poggiano sullo stesso piano e che sono paralleli tra di loro usano lo stesso punto di fuga. Oggetti che poggiano sullo stesso piano ma hanno diversa inclinazione usano punti di fuga diversi.





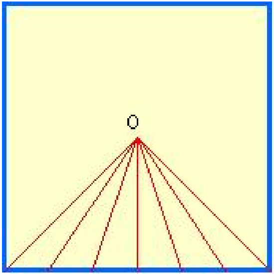
Proposizione

Oggetti paralleli tra loro che poggiano su piani paralleli (non necessariamente sul piano di terra) usano lo stesso punto di fuga.



Realizzare una pavimentazione:

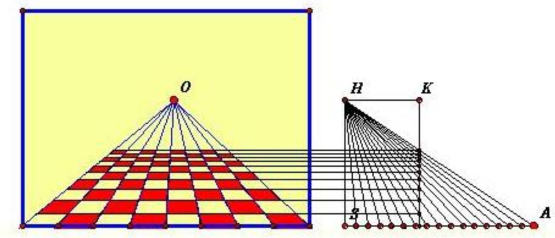
- Le rette del piano orizzontale che si allontanano perpendicolarmente dalla linea di terra, devono essere disegnate sul quadro come segmenti che concorrono al punto centrico O.



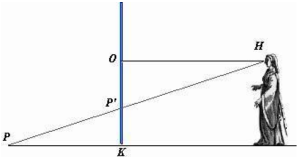
- Disegnare le linee trasverse non è così semplice.

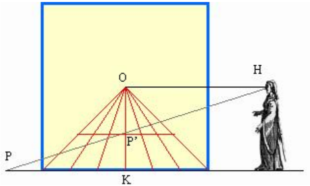
Il *modo ottimo* di Leon Battista Alberti per rappresentare le linee trasverse:

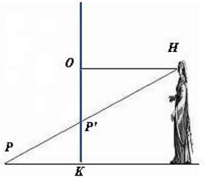
- Si scelga come si vuole uno spazio ausiliario, anche piccolo, su cui tracciare una linea orizzontale AS allineata alla linea di base, divisa in parti uguali piccole a piacere.
- Sopra una delle sue estremità, alla stessa altezza del punto centrico, si collochi un punto H dal quale tracciare le congiungenti alle partizioni di AS; quindi, stabilita nella scala precedente una distanza HK corrispondente a quella tra l'occhio e la pittura, dal punto K si tracci una perpendicolare alla linea orizzontale.
- Le intersezioni della verticale con le congiungenti daranno la successione delle linee trasverse.



Funzionamento: La costruzione usa implicitamente un'affinità di centro K e rapporti di scala w lungo l'orizzontale e 1 lungo la verticale. Perciò la distanza KP' non cambia.



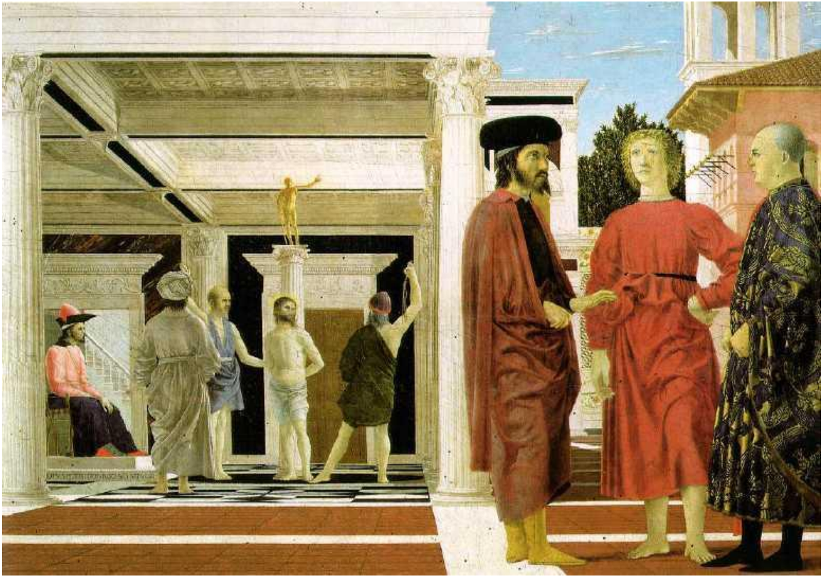




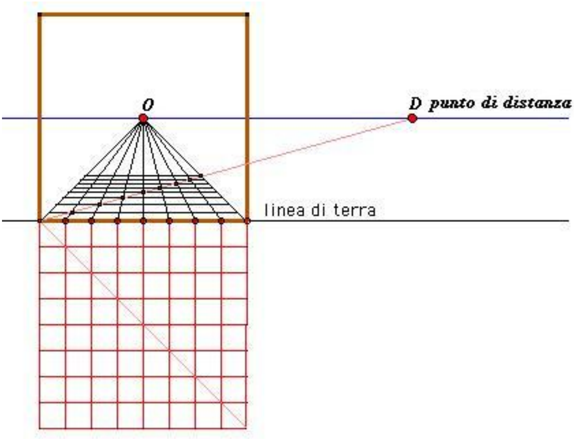
Terza lezione: Piero della Francesca e il *De prospectiva pingendi*.

Obiettivi: Conoscenza delle origini del metodo prospettico e delle sue conseguenze nell'arte. Verifica personale della relazione tra la matematica introdotta e la storia dell'arte, attraverso il metodo di Piero della Francesca.

- Il metodo di Piero della Francesca. Descrizione. Provarne l'uso per la rappresentazione di una pavimentazione.
- Perché funziona il metodo di Piero della Francesca? [Dare ai ragazzi la possibilità di formulare delle ipotesi]
- Prendere spunto dal metodo di Piero della Francesca per accennare alle proiettività.



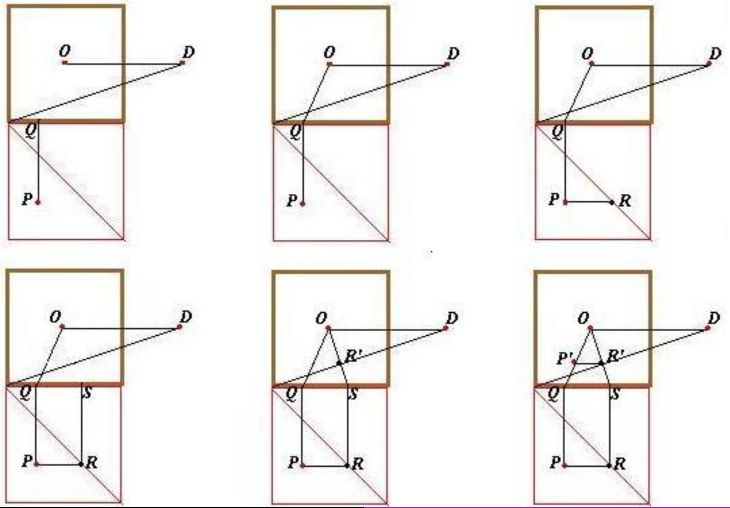
L'idea grafica di Piero è di rappresentare le parti di spazio che si vuole rappresentare (quella sul piano reale e quella sul piano degradato) come due quadrati su uno stesso foglio, con un lato (la linea di terra) comune.



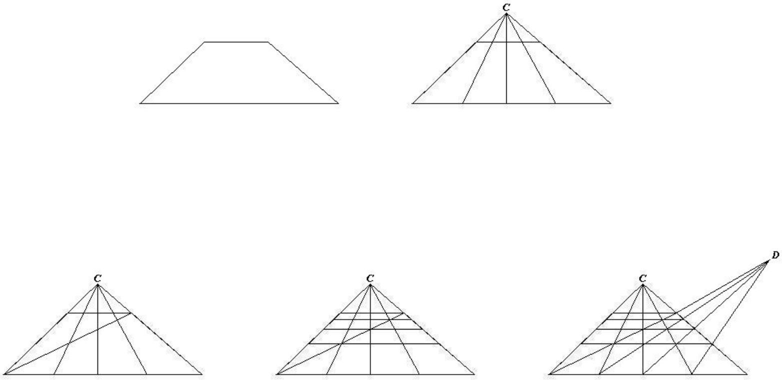
Piero della Francesca individua alcune condizioni necessarie per una corretta rappresentazione prospettica:

1. *La retta in cui si incontrano i due piani è fissa punto per punto.*
2. *Le rette del piano reale perpendicolari alla linea di terra si rappresentano con segmenti che concorrono in un punto.*
3. *Le linee del piano reale parallele alla linea di terra si rappresentano con linee parallele alla linea di terra.*
4. *Una data linea diagonale (cioè inclinata di 45 gradi) si rappresenta con una linea che incontra in D, il punto di distanza, l'orizzonte. La distanza OD (in scala) corrisponde alla distanza dell'occhio dal quadro.*

La trasformazione di Piero della Francesca è un'omologia.
Trasformiamo un qualunque punto P del piano reale nel corrispondente P' sul piano del quadro.



Questa costruzione è molto moderna e mette in relazione la forma del trapezio con la posizione dell'occhio: partendo dal trapezio l'intera proiezione, punto per punto, è determinata senza più ricorrere al centro di proiezione:



Quarta lezione: geometria proiettiva.

Obiettivi: Acquisire l'idea di un nuovo tipo di geometria: quella proiettiva. Saper individuare comunanze e differenze tra geometria euclidea e proiettiva. Apprendere risultati di geometria proiettiva legati alla prospettiva e riconoscerne il legame.

- presentazione della geometria proiettiva, facendo vedere tipologie di proiezioni con diapositive ed esempi, fra cui giochi con le ombre e principio del foro stenopeico.
- nozioni di punti all'infinito, piano proiettivo, retta proiettiva, segmento proiettivo e triangolo proiettivo.
- generalizzazione allo spazio proiettivo. Nozione di triangoli omologhi, teorema di Desargues e suo inverso.
- Cenni alle proiettività. Da esse si può ottenere una "prospettiva moderna"con la quale, dato un qualsiasi quadrangolo "come prima mattonella", si può costruire correttamente una pavimentazione.

Partendo dalle trasformazioni della prospettiva piana vengono introdotti i primi concetti della geometria proiettiva:

Definizione

Definiamo:

- **punto all'infinito**, *la direzione di una retta;*
- **retta all'infinito** *di un dato piano, l'insieme di tutti i punti all'infinito di quel piano;*
- **piano proiettivo**, *il piano euclideo completato con la retta all'infinito.*

Osservazioni fatte confrontando con la geometria euclidea:

Osservazione

Per due punti distinti (al finito o all'infinito) passa una e una sola retta.

Osservazione

Ogni coppia di rette ha un (solo) punto in comune.

Dal piano allo spazio:

Definizione

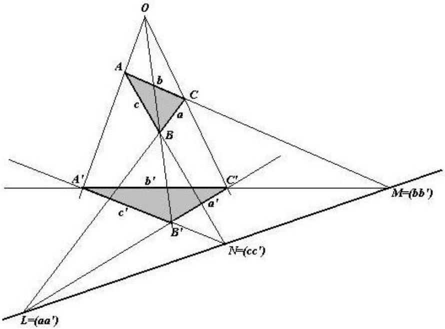
Definiamo **piano all'infinito**, *l'insieme di tutte le rette all'infinito e* **spazio proiettivo**, *lo spazio euclideo completato con il piano all'infinito.*

Osservazione

- *Due piani distinti hanno sempre una retta in comune.*
- *Una retta e un piano hanno sempre un punto comune.*
- *Tre piani che non facciano parte di un fascio si incontrano sempre in un punto.*

Teorema di Desargues

Se due triangoli sono omologhi (ossia se è possibile associare i vertici dell'uno a quelli dell'altro, A ad A', B a B', C a C' in modo che le rette AA', BB', CC' siano convergenti in un punto O) allora i loro lati corrispondenti, se prolungati, si incontrano in punti allineati.



Vale anche l'inverso del teorema di Desargues.

Proiettività.

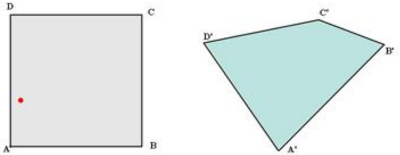
Definizione

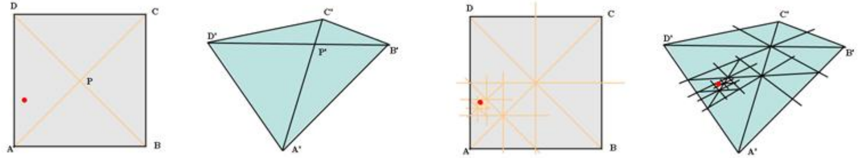
Una **trasformazione proiettiva** *(o proiettività) di α in β è una trasformazione biunivoca, continua, che conserva l'allineamento.*

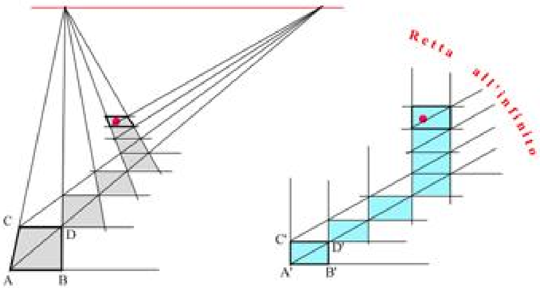
Teorema

Dati due piani proiettivi α e β, una trasformazione proiettiva F di α in β è univocamente determinata conoscendo l'immagine di quattro punti di α a tre a tre non allineati.

Consideriamo un quadrangolo ABCD del piano α e siano A', B', C', D' le immagini dei quattro vertici.




D
C
P
A
B
C'
D'
P'
B'
A'
D
C
A
B
C'
D'
B'
A'

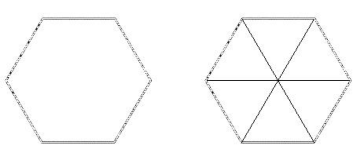

Retta all'infinito
C
D
A
B
C'
D'
A'
B'

Test finale

Obiettivi: Verifica dell'acquisizione di un modo di procedere matematico nel rappresentare in prospettiva. Verifica della comprensione dei concetti di geometria proiettiva introdotti.

Esercizio

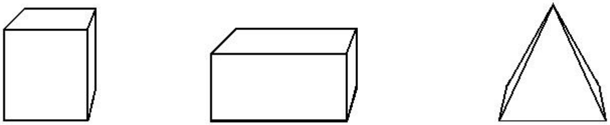
Supponiamo che in un giardino ci sia un'aiuola a forma di esagono regolare, circondata da una strada (come nella figura a sinistra). Un osservatore che vi si trovi dentro, in che punto dell'aiuola vedrà tutti i lati dell'aiuola della stessa dimensione? Motiva la risposta.



Se poi l'aiuola viene divisa da alcune stradicciole (come nella figura a destra), un osservatore che si trovi in uno degli spicchi triangolari, in che punto vedrà tutte uguali le tre stradicciole che delimitano lo spicchio? Motiva la risposta.

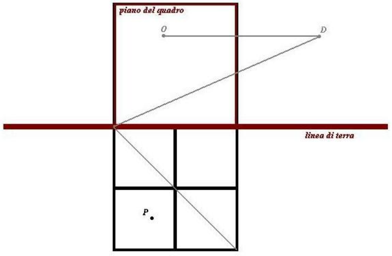
Esercizio

Dopo avere definito cosa sono i punti di fuga e la linea di orizzonte, disegnarli per gli oggetti seguenti.
Dire se i tre oggetti si trovano sullo stesso piano e perché.



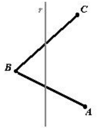
Esercizio

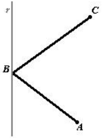
- *Costruire la degradazione del pavimento con mattonelle quadrate in figura, usando passo passo il metodo di Piero della Francesca a partire dall'immagine seguente (nota che l'esercizio è già cominciato: sono infatti già state disegnate la diagonale, il punto centrico O e il punto di distanza D).*
- *Determinare l'immagine P', sul piano del quadro, del punto P, descrivendo il procedimento usato per trovarla.*



Esercizio

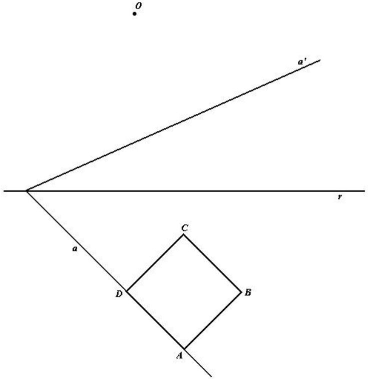
- *Definire cosa sono punto all'infinito, retta all'infinito e piano proiettivo.*
- *Fare uno schizzo dei segmenti AB e BC rappresentando anche i punti all'infinito come tali nei casi seguenti (r denota la retta all'infinito del piano):*





Esercizio

Dati il quadrato $ABCD$, il punto di proiezione O l'asse r e le rette a e a' che si intersechino sull'asse r (come in figura), costruire il quadrato $A'B'C'D'$ omologo ad $ABCD$.



Esercizio

(facoltativo) *Verificare che ne L'annunciazione di Domenico Veneziano la degradazione delle colonne a destra è stata fatta usando il modo ottimo di Alberti.*

Modalità di assegnazione punteggi per ogni esercizio:

Esercizio	1° quesito	2° quesito	Tot/esercizio
1	3	3	6
2	3	3	6
3	2	4	6
4	3	3	6
5	3	-	3
6	3	-	3

Punteggi raggiunti dagli studenti per ogni esercizio:

Esercizio	0 punti	1 punto	2 punti	3 punti	4 punti	5 punti	6 punti
1	0	0	0	1	1	5	11
2	0	0	1	1	4	5	7
3	0	0	1	0	4	1	12
4	0	0	0	4	6	7	1
5	0	3	2	13	-	-	-
6	0	10	7	1	-	-	-

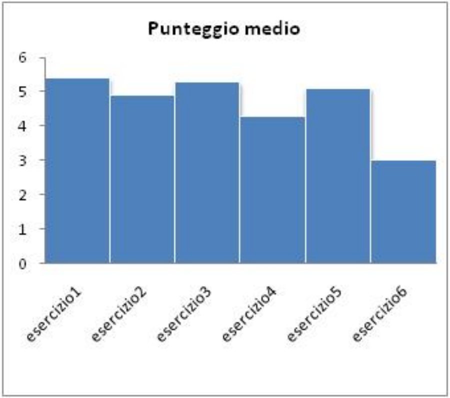


Tabella riassuntiva:

Voto	21	22	23	24	25	26	27	28
Studenti/voto	1	3	5	3	1	2	1	2

Valutazione della didattica: cosa dicono i ragazzi.

- Sapevi dell'esistenza della geometria proiettiva?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	4	9	4	1

- Gli argomenti delle lezioni svolte erano interessanti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	3	11	4	0

- Gli argomenti delle lezioni svolte erano difficili da apprendere?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
4	10	4	0	0

- La tua preparazione scolastica era sufficiente per affrontare questi argomenti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	2	6	10	0

- È stato impegnativo seguire le lezioni?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
5	9	4	0	0

- Gli argomenti introdotti in ogni lezione erano proporzionati con il tempo disponibile?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
1	4	5	9	0

- Gli strumenti forniti (schede didattiche e immagini proiettate) ti sono stati utili per capire meglio gli argomenti proposti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	0	1	17	0

- Le attività di disegno ti sono risultate utili per capire l'evoluzione storica della prospettiva?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	A metà tra più sì che no e più no che sì
0	5	6	6	1

- Gli esercizi svolti ti hanno aiutato ad entrare nel merito della geometria proiettiva?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	0	11	7	0

- La laureanda ha esposto gli argomenti in modo chiaro?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	1	11	6	0

- La laureanda è risultata disponibile in caso di richiesta di chiarimenti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	0	1	17	0

- La laureanda ha motivato il tuo interesse verso questi argomenti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	3	12	3	0

Indica quali argomenti ti sono piaciuti maggiormente e perché.

a. L'ottica euclidea (in particolare l'apparente allineamento dei punti e l'apparente incidenza delle linee rette);

b. La rappresentazione sul piano di un quadro (specialmente i concetti di punto di fuga e linea di orizzonte);

c. Il metodo di Alberti per rappresentare una pavimentazione;

d. Il metodo di Piero della Francesca per rappresentare una pavimentazione;

e. Il piano proiettivo, soprattutto nell'introduzione dei punti all'infinito e della retta all'infinito;

f. Il teorema di Desargues e le sue implicazioni;

g. Altro.......................................

Risposta	a	b	c	d	e	f	g
Preferenze	4	5	3	9	8	6	0

Commenti finali:

- Tutti i ragazzi, sotto invito della professoressa, hanno preso appunti durante la lezione, hanno partecipato attivamente per quasi tutto il tempo.
- I ragazzi seguivano molto bene le lezioni. Nel complesso erano molto preparati e motivati allo studio della matematica: questo ha indubbiamente favorito la riuscita della sperimentazione.
- La professoressa Rigato era globalmente soddisfatta dell'esperienza.
- L'esperienza è stata buona anche per me sotto tutti i punti di vista: dopo l'iniziale timore, ho scoperto un gusto nel rapportarmi ai ragazzi ed è stata l'occasione per imparare da qualcuno che già insegna, semplicemente assistendo e mettendomi in gioco.