UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÁ DI SCIENZE M.F.N

Anno accademico 2008/2009

Tesi di laurea specialistica in Matematica per le applicazioni

di Nadia Ricchetti

Dalla prospettiva piana alla geometria proiettiva: sperimentazione didattica e approfondimenti

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

Supervisori della sperimentazione didattica: Prof. Roberta Rigato e Prof. Cesare Pedolicchio

[...] solo da sensato apprende
ciò che fa poscia d'intelletto degno.
(D. Alighieri, *Paradiso* Canto IV)

Indice

0.1 Premessa

Questo lavoro di sperimentazione è nato da un'intuizione avuta durante una lezione del prof. Ottaviani sulla prospettiva piana e il suo legame con la geometria proiettiva: dopo aver seguito attentamente ogni passaggio con curiosità e interesse, sono uscita dalla lezione pensando che, se qualcuno mi avesse spiegato la connessione tra la matematica e la realtà a partire dal liceo, così com'era avvenuto per quell'argomento specifico, sarei rimasta entusiasta e avrei avuto sicuramente uno stimolo in più nello studio. Il passo successivo è stato la verifica di questa intuizione: tenendo conto di un'inclinazione verso l'insegnamento approfonditasi in questi anni di università, è nata una sperimentazione didattica che ha conciliato matematica e storia dell'arte in modo interdisciplinare, che si è attuata insieme ai venti studenti della classe IV H (sperimentazione PNI) del Liceo Scientifico Statale Leonardo da Vinci di Firenze. Sono state svolte quattro lezioni da due ore ciascuna ed un test finale, sotto la supervisione della professoressa di matematica Roberta Rigato e del professore di disegno e storia dell'arte Cesare Pedolicchio.

Il problema affrontato è quello della rappresentazione di una scena su un quadro, in particolare ci siamo concentrati sulla pavimentazione con mattonelle di forma quadrata o rettangolare. Partendo da alcuni concetti di base dell'Ottica di Euclide al fine di individuare il problema della visione degli oggetti, abbiamo proseguito verso la prospettiva attraverso un excursus storico-artistico di pittori precedenti la sua nascita, per passare ai pionieri dei metodi prospettici, Leon Battista Alberti e Piero della Francesca, e ad altri che se ne sono avvalsi. Dentro questo percorso sono stati introdotti i concetti di punto di fuga, linea di orizzonte, apparente allineamento e abbiamo evidenziato comunanze e differenze tra la geometria euclidea, già nota per i ragazzi, e la geometria di questa nuova rappresentazione. Infine un passaggio di ulteriore astrazione: dalla prospettiva alla geometria proiettiva, come si evince dal titolo della tesi. Quindi abbiamo parlato di omologie, del teorema di Desargues (e del suo inverso) e di proiezioni più in generale.

Queste lezioni sono state svolte con l'ausilio di presentazioni power point e animazioni, riprese dal CD del testo [12], l'uso di materiale da disegno per testare i metodi prospettici, di dispense ed esercizi forniti ad ogni lezione.

Al fine di documentare il lavoro svolto, all'interno di questa tesi sono presenti un resoconto di ogni lezione, gli esiti delle prove proposte e la valutazione degli studenti alla fine dell'attività svolta, nonché un giudizio personale sull'esperienza e sul valore del metodo di insegnamento adottato in questo particolare momento storico.

Infine non potevano mancare degli approfondimenti teorici relativi a teorema di Desargues, costruzione di pavimentazioni e proiettività, che possono fornire ulteriori spunti didattici anche per delle lezioni universitarie.

0.2 Introduzione

Problema geometrico: rappresentare una scena su un quadro

Ci concentriamo sul problema geometrico legato alla rappresentazione di una scena su un quadro. Ci sono diversi modi per disegnare degli oggetti, ma a noi qui interessa farlo in modo tale che la figura sia verosimile. Ricorriamo pertanto a quella strabiliante scoperta (o invenzione), fatta nel corso della storia, che è la prospettiva.

L'idea della prospettiva è quella di immaginare la tela come una finestra affacciata sulla scena che un pittore intende rappresentare. Un qualsiasi disegnatore che volesse rappresentare un oggetto, cercherebbe per prima cosa di disegnarne i contorni e quei tratti fondamentali che consentono di individuare un oggetto come tale in modo quasi inequivocabile. Questa è un'operazione di astrazione che viene ripresa per costruire il modello geometrico: ci preoccupiamo di cosa avviene di punti e rette dello spazio (dove si situa la scena) una volta riportati su un piano (quello della tela), dato che essi sono le componenti stesse dei contorni, semplificando così al massimo il problema. Formalmente, quindi, dobbiamo essere in grado di proiettare oggetti elementari nello spazio (punti, rette, triangoli, ...) in oggetti nel piano. Allora sarà necessario individuare quali sono le proprietà che vengono rispettate da questa trasformazione e quali sono le caratteristiche che assumono gli oggetti in seguito, per capire se il disegno che otterremo sarà corretto o no. In questa operazione di proiezione ci si accorge immediatamente che si deformano lunghezze, aree e angoli degli oggetti originari; tuttavia non è affatto immediato capire in che modo debbano essere disegnati gli oggetti affinché le loro 'deformazioni' sul piano restituiscano all'occhio umano una percezione di verosimiglianza. Poiché si verifica con la geometria della visione che nel passaggio dallo spazio al piano si conservano allineamenti e intersezioni, un buon metodo di rappresentazione dovrà rispettare questa proprietà. Nel corso dei secoli sono stati fatti vari tentativi per individuare dei buoni metodi, ma solo nel periodo del Rinascimento ne sono nati di matematicamente corretti. L'idea brillante della rappresentazione prospettica è che il conservarsi di allinamenti e intersezioni è condizione necessaria e sufficiente per poter costruire la rappresentazione. Un'idea semplice quanto geniale. Inoltre nella proiezione sul piano troveremo dei punti che non rappresentano dei punti di $\mathbb{R}^3$, bensì le direzioni delle rette. Tali punti sono detti punti di fuga in ambito della prospettiva e punti all'infinito in geometria proiettiva.

Rappresentare un oggetto su un quadro, geometricamente parlando, è quindi riconducibile alla proiezione di un oggetto di $\mathbb{R}^3$ su un piano, quando il centro di proiezione è al finito e la posizione del piano su cui si proietta è tra il centro di proiezione e l'oggetto da proiettare, ossia: se E è la posizione dell'occhio, π è il piano della tela e $T \in \mathbb{R}^3$ è il punto da disegnare, allora π si trova tra E e T, come in fig. 1. In questa situazione, esiste un'unica retta che collega E con il punto T, la quale dovrà intersecare π in un punto T'. Detto π' il piano passante per E parallelo a π, la proiezione che manda T in T' definisce così una funzione continua da $\mathbb{R}^3 - \pi'$ in π.

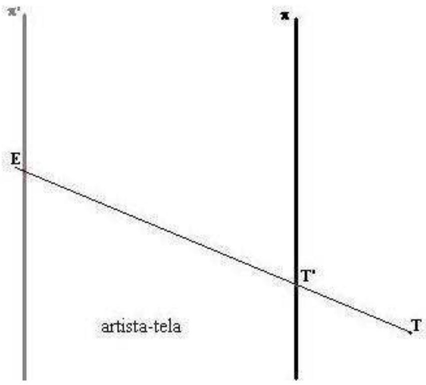


Figura 1: Schema della proiezione di un punto $T \in \mathbb{R}^3$ sul piano π della tela dall'occhio situato in E.

Questa funzione si estende ad una da $\mathbb{RP}^3 - \{E\}$ a $\mathbb{RP}^2$, in cui il piano π è identificato con $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$ e i punti di $\pi' - \{E\}$ vengono proiettati nei punti all'infinito di $\mathbb{RP}^2$. Questa funzione da $\mathbb{RP}^3 - \{E\}$ a $\mathbb{RP}^2$ è continua e rispetta gli allineamenti, cioè ogni retta in $\mathbb{RP}^3 - \{E\}$ è mandata in una retta o in un punto in $\mathbb{RP}^2$. Risulta perciò evidente che si può rappresentare una scena su un quadro con gli strumenti forniti dalla geometria proiettiva.

Problema didattico: insegnare a rappresentare una scena su un quadro

Innanzitutto occorre una buona osservazione della scena che si ha davanti, per questo il punto di partenza non possono che essere dei rudimenti di geometria della visione: imparare come l'occhio umano proietta su un 'piano' (quello della retina) tutti gli oggetti tridimensionali che ha davanti è il primo modo intuitivo per procedere in una rappresentazione prospettica. Per questo i primi esempi, esercizi ed esperimenti sono stati legati all'osservazione. Abbiamo giudicato insieme che oggetti più vicini appaiono più grandi, che oggetti posti a distanze diverse in profondità possono apparire allineati, che segmenti paralleli appaiono non paralleli... Subito dopo abbiamo fatto un'operazione di astrazione enunciando e dimostrando i risultati più significativi della teoria che è nata dall'osservazione: l'ottica euclidea. In questo modo abbiamo visto che è possibile fare un modello matematico che semplifichi il fenomeno (considerare l'occhio come un punto e segmenti al posto di oggetti interi) e, utilizzando nozioni di geometria euclidea già note, abbiamo validato questo modello. Questo passaggio, a mio avviso è stato il primo importante per prendere coscienza del fatto che gli strumenti visti a scuola (in questo caso la geometria euclidea) hanno possibili applicazioni al di fuori del puro 'esercizio di stile' richiesto dall'insegnante, ma che hanno un'utilità e un fascino in sé, proprio perché hanno un nesso con il resto delle cose che è tutto da scoprire.

Per addentrarsi nella rappresentazione prospettica, abbiamo immaginato, così come avevano fatto i pittori rinascimentali, il quadro come una finestra attraverso la quale immaginare la scena retrostante (secondo l'etimologia della parola prospettiva, che proviene da perspectiva o perspicere, che significa vedere attraverso) e, procedendo intuitivamente, abbiamo immaginato che dei singoli raggi visivi collegassero il punto corrispondente all'occhio di un pittore con quelli corrispondenti ai contorni di un oggetto reale che lui intendesse rappresentare. Dall'intuizione è stato immediato il passaggio all'astrazione, con l'utilizzo di punti, rette, piani, e tutte le regole di geometria euclidea per l'intersezione di rette e piani nello spazio e nel piano. Il vantaggio, però, di parlare della prospettiva è quello che le dimostrazioni si possono vedere immediatamente e quindi ciò che si dice è comprensibile per tutti. A questo punto è possibile introdurre un linguaggio più specifico: si introducono i concetti di linea di terra, linea trasversa, punto centrico, punto di fuga, linea di orizzonte...

Fatte le osservazioni necessarie, possiamo provare a realizzare una pavimentazione. Innanzitutto è bene far notare che tali osservazioni non bastano da sole per realizzare la pavimentazione. Si può porre la domanda: come si fa? Innanzitutto lasciamo che i ragazzi avanzino delle ipotesi, che saranno più o meno corrette; poi possiamo far vedere che nella storia ci sono stati anche dei tentativi di realizzazione in prospettiva scorretti, che non tenevano di conto di tutte le proprietà che noi avevamo individuato come necessarie per una corretta rappresentazione. Questo è importante, perché insegna che in un lavoro di ricerca, all'interno di un problema aperto (o perlomeno di cui noi non conosciamo la soluzione) si può sbagliare e, senza vergogna, imparare da questi errori per giungere ad una teoria matematica corretta. Inoltre, cominciare a fornire una giustificazione delle proprie ipotesi e la verifica della loro verità è un esercizio di giudizio fondamentale per apprendere il metodo matematico. É importante anche, in questo contesto, specificare che la correttezza di una rappresentazione prospettica è indice di una conoscenza maggiore di strumenti, non di una bellezza maggiore da un punto di vista artistico: il problema è affrontato innanzitutto da un punto di vista matematico e non si ha la pretesa che questo prevalga sul gusto personale rispetto alle opere viste.

A questo punto si possono vedere il modo ottimo di Leon Battista Alberti e il metodo di Piero della Francesca per realizzare una pavimentazione. Entrambi funzionano: il primo utilizza implicitamente un'affinità, l'altro invece (più complesso, ma anche più spettacolare) usa implicitamente un'omologia. Dunque si può procedere vedendo i due metodi nell'ordine suddetto, facendo provare i ragazzi a disegnare con le squadre delle pavimentazioni seguendo passo passo le indicazioni dei due artisti e verificando che le costruzioni sono corrette. Infine confrontarle tra loro, decidere quale delle due è più affascinante e soprattutto capire perché funzionano dal punto di vista matematico, sono i passi subito successivi. In questo modo il collegamento tra la prospettiva da un punto di vista artistico e da un punto di vista matematico è fatto. Esperimenti e osservazioni aggiuntive sono immediatamente collocabili dai ragazzi in questo nuovo ambito e saranno ulteriori approfondimenti che incrementano il fascino della scoperta. Così si può vedere qualche altro dipinto, verificare se l'artista ha utilizzato il metodo ottimo oppure individuarne i punti di fuga, ...

Se i tempi e la classe lo permettono, vale senz'altro la pena di tentare un'ulteriore astrazione passando definitivamente dalla geometria euclidea a quella proiettiva. Innanzitutto ci possiamo chiedere cosa immaginiamo che avvenga se cambiamo le posizioni di punto di proiezione (corrispondente all'occhio del pittore), oggetto da proiettare e piano su cui si proietta. Accadono fenomeni reali già conosciuti? Questo serve per stimolare a indagare su un problema matematico secondo tutti i suoi casi possibili e collegarli con l'esperienza personale. Inoltre fa capire che stiamo per approfondire ulteriormente il problema visto: la prospettiva, infatti, non è che un'occasione invitante per introdurre i concetti più generali di punto all'infinito, retta all'infinito e quindi di piano proiettivo. Si può verificare, così, che in quest'altra geometria le proprietà sono un po' diverse rispetto al caso euclideo: è vero che per due punti distinti sul piano passa una e una sola retta, ma ogni coppia di rette ha un (unico) punto in comune, cioè non esistono rette che non si incontrano. Inoltre gli oggetti geometrici, come segmento, retta, triangoli, ... sono concepiti in modo diverso rispetto alla geometria euclidea. Comincia così ad aprirsi un mondo nuovo, che all'inizio può anche sconcertare un po', ma dal quale tutti restano affascinati. Per completare questa introduzione alla geometria proiettiva, che ha avuto la prospettiva piana come punto di partenza, si può parlare dello spazio proiettivo, del Teorema di Desargues e del suo inverso per poi terminare con le proiettività e dare un risultato di geometria proiettiva che giustifica, nel caso più generale possibile, la costruzione della pavimentazione che abbiamo visto in precedenza. Tutto questo sicuramente richiede più tempo per una assimilazione da parte dei ragazzi, ma è una fonte di fascino e un arricchimento del ragionamento geometrico che non devono essere assolutamente trascurati.

Motivazioni del problema didattico

Per capire meglio la scelta degli argomenti svolti, dobbiamo ricordarci che innanzitutto chi insegna ha come compito primario, dentro il suo compito di impartire lezioni di una certa materia, quello di educare gli allievi, ossia quello di introdurli alla realtà. La situazione attuale della scuola, troppo spesso sembra ben lontana da questo obiettivo essenziale e, in riferimento a questo, mi ha impressionata l'attualità delle osservazioni che un ragazzo ha scritto ormai mezzo secolo fa in un giornale studentesco:

Il vero aspetto negativo della scuola è quello di non far conoscere l'umano attraverso i valori che troppo spesso, tanto inutilmente, maneggiamo: mentre in ogni azione l'uomo rivela la sua indole, appare ridicolo (o tragico?) che a scuola, attraverso lo studio delle varie manifestazioni degli uomini, si percorrano alcuni millenni di civiltà senza saper ricostruire con sufficiente precisione la figura dell'uomo e il suo significato nella realtà. La nostra scuola è impostata su un naturale neutralismo che annulla ogni valore... ma la cecità del nostro tempo assai di rado fa sì che la scuola sia chiamata al banco degli imputati quando è veramente rea. La si chiamerà perché non è in grado di formare buoni tecnici, bravi specialisti e gente competente; la si chiamerà per la questione del latino o dei programmi degli esami relativi alla maturità; non la si chiamerà perché non è riuscita a formare veri uomini, a meno che questi 'non uomini' commettano qualche sciocchezza grossolana e clamorosa, come ad esempio un episodio di intolleranza razziale.[1]

Oppure non possiamo non lasciarci interrogare da affermazioni che spesso giungono dagli studenti (o che magari noi stessi da studenti abbiamo detto) del tipo: *Ci fanno studiare un'infinità di cose e non ci aiutano affatto a comprendere il perché di queste cose; a noi sembra che manchi il perché ce le fanno studiare.*

Non essendo al momento in grado di dare una risposta soddisfacente da un punto di vista educativo metodologico, mi limito in questa sede a lasciarmi provocare e a sottoporre all'attenzione del lettore un problema spesso sottovalutato, anzi ridotto ad una necessità di invogliare i ragazzi allo studio della propria materia, modificando i programmi o cercando di renderli più allettanti, senza interrogarsi fino in fondo su cos'è che realmente sta dietro alla crisi dello studio della matematica (e della scuola più in generale), che ritengo essere un problema di educazione. Invito su questo punto alla lettura e al paragone della propria esperienza personale con [3].

Detto questo, l'idea di parlare di geometria prendendo spunto dalla prospettiva, nasce come tentativo di comunicare ad altri la mia scoperta e verifica personale del fatto che la matematica è uno dei metodi di conoscenza del reale. Non si tratta di uno dei metodi con il quale guardare tutta la realtà (non si può certo avere una certezza di tipo matematico del fatto che mia mamma mi vuole bene!), né di quello che garantisce che esiste almeno un mondo, su tanti possibili, in cui le cose tornano sempre, come a volte ho sentito dire: *Mi consola il fatto che può accadere una qualsiasi catastrofe, ma tornato a casa ho almeno la certezza che 2+2=4*, che non è che un'amara consolazione rispetto alla vita. Si tratta, invece, del metodo da utilizzare per conoscere più a fondo *certi* aspetti della realtà. Da un'esperienza personale ho persino constatato che nel momento in cui si slegano, dentro un inse-

[1] G.Gamaleri, in Milano Studenti, n. 2, febbraio-marzo 1960.

gnamento di tale materia, le nozioni puramente matematiche dai nessi che hanno con la realtà (a cui sono legate in origine), esse perdono immediatamente di interesse e tendono a diventare dei 'giochini mentali per genietti', una specie di mondo di élite al quale solo pochi possono partecipare e che quindi possono in qualche modo far sentire inferiori oppure possono risultare, in fondo in fondo, non interessanti. [I riscontri di questo si hanno normalmente nei risultati scolastici e nel giudizio che mediamente gli alunni hanno della matematica.] Per questo, nell'intento di educare dei ragazzi a diventare uomini, occorre non sottovalutare questo ambito di conoscenza del reale almeno a livello base (non importa che tutti diventino dei matematici!), senza del quale la possibilità di giudizio personale resta incompleta. [La riprova di questo fatto è che facendo un'indagine tra adulti per capire se lo studio della matematica è ritenuto utile, normalmente la risposta è positiva, ma davvero pochi sono in grado di dare delle ragioni valide di questa affermazione, spesso anche tra gli insegnanti.]

Concordo con quanto afferma Ferdinando Arzarello nella premessa di [10]:

«La formazione del curricolo scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica: strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro un sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Entrambi gli aspetti sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante li introduca entrambi in modo equilibrato lungo tutto il percorso di formazione. Dentro a competenze strumentali come eseguire calcoli, risolvere equazioni, leggere dati, misurare una grandezza, calcolare una probabilità, è, infatti, sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo. D'altra parte, l'aspetto culturale, che fa riferimento a una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche, quali la padronanza delle idee fondamentali di una teoria, la capacità di situarle in un processo evolutivo, di riflettere sui principi e sui metodi impiegati, non ha senso senza i riferimenti ai calcoli, al gioco delle ipotesi, ai tentativi ed errori per validarle, alle diverse dimostrazioni che evidenziano i diversi significati di un enunciato matematico: essi costituiscono il terreno concreto e vivo da cui le conoscenze teoriche della matematica traggono alimento. Entrambi i tipi di competenze costituiscono, perciò, obiettivi di lungo termine, cui occorre dare compimento nel corso del ciclo secondario. Il nesso profondo tra aspetti strumentali e culturali potrà in particolare essere colto dagli alunni attraverso opportune riflessioni storiche, introdotte gradualmente. Essendo per sua natura di carattere critico, la riflessione storica dovrà attendere che i concetti relativi si siano consolidati, in modo da non generare confusione e quindi incertezza negli studenti. È, infatti, importante che non si operino delle forzature, o peggio si inventi una storia inesistente, per adattare le problematiche storiche alle conoscenze degli alunni: la narrazione storica potrà e dovrà essere semplificata, ma non falsata. Il bambino, e tanto più il giovane, non è una tabula rasa che acquisisce i concetti matematici per pura astrazione. [...] le intuizioni, le metafore concettuali ecc. non sono un primo vago approccio ai concetti matematici, qualcosa di 'sporco' e scorretto da fare sparire al più presto, ma ne costituiscono un ingrediente fondamentale, che rimane anche a livelli estremi di rigore. Conseguentemente, la matematica deve essere insegnata come un'impresa umana (nel senso ampio di questo termine), non come qualcosa che va contro il nostro essere. Ciò ha conseguenze importanti sia rispetto a molte teorie didattiche sia rispetto al ruolo che i misconcetti e gli errori possono giocare nell'apprendimento.»

Quindi partire dalla prospettiva per parlare di geometria proiettiva non è per me un modo per addolcire degli argomenti altrimenti troppo difficili, ma rientra all'interno di un progetto ben più ambizioso di educazione al metodo matematico.

Oltre la didattica

Il lavoro fatto è stato prevalentemente didattico, ma partendo da piccole curiosità o domande dentro gli argomenti preparati per le lezioni, è stato interessante scoprirne sempre di più la bellezza, approfondendo alcuni dei temi toccati nello studio della prospettiva e della geometria proiettiva. Il lavoro così ha preso un altro spessore, anche in termini di soddisfazione personale, perché mi ha permesso di far esperienza di un nuovo significato del tradizionale legame tra didattica e ricerca (in senso lato): un insegnante non può che lasciarsi provocare dalle domande che sorgono ed implicarsi con esse, perché solo imparando è in grado egli stesso di insegnare (e di insegnare ad insegnare).

Innanzitutto abbiamo riportato una dimostrazione del teorema di Desargues sia in versione affine che proiettiva, così da gustare un accenno del collegamento tra i due tipi di geometria. Poi abbiamo approfondito la realizzazione di una pavimentazione fatto con la sola riga non graduata, costruendo il punto medio e un terzo del lato di una mattonella e abbiamo ricavato un metodo più generale per costruire un qualsiasi razionale. In realtà, grazie all'uso dei numeri in base binaria, la costruzione si semplifica e così abbiamo trovato un modo semplice per approssimare anche i numeri reali non razionali. Dunque, la costruzione prospettica vista è un naturale ponte di collegamento tra geometria e algebra. Ci siamo occupati anche di una delle proprietà grafiche della retta proiettiva: la costruzione del quarto armonico. Dati tre punti P_1, P_2, P_3 su una retta r, scelto un punto arbitrario O

esterno ad essa, per l'invarianza del birapporto è sempre possibile costruire il quarto punto P_4 in modo tale che il birapporto di P_1, P_2, P_3, P_4 sia -1, cioè in modo tale che i quattro punti costituiscano una quaterna armonica (vedi fig. 2). Utilizzando questa proprietà, si verifica che la costruzione ar-

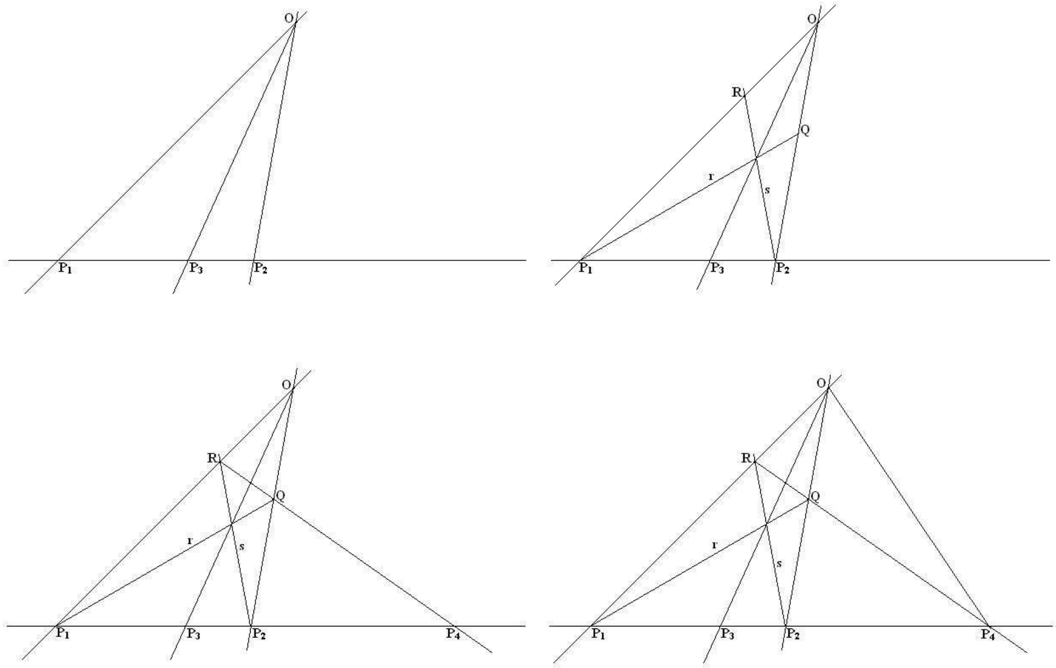


Figura 2: Costruzione del quarto armonico.

monica coincide con la costruzione del punto medio vista (pensando P_4 come il punto all'infinito) e che, quindi, il punto medio è un concetto proiettivo, in quanto dipende dal birapporto e non dalla misurazione delle lunghezze. Infine ci siamo occupati di oggetti non più bidimensionali: abbiamo analizzato il caso di una scatola rettangolare. Prima ci siamo interessati di come realizzarla, riportando la dimostrazione di una generalizzazione del teorema di Desargues; poi, siamo scesi più in dettaglio nel modello della proiezione da un foro stenopeico: abbiamo riportato dei risultati che permettono di verificare quando la figura prospettica di una scatola proviene realmente da una proiezione e di calcolare le distanze reciproche tra foro stenopeico, piano della pellicola e scatola rettangolare.

Parte I

Piano delle lezioni e obiettivi della sperimentazione

Capitolo 1

Progetto delle lezioni

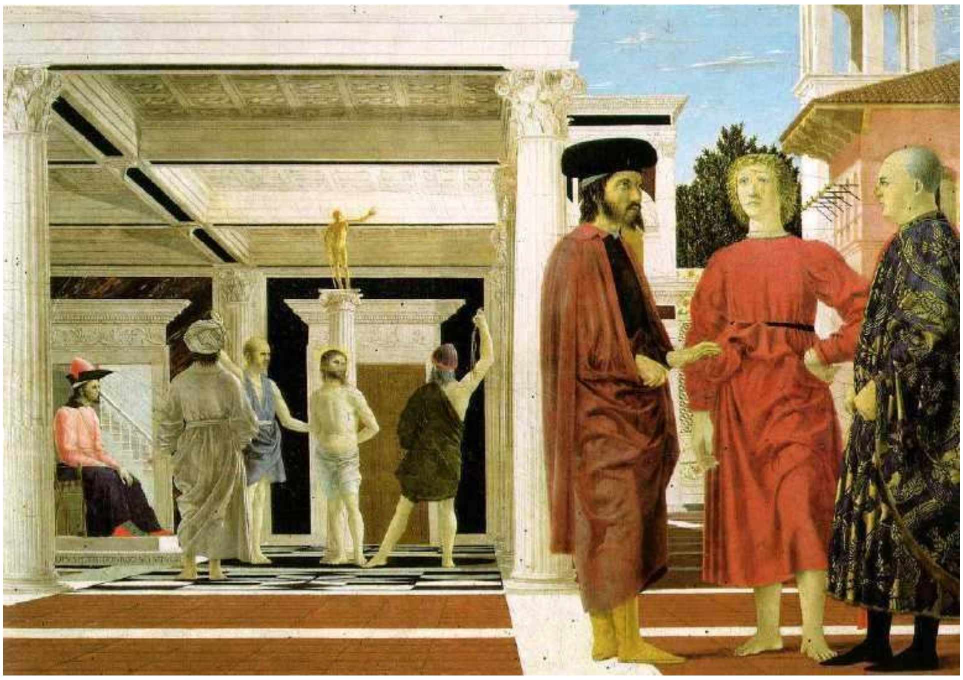


Figura 1.1: Piero della Francesca, *Flagellazione di Cristo* (1444-1470), dipinto su tavola con tecnica mista(58,4x81,5 cm). Conservata nella Galleria Nazionale delle Marche di Urbino.

1.1 Programma didattico

Obiettivi generali: Suscitare nei ragazzi l'interesse per la matematica, materia spesso trascurata perché ritenuta troppo astratta o troppo difficile. Puntare ad un collegamento tra matematica e realtà, attraverso un problema noto storicamente, cioè la prospettiva. Permettere così ai ragazzi di cominciare a vedere la matematica come uno dei metodi di conoscenza del reale.

Prima lezione

Obiettivi: Introdurre i ragazzi ad una conoscenza della propria percezione naturale degli oggetti. Astrarre e modellizzare matematicamente questa percezione. Verificare la validità del modello.

- esperimenti a gruppi e osservazioni di immagini per prendere coscienza della visione degli oggetti.[Ricordare ai ragazzi che dietro a tutto ci sta un po' di semplice geometria euclidea insieme ad una buona percezione dello spazio]
- cenni dell'Ottica di Euclide, come modello di geometria della visione.
- verifica del modello rispetto alle intuizioni avute con l'osservazione diretta iniziale, tramite alcuni principali risultati dell'Ottica di Euclide. Introduzione delle nozioni di punto di vista, apparente allineamento, cono visivo.

Seconda lezione

Obiettivi: Stimolare i ragazzi attraverso la difficoltà del concetto di prospettiva; saper disegnare in modo verosimile la realtà è difficile: necessita di riorganizzare le proprie convinzioni. Acquisire le prime nozioni di prospettiva piana.

- cos'è la prospettiva, a cosa serve, note storiche [brevi] e proiezione di diapositive di alcuni quadri notando le caratteristiche riscontrabili in essi.
- introduzione dei termini matematici nella prospettiva piana, fra cui punto di fuga e linea di orizzonte.
- il problema di realizzare una pavimentazione in prospettiva. Metodi inesatti. Il modo ottimo di Alberti. Provare la costruzione di Alberti e capirne il funzionamento.

Terza lezione

Obiettivi: Conoscenza delle origini del metodo prospettico. Verifica personale della relazione tra la matematica introdotta e la storia dell'arte, attraverso il metodo di Piero della Francesca.

- Il metodo di Piero della Francesca. Descrizione. Provarne l'uso per la rappresentazione di una pavimentazione.
- Perché funziona il metodo di Piero della Francesca? [Dare ai ragazzi la possibilità di formulare delle ipotesi]
- Prendere spunto dal metodo di Piero della Francesca per accennare alle proiettività.

Quarta lezione

Obiettivi: Acquisire l'idea di un nuovo tipo di geometria: quella proiettiva. Saper individuare comunanze e differenze tra geometria euclidea e proiettiva. Apprendere risultati di geometria proiettiva legati alla prospettiva e riconoscerne il legame.

- presentazione della geometria proiettiva, facendo vedere tipologie di proiezioni con diapositive ed esempi, fra cui giochi con le ombre e principio del foro stenopeico.
- nozioni di punti all'infinito, piano proiettivo, retta proiettiva, segmento proiettivo e triangolo proiettivo.
- generalizzazione allo spazio proiettivo. Nozione di triangoli omologhi, teorema di Desargues e suo inverso.
- Cenni alle proiettività. Da esse si può ottenere una prospettiva moderna con la quale, dato un qualsiasi quadrangolo 'come prima mattonella', si può costruire correttamente una pavimentazione.

Test finale

Obiettivi: Verifica dell'acquisizione di un modo di procedere matematico nel rappresentare in prospettiva e della comprensione dei concetti di geometria proiettiva introdotti.

LA PROSPETTIVA PIANA: TEST DI INGRESSO.
Liceo Scientifico L. da Vinci, classe IV H
5 febbraio 2009

Esercizio 1. *Completare la seguente affermazione (più risposte sono corrette: dire tutte quelle che vengono in mente).*

Un piano nello spazio è determinato in modo unico da:
-..
-..
-..
-..

Esercizio 2. *Rispondere ai seguenti quesiti.*

1. Quali sono le posizioni reciproche di due rette nello spazio?

2. Quali sono le posizioni reciproche di due piani nello spazio?

3. Dare la definizione di distanza tra due rette.

Esercizio 3. *Che cos'è un cubo? Provate a disegnare il cubo di Rubik che è sul tavolo. Che caratteristiche ha il cubo che avete disegnato sul vostro foglio?*

Esercizio 4. *La foto seguente permette di stabilire se la palla è già in rete o ne è ancora fuori? Motiva la risposta.*

Esercizio 5. *Osservate le due immagini seguenti: cosa si può dire dell'una e cosa dell'altra?*

Introduzione

Cos'è la prospettiva. La prospettiva piana è una tecnica il cui scopo è quello di rappresentare in maniera verosimile gli oggetti tridimensionali su una superficie piana a partire da un certo punto di vista.

Perché nasce la prospettiva. Avete mai provato a disegnare su un foglio una casa o un albero? É più facile che la rappresentazione sia verosimile disegnandoli con un'osservazione diretta oppure a partire da una fotografia degli oggetti che si vogliono riprodurre? Evidentemente è più facile che il disegno somigli alla realtà se si parte da una foto. Sapreste dirmi il perché?

Per riprodurre l'immagine di una foto il nostro cervello deve individuare i contorni degli oggetti e riportarli sul foglio, cercando di mantenere le proporzioni, riportando cioè i tratti, i contorni, da un piano (quello della foto) all'altro (quello del foglio). L'operazione che il nostro cervello fa è un passaggio da oggetti di due dimensioni a oggetti che sono ancora di due dimensioni.

Invece, per disegnare con un'osservazione diretta, il nostro cervello deve riportare un oggetto nello spazio sul foglio, ovvero deve 'trasformare' un oggetto di tre dimensioni in uno di due dimensioni. Affinché questo secondo disegno risulti verosimile, ci deve essere una 'corrispondenza' fra oggetto 3-D reale e oggetto 2-D sul piano del foglio. Questo passaggio di astrazione richiede una fatica in più. Allora si capisce come ad un certo punto nella storia sia nata l'esigenza di trovare delle tecniche che permettessero di riprodurre in modo verosimile la realtà, inizialmente con metodi empirici e in seguito ricorrendo al rigore matematico.

Origini della prospettiva. Mentre in epoca classica i matematici greci si erano occupati di come l'occhio umano percepisce gli oggetti con lo studio dell'ottica geometrica (vedi ad esempio l'Ottica di Euclide), il problema di rappresentare tali oggetti così come l'occhio li vede si sviluppa soprattutto nel Rinascimento, dove metodi empirici, che venivano usati già verso la fine del Medioevo, diventano matematici. Troviamo esempi di prospettiva ben realizzata nelle opere di Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leon Battista Alberti (1377-1446), che dà nei suoi scritti una descrizione, seppure un po' vaga, del metodo da lui utilizzato per rappresentare oggetti in prospettiva; il primo trattato organico sulla prospettiva, però, è senz'altro il *De Prospectiva Pingendi* di Piero della Francesca (1416?-1492). In seguito se ne occupano diversi artisti e trattatisti italiani ed europei, fino a quando, dalla seconda metà del '500, lo studio squisitamente matematico della prospettiva prende il sopravvento (con ad esempio Danti e Desargues) e diventa una vera e propria disciplina matematica all'interno della geometria proiettiva.

1.2 Geometria della visione

Per rappresentare correttamente in prospettiva si comincia soffermando la nostra attenzione su alcune operazioni percettive che svolgiamo quotidianamente in modo automatico e inconsapevole; infatti gli oggetti non vengono visti ‘come sono’, ma appaiono di forme e dimensioni diverse a secondo della posizione di chi guarda. Ad esempio considerando la foto di un torneo di ping pong (figura 1.2), possiamo notare che la dimensione dei tavoli, che supponiamo ragionevolmente identici, si riduce con l’aumentare della lontananza dal fotografo (e così avviene anche per arbitri e giocatori) e osserviamo inoltre che in qualche modo si deformano. Se noi volessimo rappresentare questi tavoli, dovremmo fare un’operazione del tipo mostrato in figura.

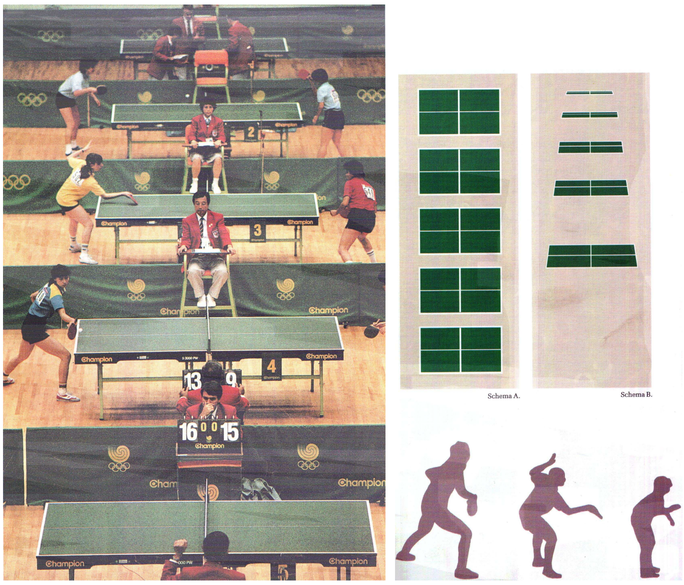
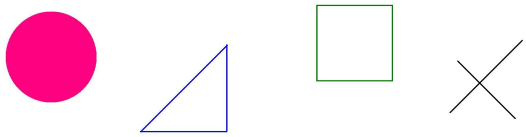


Figura 1.2: Vediamo chiaramente dalla foto del torneo che i tavoli da ping pong, i quali hanno le stesse dimensioni, risultano apparentemente di dimensioni diverse a seconda della lontananza dal fotografo. Lo stesso vale per i giocatori.

1.2.1 Alcuni esperimenti

Proviamo a vedere in che modo si modificano le seguenti figure geometriche piane al variare del punto di vista:

1. un cerchio
2. un triangolo rettangolo
3. un quadrato
4. due segmenti perpendicolari di lunghezza diversa



Procediamo nel modo seguente:

- guardiamo le figure tenendo il cartoncino parallelo al piano del foglio;
- cominciamo ora a ruotare il cartoncino e disegnamo le figure: cosa è cambiato? (ad esempio: il cerchio è ancora un cerchio? Gli angoli retti sono rimasti tali?)
- cosa invece non è cambiato? (ad esempio le linee che si intersecavano continuano ad intersecarsi?)

Osserviamo infine la seguente immagine: rappresenta lo stadio di Firenze (figura 1.3), che tutti ben conosciamo. Guardate le linee di bordo campo. Notate niente?

Figura 1.3: Stadio A. Franchi di Firenze.

Le linee nella foto sono ancora delle linee, però, invece di apparire parallele, come in realtà sono, ci appaiono convergenti (figura 1.4). Ossia, se immaginiamo di prolungarle, ad un certo punto le vedremo incontrarsi. Non solo, notiamo che nello stesso punto convergono tutte le altre linee, parallele a quelle di prima, che si trovano sul campo. Ricordiamoci di questo fatto: è una delle proprietà più importanti per la prospettiva.

Ora passiamo alle figure solide; ecco alcuni esempi di oggetti che sicuramente già conoscete. Come potete notare, anche per queste, variando il punto di vista, si modifica la forma geometrica con la quale occorre rappresentare gli oggetti: ad esempio una piramide egizia vista esattamente di

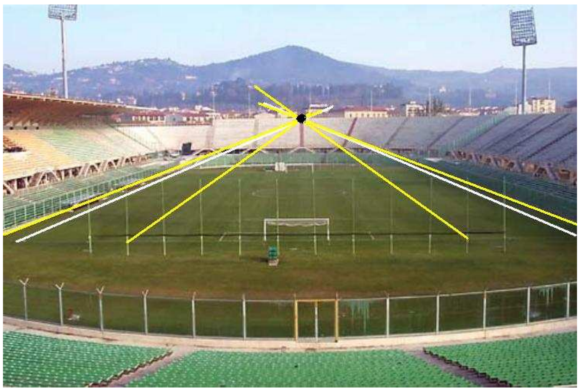


Figura 1.4: Stadio A. Franchi. Si evidenzia la convergenza delle linee parallele del campo.

faccia, avrà per contorno un triangolo, mentre vista dall'alto avrà per contorno un quadrato; invece, guardandone uno spigolo risulterà un quadrilatero (in genere) non regolare (figura 1.5).

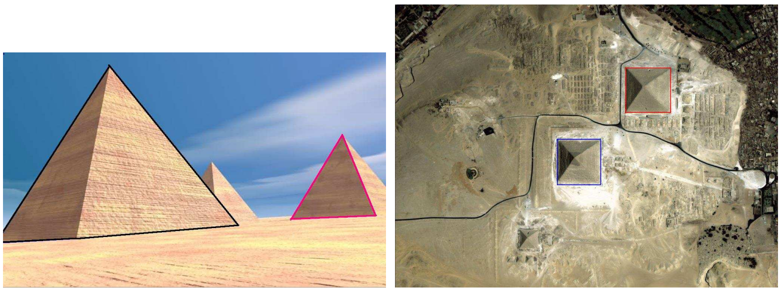


Figura 1.5: Piramidi egizie riprese lateralmente e in veduta aerea.

Inoltre notiamo che il contorno di una figura da solo non individua necessariamente un oggetto ben preciso, come possiamo vedere nell'esempio della sfinge (figura 1.6); per di più occorre fare i tratti con delle regole particolari affiché l'oggetto disegnato lo rappresenti e non sembri distorto (figura 1.7). Quindi, riassumendo, gli oggetti che osserviamo hanno una dimensione e una forma apparenti. La disciplina che si occupa di trovare le leggi secondo le quali ci appare una data scena è chiamata geometria della visione. L'opera più antica nella quale è sviluppata tale geometria è l'Ottica di Euclide. Qui si pongono alcuni postulati iniziali e si enunciano e dimostrano teoremi che riguardano la visione. Non sono, invece, mai presi in esame in tutta l'opera le questioni riguardanti il problema della rappresentazione della realtà su una superficie piana, argomento di cui noi vogliamo trattare.

Figura 1.6: Sfinge egizia. Notiamo che il contorno non basta ad individuare un oggetto di tre dimensioni.

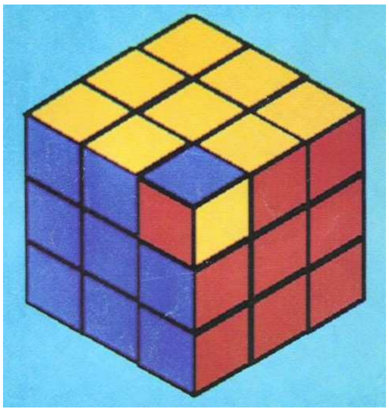


Figura 1.7: Disegno di un cubo di Rubik. Poiché non è realizzata in modo corretto la prospettiva, il cubo ci sembra evidentemente distorto.

1.2.2 Un po' di ottica euclidea

Per semplificare la trattazione, possiamo considerare il nostro occhio come un punto e al posto di oggetti tutti interi, esamineremo cosa avviene per i segmenti (che ne costituiscono i contorni), in modo da poter descrivere i fenomeni visti con la geometria. Per il nostro scopo ci bastano le nozioni di geometria euclidea già nota.

Teorema 1. (del punto interno) *Dato un triangolo ABC e un suo punto interno P, l'angolo $A\hat{P}B$ è maggiore dell'angolo $A\hat{C}B$.*

Dimostrazione. Congiungo C con P fino ad incontrare il segmento AB nel punto H. Applicando il teorema dell'angolo esterno [1] ai due triangoli ACP e BCP ottengo

$$A\hat{P}H > A\hat{C}P = A\hat{C}H$$

$$B\hat{P}H > B\hat{C}P = B\hat{C}H$$

E quindi

$$A\hat{P}B = A\hat{P}H + B\hat{P}H > A\hat{C}H + B\hat{C}H = A\hat{C}B$$

[1] In un triangolo l'angolo esterno è maggiore dei due angoli non adiacenti.

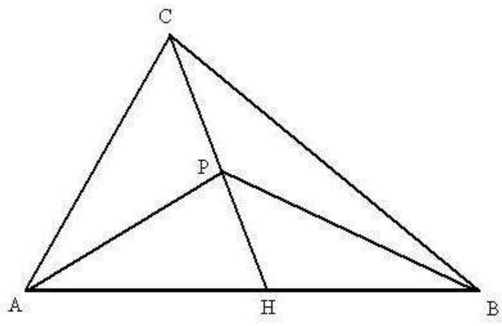


Figura 1.8: Teorema del punto interno.

□

Teorema 2. *Due segmenti uguali AB e CD che formano i lati opposti di un rettangolo, visti da un punto interno alla striscia di piano delimitata dalle rette AC e BD, appaiono diversi. In particolare appare più grande quello più vicino all'occhio.*

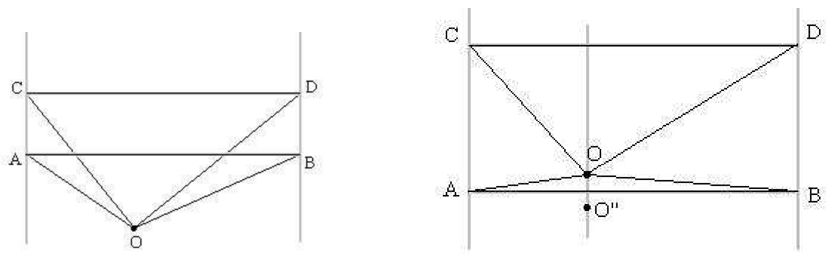


Figura 1.9: Teorema 2. A sinistra O è esterno al rettangolo ABCD, mentre a destra è interno.

Dimostrazione. Si hanno due possibili posizioni dell'occhio: interna al rettangolo ABCD oppure esterna ad essa.

1. **Ipotesi:** $AB = CD$; AB parallelo a CD; l'occhio O è posto tra le rette AC e BD ed esterno al rettangolo ABCD.

   Tesi: Viene vista più grande la grandezza più vicina all'occhio.

   Supponiamo, per fissare le idee, che AB sia più vicino all'occhio di CD. Per ottenere la tesi basta confrontare gli angoli $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, che sono gli angoli con cui vediamo i due oggetti AB e CD rispettivamente, e verificare che $A\hat{O}B > C\hat{O}D$.

Tracciamo la perpendicolare ad AB e CD, in modo che OH sia la distanza di AB da O e OK la distanza di CD da O. Allora $OK > OH$.

Portiamo, con una traslazione, la base del triangolo AOB a coincidere con la grandezza CD a lei uguale per ipotesi. Il triangolo AOB sarà così traslato nel triangolo $CO'D$ e l'angolo $A\hat{O}B$ nell'angolo $C\hat{O'}D$.

Nella traslazione O si è mosso lungo l'altezza e va nel punto O', che quindi è interno al triangolo CDO; allora, per il teorema del punto interno, $C\hat{O'}D > C\hat{O}D$ e quindi $A\hat{O}B > C\hat{O}D$.

2. **Ipotesi:** $AB = CD$; AB parallelo a CD; l'occhio O è posto tra le rette AC e BD ed interno al rettangolo ABCD.

   Tesi: Viene vista più grande la grandezza più vicina all'occhio.

   Supponiamo, per fissare le idee che AB sia più vicina a O di CD. Allora basta effettuare una riflessione in O'' del punto O rispetto all'asse AB, così da ricondurci al punto precedente. □

Questo teorema è ancora valido se O non si trova nella striscia delimitata da AC e BD? Osserviamo che il teorema non è più vero in generale se O non si trova nella striscia delimitata da AC e BD. Visualizziamo come si modificano gli angoli $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ al variare della posizione di O (figura 1.10).

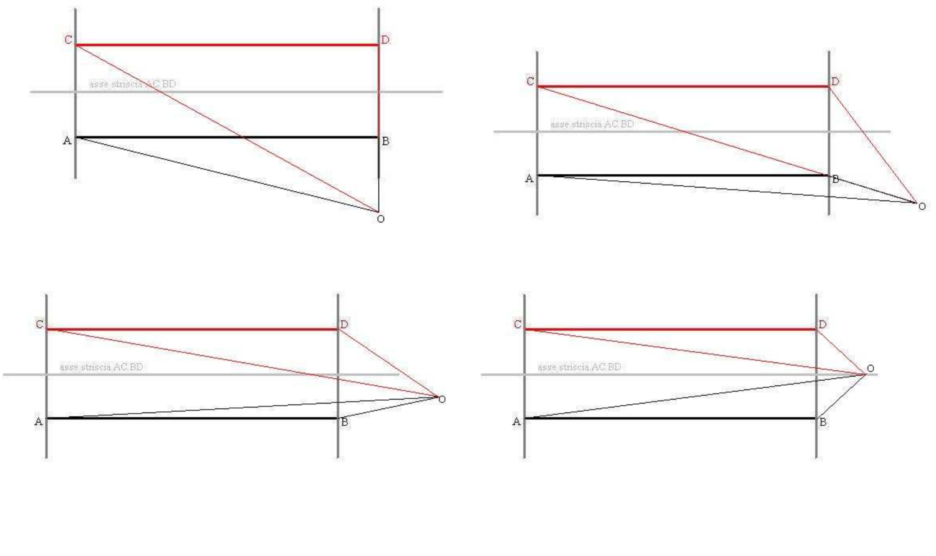


Figura 1.10: Il teorema 2 non è più vero quando O è fuori dalla striscia AC BD.

Proviamo a risolvere (anche a gruppi) alcuni dei seguenti esercizi.

Esercizio 6. *Ponendo l'occhio all'inizio di un corridoio largo 2 m e lungo 6 m, lungo l'asse centrale, questo verrà visto rettangolare, cioè con i lati equidistanti? Giustifica la risposta.*

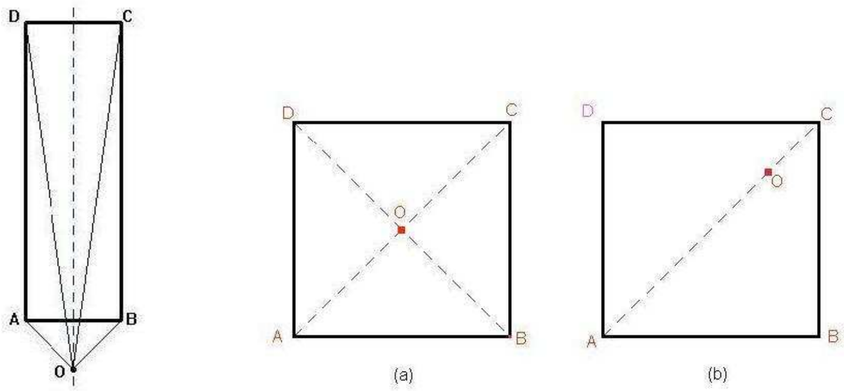


Figura 1.11: La figura a sinistra si riferisce all'esercizio 6, mentre le altre due all'esercizio 8.

Volendo costruirlo in modo che, ponendo l'occhio a 1 m di distanza dall'inizio AB del corridoio, questo venga visto come un rettangolo, quale dovrebbe essere la sua larghezza finale CD?

Esercizio 7. *Una scatola rettangolare di vetro ha la base di lati AB=60 cm, AC=30 cm e viene vista dall'occhio posto in O a 15 cm di distanza da AB lungo l'asse che la divide in parti che stanno fra loro come 1:3. Quanti gradi è l'angolo con cui O vede il lato AB? E il lato CD?*

Esercizio 8. *Un osservatore si trova all'interno di una grande piazza quadrata, posto nel punto O.*

Volgendo lo sguardo in giro vede i lati della piazza grandi uguali? Giustifica la risposta nel caso (a) e nel caso (b).

Nel caso (a) quanti gradi misura l'angolo con cui l'osservatore vede il lato AB?

Nel caso (b), se AB = 30 m e O dista da AB 20 m, quanto vede grande il lato CB? E il lato AD?

1.2.3 Apparente allineamento dei punti e convergenza delle linee

Abbiamo già visto che nel passare da oggetti tridimensionali a immagini bidimensionali si perde la visione della profondità; in particolare oggetti che non sono allineati possono 'apparire allineati', così come accade, per esempio, per le stelle di alcune costellazioni (figura 1.12).

Identificheremo con **raggio visivo** un qualunque segmento che unisce il punto in cui si colloca l'occhio con un qualsiasi punto dello spazio.

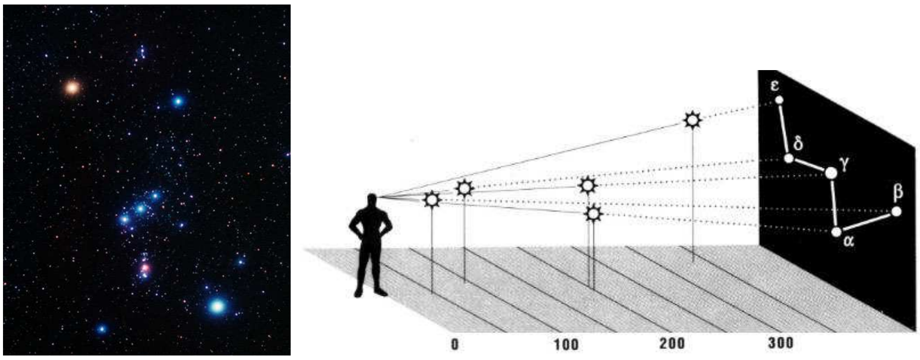


Figura 1.12: A sinistra: le tre stelle 'allineate' che formano la cosiddetta Cintura di Orione. A destra vediamo schematicamente cos'è una costellazione: un gruppo di stelle le quali, proiettate sulla volta celeste, appaiono sullo stesso piano e per questo definiscono una forma particolare.

Definizione 1. ('apparente allineamento') *Dati tre o più punti A,B,C,... e un punto O, questi punti sono visti da O allineati se i raggi visivi OA, OB, OC,... giacciono su uno stesso piano.*

Da questa definizione segue immediatamente che se tre punti A, B, C stanno su una retta r nello spazio, allora vengono visti come allineati poiché il piano che passa per r e per O contiene tutti i raggi visivi ottenuti con punti di r. L'essere 'in fila' è dunque una proprietà che non dipende dal punto di vista, è la prima proprietà invariante della geometria della visione: comunque si guardino tre punti allineati, questi si vedono sempre allineati, una retta si vede comunque come una retta. Il contrario non è vero: se tre punti si vedono allineati, non è detto che lo siano anche nella realtà, cioè non è detto che giacciano realmente su una stessa retta. Ad esempio la retta che unisce due stelle della cintura di Orione non contiene la terza stella; semplicemente accade che quando tre (o più) punti paiono allineati, si verifica che il piano che li contiene passa anche dall'osservatore.

Sul fenomeno dell'allineamento apparente si basa la costruzione delle 'figure impossibili', oggetti che guardati da un certo punto di vista sono paradossali (figura 1.13).

Il fatto che un segmento si proietta in un segmento e quindi resti determinato univocamente dalla proiezione dei suoi due estremi permetterà con l'uso di strumenti da disegno come il prospettografo (figura 1.13) di ridurre il calcolo dell'immagine prospettica di una figura al calcolo dell'immagine degli estremi di una poligonale con la quale si sia approssimata la figura. Questo metodo viene, ad esempio, proposto esplicitamente da Alberti che propone di approssimare una circonferenza con un ottagono inscritto e di trasformare gli 8 vertici dell'ottagono, cioè l'intero poligono col quale sarà approssimata l'immagine prospettica della circonferenza iniziale.

Passiamo ad un altro concetto importante dell'ottica euclidea:

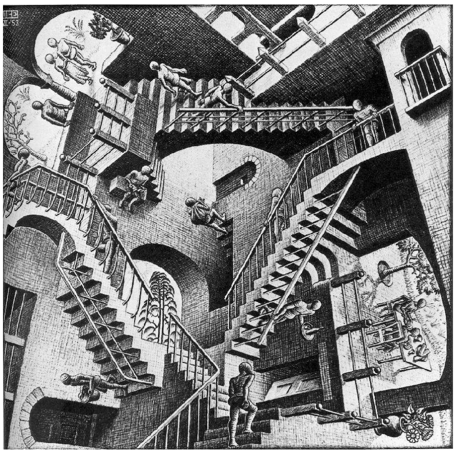
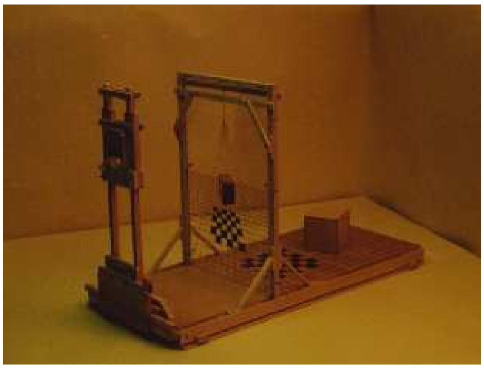
 

Figura 1.13: A sinistra la 'Relatività' di Escher. Come possiamo notare qui Escher fa utilizzo delle figure impossibili così come nella gran parte delle sue opere. A destra un prospettografo: si tratta di un marchingegno usato per la riproduzione prospettica di figure tridimensionali su un piano. Molto usato da pittori e scenografi nel '500 e '600 (ma anche precedentemente da L.B. Alberti), ne esistono versioni semplicissime (come quelle riprodotte nelle xilografie del Durer) o altre assai complicate. Nel modello qui riportato l'osservatore che guarda nell'oculare vede il reticolato tracciato sul quadro verticale sovrapporsi esattamente al reticolato giacente sul piano orizzontale.

Teorema 3. *Segmenti paralleli visti da lontano appaiono non paralleli.*

Dimostrazione. Accenniamo la dimostrazione, dividendola in due casi:

- L'occhio O si trova sullo stesso piano delle due rette a e b. In questo caso la dimostrazione, una volta chiarito il contesto, è essenzialmente identica a quella del teorema 2. Infatti, se l'occhio è interno alla striscia compresa tra le due parallele, l'angolo visivo, mano a mano che il segmento di distanza AB si allontanano dall'occhio, diventa sempre più piccolo, più piccolo di un angolo arbitrariamente dato. La circostanza che l'occhio si trovi all'interno della striscia, non è, come per il teorema 2, necessaria alla nostra dimostrazione. Il teorema vale in ogni caso purché si aggiunga un'ipotesi, che molto opportunamente Euclide formula esplicitamente aggiungendo 'visti da lontano': il segmento di distanza AB deve essere abbastanza lontano dall'occhio. Qualunque sia la posizione dell'occhio, dentro o fuori la striscia compresa tra le due parallele, da un certo punto in poi, l'angolo con cui si vede il segmento di distanza AB diventa sempre più piccolo.

  Notiamo che, quando l'occhio è fuori dalla striscia compresa tra le due rette parallele, l'angolo può anche aumentare inizialmente, ma, da un certo punto in poi, che può essere determinato con precisione, comincerà a decrescere tendendo a zero. Tutto questo può essere dimostrato rigorosamente sia per via sintetica che per via analitica.

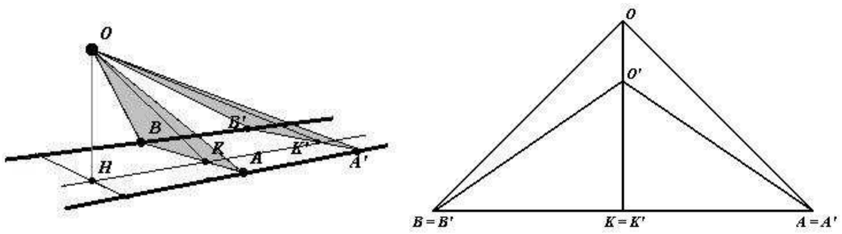


Figura 1.14: H non appartiene al piano β e sta nella striscia ab.

- L'occhio si trova fuori dal piano che contiene le rette parallele. In questo caso si proietta ortogonalmente l'occhio su quel piano e, se la proiezione H è interna alla striscia, si procede essenzialmente al solito modo: si divide l'angolo visivo, seguendo la dimostrazione suggerita da Euclide, in due parti.

  Poiché la retta per OH è perpendicolare al piano di base β, il piano α, che è individuato dalle rette incidenti OH e h, è perpendicolare al piano β. Considero KZ, la retta del piano α perpendicolare ad h e incidente con il segmento AB nel punto K. Per definizione[2] KZ è perpendicolare a tutte le rette di β passanti per K, quindi KZ è perpendicolare ad AB.

  Ora, per il teorema delle tre perpendicolari[3], si ha che AB è perpendicolare al piano individuato da h e KZ, cioè α. Quindi, ancora per definizione di perpendicolarità, AK sarà perpendicolare a tutte le rette passanti per il punto di intersezione K, e in particolare OK. Il segmento OK si mantiene perciò perpendicolare ad AK qualunque sia la posizione di A lungo la retta a.

  Si considerano pertanto i triangoli rettangoli OAK e OBK che si vengono a formare. Il triangolo OAK ha un cateto AK fisso e l'altro cateto OK sempre più lungo, quindi l'angolo $K\hat{O}A$ tende a zero, e analogamente $K\hat{O}B$.

  Notiamo che nel caso speciale in cui la proiezione ortogonale H cade su una delle due rette, ad esempio quella per B, la dimostrazione diventa più semplice poiché dobbiamo considerare un solo triangolo rettangolo e l'angolo visivo $A\hat{O}K$ tende a zero dato che il cateto AK $=$ AB è fisso (le due rette sono equidistanti) e l'altro cateto OK diventa sempre più lungo.

  Nel caso invece che il punto H stia fuori dalla striscia compresa tra le due parallele, supponiamo che sia, per fissare le idee, dalla parte

[2]Una retta r è perpendicolare ad un piano α in un suo punto A, se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per A.

[3]Se dal piede di una perpendicolare ad un piano γ si conduce la perpendicolare ad una qualsiasi retta r del piano γ, r risulta perpendicolare al piano individuato dalle prime due rette.

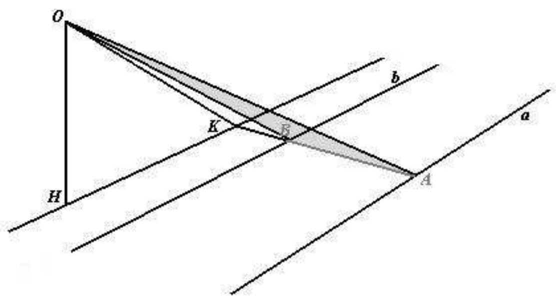


Figura 1.15: H non appartiene al piano di a e b e non sta nella striscia ab.

di B (figura 1.15). Consideriamo poi la retta per H parallela alle due rette date; l'angolo $A\hat{O}K$, per quello che abbiamo visto prima, tende a zero, e, a maggior ragione, tende a zero l'angolo visivo $A\hat{O}B$ che è più piccolo di quello.

Possiamo quindi concludere affermando, con Euclide, che segmenti paralleli vengono visti come se si avvicinassero sempre più tra loro, come se convergessero a un punto, ovunque sia il punto di vista, purché abbastanza lontano dai segmenti stessi. □

Vedere per esercizio che questo risultato si estende facilmente anche al caso in cui i segmenti paralleli tra loro siano più di due (come avevamo notato per l'esempio di figura 1.3).

È utile dare la seguente definizione.

Definizione 2. ('apparente incidenza di rette parallele') *Due rette parallele sono viste intersecarsi all'infinito in un punto se, dato un qualunque angolo ϵ, esiste un loro segmento di distanza che è visto sotto un angolo più piccolo o al più uguale a ϵ.*

Si può capire meglio questa definizione se pensiamo ai binari del treno che percorrano un lungo tratto piano e rettilineo: la distanza tra le rotaie è sempre la stessa (ossia le traversine hanno tutte la stessa lunghezza), ma più lontana è la traversina che guardiamo, più l'angolo con cui vediamo i suoi estremi è piccolo e, quindi, più essa ci appare piccola; fino al punto che, scelto un angolo ϵ piccolo quanto si vuole, possiamo ancora pensare che ci sia una traversina che vediamo con un angolo minore di ϵ. Questo è il modo matematico per dire che i binari del treno sembrano incidenti in un punto molto lontano, cioè convergono in un punto.

Il fatto che due o più segmenti paralleli si vedano convergere implica anche che nella loro rappresentazione pittorica, come vedremo meglio in seguito, debbano vedersi convergere. Se la pittura è su un piano, i prolungamenti devono passare tutti per uno stesso punto.

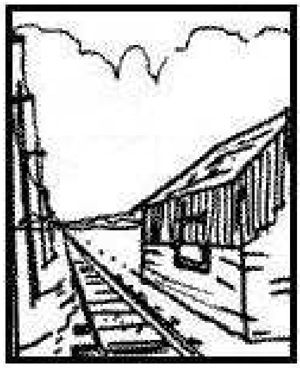


Figura 1.16: I binari del treno sembrano incidenti in un punto molto lontano.

Diamo ora alcune definizioni indispensabili per poter trattare dello spazio tridimensionale euclideo; vogliamo definire un sistema di riferimento intimamente connesso con l'occhio dell'osservatore: l'alto e il basso corrispondono alla posizione eretta e la destra e la sinistra alle nostre braccia alzate orizzontalmente (possiamo tenere presente come modello l'uomo vitruviano di Leonardo da Vinci).

Considerando la direzione basso-alto, e un piano passante per l'occhio e perpendicolare a questa direzione, individueremo un piano, detto **piano dell'orizzonte**. Un piano orizzontale sarà allora un qualunque piano ad esso parallelo.

I raggi visivi uscenti dall'occhio formano un cono, detto **cono visivo**. L'asse di questo cono, che giace sul piano dell'orizzonte, coincide con un raggio visivo che chiameremo **raggio principale** o raggio centrico e che indirizza lo sguardo verso un 'punto di fissazione', detto **punto centrico**.

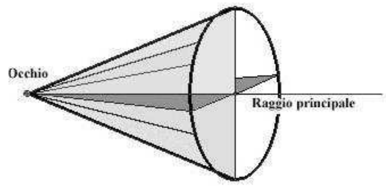
Chiameremo **piano (verticale) di profondità** il piano contenente il raggio principale e perpendicolare al piano di orizzonte.

Il **riferimento visivo** introdotto è schematizzato in figura 1.17.

Definizione 3. *Dato un riferimento visivo, diciamo che un segmento AB è posto longitudinalmente davanti all'occhio se non è perpendicolare al raggio principale.*

Definizione 4. *Dati due raggi OA e OB* **sopra il piano dell'orizzonte** *siano OA' e OB' le loro proiezioni ortogonali sul piano di profondità. Il raggio OA è più alto del raggio OB (e il punto A è* **visto più in alto** *del punto B) se l'angolo che OA' forma con il raggio principale è più grande dell'angolo che OB' forma con il raggio principale.*

In modo del tutto speculare, dati due raggi OA e OB **sotto il piano dell'orizzonte***, il raggio OA è più alto del raggio OB se l'angolo che OA'*



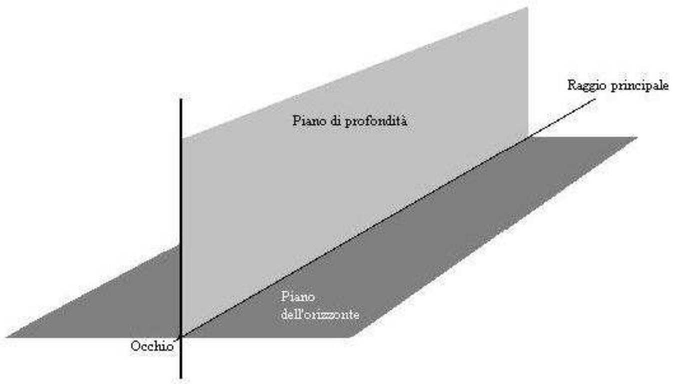


Figura 1.17: Sopra il cono visivo e sotto il riferimento visivo adottato.

forma con il raggio principale è più piccolo dell'angolo che OB' forma con il raggio principale.

Teorema 4. *Un qualunque segmento AB parallelo al piano dell'orizzonte e posto longitudinalmente davanti all'occhio, se si trova sopra il piano dell'orizzonte è visto deviare verso il basso; se invece si trova sotto è visto deviare verso l'alto.*

Dimostrazione. Svolgiamo la dimostrazione solo nel caso in cui il segmento AB si trovi sopra il piano dell'orizzonte; il caso in cui si trova di sotto è del tutto equivalente.

Ipotesi: AB è parallelo al piano dell'orizzonte, AB è posto sopra il piano dell'orizzonte, AB è posto longitudinalmente davanti all'occhio.

Tesi: un punto C del segmento AB che si allontana dall'occhio è visto abbassarsi.

Dato che AB è posto longitudinalmente rispetto a O, la sua proiezione ortogonale sul piano di profondità non può essere un punto. Sarà dunque un segmento $A'B'$.

Dato che il segmento AB è parallelo al piano dell'orizzonte, anche la sua proiezione, il segmento $A'B'$ sarà parallela a tale piano e quindi sarà parallela al raggio principale. Sul piano di profondità la situazione è esattamente come in figura 1.18.

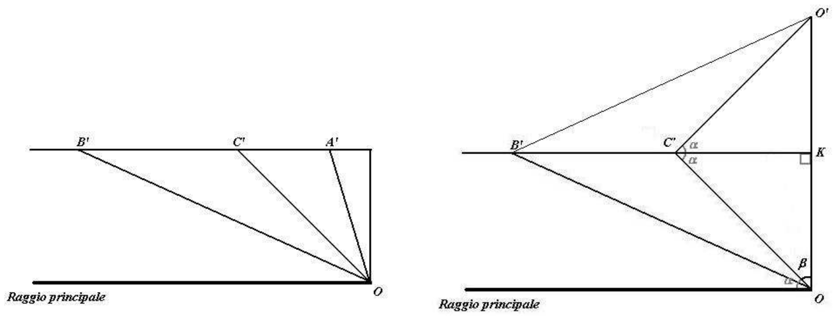


Figura 1.18: Teorema 2.1.1. A sinistra la proiezione di AB sul piano di profondità; a destra schema della dimostrazione.

Considero un punto C del segmanto AB. C' sia la sua proiezione sul piano di profondità. Poiché punti allineati vanno in punti allineati, C' sta sul segmento $A'B'$.

L'angolo che $C'O$ forma con il raggio principale diventa sempre più piccolo man mano che C si avvicina a B per il teorema del punto interno. Quindi, per la definizione di 'vedere più basso', segue che il punto C è visto abbassarsi. $\square$

Questo teorema è bene illustrato se guardiamo una pavimentazione orizzontale a mattonelle: le mattonelle più lontane vengono viste più in alto. Oppure quando guardiamo un soffitto a cassettoni i riquadri più lontani sembrano essere più in basso. Osserviamo anche che, se immaginiamo di prolungare il segmento AB (posto ad esempio sopra il piano dell'orizzonte), allontanando progressivamente B dall'occhio, esso ci apparirà scendere progressivamente avvicinandosi all'orizzonte senza mai toccarlo.

Introducendo analoghe definizioni di 'vedere più a destra' o 'più a sinistra' si può dimostrare il seguente:

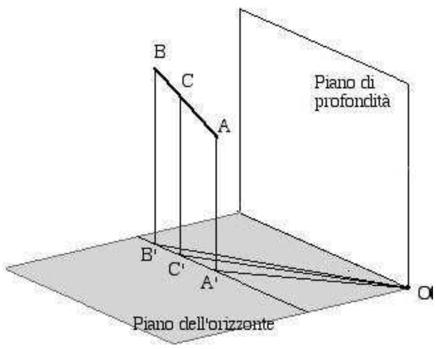


Figura 1.19: Teorema 5.

Teorema 5. *Un qualunque segmento AB parallelo al piano di profondità e posto longitudinalmente davanti all'occhio, se si trova a sinistra del piano di profondità è visto deviare verso destra, se si trova a destra è visto deviare verso sinistra.*

Esercizio 9. *Consideriamo un piano orizzontale posto sotto l'occhio e due quadrati sul piano che siano posti come nella figura.*

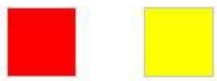
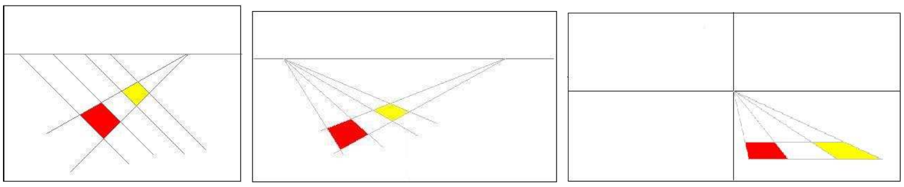


Figura 1.20: Esercizio 9.

Dire quali delle figure seguenti rappresentano, coerentemente con i teoremi visti, la visione dei due quadrati, motivando le risposte.

Inoltre quale delle tre figure rappresenta correttamente la visione dei due quadrati se l'osservatore è a sinistra di essi?



Appendice: definizione di distanza tra due rette

Definizione 5. *Due rette parallele (non coincidenti) hanno distanza minima che si misura su un segmento congiungente le due rette che giace su una retta perpendicolare ad entrambe.*

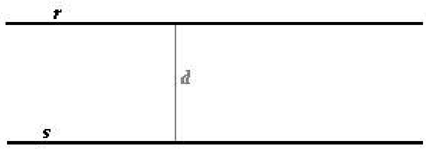


Figura 1.21: Distanza minima tra due rette parallele.

Per due rette incidenti la distanza minima non ha significato, perché essendo incidenti, nel punto di incidenza la distanza tra le due rette è nulla.

Per due rette sghembe r e s, siano α il piano contenente r e β il piano contenente s tali che α e β siano paralleli. La distanza (minima) tra r e s è la distanza tra i due piani.

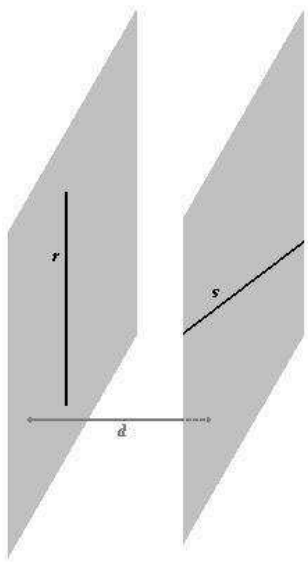


Figura 1.22: Distanza minima tra due rette sghembe.

Appendice del teorema 3

Teorema 6. *Segmenti paralleli visti da lontano appaiono non paralleli.*

Dimostrazione. Il teorema vale in ogni caso purché si aggiunga un'ipotesi, che molto opportunamente Euclide formula esplicitamente aggiungendo 'visti da lontano': il segmento di distanza AB deve essere abbastanza lontano dall'occhio. Qualunque sia la posizione dell'occhio, dentro o fuori la striscia compresa tra le due parallele, da un certo punto in poi, l'angolo con cui si vede il segmento di distanza AB diventa sempre più piccolo.

Notiamo che, quando l'occhio è fuori dalla striscia compresa tra le due rette parallele, l'angolo può anche aumentare inizialmente, ma, da un certo punto in poi, che può essere determinato con precisione, comincerà a decrescere tendendo a zero. Tutto questo può essere dimostrato rigorosamente sia per via sintetica che per via analitica. Noi qui daremo una dimostrazione analitica.

Fissiamo un sistema di coordinate come nella figura

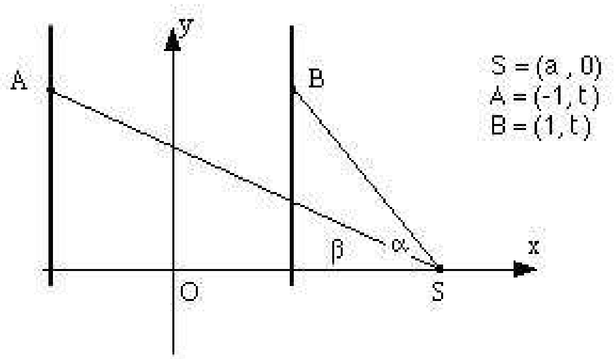


Figura 1.23: Sistema di riferimento scelto per la dimostrazione.

Supponiamo che l'occhio si trovi in S e sia θ l'angolo visivo $A\hat{S}B$ tale che $\theta = \alpha - \beta$. con cui viene visto il segmento AB.

Poiché

$$tan(\alpha) = \frac{t}{a-1}\,, tan(\beta) = \frac{t}{a+1}$$

abbiamo che

$$tan(\theta) = tan(\alpha - \beta) = \frac{tan(\alpha) - tan(\beta)}{1 + tan(\alpha tan(\beta))} =$$

$$= \frac{\frac{t}{a-1} - \frac{t}{a+1}}{1 + \frac{t^2}{a^2-1}} = \frac{2t}{a^2 - 1 + t^2}$$

Da questa formula vediamo che la tangente dell'angolo visivo è zero per t = 0 e per t che tende all'infinito e quindi l'angolo $\theta(t)$ si annulla per t = 0 e diventa sempre più piccolo man mano che il punto A si allontana da S sulla verticale. Per ragioni di continuità esisterà quindi una particolare posizione del segmento AB per la quale l'angolo ha un massimo. Per calcolare questa posizione basterà trovare il valore di t che annulla la derivata della funzione $\theta(t)$.

$\square$

1.3 Verso la prospettiva

1.3.1 Idea di base della prospettiva

Per procedere, ricapitoliamo le proprietà fondamentali della visione che abbiamo individuato la volta scorsa:

- Punti allineati si vedono allineati (ovvero una retta si vede ancora come una retta).
- Segmenti paralleli si vedono convergenti.
- Segmenti longitudinali paralleli al piano dell'orizzonte deviano in alto se sono sotto, in basso se sono sopra il piano dell'orizzonte stesso.
- Segmenti longitudinali paralleli al piano di profondità deviano verso destra se sono a sinistra, verso sinistra se sono a destra del piano di profondità stesso.
- Segmenti perpendicolari al raggio principale orizzontali (o verticali) non deviano, ma vengono visti orizzontali (o verticali).

Inoltre abbiamo verificato sperimentalmente che:

- I rapporti tra le lunghezze e le misure degli angoli risultano alterati.
- Linee che si intersecano si vedono ancora intersecanti.
- Oggetti di 3 dimensioni si possono vedere come di 2 o, apparentemente, di 1 dimensione a seconda del punto di vista scelto.

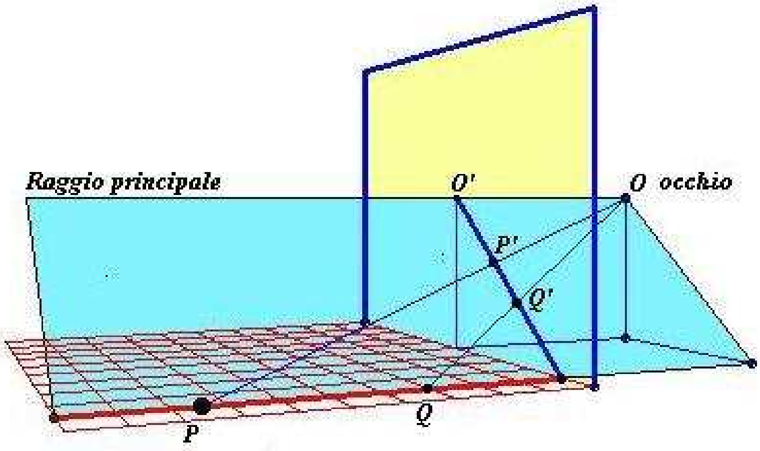
Vedremo che, grazie a queste semplici osservazioni, è possibile fare una rappresentazione prospettica abbastanza precisa di una determinata scena.

Immedesimiamoci in un pittore che voglia rappresentare con un quadro una scena che ha davanti (ad esempio una pavimentazione), tramite l'osservazione diretta.

Possiamo schematizzare la situazione come in figura.

L'idea base della prospettiva consiste nell'immaginare il quadro come una finestra attraverso la quale si vede la scena posta al di là (in effetti la parola *prospettiva* deriva dal latino perspicere che significa 'vedere attraverso'). Per determinare il punto del quadro che rappresenta un punto P della scena, bisogna considerare il raggio visivo che congiunge il punto stesso con l'occhio dell'osservatore: esso 'buca' il quadro in un punto P', che è l'immagine di P.

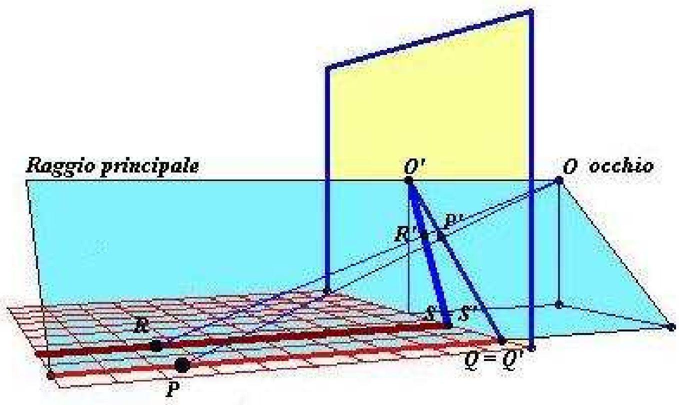
Osserviamo che lo stesso punto P' è l'immagine di ognuno dei punti che stanno sul raggio visivo che congiunge O con P. Questo è il motivo per cui nel rappresentare un oggetto tridimensionale in due dimensioni si perde la profondità ed è anche il mezzo che ci permette di realizzare il fenomeno dell'allineamento apparente definito nella sezione precedente.



É facile poi verificare che la retta per i punti P e Q che stanno sul pavimento continua ad essere una retta passante per le loro immagini P' e Q' sul piano del quadro. Infatti $P'Q'$ risulta essere l'intersezione del piano del quadro con il piano individuato dalla retta OP e dal raggio principale, e di conseguenza $P'Q'$ è una retta[4].

Perciò si ha anche che i punti che sono allineati sul pavimento, risultano allineati sul quadro. Allora questo modo di rappresentare la retta PQ rispetta la prima proprietà di geometria della visione che avevamo visto: punti allineati nella realtà si vedono come punti allineati.

Definiamo anche **linea di terra**, l'intersezione tra il piano del pavimento (detto anche **piano di terra**) con il piano del quadro e **linea trasversa** ogni linea ad essa parallela; chiamiamo inoltre **punto centrico** il punto di intersezione O' tra il raggio principale e il piano del quadro.



[4]Teorema: L'intersezione di due piani distinti che hanno in comune due punti A e B, hanno in comune tutta la retta AB e solo questa retta.

Se prendiamo, di nuovo sul pavimento, la retta per i punti R e S parallela a quella per P e Q, otterremo, sul piano del quadro, una retta $R'S'$ incidente nel punto O' con $P'Q'$. Sappiamo che PR = QS, ma sul quadro $P'R' < Q'S'$. Quindi, questo modo di rappresentare due rette parallele sul piano di terra rispetta la seconda proprietà di geometria della visione già vista: segmenti paralleli si vedono convergenti in un punto, detto **punto di fuga**. Notiamo inoltre che la retta OO' (cioè il raggio principale) è l'intersezione dei due piani generati rispettivamente da P, Q, O e da R, S, O, quindi, essendo PQ e RS parallele, OO' è parallela ad entrambe.

Osserviamo che il punto di fuga dipende dalla direzione delle rette parallele che si considerano, perciò, in generale, ne individueremo più di uno nella stessa scena, come possiamo notare nella figura 1.24.

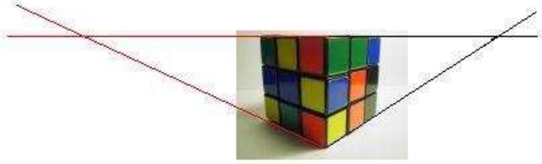


Figura 1.24: Guardando un cubo di Rubik da questo punto di vista si individuano due punti di fuga.

Ora, ricordando la figura 1.3, dimostriamo che nella realizzazione prospettica:

Proposizione 1. *Oggetti che poggiano sullo stesso piano e che sono paralleli tra di loro usano lo stesso punto di fuga. Oggetti che poggiano sullo stesso piano ma hanno diversa inclinazione usano punti di fuga diversi.*

Dimostrazione. Infatti se sul piano di terra oltre alla coppia di rette parallele PQ e RS di prima, considero un'altra coppia di rette parallele TU e VZ con direzione diversa da quella delle precedenti (analogamente a quanto visto per PQ e RS) le loro proiezioni $T'U'$ e $V'Z'$ risulteranno convergenti sul piano del quadro in un punto O''. Quindi la retta OO'' è l'intersezione dei due piani generati rispettivamente da T, U, O e da V, Z, O; essendo TU e VZ parallele, OO'' è parallela ad entrambe. Allora, OO' e OO'' sono due rette incidenti in O e quindi $O' \neq O''$. Se invece TU e VZ hanno la stessa direzione di PQ e RS, la retta OO'' è parallela a TU e VZ, ma anche a OO'. Quindi, poiché OO'' è parallela a OO' e poiché le due hanno il punto O in comune, segue che OO'' coincide con OO' e dunque O'' coincide con O'. □

Possiamo a questo punto definire la cosiddetta **linea di orizzonte**: è la retta individuata dall'intersezione del piano dell'orizzonte con il piano del quadro. Si tratta perciò di una linea teorica che è funzione della posizione dell'osservatore. La linea di orizzonte coincide con l'orizzonte (la linea di confine che separa la terra dal cielo) solo su grandi piani come l'oceano. La maggior parte delle volte elementi naturali (come montagne, colline e alberi) e oggetti costruiti dall'uomo (come i palazzi) fanno in modo che l'orizzonte sia sopra la linea dell'orizzonte. L'orizzonte in un luogo chiuso (come una casa) spesso non è visibile ma esiste comunque una linea di orizzonte teorica che rappresenta il punto di vista dell'osservatore.

Spesso lungo la linea dell'orizzonte risiedono i punti di fuga; in particolare i punti di fuga si trovano sulla linea di orizzonte quando gli oggetti stanno su piani orizzontali paralleli al terreno. Quando invece i piani su cui poggiano gli oggetti sono inclinati rispetto al terreno, allora i punti di fuga possono trovarsi sopra o sotto la linea di orizzonte.

Figura 1.25: Il punto di fuga, a secondo della pendenza del terreno può trovarsi sopra, sulla oppure sotto la linea dell'orizzonte.

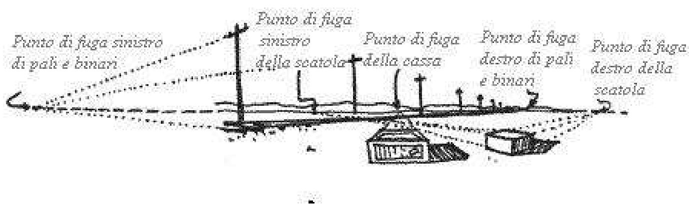


Figura 1.26: Nella figura sono rappresentati oggetti reali con i rispettivi punti di fuga, i quali, trovandosi tutti su un piano parallelo al terreno, sono tutti allineati sulla linea di orizzonte.

La definizione della linea di orizzonte, insieme con la proposizione 1, garantiscono la terza proprietà riscontrata nella geometria della visione: segmenti longitudinali paralleli al piano dell'orizzonte deviano in alto se sono sotto, in basso se sono sopra il piano dell'orizzonte stesso. Infatti, la linea di orizzonte sarà il luogo dei punti sul piano del quadro a cui tenderanno i segmenti longitudinali, dall'alto, se si trovano sopra la linea, oppure dal basso, se si trovano sotto la linea.

Possiamo ulteriormente generalizzare quanto afferma la proposizione 1, secondo quanto è visualizzato in figura 1.27, dicendo che

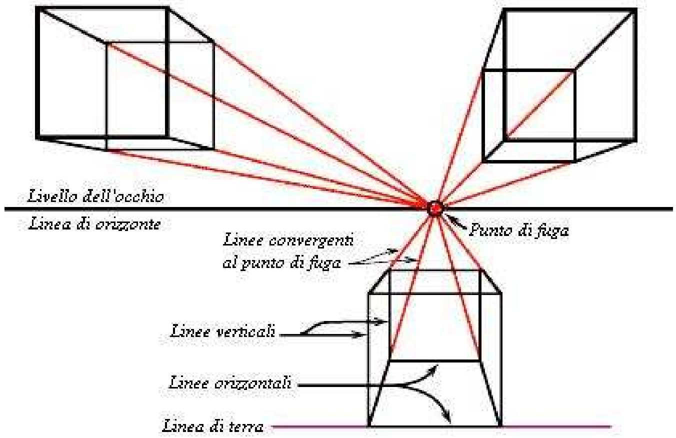


Figura 1.27: Nella figura vediamo rappresentato lo stesso cubo su piani diversi, ma paralleli fra loro. Sono evidenziate la linea di terra, la linea di orizzonte e il punto di fuga, che è lo stesso per tutte e tre le posizioni del cubo.

Proposizione 2. *Oggetti paralleli tra loro che poggiano su piani paralleli (non necessariamente sul piano di terra) usano lo stesso punto di fuga.*

Quest'ultima proposizione implica la terza e la quarta proprietà di geometria della visione viste alla fine della sezione precedente.

L'ultima proprietà segue banalmente dal fatto che una retta orizzontale è data dall'intersezione di un piano orizzontale con il piano del quadro, mentre la retta verticale è data dall'intersezione del piano di profondità con il piano del quadro.

1.3.2 Realizzare una pavimentazione

A questo punto proviamo a realizzare una pavimentazione di una stanza con delle mattonelle quadrate. Voi come fareste?

Come abbiamo visto, le rette del piano orizzontale che si allontanano perpendicolarmente alla linea di terra, devono essere disegnate sul quadro come segmenti che concorrono al punto centrico O. Dunque, stabiliti il punto centrico, che dipenderà dall'altezza dell'occhio dell'osservatore, e un'unità di misura con cui rappresentare le mattonelle, si possono facilmente disegnare le linee perpendicolari alla linea di terra.

Notiamo che l'infinito spazio che si estende dinanzi al pittore lungo la direzione perpendicolare al quadro si rappresenta tutto in una striscia limitata. Naturalmente punti equidistanti che si allontanano si rappresenteranno

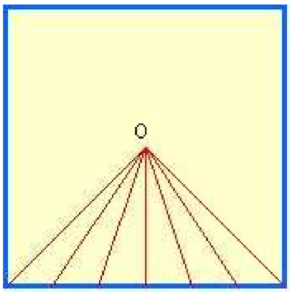


Figura 1.28: Primo passo per rappresentare una pavimentazione con mattonelle quadrate: disegnare le linee perpendicolari alla linea di terra.

in punti via via più vicini secondo rapporti precisi e non facili da determinare ad occhio in mancanza di un preciso quadro generale di riferimento geometrico. In particolare ci accorgiamo che disegnare le linee trasverse che delineano le mattonelle non è altrettanto semplice. Si può infatti osservare che se una linea trasversa è molto lontana dalla posizione del pittore, la sua proiezione sul quadro sarà più piccola e più vicina al punto centrico; se invece è molto vicina alla posizione del pittore, è più grande e può arrivare a coincidere con la linea di terra, ma non possiamo ancora dire come si distanzino tra loro. In che modo si dovranno disegnare le linee trasverse, affinché la rappresentazione del pavimento sia realistica?

Metodi per disegnare le linee trasverse

Vari metodi, più o meno empirici, sono stati ideati dai pittori per trovare la giusta proporzione con la quale rimpicciolire le distanze per dare l'impressione della profondità; ad esempio, pare che nel '400 fosse ampiamente utilizzato il **metodo delle superbipartienti**, criticato da Leon Battista Alberti nel suo *De Pictura*. Questo metodo consiste nel diminuire ogni volta di $\frac{1}{3}$ la rappresentazione di una distanza unitaria man mano che ci si allontana dalla linea di terra. Il risultato è mostrato dalla figura 1.29.

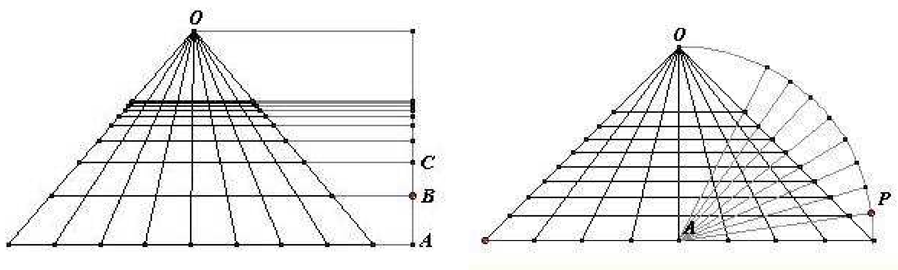


Figura 1.29: A sinistra il metodo delle superbipartienti: il segmento BC è $\frac{2}{3}$ il segmento AB. A destra il metodo illustrato da Danti.

Anche Danti [5] nel trattato *Le due regole della prospettiva pratica* (1583) espone, criticandole, alcune costruzioni sbagliate al tempo ancora in voga. In una di queste si fissa il punto centrico O e si divide la linea di base in un certo numero di parti, come al solito. Si traccia poi un quarto di circonferenza e si divide l'arco in un certo numero di parti uguali (si suggerisce di dividerlo in 15 parti uguali), si congiungono queste parti col punto A e si tracciano le parallele come mostrato sempre in figura 1.29.

Ad occhio la regola sembra buona. Come vedere che è sbagliata? Un modo è quello di trovare una proprietà che si sa che dovrebbe essere verificata se la regola fosse giusta, e vedere che invece non è rispettata. Alberti per dimostrare che il metodo delle superbipartienti è sbagliato si riferisce alle diagonali. Se la costruzione fosse giusta i punti diametralmente opposti sui vari trapezi che rappresentano le mattonelle del pavimento, dovrebbero essere allineati in quanto punti allineati si proiettano in punti allineati e vanno quindi disegnati su una stessa retta.

Se guardiamo i pavimenti realizzati col metodo delle superbipartienti ci accorgiamo che questa prorpietà è disattesa, che le diagonali 'curvano'. Anche nel caso illustrato da Danti, i punti sulle diagonali non si allineano, come si vede a occhio, e il difetto è tanto più pronunciato tanto più ci si avvicina al punto centrico, cosa che risulta chiaramente allargando l'angolo di partenza (figua 1.30).

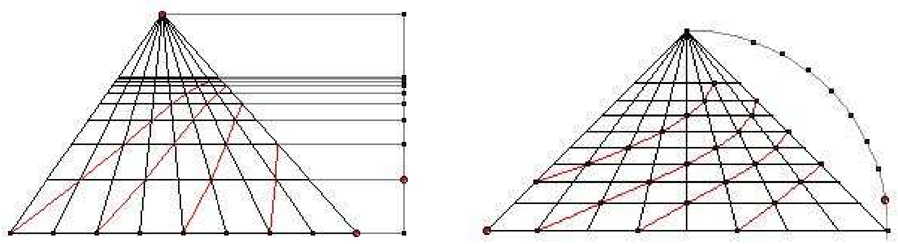


Figura 1.30: Né il metodo delle superbipartienti né l'altro metodo esposto da Danti rispettano la proprietà prospettica per cui punti allineati si proiettano in punti allineati.

Il 'modo ottimo' di Alberti

Alberti per primo scrive 'ad uso dei pittori' nel *De Pictura* un metodo corretto dal punto di vista prospettico e molto semplice da realizzare per rappresentare il giusto degradare delle linee trasverse man mano che si avvicinano all'orizzonte.

[5]Ignazio (o Egnatio) Danti, vescovo cattolico, al secolo Pellegrino Rainaldi Danti (Perugia, aprile 1536 - Alatri, 19 ottobre 1586). É stato un matematico, astronomo e cosmografo italiano.

É evidente che se un punto P ha la distanza PK dalla linea di terra (diciamo 4 braccia per fissare le idee), e se l'occhio è alla distanza OH dal quadro (diciamo 5 braccia), allora proiettando il punto P sul quadro otteniamo il punto P' che risolve il nosro problema. Basterebbe dunque riportare sul piano del quadro, con la stessa scala, la distanza dell'occhio e la distanza PK per poi proiettare e trovare la posizione della retta trasversa. É evidente

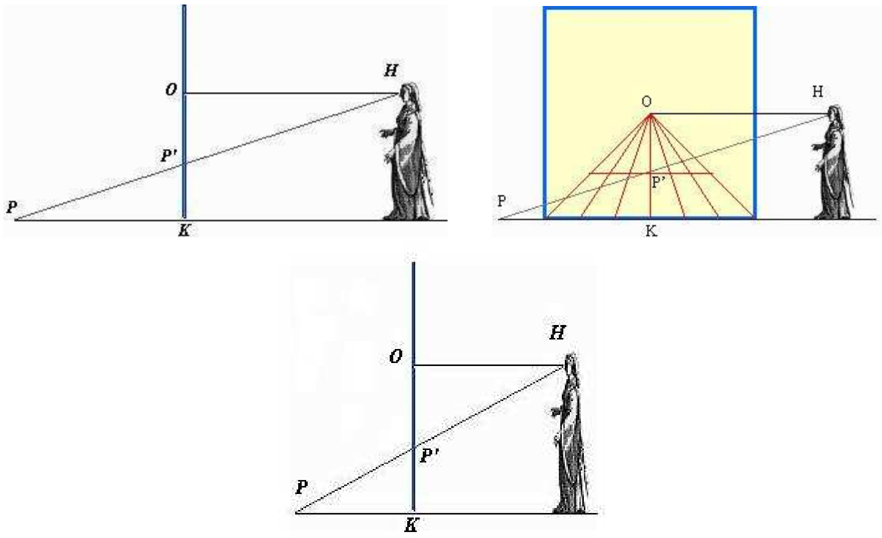


Figura 1.31: Idea di Alberti per realizzare le linee trasverse.

che questo metodo diventa molto scomodo, fino a diventare impraticabile, se la distanza dell'occhio diventa grande o se si devono disegnare delle linee trasverse molto lontane. La costruzione insomma, per poter essere eseguita, potrebbe richiedere molto spazio anche esterno allo spazio del dipinto, non sempre disponibile.

Alberti suggerisce, in modo piuttosto oscuro per la verità, un nuovo metodo per ovviare a questa difficoltà: il 'modo ottimo'. L'interpretazione seguente è dovuta a Pietro Roccasecca. L'osservazione cruciale implicita nel modo ottimo è che se si rimpicciolisce o si ingrandisce in proporzione la figura lungo la sola direzione orizzontale, lasciando inalterate le lunghezze nella direzione verticale ossia se si trasforma il piano con un'affinità di centro K e rapporti di scala w lungo la direzione orizzontale e 1 lungo la direzione verticale, allora la distanza KP' non cambia. Dimostriamo questa osservazione con la teoria della similitudine:

Poiché i triangoli $P'OH$ e $P'KP$ sono simili,

$$\frac{OP'}{P'K} = \frac{HO}{KP}$$

.

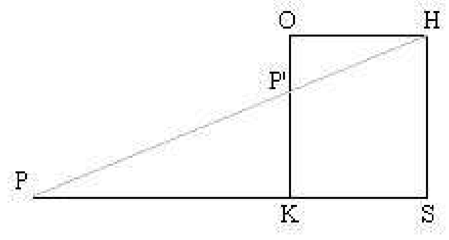


Figura 1.32:

Essendo il segmento OK fissato (è, nella scala del quadro, l'altezza dell'occhio da terra) il punto P' è univocamente determinato dal rapporto

$$\frac{HO}{KP} = \frac{SK}{KP}$$

Questo è il rapporto tra distanza dell'occhio e distanza della linea trasversa dal quadro e tale rapporto può essere realizzato su un segmento PS piccolo quanto si vuole.

Se, ad esempio questo rapporto è come $5 : 4$, basterà dividere il segmento PS (qualunque sia la sua lunghezza) in 9 parti uguali e prendere il punto K distante 5 parti da S e 4 da P.

Questa osservazione consente di sviluppare l'intera costruzione in un piccolo spazio, ad esempio la cornice del quadro.

Quindi, il modo ottimo di Alberti per rappresentare una pavimentazione di mattonelle quadrate consiste nei passi seguenti:

1. Rappresentazione delle linee di profondità.
    - Stabilita la grandezza del quadro si scelga innanzitutto l'altezza h del disegno di un uomo in primo piano.
    - Stimando l'altezza reale di un uomo di circa 3 braccia, si divida la misura scelta per il dipinto in 3 parti uguali, trovando in tal modo il corrispondente, in scala, di un braccio.
    - Si fissi il 'punto centrico, o punto di fuga principale', a una distanza dalla base del quadro pari all'altezza h scelta, e si suddivida la base in tante parti lunghe $\frac{h}{3}$.
    - Si uniscano poi gli estremi di questa suddivisione con il punto centrico, ottenendo così la rappresentazione delle linee di profondità del piano di terra, perpendicolari al piano del quadro.

2. Rappresentazione delle linee trasverse.

    - Si scelga come si vuole uno spazio ausiliario, anche piccolo, su cui tracciare una linea orizzontale AS allineata alla linea di base, divisa in parti uguali piccole a piacere, che danno luogo a una nuova scala con cui misurare le distanze. Alberti suggeriva ai pittori di lavorare sulla cornice del quadro.
    - Sopra una delle sue estremità, alla stessa altezza del punto centrico, si collochi un punto H.
    - Da questo punto H si traccino le congiungenti alle partizioni della linea sottostante, e quindi, stabilita nella scala precedente una distanza HK corrispondente a quella tra l'occhio e la pittura, dal punto K si tracci una perpendicolare alla linea orizzontale.
    - Le intersezioni della verticale con le congiungenti daranno la successione delle linee trasverse.

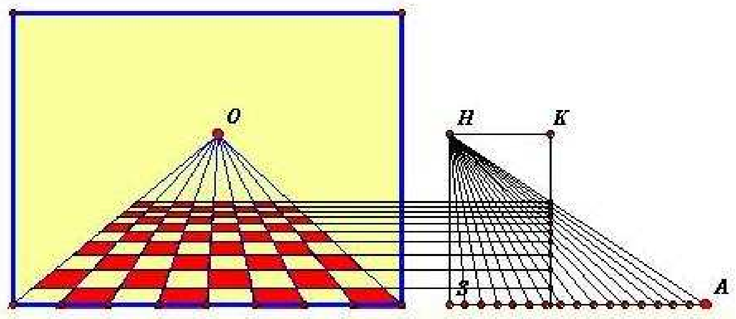


Figura 1.33: Il modo ottimo di Alberti.

Esercizio 10. *Provare a realizzare la pavimentazione con mattonelle quadrate utilizzando il modo ottimo di Alberti.*

1.4 Piero della Francesca e la prospettiva

Piero della Francesca nel *De prospectiva pingendi* espone per la prima volta, imitando il metodo assiomatico deduttivo di Euclide, le basi geometriche della rappresentazione prospettica. Il punto di partenza è quello di individuare alcune (il minor numero possibile) condizioni necessarie che una corretta rappresentazione prospettica deve soddisfare, e, usando quelle condizioni, sviluppare una costruzione che permetta di ricostruire fedelmente la proiezione, da un determinato punto di vista, dei punti di un piano (reale) orizzontale su un piano (degradato[6]) verticale. Ecco, nella sostanza, le condizioni che usa Piero:

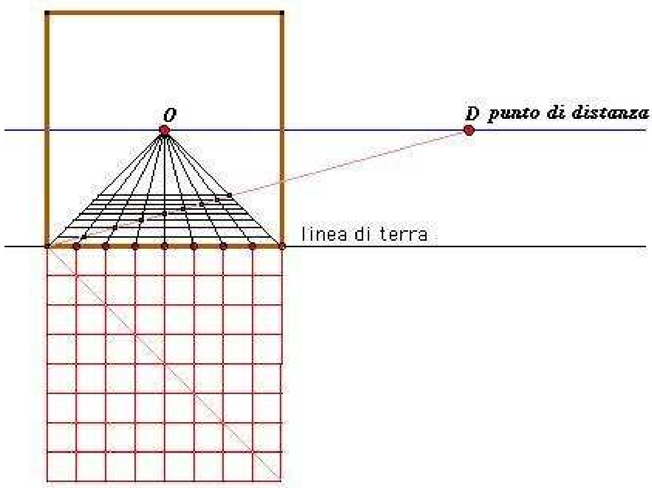


Figura 1.34: Il metodo di Piero della Francesca.

1. *La retta in cui si incontrano i due piani è fissa punto per punto.*

   Questa retta sarà quindi rappresentata, sul quadro, con una linea (la linea di terra) sulla quale (in scala) si rappresentano le distanze reali rispetto a una fissata unità di misura.

2. *Le rette del piano reale perpendicolari alla linea di terra si rappresentano con segmenti che concorrono in un punto.*

   É questo punto, indicato con O, il punto centrico di Alberti. La posizione di questo punto sul piano verticale del quadro, corrisponde (nel-

[6]Piero usa il termine 'degradare' per indicare il cambiamento di misura dell'oggetto reale nella sua proiezione sul quadro e, per estensione, la proiezione stessa. Così, per esempio, 'degradare la base di un quadrato' significa trovarne la lunghezza nella rappresentazione prospettica, e la 'base degradata' è la rappresentazione sul quadro del lato del quadrato.

la scala fissata) alla proiezione ortogonale dell'occhio sul piano verticale. La linea del piano degradato passante per O e parallela alla linea di terra si chiama orizzonte.

3. *Le linee del piano reale parallele alla linea di terra si rappresentano con linee parallele alla linea di terra.*

4. *Una data linea diagonale (cioè inclinata di 45 gradi)* [7] *si rappresenta con una linea che incontra in D, il punto di distanza, l'orizzonte. La distanza OD (in scala) corrisponde alla distanza dell'occhio dal quadro.*

L'idea grafica di Piero è intanto di rappresentare le parti di spazio che si vuole rappresentare (quella sul piano reale e quella sul piano degradato) come due quadrati su uno stesso foglio, con un lato (la linea di terra) comune.

Usando le condizioni che abbiamo elencate e che sono necessarie, Piero descrive una costruzione che permette di realizzare, fissata una posizione dell'occhio, la corretta degradazione di un piano quadrato orizzontale.

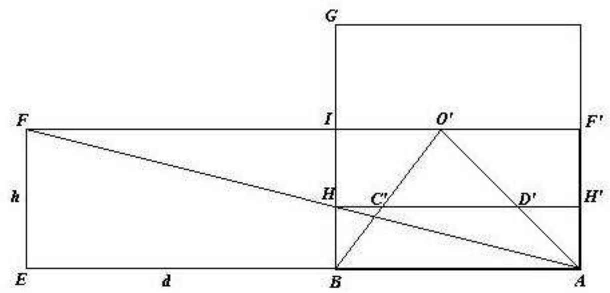


Figura 1.35: Descrizione della costruzione di Piero della Francesca.

Costruzione:

- Sia α il piano del quadro nel quale vogliamo realizzare l'immagine degradata di un piano di base quadrato di lato AB che si estende in profondità su un piano orizzontale perpendicolare al quadro. Sia h l'altezza dell'occhio da terra e d la sua distanza dal quadro.

- Sul piano del quadro prolunghiamo la linea di terra e, a partire da B, si riporti $EB = d$, mentre sulla perpendicolare in E si riporti $FE = h$. Sia H il punto di intersezione tra FA e BG.

[7] La diagonale inclinata di 45 gradi è il caso utilizzato più frequentemente da Piero della Francesca e corrisponde a quello in cui le mattonelle sono quadrate, ma la tecnica funziona anche per mattonelle rettangolari, dove le diagonali hanno una diversa inclinazione.

- Da H e da F si traccino le parallele HH' e FF' a AB. Su FF' si scelga il punto O', proiezione dell'occhio sul piano, e si congiunga O' con A e con B.

- Il trapezio $ABC'D'$ così ottenuto è il piano quadrato di base degradato.

Vediamo ora una serie di risultati che garantiscono che la costruzione di Piero è corretta.

Osservazione 1. *Si verifica che $O'D = BE = d$, ossia, facendo riferimento alla figura 1.36, che $FD = IO'$.*

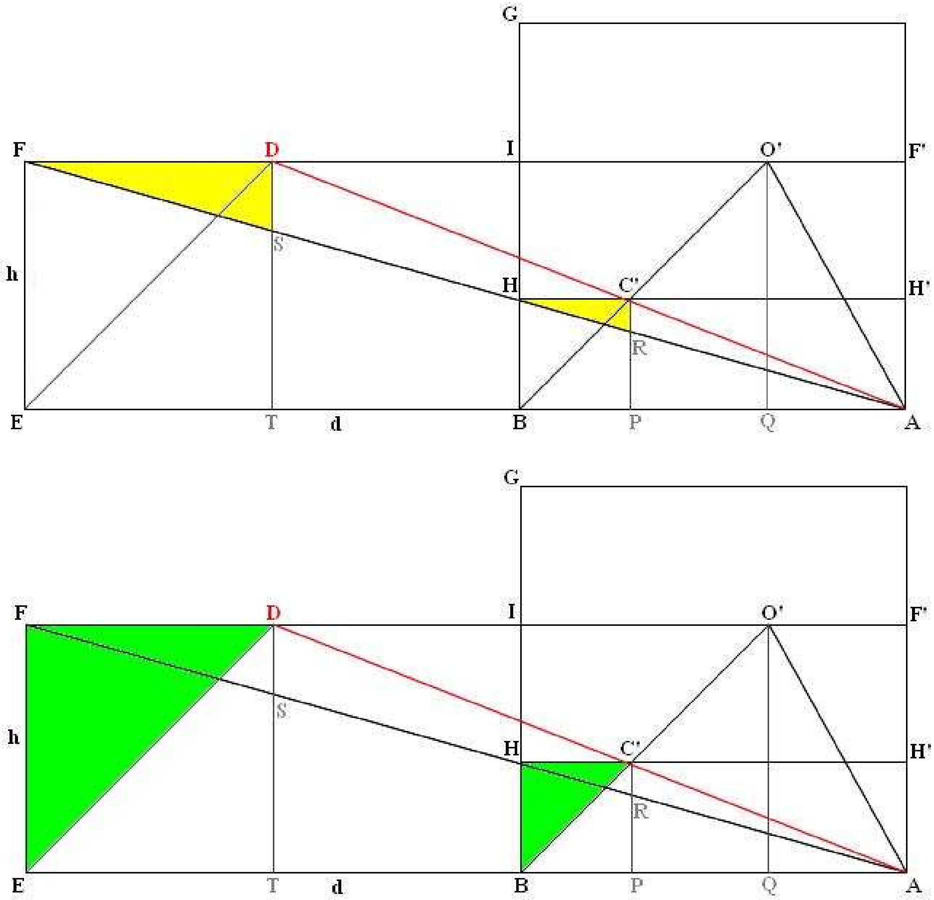


Figura 1.36: Dimostrazione dell'osservazione 1.

Dimostrazione. Consideriamo le due rette AD e AF. Per il Teorema di Talete, $C'H : DF = FS : HR$ e quindi i triangoli rettangoli $C'RH$ e DSF risultano simili. Applicando di nuovo il Teorema di Talete alle due rette AF e AE, otteniamo stavolta che $HB : FE = RH : SF = C'H : DF$, ossia i triangoli $C'BH$ e DFE sono simili. Osservando che $C'BH$ è simile a $O'BI$ e che $IB = FE$, segue che $O'BI \equiv DEF$ e quindi $O'I = DF$. □

Teorema 7. *Dati due segmenti paralleli AB e $A'B'$ supponiamo che le rette AA' e BB' si incontrino in O. Sia C un punto del primo segmento e C' un punto del secondo.*

Allora, se la retta CC' passa per O, vale che $AC : CB = A'C' : C'B'$.

Viceversa, se vale la proporzione precedente, le tre rette sono convergenti.

Dimostrazione. Caso diretto. Poiché AC è parallela a $A'C'$, i triangoli ACO

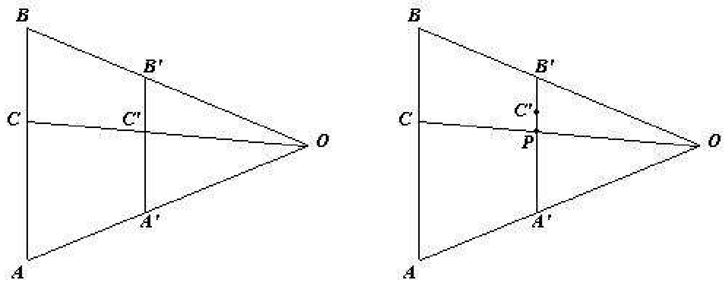


Figura 1.37: Teorema 7. L'immagine di sinistra è riferita al caso diretto, mentre quella a destra al caso inverso.

e $A'C'O$ sono simili e quindi

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CO}{C'O}$$

Anche i triangoli BCO e $B'C'O$ sono simili e quindi

$$\frac{CB}{C'B'} = \frac{CO}{C'O}$$

Confrontando le due uguaglianze abbiamo

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

Caso inverso.

Consideriamo la retta OC e sia P il punto in cui tale retta incontra la retta $A'B'$. Basterà dimostrare che P coincide con C'. Possiamo intanto applicare la parte del teorema che abbiamo già dimostrato ai punti A', P, B' e otteniamo

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'P}{PB'}$$

D'altra parte, per ipotesi

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

Confrontando le due uguaglianze abbiamo

$$\frac{A'P}{PB'} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

Poiché esiste un unico punto che divide un segmento secondo un dato rapporto, si ha che $P = C'$. □

Questo teorema, potendosi applicare alla proiezione di segmenti paralleli al piano del quadro sul quadro stesso, assume un'importanza rilevante nell'impostazione matematica di Piero e individua una direzione privilegiata, quella parallela al quadro, per la quale è facile realizzare correttamente le degradazioni, usando il fatto che i rapporti si conservano.

Calcoliamo ora quanto dovrà essere la lunghezza del segmento degradato con il metodo descritto da Piero.

Teorema 8. *Un segmento DC di lunghezza x parallelo al quadro degrada in un segmento $D'C'$ ad esso parallelo la cui lunghezza $\bar{x}$ vale*

$$\bar{x} = \frac{d \cdot x}{d + y}$$

dove d è la distanza dell'occhio dal quadro e y è la distanza di DC dal quadro.

Dimostrazione. Supponiamo di essere nella situazione di figura 1.38. Sia il segmento DC parallelo al piano del quadro α e l'occhio sia posto in O. Consideriamo il piano β per DC perpendicolare a α.

Sia R la proiezione ortogonale di O sul piano β. Consideriamo infine la retta per R perpendicolare al piano α. Tale retta incontra α in Q e DC (o il suo prolungamento) nel punto P. In questo modo PQ, essendo perpendicolare a α e al segmento DC, diventa la distanza y del segmento DC dal quadro e QR la distanza d dell'occhio dal quadro.

Osserviamo che poiché DC è parallelo a $D'C'$, il triangolo ODC è simile al triangolo $OD'C'$ e OP, OP' sono le rispettive altezze dei due triangoli; dunque vale: $\frac{\bar{x}}{x} = \frac{D'C'}{DC} = \frac{OP'}{OP}$

D'altra parte per il teorema di Talete $\frac{OP'}{OP} = \frac{QR}{PR} = \frac{d}{d+y}$

da cui segue la tesi. □

Teorema 9. *Il trapezio $ABC'D'$ così ottenuto è il piano quadrato di base degradato.*

Dimostrazione. La degradazione del quadrato che stiamo cercando deve necessariamente portare a un quadrilatero, dal momento che la proiezione trasforma punti allineati in punti allineati. Il lato più lontano DC, essendo parallelo al quadro, si trasforma in un segmento $D'C'$, pure parallelo alla linea di base AB. Dunque il quadrato si trasforma in un trapezio. Quello che abbiamo ottenuto si basa sul fatto che è possibile trovare la proiezione di un

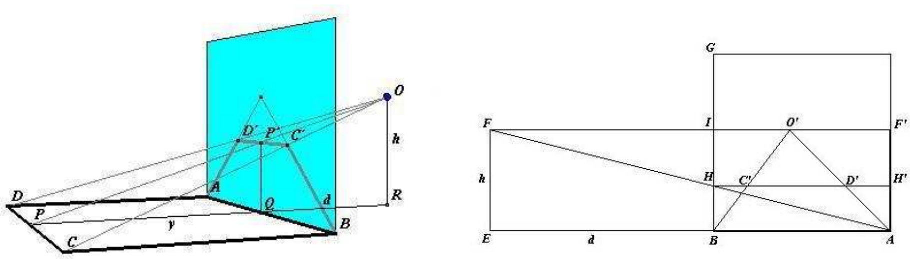


Figura 1.38: L'immagine a sinistra è da riferirsi sia al teorema 8 che al teorema 9. Quella a destra al teorema 9.

punto P del piano reale quando questo punto sia definito dall'intersezione di due rette delle quali sappiamo trovare, sulla base delle condizioni ammesse, la proiezione. Questo metodo sarà usato da Piero per trasformare la pianta di una qualunque figura.

Determiniamo l'altezza di tale trapezio.

Consideriamo il piede Q della perpendicolare alla linea di terra passante per il punto centrico O' e il segmento PQ di distanza tra AB e CD.

La proiezione $P'Q$ di PQ sul piano del quadro, dovendo convergere al punto centrico, è anch'essa perpendicolare alla linea di terra, per l'unicità della perpendicolare, ed è così l'altezza del trapezio.

La misura di $P'Q$ è riportata sul lato del quadro, in HB, seguendo il secondo punto della costruzione di Piero. Infatti il triangolo AEF è per costruzione uguale al triangolo OPR e la perpendicolare HB definisce un triangolo ABH uguale al triangolo $PP'Q$ perché $PQ = BC = AB$; da cui $HB = P'Q$.

Occorre verificare ora che la base minore $D'C'$ del trapezio ottenuto con la costruzione di Piero rispetta il teorema della degradazione di grandezze parallele e che quindi

$$D'C' = \frac{EB \cdot EA}{EB + EA}$$

Ma questo è vero perché il rapporto tra le basi del trapezio è uguale al rapporto tra le altezze dei triangoli simili $OC'D'$ e OCD, cioè al rapporto $\frac{IH}{EF}$. Poiché i triangoli FIH e AEF sono simili, tale rapporto è proprio $\frac{EB}{EA}$. Segue la tesi. □

Notiamo che la misura di $D'C'$ dipende solo dalla distanza d dell'occhio dal quadro e dalla profondità y del quadrato; per cui, fissata d, ovunque si posizioni O, si trova la medesima degradazione del quadrato ABCD. Piero, pur essendone consapevole, preferisce per l'occhio la posizione centrale [8].

[8] «Perché mecti tu l'ochio nel mezzo? perché me pare più conveniente a vedere il lavoro; nientedimeno se po mectare dove a l'omo piaci». Piero della Francesca, *De prospectiva*

Inoltre questa costruzione è molto importante perché mette in relazione la forma del trapezio con la posizione dell'occhio e perché, successivamente, sarà solo a partire dal trapezio che l'intera proiezione, punto per punto, sarà determinata senza più ricorrere al centro di proiezione. La procedura indicata da Piero è molto moderna e prelude alle nuove vedute sulle trasformazioni proiettive. La figura 1.39 mostra come sia sufficiente il trapezio per costruire la corretta prospettiva di un pavimento di base quadrata ricoperto di mattonelle quadrate.

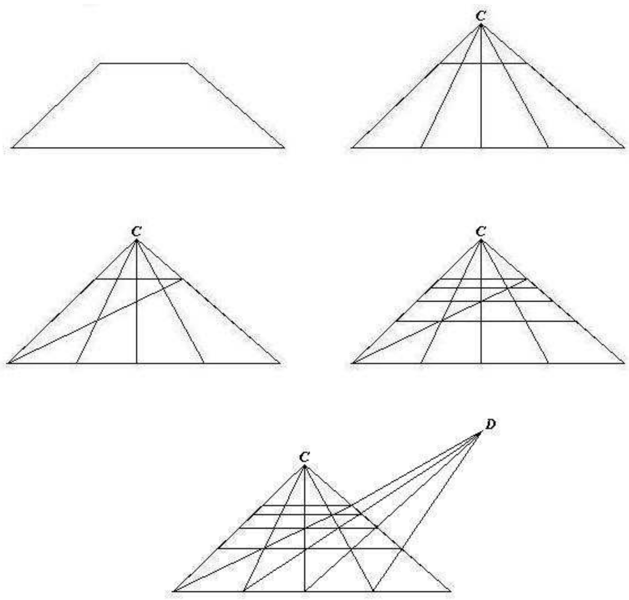


Figura 1.39: L'omologia di Piero della Francesca.

A questo punto resta il problema di vedere se questa costruzione realizza effettivamente la proiezione del piano reale in quello degradato; ci si potrebbe chiedere, ad esempio, se le diagonali di tutti i trapezi sono allineate e se convergono tutte sia a destra che a sinistra ai punti D e D', cosa che non sembra ovvia dalla costruzione.

Tuttavia le verifiche diventerebbero inutili qualora si riuscisse a dimostrare che le condizioni elencate, sono sufficienti per poter concludere che la trasformazione è di fatto una proiezione. In questo caso, infatti, tutte le proprietà delle proiezioni si ritroverebbero nel nostro disegno. La cosa fondamentale di questa costruzione, che Piero usa continuamente, è che essa *individua in mo-*

pingendi.

do univoco una procedura, basata sulle premesse precedenti, per trasformare ogni punto del piano reale e non solo i nodi della rete quadrettata.

La procedura è la seguente: sia P un qualunque punto del piano reale

(a) tracciamo per P la perpendicolare PQ alla linea di terra. Questa linea si trasforma in un segmento per Q (Q è fisso per la condizione 1) e per O (condizione 2). Dunque il punto P', proiezione di P, dovrà trovarsi su questo segmento.

(b) tracciamo per P la parallela alla linea di terra fino ad incontrare la diagonale nel punto R. Non sappiamo ancora come si trasforma questa parallela perché la condizione 3 ci dice solo che si trasforma mantenedosi parallela alla linea di terra ma non sappiamo ancora a quale livello. Il punto R invece si deve trasformare in un punto R' che sta sulla proiezione della diagonale che conosciamo (per la condizione 4).

(c) da R tracciamo la perpendicolare RS alla linea di terra. Il punto R è ora individuato dalla diagonale e dalla perpendicolare, due rette che sappiamo proiettare. Una volta trovato R', si potrà tracciare la parallela per R' alla linea di terra e su questa retta (per la condizione 3) dovrà trovarsi anche P' che quindi resta univocamente individuato. La figura 1.40, passo per passo, ripercorre la procedura precedente.

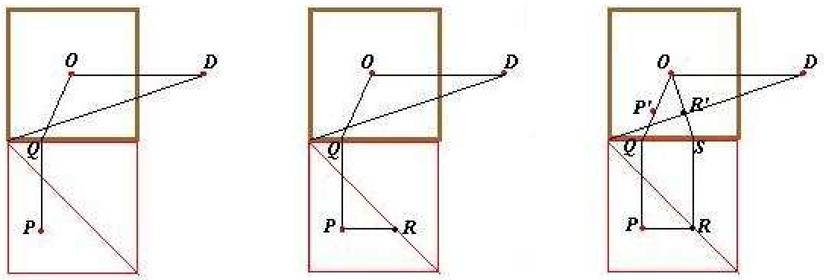


Figura 1.40: Il metodo di Piero della Francesca realizza effettivamente la proiezione di ogni punto del piano reale in quello degradato.

Il fatto che questa procedura fondata sulle condizioni precedenti permetta di costruire, nella scala fissata, la proiezione di un qualunque punto del piano reale, ci consente di dimostrare che la costruzione è geometricamente corretta.

La costruzione di Piero, come anche quella di Alberti, permette di ricostruire esattamente la posizione dell'occhio nello spazio tridimensionale e questo permette non solo di dimostrare la correttezza geometrica della costruzione, ripercorrendo come abbiamo fatto, all'inverso i vari passi, ma anche di cambiare la prospettiva a piacimento, cambiando la posizione dell'occhio teoricamente, senza dover di fatto mettersi in quella posizione, osservare la realtà e riprodurla sul quadro. Una volta ottenuta una rappresentazione prospettica diventa possibile modificare arbitrariamente il punto di vista, sulla base di esigenze estetiche o progettuali. Un ottimo esempio è la Flagellazione di Piero della Francesca dove il punto centrico, ossia la proiezione dell'occhio, è molto basso rispetto ai personaggi raffigurati, come se il pittore avesse ripreso la scena stando in ginocchio!

Esercizio 11. *Provate a realizzare una pavimentazione seguendo il metodo di Piero della Francesca descritto all'inizio della sezione. Verificate che, partendo da un trapezio identico a quello che risulta dal vostro disegno, si poteva costruire in modo più immediato la stessa pavimentazione.*

Esercizio 12. *Vedete se la seguente Presentazione nel tempio (1432-34) di Beato Angelico utilizza il modo ottimo di Alberti per degradare le colonne (figura 1.41).*

Figura 1.41: Beato Angelico, *Presentazione nel tempio*, 1432-34.

1.5 Geometria proiettiva

Dopo aver visto com'è nata la prospettiva e come si è sviluppata nel tempo, poniamo attenzione a come abbiamo fatto tutte le proiezioni per trasformare oggetti tridimensionali in oggetti bidimensionali appartenenti al piano del quadro.

In gioco ci sono un oggetto dello spazio (ciò che si vuole proiettare), il punto di vista (ossia un punto da cui si proietta), il piano del quadro (il piano su cui effettuiamo la proiezione).

Per realizzare oggetti in prospettiva, la posizione reciproca di questi tre oggetti è la seguente: il piano del quadro è collocato tra il punto di vista e l'oggetto da rappresentare.

Se scambiamo l'ordine di questi tre, che cosa otteniamo? Ci vengono in mente situazioni reali in cui questi tre sono in un altro ordine?

Sono esempi di proiezioni:

1. l'ombra di un oggetto proiettata da una lampadina. Notiamo che in questo caso la posizione reciproca dei tre oggetti di prima sarà: punto, oggetto da proiettare e piano su cui si proietta.

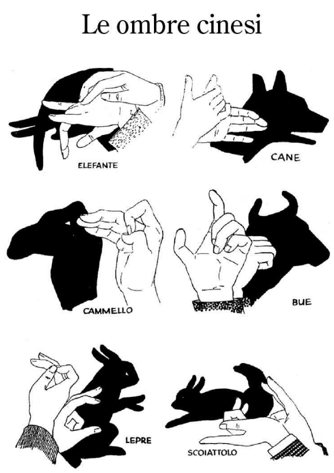


Figura 1.42: Le ombre cinesi sono l'effetto di una proiezione.

2. il principio del foro stenopeico, usato dai fotografi, in cui il punto da cui si proietta si trova sempre tra l'oggetto e il piano su cui si proietta. Si tratta del principio con il quale funziona la cosiddetta 'camera obscura': se la luce riflessa da una scena illuminata entra attraverso un piccolo foro in una stanza buia, sulla parete opposta si forma un'immagine inversa di detta scena esterna.

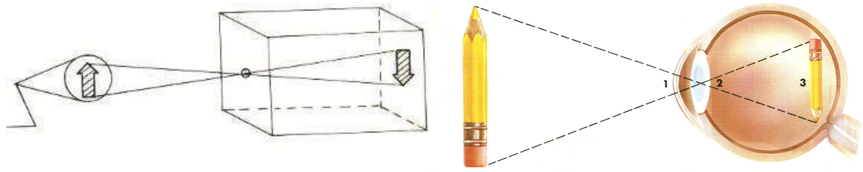


Figura 1.43: A sinistra la descrizione del principio del foro stenopeico e a destra l'occhio umano, foro stenopeico naturale.

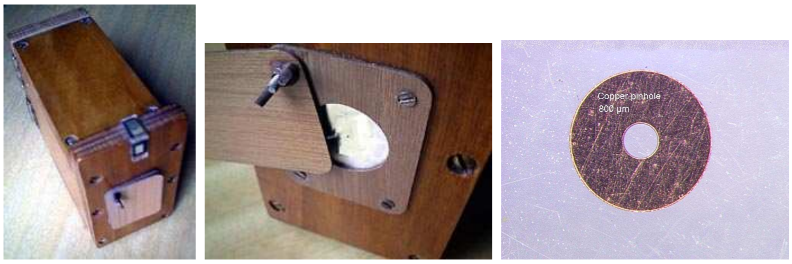
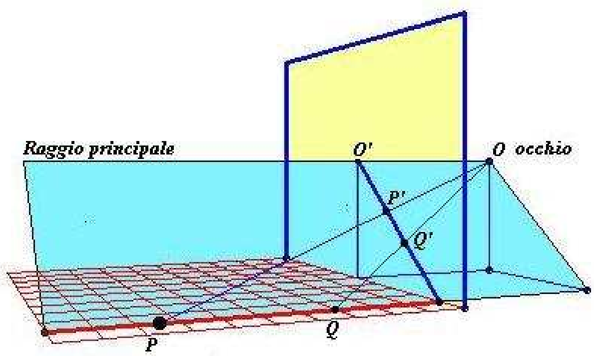


Figura 1.44: A sinistra immagine di una camera oscura. L'immagine nel centro evidenzia il foro stenopeico della camera oscura. A destra un esempio di foro stenopeico.

Proviamo perciò a generalizzare dal punto di vista matematico quanto abbiamo visto negli esempi precedenti.

1.5.1 I punti all'infinito e il piano proiettivo

Abbiamo visto come la proiezione del semipiano del pavimento sul piano del quadro effettuata da un punto in cui è posto l'occhio avvenga tramite l'intersezione del raggio visivo che unisce l'occhio con un generico punto P con il quadro. Il punto P' lo abbiamo identificato come la proiezione di P. Tra i punti si crea perciò un legame 'uno a uno': un punto del quadro viene associato ad un solo punto del semipiano che ha di fronte. Considerando la retta r, per ogni punto appartenente ad essa, si trova un punto corrispondente sul quadro e più il punto di r si allontana tendendo all'infinito, più il suo proiettato si avvicina al punto centrico.



Nel punto centrico però questa corrispondenza non c'è: esso infatti non risulta immagine di alcun punto del semipiano di base, dal momento che il raggio visivo per il punto centrico è parallelo al semipiano stesso. Per avere una corrispondenza totale fra i punti del semipiano di base e i suoi punti proiettati sul quadro, occorre allora aggiungere al piano euclideo di base un 'punto all'infinito' da associare al punto centrico. Questo punto all'infinito appartiene a tutte le rette parallele a r, dato che, come avevamo precedentemente dimostrato, rette parallele hanno stesso punto di fuga e quindi avranno lo stesso corrispondente punto all'infinito. Inoltre avevamo dimostrato che il punto di fuga delle rette parallele giacenti su uno stesso piano dipende dalla direzione di tali rette, quindi possiamo dare delle nuove definizioni.

Definizione 6. *Chiamiamo* **punto all'infinito** *di una retta la sua direzione.*

Poiché le direzioni possibili delle rette parallele giacenti su un piano sono infinite, troveremo infiniti punti all'infinito giacenti sulla stessa retta.

Definizione 7. *Diciamo* **retta all'infinito** *di un dato piano l'insieme di tutti i suoi punti all'infinito.*

E quindi si dice **piano proiettivo** *il piano euclideo completato con i punti (e la retta) all'infinito.*

Dobbiamo al matematico G. Desargues, vissuto nella prima metà del XVII secolo l'idea rivoluzionaria della definizione e dell'introduzione dei punti all'infinito.

Osservazione 2. *Per due punti distinti (al finito o all'infinito) passa una e una sola retta.*

Infatti, siano A e B due punti del piano proiettivo. Se essi sono due punti al finito, allora appertengono al piano euclideo e quindi la retta passante per A e B sarà quella euclidea classica.

Se uno dei due punti è all'infinito, invece, supponiamo sia B, nel punto A, che si trova al finito, si troverà un fascio di rette incidenti, ma una sola di queste avrà la direzione associata al punto B. Quindi anche in questo caso la retta per i due punti è unica.

Se, poi, sia A che B sono punti all'infinito, entrambi i punti si trovano sulla retta all'infinito, per definizione, e quindi, avendo il piano contenente A e B un'unica retta all'infinito, segue che per A e B passa un'unica retta anche in quest'ultimo caso.

Osservazione 3. *Ogni coppia di rette ha un (solo) punto in comune.*

Infatti se nel piano euclideo due rette sono incidenti, allora hanno un (solo) punto 'al finito' in comune nel piano proiettivo; se invece sono parallele, allora hanno la stessa direzione (che è unica) e quindi hanno in comune il punto all'infinito.

Questa cosa non è vera nel piano euclideo, nel quale solo le rette non parallele incidono tra loro. L'insieme delle rette che hanno un punto in comune ('al finito' o all'infinito) viene chiamato da Desargues 'ordonnance des droites', tradotto nella terminologia moderna in 'fascio di rette'.

Figura 1.45: A sinistra un fascio di rette (improprio), le rette a destra invece non costituiscono un fascio di rette, perché non vi è un punto che sia comune a tutte e tre.

Nell'approccio matematico alla trasformazione di proiezione vogliamo estendere la proiezione a tutto il piano di base, cioè anche ai punti del piano che stanno tra l'occhio e il piano del quadro o che stanno dietro l'occhio. Considero un generico punto P del piano giacente sulla retta r del piano di base, come in figura 1.46. Quando il punto P si avvicina al punto H e lo oltrepassa, c'è un salto improvviso: il punto P' sale sempre più in alto per riapparire dal basso (o viceversa scende sempre più in basso per riapparire dall'alto). Nel contesto proiettivo ciò significa semplicemente che l'immagine del punto H di r è il punto all'infinito della retta r'. Resta tuttavia un evidente strappo che parrebbe comportare una spiacevole discontinuità dell'operazione di proiezione. Per eliminare questa difficoltà e rendere la proiezione una trasformazione biunivoca e bicontinua, occorre definire i 'punti vicini' al punto all'infinito in modo che si possa dire che muovendo P in un intorno di H anche P' si muove in un intorno del punto all'infinito e viceversa. Oltre ai punti all'infinito si devono quindi introdurre anche i loro intorni e l'unico modo per farlo, se si vuole che la proiezione sia continua, è quello di considerare come 'intorni' del punto all'infinito di una retta l'unione di due semirette disgiunte.

Proiettando da O il segmento AB, che rappresenta un intorno del punto H, si ottengono le due semirette di origine A' e B' (figura 1.46). Le origini di queste due semirette vanno quindi pensate, paradossalmente, man mano che si allontanano tra loro, sempre più 'vicine' al punto all'infinito. Più vicine al punto all'infinito ma più lontane tra loro! Il paradosso si può superare rinunciando all'idea di 'vicinanza' in senso metrico, rinunciando così alla metrica, alla misura delle distanze proprio perché la proiezione, come anche la rappresentazione prospettica, ne può alterare radicalmente il valore: oggetti lontanissimi tra loro possono ritrovarsi dopo una trasformazione proiettiva molto vicini e viceversa.

Possiamo inoltre osservare che:

- i punti P che stanno sulla striscia di piano compresa tra la retta t

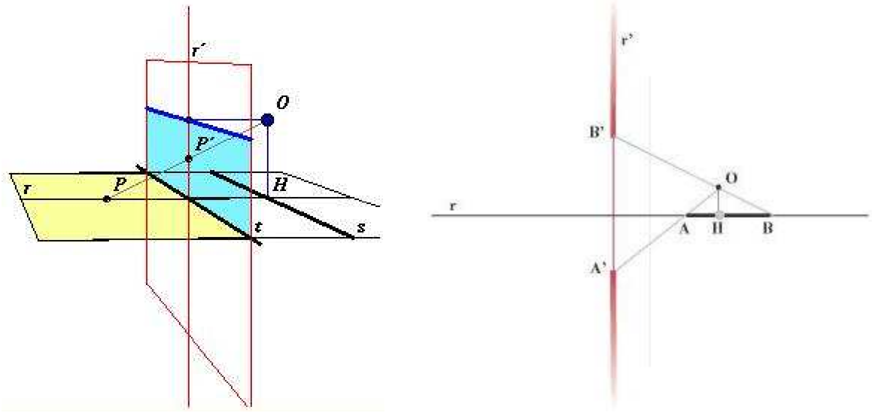


Figura 1.46: Estensione della proiezione a tutto il piano di base.

(comune ai due piani) ed s, si proiettano in punti P' che stanno 'sotto' il quadro;

- i punti di s non hanno alcuna immagine sul quadro perché il raggio proiettante diventa parallelo ad esso e dunque, al finito, non lo incontra;
- i punti P che stanno 'dietro l'occhio' si proiettano in punti P' che stanno sopra l'orizzonte. Inoltre, man mano che due punti P e Q si allontanano in profondità nella stessa direzione, ma in versi opposti, le loro proiezioni P' e Q' tendono ad avvicinarsi, fino a che, quando sia P che Q sono a distanza infinita, le loro immagini P' e Q' vanno a coincidere sulla linea di orizzonte.

1.5.2 Gli oggetti geometrici nel piano proiettivo

A questo punto, è opportuno vedere come si modificano gli oggetti della geometria euclidea in questo nuovo tipo di geometria.

Innanzitutto vediamo com'è fatta la **retta proiettiva**: si tratta di una retta euclidea con un punto all'infinito (in quanto ha un'unica direzione).

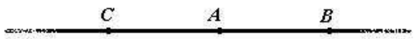


Figura 1.47: Esempio di retta proiettiva.

Scegliamo tre punti su di essa A, B e C, come in figura 1.47, e immaginiamo di percorrerla a partire da A prima verso destra e poi verso sinistra: nel primo caso, incontriamo nell'ordine A, B, il punto all'infinito e poi C, mentre nel secondo caso incontriamo A, C, il punto all'infinito e poi B. Quindi l'aggiunta del punto all'infinito fa sì che i nostri percorsi, anziché 'rettilinei', diventino 'circolari'.

Per semplificare le nozioni seguenti, fissiamo un verso di percorrenza da sinistra a destra e diamo di seguito la definizione e la descrizione nel piano proiettivo dei primi semplici oggetti geometrici: il segmento e il triangolo.

Definizione 8. *Un* **segmento** *AB del piano* **proiettivo** *è l'insieme dei punti della retta passante per A e per B compresi tra i due estremi assegnati.*

Ci sono quattro possibilità a seconda che il punto all'infinito faccia parte o meno del segmento AB:

1. Il segmento AB non contiene il punto all'infinito (figura 1.48).

Figura 1.48: Caso 1) del segmento proiettivo.

2. Il segmento AB ha un estremo all'infinito (figura 1.49).

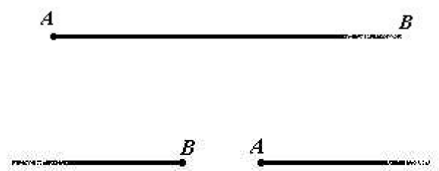


Figura 1.49: Sopra il caso 2) e sotto il caso 3) del segmento proiettivo.

3. Il punto all'infinito è compreso tra A e B (figura 1.49).

4. Il segmento AB ha entrambi gli estremi all'infinito. In questo caso il segmento AB non ha nessun punto al finito perché la retta che passa per A e B è la retta all'infinito e il segmento è parte di questa retta e quindi non si riesce a rappresentarlo.

Definizione 9. *Un* **triangolo** *del piano* **proiettivo** *è dato da tre punti A, B, C non allineati, detti vertici del triangolo, e da tre segmenti c=AB, a=BC, b=CA, detti lati.*

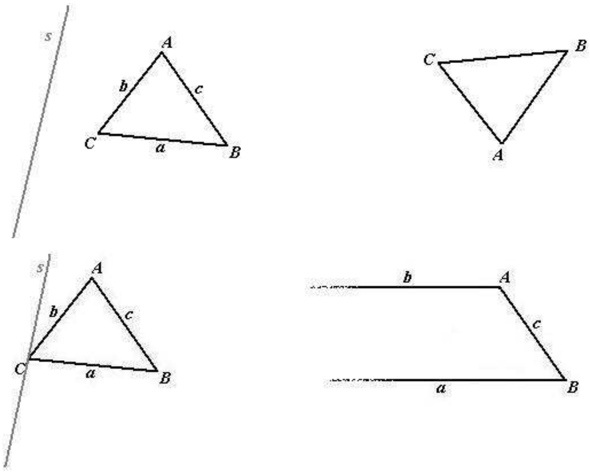


Figura 1.50: Sopra: la retta all'infinito è esterna al triangolo. Sotto: la retta all'infinito interseca il triangolo in un vertice.

In un triangolo proiettivo sia i vertici che i lati possono contenere punti all'infinito. Poiché i punti all'infinito sono tutti contenuti nella retta all'infinito del piano a cui il triangolo appartiene, allora è più comodo esaminare i vari tipi di triangolo secondo la loro posizione rispetto alla retta all'infinito. Nella figure 1.50 e 1.51 sono rappresentati i casi possibili.

Esercizio 13. *Consideriamo un quadrato $ABCD$ con i due vertici B e D all'infinito (quindi la diagonale BD è la retta all'infinito). Fare uno schizzo del quadrato disegnando i suoi punti all'infinito come tali.*

Supponiamo ora che la retta all'infinito sia l'asse del quadrato rispetto ai lati AD e BC, invece della diagonale BD. Provare a rappresentare il quadrato con i suoi punti all'infinito anche per questo caso.

1.5.3 Lo spazio proiettivo e il teorema di Desargues

Nello stesso modo con cui abbiamo ampliato un piano aggiungendo la retta all'infinito, possiamo ampliare lo spazio aggiungendo un piano all'infinito. Dato che ogni piano proiettivo dello spazio ha una sua retta all'infinito, basta, a questo scopo, considerare l'insieme di tutte queste rette come il **piano all'infinito**. Lo spazio così costruito si chiama **spazio proiettivo**. In questo spazio le proprietà più semplici della geometria, quelle che non riguardano né angoli né distanze, ma che riguardano la posizione reciproca di punto, rette e piani si possono prendere in esame senza dover più distinguere il 'caso parallelo' da quello incidente. È tutto presente in atto, anche l'infinito. Queste proprietà, dette grafiche, sono molto importanti perché esse non cambiano con operazioni di proiezione. Cominciamo con elencarne alcune.

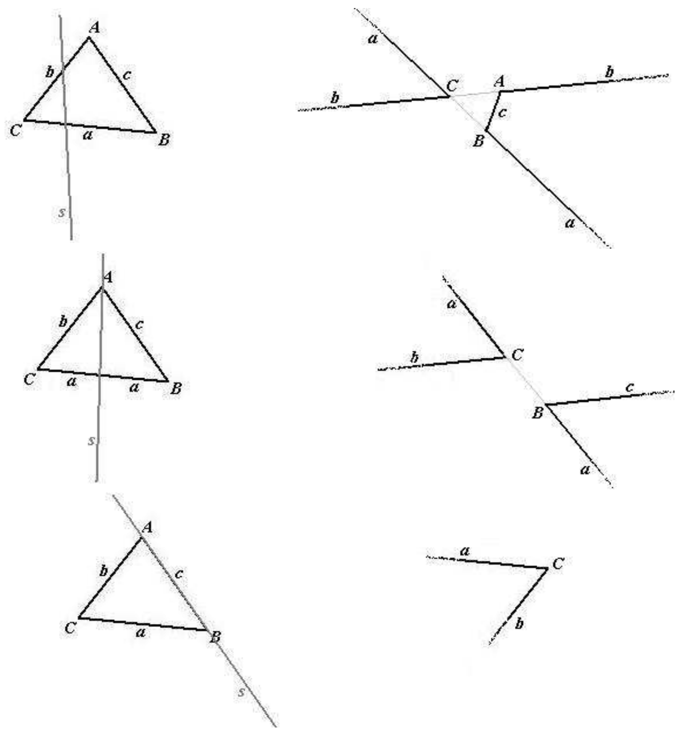


Figura 1.51: Sopra: la retta all'infinito interseca il triangolo in due punti che non sono vertici. Nel mezzo: la retta all'infinito interseca il triangolo in due punti, uno dei quali è un vertice del triangolo. Sotto: la retta all'infinito contiene un lato del triangolo.

- Due piani distinti hanno sempre una retta in comune, al finito se i due piani non sono paralleli, all'infinito se sono paralleli.
- Una retta e un piano hanno sempre un punto comune, al finito se la retta non è parallela al piano, all'infinito nel caso contrario.
- Tre piani che non facciano parte di un fascio, cioè che non abbiano in comune una retta, si incontrano sempre in un punto, il punto dove la retta intersezione dei primi due piani incontra il terzo. Tale punto può essere al finito, come nel caso di una piramide, o all'infinito, come nel caso di un prisma.

La seguente definizione permette di formalizzare il concetto di triangoli visti in prospettiva da un punto.

Definizione 10. *Due triangoli si dicono omologhi se è possibile associare i vertici dell'uno a quelli dell'altro, A ad A', B a B', C a C' in modo che le rette AA', BB', CC' siano convergenti in un punto O.*

Poiché un triangolo è definito da tre punti (i suoi vertici) A, B, C non allineati, questi individuano univocamente un piano, il piano nel quale esso è tracciato. Sia dunque α il piano del primo triangolo e β quello del secondo. I due triangoli sono, secondo la nostra definizione, omologhi se uno è proiezione dell'altro da un punto O, o equivalentemente, se sono due sezioni piane diverse di una stessa piramide di vertice in O, o ancora se sono traguardati da un determinato punto di vista in modo che l'uno copra esattamente l'altro. La nozione di triangoli omologhi resta comunque valida e di grande interesse anche nel caso che i due piani α e β siano sovrapposti.

Il teorema di Desargues che segue fornisce un criterio molto semplice per sapere se due triangoli sono o non sono omologhi. È facile intuire come questo risultato sia importante nella geometria della visione, se pensiamo che, attraverso i triangoli, possiamo decomporre e studiare figure molto più complesse, come i quadrangoli, i poligoni convessi e le curve approssimabili con poligonali. Queste figure possono essere decomposte in triangoli, e, applicando a ciascuna di esse il teorema di Desargues possiamo stabilire sotto quali condizioni, da un certo punto di vista O, esse appaiono uguali.

Teorema 10. *Se due triangoli sono omologhi allora i loro lati corrispondenti, se prolungati, si incontrano in punti allineati.*

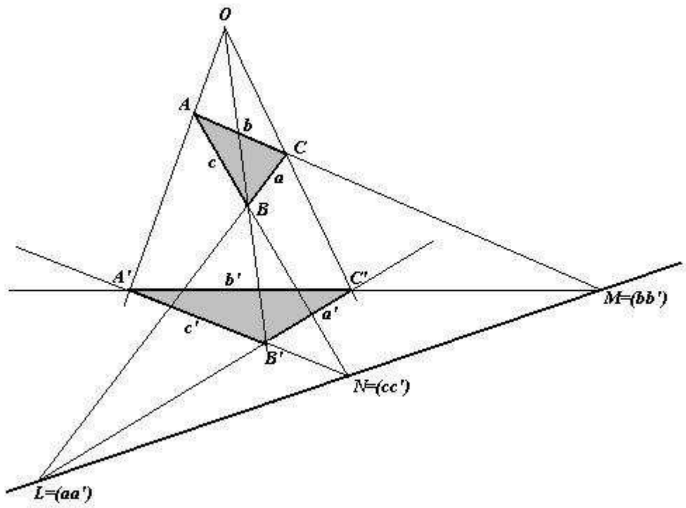


Figura 1.52: Teorema 10.

Dimostrazione. Possiamo rappresentare la figura piana come un' 'ombra' (proiezione) di una configurazione nello spazio, e ricavare la dimostrazione, che però si applica nel piano. Questo modo di procedere è molto naturale, e le lezioni precedenti hanno aperto la strada a queste considerazioni.

Supponiamo per ipotesi che i triangoli siano omologhi e su piani diversi nello spazio. In questo caso siamo riusciti ad ordinare i loro vertici in modo che le rette AA', BB', CC' convergano verso un punto O. Notiamo che i due triangoli saranno in questo modo due sezioni diverse della stessa piramide nello spazio.

Il lato AB del primo triangolo e quello corrispondente $A'B'$ del secondo si trovano sul piano contenente la faccia della piramide $OA'B'$. Poiché in un piano due rette hanno sempre un punto (eventualmente all'infinito) in comune, esse si incontrano. Sia N questo punto. Nello stesso modo, ragionando sulle altre facce della piramide, troviamo il punto L come intersezione di BC e $B'C'$ e il punto M come intersezione di AC e $A'C'$. Non ci resta che dimostrare che questi tre punti sono allineati. Ma questo si vede facilmente dal momento che il piano α che contiene il triangolo ABC, essendo diverso dal piano β che contiene il triangolo $A'B'C'$, dovrà incontrarlo lungo una retta (eventualmente all'infinito). Su questa retta sono situati i tre punti L, M, N. Infatti N, essendo sul prolungamento del lato AB, si trova sul piano α ed essendo anche sul prolungamento del lato $A'B'$ si trova sul piano β e dunque si trova sulla retta di intersezione dei due piani. Analogamente per gli altri due punti. □

Notiamo come gli ingredienti usati in questa dimostrazione siano solo di natura grafica e non metrica e come si sia fatto un uso continuo dei punti all'infinito che hanno consentito di trattare le intersezioni di rette e piani nello stesso modo se di fatto incidenti o paralleli. Il teorema vale anche nel caso in cui i due triangoli stiano su uno stesso piano, ma la dimostrazione è più complicata. Essa si ottiene costruendo fuori dal piano dei due triangoli un terzo triangolo che si proietti da due punti diversi nei due triangoli piani dati e applicando a questi il teorema di Desargues nello spazio. È questo un primo interessante caso nel quale, per dimostrare una proprietà di geometria piana occorra usare una dimensione in più. Sarà questo un nuovo metodo dimostrativo molto usato negli sviluppi successivi della geometria proiettiva e della geometria algebrica.

Teorema 11. *Se i lati corrispondenti di due triangoli si incontrano su una retta, allora i due triangoli sono omologhi.*

Dimostrazione. Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli i cui lati corrispondenti si incontrano sulla retta r. Sia P l'intersezione di AA' e BB'. Vogliamo provare che CC' passa per P.

Supponiamo che PC incontri la retta $B'C'$ in C''. Allora i triangoli ABC e $A'B'C''$ sono omologhi rispetto al punto P e perciò, per il Teorema di Desargues appena dimostrato, i loro lati corrispondenti si incontrano in una retta.

Sappiamo già che AB incontra $A'B'$ in r e che BC incontra $B'C'$ in r. Quindi AC incontra $A'C''$ in r, necessariamente nel punto Q, dove AC incontra r.

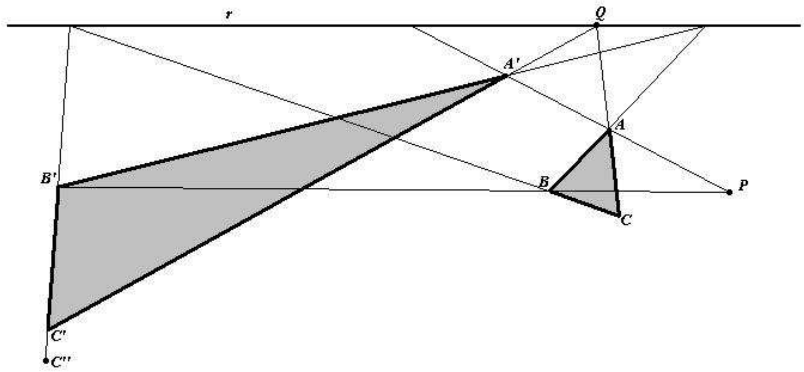


Figura 1.53: Teorema 11.

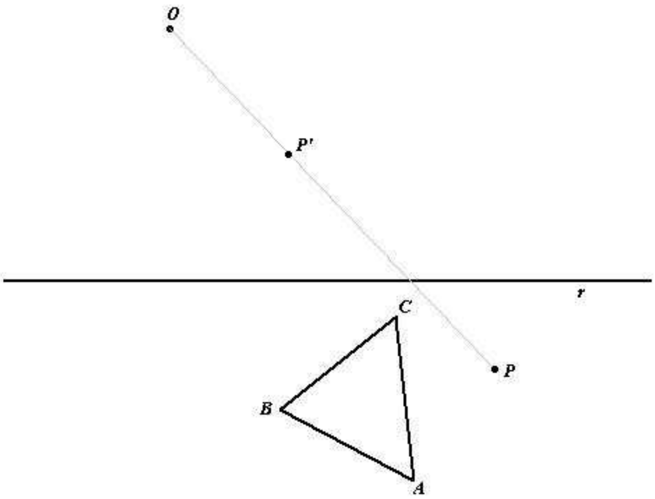
Segue che QA' passa per C''. Ma sappiamo anche che QA' incontra $B'C'$ in C'. Da cui $C'' = C'$.

Perciò C' è proprio sulla linea PC, così ABC e $A'B'C'$ sono omologhi (rispetto a P) come richiesto.

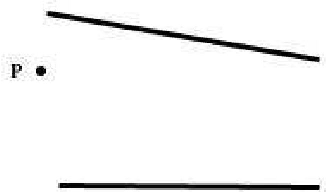
□

Provate ora a risolvere (a gruppi) i seguenti esercizi.

Esercizio 14. *Dati il triangolo ABC, il centro di proiezione O, l'asse r, un punto P e la sua proiezione P' da O (come in figura), determinare il triangolo $A'B'C'$ omologo ad ABC.*



Esercizio 15. *Tracciare un segmento che passi per un punto P assegnato e per il punto di intersezione dei prolungamenti di due segmenti dati.*



1.5.4 Proiettività

Definizione 11. *Una trasformazione proiettiva (o proiettività) di α in β è una trasformazione biunivoca, continua, che conserva l'allineamento.*

Un esempio molto significativo di trasformazione proiettiva è la **proiezione centrale**, perché con questa è possibile costruire ogni altra trasformazione: si può infatti dimostrare che ogni altra trasformazione proiettiva di un piano in un altro si ottiene eseguendo al più tre proiezioni centrali.

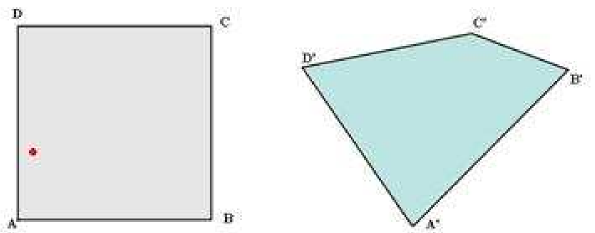
Tra le trasformazioni proiettive rientrano anche le **omologie** che sono trasformazioni proiettive di un piano α in se stesso con una retta fissa punto per punto, detta asse dell'omologia. Abbiamo già visto un esempio di queste trasformazioni: la costruzione di Piero della Francesca per realizzare la rappresentazione prospettica del piano di terra.

Nella categoria delle trasformazioni proiettive rientrano anche le **trasformazioni conformi** ossia le trasformazioni di un piano α in un piano β che conservano gli angoli (e l'allineamento cioè l'angolo piatto). Esse possono essere interamente costruite conoscendo solo l'immagine A' e B' di due punti (distinti) A e B di α.

Teorema 12. *Dati due piani proiettivi α e β, una trasformazione proiettiva F di α in β è univocamente determinata conoscendo l'immagine di quattro punti di α a tre a tre non allineati.*

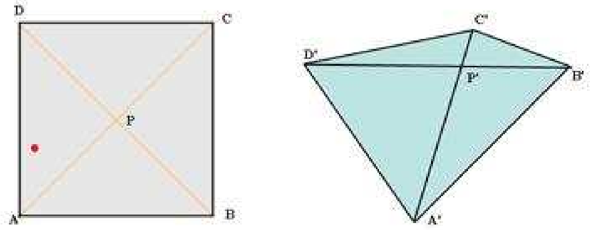
Dimostrazione. Diamo qui solo un'idea della dimostrazione, che costituisce se vogliamo anche un metodo 'moderno' per costruire in modo prospetticamente corretto una pavimentazione.

Consideriamo un quadrangolo ABCD del piano α e siano A', B', C', D' le immagini dei quattro vertici. A partire da questo dato possiamo ricavare



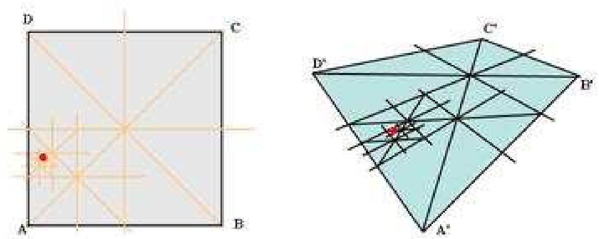
anche le immagini di altri punti sfruttando il fatto che la corrispondenza conserva l'allineamento.

Diciamo che un punto è **costruibile** (a partire dal quadrangolo iniziale A,B,C,D) se si ottiene come intersezione di rette passanti per punti già costruiti.

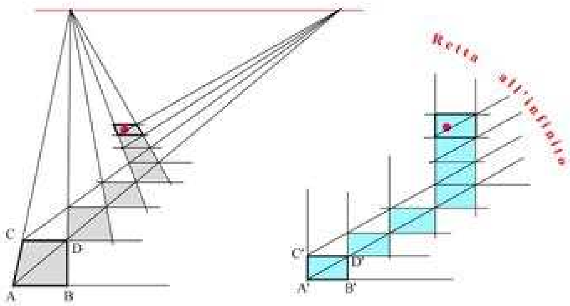


Il punto P, ad esempio, intersezione delle diagonali, sarà un punto costruibile come anche i punti ottenuti intersecando i lati opposti del quadrangolo. Dei punti costruibili possiamo calcolare l'immagine. Il punto P, ad esempio, avrà come immagine il punto P' ottenuto intersecando $A'C'$ con $B'D'$ il quale quindi è determinato univocamente da A', B', C', D'.

Il problema quindi si riduce a quello di costruire una maglia di punti costruibili che invada l'intero piano e che sia sempre più fitta. Si può procedere nel modo seguente: dato il quadrangolo ABCD lo dividiamo in 4 parti (e dividiamo in quattro ogni divisione e la divisione delle divisione, e così via) infittendo arbitrariamente la rete interna al quadrangolo. In questo modo, dato un qualunque punto P interno al quadrangolo, possiamo costruire una successione di quadrangoli sempre più piccoli, uno incluso nell'altro che contengono il punto P. Il punto P' dovrà essere a sua volta individuato dai quadrangoli corrispondenti che a loro volta, per continuità, tendono a diventare sempre più piccoli.



Per trovare l'immagine di un punto P che sia esterno al quadrangolo possiamo con un numero finito di passi trovare un nuovo quadrangolo costruibile che contenga il punto P al quale poter applicare la costruzione precedente. Possiamo infatti, usando punti costruibili, aggiungere un altro quadrangolo adiacente a quello dato lungo uno qualunque dei lati e poi aggiungerne un altro e un altro ancora e così di seguito fino a costruire una rete che arrivi a qualunque punto al finito o all'infinito del piano.



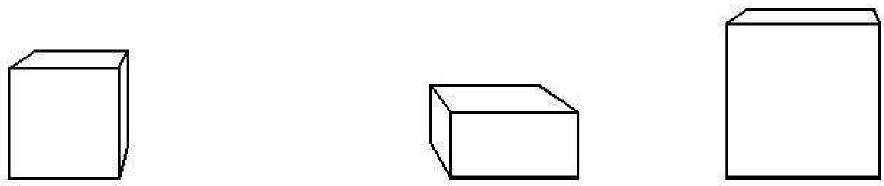
Questo per mostrare come si possano costruire, a partire dai quattro punti iniziali, infiniti altri punti, intersecando rette che passano per punti già costruiti. □

ESERCIZI

Esercizio 16. *Un osservatore si trova in una piazza triangolare di lati uguali. Dire in che punto della piazza dovrà trovarsi affinché possa vedere tutti i lati della piazza della stessa dimensione. Motiva la risposta.*

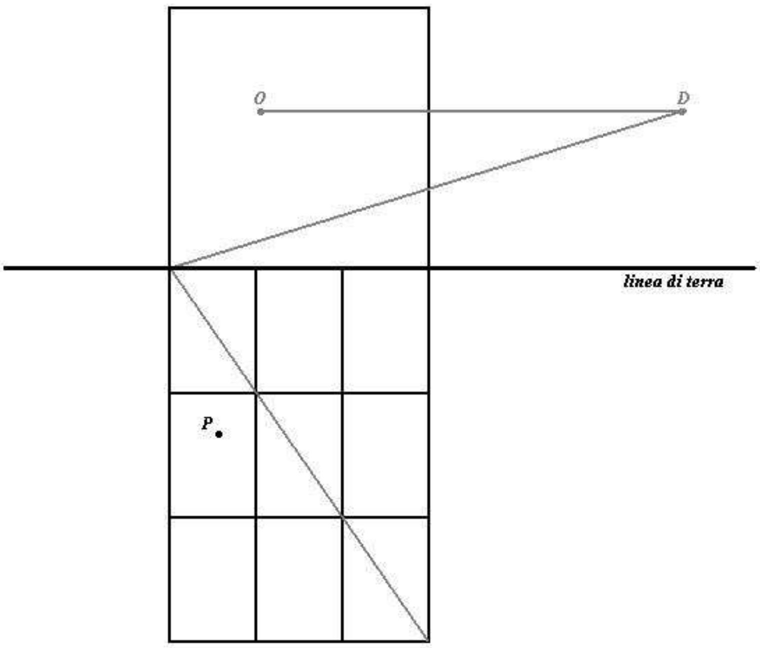
Esercizio 17. *Dopo avere definito cosa sono i punti di fuga e la linea di orizzonte, disegnarli per gli oggetti seguenti.*

Dire se i tre oggetti si trovano sullo stesso piano e perché.

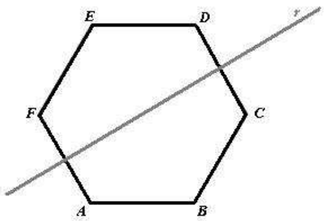


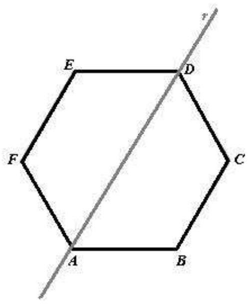
Esercizio 18.

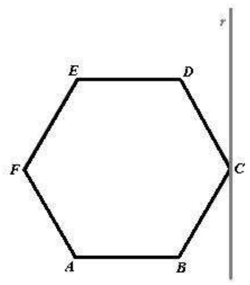
- *Costruire la degradazione del pavimento con mattonelle rettangolari in figura, usando passo passo il metodo di Piero della Francesca a partire dall'immagine seguente (nota che l'esercizio è già cominciato: sono infatti già state disegnate la diagonale, il punto centrico O e il punto di distanza D.)*
- *Determinare l'immagine P', sul piano del quadro, del punto P, descrivendo il procedimento usato per trovarla.*



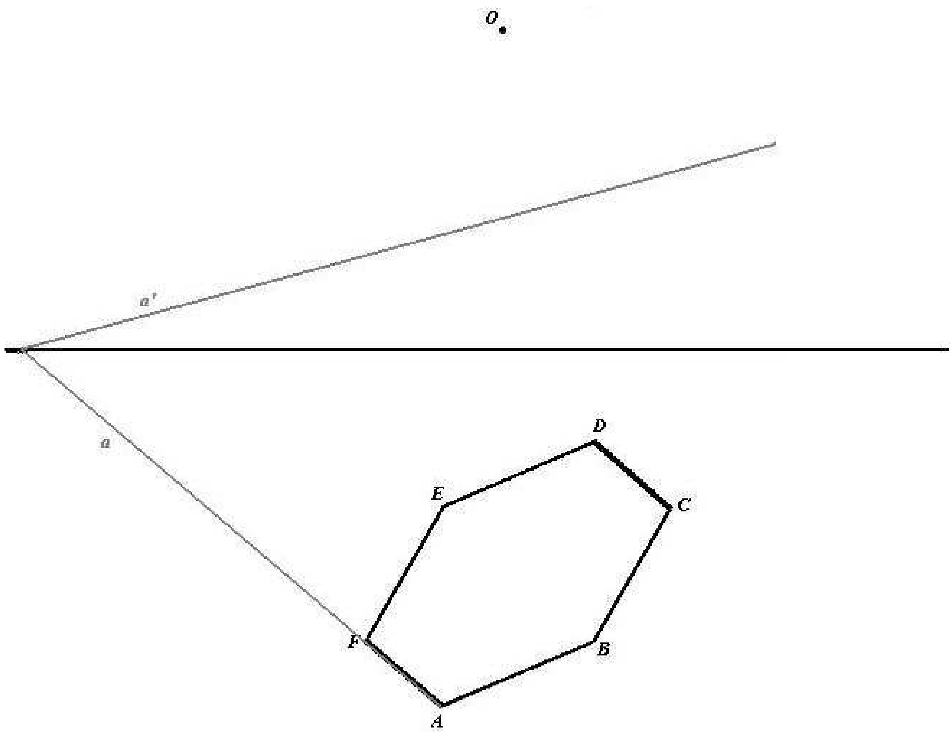
Esercizio 19.
- *Definire cosa sono punto all'infinito, retta all'infinito e piano proiettivo.*
- *Fare uno schizzo dell'esagono $ABCDEF$ rappresentando anche i suoi punti all'infinito come tali nei casi seguenti (r denota la retta all'infinito del piano):*







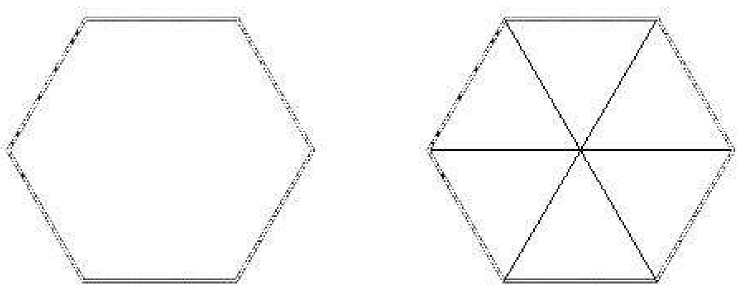
Esercizio 20. *Dati l'esagono ABCDEF, il centro di proiezione O, l'asse r, una retta a e la sua omologa a′ (come in figura), determinare l'omologo A′B′C′D′E′F′ dell'esagono ABCDEF.*



TEST FINALE

Liceo Scientifico L. da Vinci, classe IV H

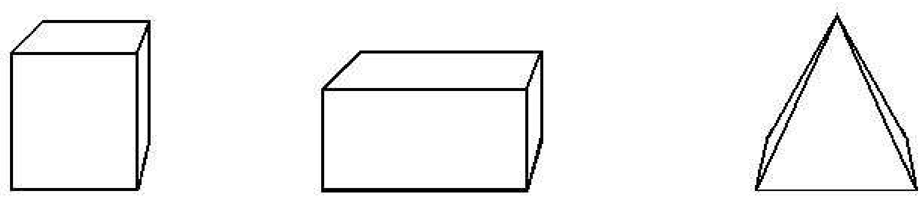
Esercizio 21. *Supponiamo che in un giardino ci sia un'aiuola a forma di esagono regolare, circondata da una strada (come nella figura a sinistra). Un osservatore che vi si trovi dentro, in che punto dell'aiuola vedrà tutti i lati dell'aiuola della stessa dimensione? Motiva la risposta.*



Se poi l'aiuola viene divisa da alcune stradicciole (come nella figura a destra), un osservatore che si trovi in uno degli spicchi triangolari, in che punto vedrà tutte uguali le tre stradicciole che delimitano lo spicchio? Motiva la risposta.

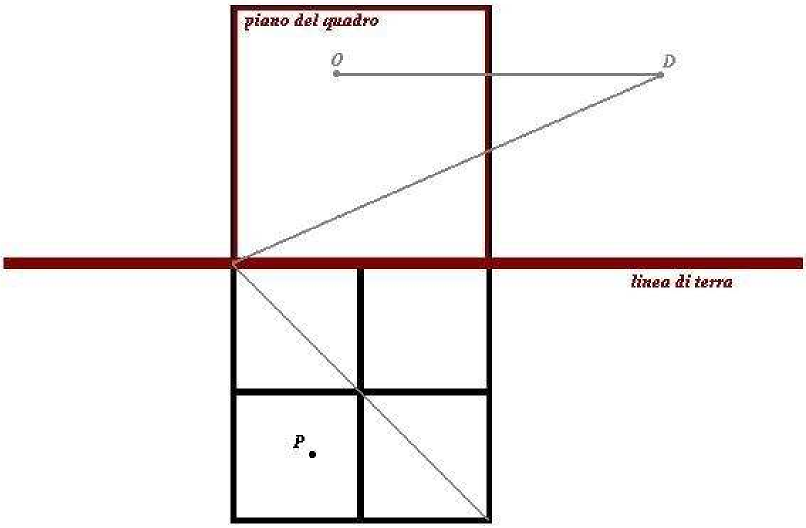
Esercizio 22. *Dopo avere definito cosa sono i punti di fuga e la linea di orizzonte, disegnarli per gli oggetti seguenti.*

Dire se i tre oggetti si trovano sullo stesso piano e perché.



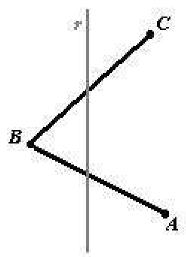
Esercizio 23. • *Costruire la degradazione del pavimento con mattonelle quadrate in figura, usando passo passo il metodo di Piero della Francesca a partire dall'immagine seguente (nota che l'esercizio è già cominciato: sono infatti già state disegnate la diagonale, il punto centrico O e il punto di distanza D).*

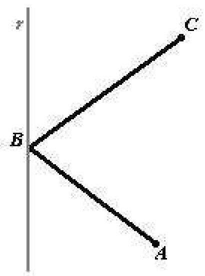
- *Determinare l'immagine P', sul piano del quadro, del punto P, descrivendo il procedimento usato per trovarla.*



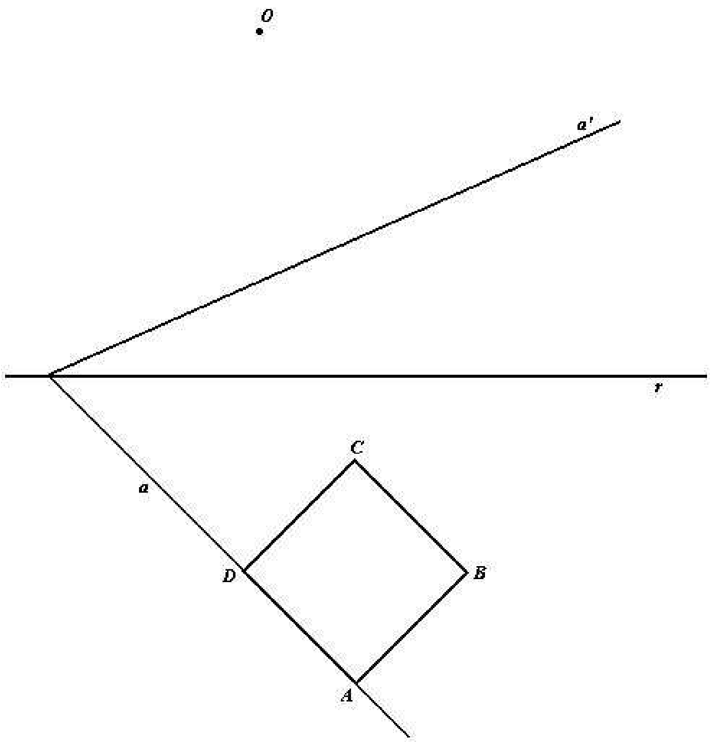
Esercizio 24. • *Definire cosa sono punto all'infinito, retta all'infinito e piano proiettivo.*

• *Fare uno schizzo dei segmenti AB e BC rappresentando anche i punti all'infinito come tali nei casi seguenti (r denota la retta all'infinito del piano):*





Esercizio 25. *Dati il quadrato $ABCD$, il punto di proiezione O l'asse r e le rette a e a' che si intersechino sull'asse r (come in figura), costruire il quadrato $A'B'C'D'$ omologo ad $ABCD$.*



Esercizio 26. (facoltativo) *Verificare che ne L'annunciazione di Domenico Veneziano la degradazione delle colonne a destra è stata fatta usando il modo ottimo di Alberti.*

Capitolo 2

Svolgimento effettivo della sperimentazione

Le lezioni, di due ore ciascuna, si sono svolte per quattro settimane consecutive nel periodo dal 5-02-09 al 26-02-09 ed erano rivolte alla classe IV H (sperimentazione PNI) del Liceo Scientifico Statale L. da Vinci di Firenze. All'inizio della prima lezione è stato fatto un test d'ingresso per verificare che i ragazzi avessero i prerequisiti necessari e per conoscerli un po', mentre a seguito del ciclo di lezioni (circa 15 giorni dopo) c'è stato un test finale per vedere le conoscenze che avevano acquisito. Come strumenti di supporto, internamente a delle lezioni frontali, sono stati usati delle presentazioni power point contenenti anche immagini, foto, dipinti, animazioni (sia preparate da me che riprese dal libro Catastini-Ghione) e dispense con esercizi preparate appositamente, riportate nel capitolo precedente. Inoltre le lezioni erano interattive: ponevo loro delle domande, così che talvolta venivano fuori anche veri e propri dibattiti. Inoltre, poiché l'argomento si prestava ad essere trattato per certi aspetti da un punto di vista strettamente matematico e per altri invece da uno puramente storico-artistico, le lezioni si sono svolte in collaborazione sia della professoressa di matematica sia del professore di disegno e storia dell'arte. Durante le lezioni di matematica, perciò, studiavamo gli aspetti più geometrici, con relativi esercizi e dimostrazioni; invece, durante le lezioni di disegno e storia dell'arte, approfondivamo la prospettiva, provando anche con foglio e squadre i vari metodi, e andando a scoprire i pittori che ne facevano uso grazie alla visione di alcuni dipinti.

2.1 Diario di bordo

I paragrafi seguenti contengono, sottoforma di diario, ciò che ho potuto scoprire sul campo ed eventuali commenti relativi all'esperienza fatta nelle singole giornate.

2.1.1 Prima lezione: test di ingresso e geometria della visione.

05-02-2009: 18 studenti presenti.

Sono arrivata per le 8:50, un po' prima dell'inizio effettivo della lezione, perché i ragazzi potessero svolgere un test di ingresso anonimo. L'emozione era grande: non ero mai entrata in un'aula in veste di insegnante.

Innanzitutto mi sono presentata e li ho invitati ad un tipo di lezione nuova sia per me che per loro, sperando che potesse essere interessante per tutti quanti. Dopo ho consegnato loro i fogli con gli esercizi; sono rimasti sorpresi dal tipo di test: era evidentemente diverso da tutti quelli a cui erano abituati (soprattutto all'interno di una lezione di matematica).

Ho dato loro poco più di un quarto d'ora di tempo a causa dei tempi stretti (in due ore doveva svolgersi anche la lezione) e, mentre loro scrivevano, ho collegato computer e proiettore, così da iniziare subito.

Ho cominciato la lezione domandando loro: «Cosa conoscete della prospettiva piana? Ne avete mai sentito parlare?»

Le risposte sono state:

- *Il punto di fuga.* «Che cos'è?» *E' il punto in cui si incontrano due rette.*

- *La prospettiva centrale.* [Non approfondisco, ma mi accorgo che con la loro prof di matematica avevano visto alcuni tipi di prospettiva e quindi penso che potrebbe essere utile riprenderli nelle lezioni successive]

A questo punto ho chiesto loro: «A cosa serve la prospettiva? Perché nasce?» *Per disegnare gli oggetti dando una profondità.*

Quindi ho introdotto la prospettiva dicendo che cos'è in modo un po' più preciso: quando nasce e perché, facendo vedere alcune caratteristiche della prospettiva a partire dal quadro *Flagellazione di Cristo* di Piero della Francesca, figura 1.1 (pag. 13). Ho invitato esplicitamente i ragazzi a dirmi cosa notavano dall'osservazione del dipinto: *le persone in primo piano più grandi di quelle in secondo piano*, *il punto di vista di Piero della Francesca è ribassato...*

In seguito ho mostrato loro la foto del torneo di ping pong, figura 1.2 (pag. 19), tramite la quale abbiamo osservato insieme le cose che loro avevano già notato e poi siamo passati subito all'esperimento con le figure sul cartoncino descritto a pagina 19. I ragazzi non capivano l'esperimento inizialmente, quindi ho mostrato loro come si svolgeva e lo abbiamo fatto insieme: avevo dato un cartoncino ogni quattro, così che, mentre uno di loro lo muoveva, gli altri potessero osservare le figure tutti da punti di vista differenti. Le proprietà che hanno notato sono state:

- Le figure si deformano

- Il cerchio diventa un ovale [io ho precisato che diventava un'altra conica; sarà opportuno forse insistere un po' sul cono visivo]
- I segmenti non sono più perpendicolari
- Il quadrato diventa un rombo o un trapezio, ma comunque resta un quadrilatero
- Il triangolo resta un triangolo
- Con un po' di aiuto hanno detto che in realtà si verifica più in generale che non si conservano né le lunghezze (né le proporzioni) né gli angoli

[E io ho aggiunto: le intersezioni si conservano]
Un ragazzo ha perfino osservato che gli oggetti più vicini sembravano più grandi.

Davanti alla diapositiva con la foto dello stadio, fig. 1.3, eravamo già concordi nell'affermare che le linee di bordo campo convergevano e quindi ho sottolineato soltanto che *tutte* le linee che sono parallele a quelle di bordo campo e che si trovano sul campo stesso convergono allo *stesso* punto di fuga. Per quanto riguarda le piramidi, fig. 1.5, ho fatto notare loro che nel test di ingresso, per disegnare il cubo avrebbero potuto benissimo disegnare un quadrato, in quanto se osservato dall'alto, noi vediamo il cubo esattamente come un quadrato. Davanti a quest'affermazione i ragazzi hanno un po' storto il naso... Questo mi fa capire quanto siamo così abituati alle foto e alle immagini che diano l'idea di profondità quando serve, da non sapervi rinunciare in una rappresentazione di qualunque tipo. Le due diapositive seguenti, fig. 1.6 e 1.7, servivano per mostrare che i soli contorni di un'immagine non bastano per identificare l'immagine, in quanto si perde il senso della profondità, e che dei tratti disegnati male non aiutano a rendere realistico un oggetto tridimensionale. Erano tutti piuttosto concordi, perciò sono andata avanti e, parlando della profondità, ho chiesto loro: «E' più facile disegnare qualcosa tramite un'osservazione diretta o partendo da una foto? Perché?» Tutti hanno detto che era più facile farlo a partire da una foto, ma non riuscivano a motivarlo nell'immediato. Dopo un breve silenzio, l'idea che ha avuto un ragazzo è che la fotografia è già piana. Quindi ho potuto accennare all'operazione di proiezione, in un primo approccio intuitivo.

A questo punto sono passata alla geometria della visione come Euclide ce la presenta. I ragazzi seguivano molto bene le dimostrazioni dei teoremi: si vedeva che erano abituati ad un uso non solo formalistico della geometria euclidea. Io per sicurezza chiedevo loro se capivano i passaggi e di spiegarne la correttezza, ma loro rispondevano bene e non avevano dubbi. Questo mi ha fatto procedere più spedita. Dopo la dimostrazione del teorema 2 pag. 23, ho invitato due ragazzi a venire alla lavagna per verificare se l'ipotesi *punto interno alla striscia* fosse fondamentale o meno per la validità del teorema. La prima ragazza ha disegnato da sola il primo caso della diapositiva (non l'avevo ancora proiettata) e dopo un po' di ragionamento ha capito quanto avevamo appena visto con il teorema del punto interno e ha risposto che AB era visto più grande di CD. Il secondo ragazzo ha disegnato un punto a caso fuori dalla striscia e ha affermato che si vedeva dal disegno che un segmento era più grande dell'altro. La professoressa allora ha controbattuto che a lei sembravano uguali e ha invitato il ragazzo a dimostrare quanto aveva affermato. Poiché il punto era casuale, era difficile dimostrarlo, perciò dopo un piccolo tentativo del ragazzo, ho detto a tutti che l'ipotesi del teorema è fondamentale, perché, senza di questa, sorgevano delle ambiguità. Poi ho mostrato loro i casi che avevo riportato in diapositiva e si sono definitivamente convinti. A questo punto li ho fatti dividere in gruppi di quattro (la prof. li ha disposti) perché risolvessero gli esercizi che avevo riportato sulle dispense di seguito al teorema. Ho dato loro un quarto d'ora di tempo circa per risolverne il più possibile. I ragazzi si sono tutti impegnati e alla fine nessuno li aveva finiti tutti quanti (forse occorreva più tempo), ma tutti i gruppi ne avevano risolto almeno uno in modo corretto:

1. Tutti hanno risolto il primo esercizio: la maggioranza dei gruppi ha usato i criteri di similitudine dei triangoli AOB e $C'OD'$. Un gruppo si è accorto che l'angolo AOB era di $90°$ e ha sfruttato questo fatto per calcolare la lunghezza di $C'D'$. [solo un ragazzo era un po' confuso sulla risoluzione; la prof lo ha invitato a esporre la sua soluzione in modo chiaro, cercando di dare sicurezza al ragazzo, chiedendogli di esporre il suo metodo, senza mai dare per scontato che fosse sbagliato. Mi è parso un buon modo per far crescere i ragazzi nella conoscenza matematica ed educarli al fatto che non c'è il metodo corretto e quello sbagliato a priori (solo perché magari il risultato finale torna diverso da tutti gli altri); inoltre chiunque può avere un'idea per risolvere un problema: quello che conta è se ciò che dice è corretto, coerente, da un punto di vista matematico e se è utile alla risoluzione del problema.]

2. Il secondo esercizio è risultato ambiguo nel testo quando dice che *l'asse divide AB in parti che stanno fra loro come* $1:3$ [In effetti con una lettura veloce ero stata tratta in inganno pure io]. In ogni caso il procedimento, sia dividendo il lato AB in 3 parti, sia dividendolo in 4 parti, non cambiava e, chi lo ha risolto, lo ha fatto in modo corretto.

3. Il terzo esercizio non è stato completato da nessuno, ma il ragazzo che è venuto alla lavagna lo ha completato in modo corretto sul momento. Nessuno di loro aveva notato che gli angoli AOB e COB erano supplementari per sfruttare questo fatto nella risoluzione, ma d'altronde hanno avuto poco tempo per meditarci.

Da qui in avanti ho dovuto stringere con i tempi. Ho accennato la dimostrazione del teorema 3 promettendo di portare una dimostrazione analitica del fatto che anche fuori dalla striscia delle due parallele a e b l'angolo si rimpicciolisce; ho descritto con un disegno alla lavagna le due definizioni finali (quelle di *segmento posto longitudinalmente davanti all'occhio* e di *vedere più in alto*) perché non avevo fatto in tempo a inserirle nelle dispense [modifiche dell'ultimo minuto] e ho enunciato il teorema mentre suonava la campanella della ricreazione. Ho detto loro che avrebbero trovato la dimostrazione sulle dispense e di chiedermi la volta successiva se non avevano capito. [Io sarei intenzionata a cominciare la prospettiva vera e propria la prossima volta, dato che questi ultimi teoremi erano un po' più tecnici e i concetti di base adesso ce li hanno...]

Commenti finali:

- Tutti, sotto invito della professoressa, hanno preso appunti durante la lezione, hanno partecipato attivamente per tutto il tempo e svolto gli esercizi per più di due ore. Solo alla fine c'è stato un po' di rilassamento.
- La professoressa era globalmente soddisfatta e mi ha ringraziato [in realtà io le sono molto grata per avermi dato questa possibilità!].
- I ragazzi sono nel complesso molto preparati e mi sono parsi abbastanza motivati allo studio della matematica.
- I ragazzi seguivano la lezione proprio bene.

Esito del test d'ingresso

Questi ragazzi già dal test dimostrano di avere delle buone conoscenze di geometria euclidea dello spazio. Considerando che le domande erano tutte a risposte aperte, mi sembra rilevante notare che quasi tutti hanno svolto gli esercizi 1 e 2 (in modo più o meno completo), anche se a volte non hanno risposto alla definizione di distanza tra due rette oppure sono state date definizioni molto diverse le une dalle altre (probabilmente per il fatto che nel comando non era specificato se le due rette fossero o meno parallele, come mi ha fatto notare uno di loro). L'esercizio 3 è sembrato loro alquanto strano: uno solo di loro ha analizzato il disegno riportato in figura per le sue proprietà grafiche come cubo; quasi tutti si sono concentrati sul fatto che il cubo fosse di Rubik, ossia che fosse composto da cubi più piccoli e colorati. Inoltre la definizione di cubo data non sempre era precisa. Da notare anche che hanno disegnato il cubo quasi tutti dallo stesso punto di vista. Per quanto riguarda l'esercizio 4, a parte rispondere «dentro» e «fuori», non pochi di loro (circa la metà) hanno risposto che non si poteva determinare e alcuni hanno così motivato:

- «a causa della posizione non buona dell'osservatore»
- «perché la fotografia è stata scattata dietro la palla e non lateralmente»
- «perché non siamo in linea con la palla»

- «perché la rete non è mossa, l'angolo dell'inquadratura trae in inganno e ancora il giocatore non ha esultato» (questo è proprio simpatico!)
- «si sa che è dietro la rete, non si sa a che distanza si trova»
- «essendo dietro la porta non riusciamo a percepire bene la profondità, e quindi se la palla è sullo stesso piano della linea oppure no» (questo qui ha capito tutto!)
- «in quanto non abbiamo una visione prospettica della palla» (un po' brachilogico, ma direi corretto)

Invece nell'ultimo esercizio alcuni hanno parlato di prospettiva lineare, centrale e accidentale nei due quadri; quindi hanno già visto e sono in grado di distinguere alcuni tipi di prospettiva nei dipinti.

2.1.2 Seconda lezione: verso la prospettiva.

11-02-09: 17 studenti presenti.

Questa lezione si è svolta, invece che con la prof. Rigato, con il prof. Pedolicchio, docente di disegno e storia dell'arte. Sono arrivata nell'aula di disegno prima che i ragazzi entrassero e ho predisposto tutto. Stavolta i ragazzi erano meno, perché tre di loro partecipavano alle olimpiadi della fisica. Appena i ragazzi si sono accomodati, ho brevemente commentato i test di ingresso che avevano svolto la lezione precedente. Innanzitutto ho notato che erano incuriositi rispetto alla valutazione, malgrado fossero stati consegnati anonimi. Ho detto loro che li avevo trovati molto preparati rispetto alla geometria e ho corretto insieme a loro le inesattezze che emergevano dalle risposte.

Per l'esercizio 1 ho scelto la risposta data da uno di loro e ho chiesto loro se era corretta o se mancava qualcosa: intervenivano da posto e così abbiamo completato la risposta, ripassando così anche ciò che serviva per la lezione.

I punti 1 e 2 dell'esercizio 2 sono stati svolti bene da tutti, perciò ho solo riletto le risposte corrette. Per quanto riguarda il punto 3, ossia quello che chiedeva di definire la distanza tra due rette, ho detto che indubbiamente era più difficile degli altri due, in quanto nel comando non si specificava che in che posizione reciproca dovessero trovarsi le due rette. Ho detto loro che nel senso più generale si usa parlare di distanza minima tra due rette. Quindi ho distinto i tre casi:

- Due rette parallele (non coincidenti) hanno distanza minima che si misura su un segmento congiungente le due rette che giace su una retta perpendicolare ad entrambe.
- Per due rette incidenti la distanza minima ha un significato diverso, perché essendo incidenti, nel punto di incidenza la distanza tra le due rette è nulla.

- Per due rette sghembe r e s, siano α il piano contenente r e β il piano contenente s tali che α e β siano paralleli. La distanza (minima) tra r e s è la distanza tra i due piani.

Per questo terzo esercizio non ho letto le risposte che hanno dato, ma c'è stato un ragazzo che ha tentato di scrivere una definizione generale, che riporto:

La distanza tra due rette è la distanza che c'è fra una delle due rette e il punto individuato dall'intersezione della seconda retta e il piano passante per la prima e perpendicolare alla seconda.

In realtà il piano passante per la prima e perpendicolare alla seconda in generale non esiste, se non in casi molto particolari (se le due rette sono perpendicolari), però mi ha colpito positivamente il tentativo.

Dell'esercizio 3 ho ridetto la definizione di cubo (solido regolare con 6 facce quadrate, 8 vertici, 12 spigoli) e poi ho fatto notare che i disegni che avevano fatto erano tutti ripresi dallo stesso punto di vista, un punto di vista assonometrico che di solito si usa per rappresentarli per un problema di matematica (tanto che un paio di cubi avevano addirittura le lettere agli spigoli), e quindi che avrei potuto metter loro davanti il cubo in qualsiasi posizione, ma loro lo avrebbero disegnato con un'idea già acquisita che avevano in mente.

Per quanto riguarda l'esercizio 4, mentre lo introducevo c'erano ancora le varie 'posizioni calcistiche'. Poiché ben 9 su 18 avevano dato una risposta corretta almeno da un punto di vista intuitivo, ho dato direttamente la soluzione, contrariamente a come pensavo di fare inizialmente. Ho letto così la risposta secondo me più corretta, spiegando che eravamo davanti ad un fenomeno di allineamento apparente (visto la lezione precedente):

Non si può dire, perché essendo dietro la porta non riusciamo a percepire bene la profondità, e quindi se la palla è sullo stesso piano della linea oppure no.

E poi ho letto anche la più divertente:

Non si può dire, perché la rete non è mossa, l'angolo dell'inquadratura trae in inganno e ancora il giocatore non ha esultato.

Questa ha suscitato il riso di tutta la classe e io ho sottolineato che, malgrado l'apparente sciocchezza dell'affermazione, in realtà quell'osservazione è molto importante: grazie al contesto in cui avviene una scena spesso possiamo ricostruirla, anche quando c'è un apparente allineamento (anche se in questo caso il contesto non aiuta). Per quanto riguarda l'ultimo esercizio ho semplicemente riassunto quali sono state le risposte più date; essendo un esercizio che lasciava spazio all'osservazione, non c'erano risposte giuste o sbagliate.

Dopo aver corretto il test ho consegnato loro l'appendice al teorema 3, in cui si trovava la dimostrazione analitica di perché *segmenti paralleli visti da lontano convergono* anche quando il punto di vista è esterno alla striscia delimitata dalle due parallele. [Ho notato che un ragazzo che era stato assente si è fatto rispiegare da un compagno il teorema.]

Quindi ho cominciato la seconda lezione. Le prime diapositive erano un riassunto della volta precedente, utile per riprendere il discorso lasciato, riprendere l'attenzione della classe e aiutare gli assenti alla lezione precedente a seguire quella nuova. La lezione si è svolta in linea con quello che avevo scritto nella dispensa, facendo ogni tanto qualche domanda.

Da notare che una ragazza ha avuto l'idea di come rappresentare le linee di profondità di una pavimentazione, subito dopo le nozioni di prospettiva introdotte (punto di fuga, linea di orizzonte,...), prima ancora che facessi vedere loro anche un disegno su come costruire una pavimentazione.

Per quanto riguarda le linee trasverse tutti si sono accorti che i primi due metodi non sono corretti, però non avrebbero saputo dire perché. Alla fine ho fatto provare loro il modo ottimo con matita e squadre su fogli A4: l'esercizio è stato per la maggior parte dei casi ben svolto e in non più di 15-20 minuti.

Commenti finali:

1. La lezione si è svolta in un tempo più breve di quello che avevo previsto perché:

   - mi seguivano così bene nei passaggi di geometria che non c'erano obiezioni;
   - notavano tante cose quasi prima che le accennassi (a volte anche con il contributo del prof.);
   - lo schermo per il proiettore nell'aula di disegno si sovrapponeva alla lavagna e non era banale tirare su e giù lo schermo [ora che lo so la prossima volta preparo più diapositive, visto che dovrò fare di nuovo lezione lì], perciò era complicato scrivere alla lavagna le dimostrazioni: spesso ho dovuto raccontarle;
   - a causa della non agilità dello schermo e forse in un attimo di distrazione mi sono dimenticata di dimostrare loro un teorema (di cui comunque hanno la dimostrazione nelle dispense) che era meglio spiegare... magari lo faccio la prossima volta (una specie di 'errata corrige' della lezione precedente);

   Questo ha fatto sì che alla fine della lezione (che comunque è terminata con 5-10 minuti di anticipo) abbia potuto far vedere un po' di dipinti: l'Annunciazione di Lorenzetti, per mostrare loro la pavimentazione (ed erano tutti abbastanza concordi nel dire che a loro sembrava fosse stato usato il metodo descritto da Danti -cosa di cui io non sono affatto certa, perciò non ho preso posizione dicendo che sarebbe opportuna una analisi prospettica per poterlo affermare-), l'Ultima cena di Duccio da Buoninsegna e di Andrea del Castagno (che erano le due immagini presenti nel test di ingresso) delle quali ho mostrato l'analisi prospettica che viene fatta nel CD di [12]; infine l'Ultima cena di Leonardo da Vinci. Su questi quadri ho commentato:

- Quello che io faccio vedere loro dei quadri è l'aspetto matematico, ma a volte può risultare più bello un quadro che non ha un rigore prospettico perfetto, perché la bellezza dell'arte dipende fortemente dal soggetto rappresentato e da come è espresso (oltre che dal gusto personale di chi lo guarda); quindi una prospettiva perfetta non è indice di bellezza o non bellezza [in tal caso una fotografia sarebbe la rappresentazione più bella, ma ciò non è detto].
- Un aspetto fondamentale che cambia, nel passaggio da dipinti senza impianto prospettico ad altri che ce l'hanno, è il modo con cui l'artista richiama chi guarda il quadro al soggetto: mentre prima della prospettiva si usava rappresentare più grandi i soggetti più importanti, il pittore usa la prospettiva per far concentrare lo sguardo di chi osserva nel punto in cui convergono le linee. Spesso infatti il punto di fuga si trova sul volto del soggetto o comunque in un punto in cui il pittore vuole che si guardi. Guardando l'Ultima cena di Andrea del Castagno il punto di fuga è su Giovanni, che dorme sul braccio di Gesù. Alla domanda di un ragazzo: 'Come mai il punto di fuga è su Giovanni invece che su Gesù?' io ho risposto che un motivo poteva essere che una persona può dormire sulla spalla di qualcuno, solo se si fida di lui, se gli si affida. Quindi un motivo poteva essere l'invito del pittore ad un affidarsi così a Gesù. Il prof è intervenuto dicendo che in realtà in alcuni periodi le sette cristiane hanno venerato di più la figura di Giovanni che quella di Gesù, se si pensava anche a certi scritti, come *Il codice da Vinci*, infatti... [poi mi sono persa, ma nessuno riusciva più a seguirlo.]

2. Rispetto alla prima volta i ragazzi erano un più disinibiti. Mi hanno preso in simpatia, alcuni non riuscivano più a darmi del Lei [non so se è un bene o un male, ma è così di fatto]; finita la lezione mi hanno chiesto se questa era la mia tesi di laurea e allora ho raccontato loro brevemente come mai avevo deciso di fare questo tipo di tesi, da cosa era nata l'idea... Erano tutti stupiti. Ho anche detto loro che speravo

che questo lavoro insieme fosse interessante per loro oltre che per me e che alla fine avrei chiesto se ne valeva la pena.

3. Alcuni ragazzi prendevano appunti, alcuni cercavano di leggere anticipatamente le soluzioni delle domande che ponevo [alcune cose erano scritte sulle dispense: la prossima volta le consegno alla fine della lezione!], cose che tuttavia indicano che l'argomento e il modo di trattarlo desta curiosità. Inoltre tutti avevano il materiale consegnato la volta precedente.

2.1.3 Terza lezione: Piero della Francesca e la prospettiva.

18-02-09: 19 studenti presenti.

Anche la lezione di oggi si è svolta nell'ora di disegno. I ragazzi oggi sembravano un po' più stanchi rispetto all'altra volta, tuttavia hanno seguito abbastanza attentamente.

Per prima cosa ho consegnato loro un foglio di appendice che conteneva la definizione di distanza tra due rette. Poi, nel cominciare la lezione, ho chiesto loro se si ricordavano i metodi per realizzare in prospettiva una pavimentazione visti la volta scorsa e ho cercato di far riassumere un po' anche per quelli che erano assenti. Se li ricordavano abbastanza, anche se il modo ottimo risultava difficile da descrivere a parole. Poi ho fatto loro una carrellata delle opere che precedono la prospettiva piana: Giotto, Duccio da Buoninsegna e Lorenzetti. Successivamente ho chiesto loro cosa conoscessero di Piero della Francesca, ma non mi sapevano dire niente di lui, perciò ho raccontato una piccola parte della sua biografia, che servisse a far comprendere loro che il suo modo di fare arte era, come anche la sua produzione letteraria, un modo con cui lui ricercava in matematica, secondo quanto afferma anche un'autorità in storia della matematica come il prof. E. Giusti, in determinati settori specifici: prospettiva e algebra. Senza dilungarmi troppo, ho introdotto il suo metodo, ho accennato le dimostrazioni dei teoremi che ne garantiscono il funzionamento e poi ho mostrato le due opere *Sacra conversazione* e *Flagellazione di Cristo*. Così, visto che il metodo funziona ed ha una buona riuscita per la rappresentazione, ho mostrato che per ottenere la stessa pavimentazione sarebbe stato sufficiente partire disegnando un trapezio e, da lì, trovare il punto di fuga e le rette perpendicolari alla linea di terra; infine si trovavano le rette trasverse e il punto di distanza semplicemente disegnando la diagonale del trapezio. Poi abbiamo visto che la trasformazione di Piero è una proiezione. Ho concluso la parte di storia dell'arte con una carrellata di dipinti del Rinascimento fiorentino: Masaccio, Masolino, Andrea del Castagno, Domenico Ghirlandaio, Paolo Uccello. Ho approfittato del dipinto di Masolino per spiegare com'è possibile verificare se un dipinto ha un impianto prospettico costruito con il modo ottimo di Alberti e ho fatto vedere che alcuni pittori, come Paolo Uccello, spesso usino costruzioni con più punti di fuga. Inoltre ho inserito un quadro di Raffaello, che mi ha permesso di far notare l'impianto prospettico di Piero della Francesca e di accennare il problema della restituzione prospettica, ossia quello di ricostruire la scena reale a partire dal quadro. Negli ultimi 45 minuti ho detto loro di risolvere gli esercizi dati in fondo alle dispense del giorno: provare il metodo di Piero della Francesca, provare a fare la stessa costruzione a partire dal trapezio e vedere se nella *Presentazione nel tempio* di Beato Angelico la degradazione delle colonne è realizzata usando il modo ottimo di Alberti. Quasi tutti hanno svolto i primi due esercizi; per il primo esercizio hanno avuto bisogno di un aiuto: cercavano di riprodurre l'immagine, ma non avevano capito fino in fondo cosa faceva Piero, perciò diversi lo hanno ricominciato da capo. Spesso non disegnavano due quadrati uno sopra l'altro con in comune la linea di terra. Un ragazzo lo ha fatto volutamente e mi ha detto:

Non serve il quadrato di sotto, basta fare le suddivisioni corrette sulla linea di terra,

che è vero, perciò è l'unico a cui non l'ho fatto rifare (è lo stesso ragazzo che per disegnare il quadrato, invece di usare le squadre, ha usato riga e compasso). A me sembrava utile che facessero questo esercizio per fissare le idee, dato che la lezione era stata piuttosto frontale; io stessa avevo rifatto la costruzione un paio di volte a casa prima di capirla, e inoltre capire bene la costruzione di Piero della Francesca era fondamentale perché l'intento della lezione successiva era definire le omologie, di cui questa costruzione è un bell'esempio.

Per il secondo esercizio non hanno avuto grossi problemi. Alcuni non avevano colto che il punto di distanza si determinava prolungando le rette che corrispondenti alle diagonali di tutti i trapezi. Perciò anche questo esercizio, seppure semplice, è risultato utile. Un ragazzo in particolare ha dimostrato di essere stato molto attento e ha colto subito il modo con cui muoversi per i due esercizi. Sveglio dal punto di vista architettonico [farà architettura?].

Il terzo esercizio è stato solo iniziato da alcuni, ma nessuno lo ha svolto interamente a causa di tempo e stanchezza, perciò l'ho assegnato per casa, da svolgere per la volta successiva. [Ho intenzione infatti di correggerlo insieme a loro e poi potrei mettere un esercizio simile anche nel test finale, magari come facoltativo.] Dunque ho fatto vedere l'animazione del modo ottimo presente nel CD di [12] per un ripasso del metodo e ho suggerito loro che per svolgere l'esercizio conveniva considerare le colonne di destra del quadro e fare i passi che avevo spiegato per l'affresco di Masolino poco prima. Poi li ho invitati a ripassare i metodi di Alberti e di Piero, capendo anche perché funzionano matematicamente, in quanto non escludevo la loro presenza nel test.

Una ragazza, che sapeva di non essere presente il giovedì successivo, mi ha chiesto come poteva fare per avere il materiale della lezione anche in vista del test [il confronto finale aumenta l'impegno di tutti], perciò ho detto a tutti che ero già d'accordo con la prof. Rigato per fornire loro tutte le lezioni in formato elettronico per aiutarli nel ripasso. Ho ribadito che, però, l'impegno in classe era fondamentale, anche perché le dispense erano circa 50 pagine, per cui sarebbe stato difficile studiarle e capirle tutte insieme.

Considerazioni finali:

- Stavolta il professore ha fatto una piccola esternazione ad un certo punto, ma è stato un episodio contenuto. I ragazzi stessi lo invitavano a notare che io stavo per dire altro e andare avanti.

- Malgrado fossero stanchi, hanno lavorato, anche se sono occorsi un po' di richiami [da parte mia, dato che il professore ogni tanto instaurava conversazioni con una o due persone a turno su altre cose], e il risultato è stato buono.

- Il professore stesso mi ha detto che li ha visti attenti e interessati, anche se un po' stanchi, rispetto ad altre lezioni svolte con lui, ed era soddisfatto del mio lavoro.

2.1.4 Quarta lezione: geometria proiettiva

26-02-09: 20 studenti presenti.

La lezione di oggi era senz'altro la più impegnativa delle quattro in quanto dovevo introdurre la geometria proiettiva vera e propria. Inoltre la prof. Rigato mi aveva esplicitamente chiesto di spiegare e far svolgere degli esercizi sul teorema di Desargues oltre che arrivare a parlare delle proiettività, in modo che lei potesse introdurre meglio le affinità.

L'esercizio lasciato per casa la volta precedente non era stato svolto: solo due o tre di loro lo avevano iniziato; perciò ho semplicemente fatto vedere la soluzione e poi ho cominciato subito la lezione.

Alla domanda: «Conoscete situazioni in cui l'oggetto da proiettare è tra il punto da cui si proietta e il piano?» le risposte che davano erano complicate: *Si ottiene una proiezione dell'oggetto* oppure *I due oggetti sono simili* e a nessuno sono venute in mente le ombre, ad esempio.

Invece alla seconda domanda: «E situazioni in cui il punto da cui si proietta è tra l'oggetto e il piano?», un ragazzo ha subito detto *l'occhio*, mentre altri hanno detto *le simmetrie centrali*.

Erano piuttosto incuriositi dal funzionamento della camera oscura. Nel tentativo di generalizzare a punti tra l'occhio e il quadro o dietro l'occhio, quando si parlava degli intorni dei punti all'infinito, qualcuno ha avuto l'intuizione che se invece di porci su una retta, ci ponessimo su un piano, si potrebbero trovare due rami di iperbole. Io ho preso al balzo quell'osservazione per dire che non basta un punto, ma prendendo una circonferenza, con la retta all'infinito passante per un diametro, si potrebbero avere due rami di iperbole. Non solo, ho aggiunto anche che proiezioni della circonferenza danno origine alle coniche.

Dopo aver introdotto i punti all'infinito e definito dunque il piano proiettivo, ho dimostrato le osservazioni

Per due punti distinti passa una e una sola retta e *Ogni coppia di rette ha un (solo) punto in comune*, verificando se stavano capendo i passaggi che facevo.

Nella prima osservazione, non è risultato immediato il perché per un punto all'infinito e per uno al finito passi una e una sola retta, mentre gli altri due casi erano più evidenti. Invece nella seconda osservazione non sapevano dirmi perché il punto di intersezione all'infinito fosse unico. Questo penso che sia imputabile al fatto di non aver ancora capito a fondo (glielo avevo appena spiegato, del resto) la definizione di punto di fuga come direzione di una retta.

Poi ho introdotto gli oggetti geometrici: retta, segmento e triangolo. Dopo aver visto i corrispondenti affini di segmento e triangolo [ad un ragazzo non era chiaro subito come mai se la retta all'infinito passa per un lato , allora il triangolo è aperto senza il terzo lato], a seconda della posizione dei punti all'infinito, ho fatto svolgere l'esercizio sul quadrato. Non è risultato facile per tutti: in particolare il primo punto l'hanno svolto abbastanza bene, mentre per il secondo punto hanno avuto delle buone intuizioni, ma non sono riusciti a svolgerlo perfettamente. Di questo secondo punto ho fatto disegnare alla lavagna tre soluzioni diverse, ognuna delle quali non era giusta perché non teneva conto di un fattore. Dopo la correzione, lo svolgimento era più chiaro a tutti. L'immagine 2.1 riporta quello che hanno disegnato alla lavagna.

Da qui in poi i tempi si sono ristretti. Era rimasta l'ultima ora di lezione e la professoressa aveva particolarmente a cuore le proiettività. Quindi ho introdotto lo spazio proiettivo, le sue proprietà, e ho mostrato cosa vuol dire che due triangoli sono omologhi abbastanza rapidamente, facendo notare loro che il legame tra due triangoli omologhi è più generale di quello che c'è, ad esempio, tra due triangoli simili. Poi ho raccontato le dimostrazioni del teorema di Desargues e del suo inverso, senza scendere in troppi dettagli. In seguito ho spiegato come fare la proiezione di un punto qualsiasi del piano, una volta noti il centro di proiezione, un asse e la proiezione di un altro punto. In questo modo sarebbero stati in grado di svolgere gli esercizi che ho subito assegnato. Il primo esercizio in effetti è stato risolto correttamente, mentre nessuno ha avuto l'idea per svolgere il secondo (che era nettamente più difficile): è venuto un ragazzo alla lavagna con il quale abbiamo risolto l'esercizio, grazie a qualche suggerimento; alla fine lui ha ripercorso e rispiegato il procedimento a tutti, mostrando di aver capito.

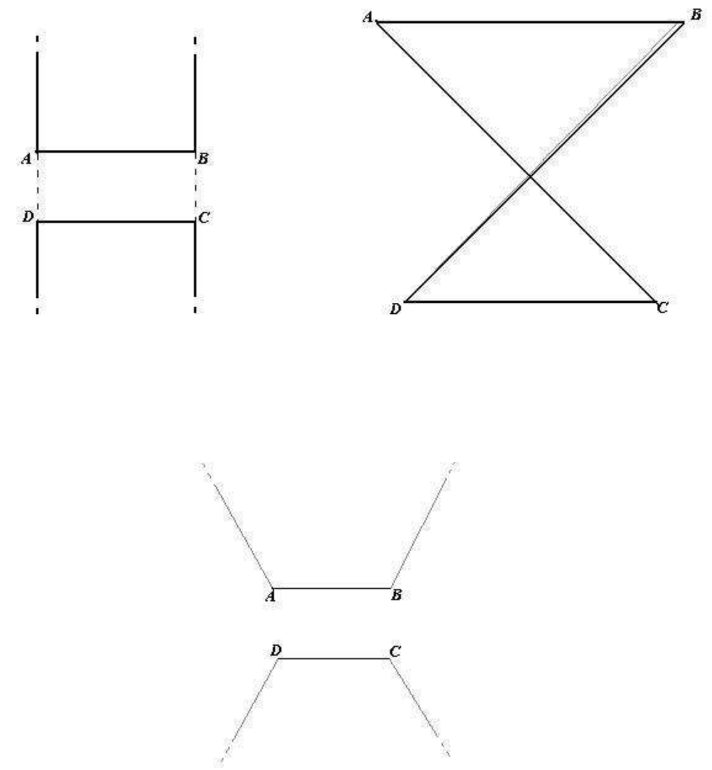


Figura 2.1: Soluzioni riportate dai ragazzi per l'esercizio sul quadrato proiettivo.

Infine siamo arrivati alle proiettività: ho detto loro che Piero della Francesca, pur non sapendolo, aveva realizzato un'omologia, che si poteva costruire, oltre al modo con cui avevamo già visto la volta precedente, con il teorema di Desargues. Abbiamo visto esempi di proiezioni parallele (ho fatto l'esempio del sole che illumina gli oggetti), e di quelle centrali, che erano quelle che avevamo visto di più anche con la prospettiva.

L'ultimo teorema, che riepilogava e riuniva la costruzione di una pavimentazione e le proiettività, risultava un po' difficile da spiegare ed è stato compreso grazie al fondamentale uso delle animazioni del [12].

Considerazioni finali:

- Questa lezione era senz'altro la più impegnativa per tutti: i concetti non erano immediatamente compresi e gli esercizi sono risultati più difficili. Tuttavia era anche quella che introduceva concetti realmente nuovi dal punto di vista matematico e perciò, credo che fosse più attrattiva per quelli che sono appassionati di matematica [e in quella classe erano tanti].

- Far dire tutte le soluzioni da loro date agli esercizi è davvero utile per tutti. Si impara e si capisce anche meglio dagli errori propri e degli altri.

- La prof. Rigato era complessivamente soddisfatta e ha commentato scherzando: «Il prossimo anno ti chiamo per rifarlo, classe permettendo...»

2.2 Esito del test finale

Da notare che i ragazzi si sono impegnati per svolgere il compito, tanto che, come si evince anche dai risultati totali qui di seguito riportati, il punteggio minimo è stato 21 su 30, anche se nessuno ha svolto in modo perfetto tutto il compito. Inoltre, a conferma dell'impegno, notiamo che tutti hanno cercato di cominciare ogni esercizio. Nell'ambito di questa sperimentazione era importante tenere conto anche dell'esercizio facoltativo, che pertanto è valutato insieme agli altri, per considerare perfetto lo svolgimento del test.

Voto	21	22	23	24	25	26	27	28
Studenti/voto	1	3	5	3	1	2	1	2

Tenendo anche conto della completezza delle risposte, i punteggi sono stati assegnati con la seguente griglia di valutazione

Esercizio	1° quesito	2° quesito	Tot/esercizio
1	3	3	6
2	3	3	6
3	2	4	6
4	3	3	6
5	3	-	3
6	3	-	3

Di seguito la tabella con i punteggi relativi ottenuti dagli studenti per ogni esercizio.

Esercizio	0 punti	1 punto	2 punti	3 punti	4 punti	5 punti	6 punti
1	0	0	0	1	1	5	11
2	0	0	1	1	4	5	7
3	0	0	1	0	4	1	12
4	0	0	0	4	6	7	1
5	0	3	2	13	-	-	-
6	0	10	7	1	-	-	-

Se escludiamo l'esercizio facoltativo, notiamo innanzitutto che l'esercizio che è risultato più difficile è il 4, ossia quello che chiedeva di definire punto all'infinito, retta all'infinito e piano proiettivo (nel primo quesito) e di rappresentare i segmenti con le rette e i punti all'infinito (nel secondo quesito). Invece l'esercizio risultato più semplice è il primo. In figura 2.2 confrontiamo l'esito degli esercizi con un istogramma raffigurante il punteggio medio ottenuto dai ragazzi per ogni esercizio: escludendo l'esercizio facoltativo, possiamo notare che in media il punteggio raggiunto è stato superiore a 4 su 6. Quindi in generale gli esercizi sono stati risolti da quasi tutti e spesso bene.

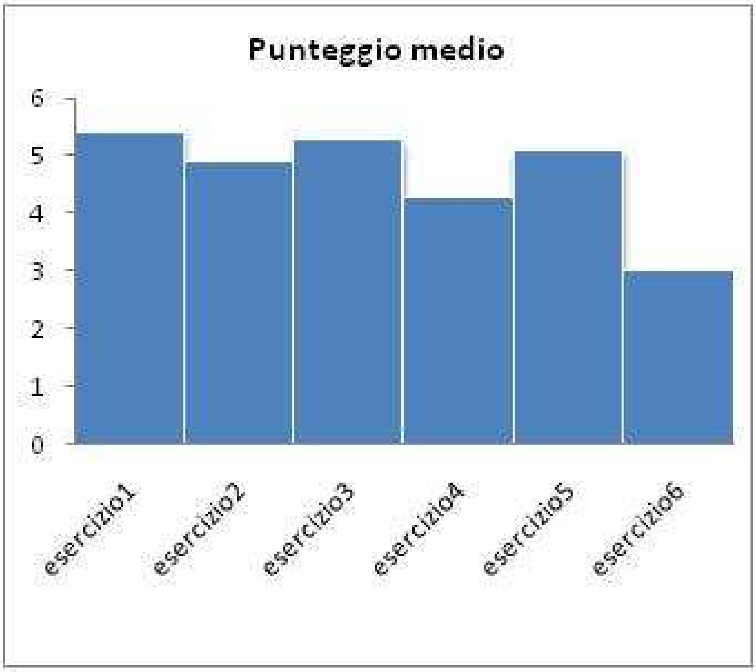


Figura 2.2: Istogramma raffigurante il punteggio medio per ogni esercizio ottenuto al test finale dai ragazzi. L'esercizio 6 era quello facoltativo.

Riportiamo infine le risposte più frequenti e cerchiamo di analizzare gli errori più frequenti dei ragazzi.

- Esercizio 1: Questo esercizio non ha creato particolari problemi ai ragazzi: chi ha ottenuto un punteggio più basso, ossia 3 punti, è perché ne ha risolto solo metà, avendo letto male il comando. Tutti gli altri hanno preso o 5 o 6 punti, dove la distinzione nel punteggio è dovuta semplicemente alla completezza della risposta [spesso i ragazzi hanno sottinteso che gli spicchi in cui è diviso l'esagono sono triangoli equilateri e ho valorizzato le risposte che sono meglio giustificate da questo punto di vista].

- Esercizio 2:

  1. 'Definisci cos'è un punto di fuga.'

     Il punto di fuga è il punto in cui convergono rette fra loro parallele di un piano.

[o anche *Il punto di fuga è il punto in cui si vedono convergenti due segmenti paralleli.*] (12 ragazzi)

Il punto di fuga è il punto dove convergono tutte le linee del quadro che sono tra loro parallele e perpendicolari (nella realtà) rispetto al piano del quadro.

Questa risposta fa capire che la ragazza ha ben presente gli esempi visti a lezione della pavimentazione e rispetto a tutti gli oggetti che avevano il punto di fuga coincidente con il punto centrico, ma evidentemente, la definizione è buona solo per un caso particolare. (1 ragazzo)

Si definisce punto di fuga il punto di incontro di segmenti paralleli.

Questa risposta indica che questi ragazzi hanno capito il concetto di punto di fuga da un punto di vista intuitivo, ma formalmente non hanno ancora imparato ad esprimerlo. Risulta infatti poco chiaro come due segmenti in generale siano convergenti: quello che accade è che noi li vediamo convergere, nel momento in cui li immaginiamo prolungati nella loro direzione (4 ragazzi).

Il punto di fuga è il punto dove si vedono convergere 2 punti paralleli.

Credo che questa risposta, che scritta così è completamente insensata, sia stata una svista del ragazzo che ha scritto *punti* al posto di *segmenti* oppure *rette* (1 ragazzo).

2. 'Definisci cos'è la linea di orizzonte.'

   La linea di orizzonte è la retta parallela alla linea di terra passante per il punto di fuga.

   Questa risposta risulta non standard e incompleta, infatti occorre specificare che il punto di fuga per il quale passa la linea di orizzonte è quello di due rette parallele giacenti sul piano di terra, ma il motivo più probabile per il quale il ragazzo parla del punto di fuga, è perché ha in mente gli esempi visti con il punto centrico (1 ragazzo).

   Si definisce linea di orizzonte la linea sulla quale si pongono i punti di fuga.

   Anche questa risposta indica che i ragazzi hanno capito gli esempi visti, ma non ancora l'astrazione successiva. La linea di orizzonte contiene i punti di fuga solo se gli oggetti rappresentati si trovano tutti sul piano di terra. Altrimenti, il punto di fuga può trovarsi anche altrove (2 ragazzi).

La linea di orizzonte è l'intersezione tra il piano dell'orizzonte e il piano del quadro.

Questa era la risposta più semplice da dare, perché era esattamente la definizione data nelle dispense (15 ragazzi).

3. 'Disegna i punti di fuga e la linea di orizzonte per gli oggetti seguenti. Dire se i tre oggetti si trovano sullo stesso piano e perché.'

   4 ragazzi hanno disegnato, in modo errato e anche cercando di forzare un po', i punti di fuga dei tre oggetti tutti e tre allineati. Tuttavia hanno dimostrato di aver capito il concetto, giustificando correttamente la risposta data: *I tre oggetti si trovano sullo stesso piano perché i loro punti di fuga sono allineati.*

   Gli altri 14 ragazzi si sono accorti dal disegno che i tre punti di fuga non erano allineati, ed hanno perciò scritto: *I tre oggetti non si trovano sullo stesso piano perché i punti di fuga non sono allineati.*

- Esercizio 3: La prima parte dell'esercizio era senz'altro più semplice della seconda e solo pochi non l'hanno fatta (2 solamente), suppongo per distrazione.

  Per quanto riguarda la seconda parte, quasi tutti per trovare la proiezione P' del punto P hanno utilizzato il metodo visto in classe nella terza lezione (14 ragazzi in modo perfettamente corretto, 1 in modo non esatto); un ragazzo non l'ha proprio fatto, mentre 2 ragazzi hanno cercato di trovare punti costruibili per usare il teorema visto alla fine della quarta lezione, ma nel farlo hanno perso di vista dove andasse esattamente a cadere il punto P'; pertanto è risultata pertinente la descrizione, ma errata la conclusione. Apprezzandone il tentativo, riporto questi ultimi due procedimenti:

  1. *Per determinare P' bisogna incellare il punto P in modo ricorrente all'interno di quadrati sempre più piccoli, dato che è semplice costruire le diagonali e gli assi di un quadrato. Una volta che il punto P casca su una diagonale o un asse basta riportarlo sulla proiezione.*
  2. *Si identifica il punto P suddividendo via via il quadrato in quadrati più piccoli che 'comprendono' P (ogni quadrato si riporta sul piano del quadro tracciando le diagonali fino ad ottenere il punto P) e il corrispondente P'.*

- Esercizio 4: Nella prima parte si chiedeva di definire punto all'infinito, retta all'infinito e piano proiettivo.

  1. 'Definisci cos'è un punto all'infinito.'
     Tutti erano d'accordo nel dire che *Il punto all'infinito di una retta è la sua direzione.*

  2. 'Definisci che cos'è la retta all'infinito.'

     La retta all'infinito è l'insieme dei punti all'infinito. (6 ragazzi)
     Questa definizione sottintende che i punti all'infinito siano tutti di un certo piano, altrimenti, invece che di retta, si dovrebbe parlare di piano all'infinito.

     La retta all'infinito è la retta che passa per i punti all'infinito. (1 ragazzo)
     Questa non è la definizione standard, ma è corretta se, come in quella precedente, si specifica che stiamo parlando dei punti all'infinito di un dato piano.

     Una retta all'infinito è l'insieme dei punti all'infinito di una retta. (1 ragazzo)
     Questa è certamente sbagliata. Infatti abbiamo appena detto che un punto all'infinito è la direzione di una retta, quindi ogni retta ha un solo punto all'infinito. Per parlare di più punti all'infinito occorre considerare luoghi geometrici di dimensione più grande, ossia almeno i piani.

     La retta all'infinito è l'insieme di tutte la direzioni di quel piano. (1 ragazzo)
     Questa risposta è incompleta: un piano è generato da due rette con direzioni distinte. Più che *direzioni di un piano*, occorre parlare delle *direzioni delle rette* che giacciono su quel piano.

     La retta all'infinito è l'insieme di tutti i punti all'infinito di un dato piano. (5 ragazzi)
     Questa è la risposta completa.

     La retta all'infinito è l'insieme di tutti i suoi punti all'infinito. (3 ragazzi)
     In questa risposta non è chiaro a cosa si riferisce l'aggettivo *suoi.*

3. 'Definisci cos'è il piano proiettivo.'

   Il piano proiettivo è il piano euclideo completato dai punti (e la retta) all'infinito. (13 ragazzi)
   Questa risposta era la definizione presente nelle dispense. Alcuni di loro, per la verità, hanno scritto *i punti e la retta* come se alcuni punti all'infinito di quel piano possano non stare sulla retta all'infinito del piano stesso. In realtà la definizione precedente di retta all'infinito precisa che tutti i punti all'infinito di un piano stanno sulla retta all'infinito. Quindi, credo che sia un concetto da precisare, perché magari qualcuno ce l'ha chiaro e qualcun altro no.

   Il piano proiettivo è formato dal piano euclideo con i suoi punti e le sue rette all'infinito. (2 ragazzi)
   Anche questa risposta evidenzia un concetto non ancora digerito. Infatti un piano ha una sola retta all'infinito. Il fatto che abbiano scritto la parola *rette* indica che non è chiaro questo fatto.

   Il piano proiettivo è il piano euclideo costituito dai punti (e dalla retta) all'infinito. (1 ragazza)
   Questa risposta è probabilmente una svista della ragazza, in quanto questa definizione fa presumere che solo i punti e la retta all'infinito formano il piano proiettivo.

   Un piano proiettivo è un piano completato da tutte rette infinite e quindi punti all'infinito. (1 ragazzo)
   Questo ragazzo si è ricordato vagamente la definizione e l'ha riportata, ma è evidente che ancora non ha assimilato il concetto di piano proiettivo.

   1 ragazzo non ha risposto.

Per quanto riguarda la valutazione della seconda parte dell'esercizio, conviene distinguere se sono stati svolti giusti o sbagliati un solo caso o tutti e due: il primo caso, 8 ragazzi lo hanno disegnato correttamente, 6 in modo meno preciso (ma non sbagliato del tutto) mentre 4 lo hanno sbagliato del tutto; per il secondo caso, invece, 11 sono disegnati correttamente, 3 in modo meno preciso, 4 sbagliato completamente. Gli errori sono dovuti o ad assenze alla spiegazione o al non aver ancora associato le definizioni di punti e rette all'infinito al loro significato geometrico. Da notare che 8 ragazzi hanno svolto tutta questa seconda parte in modo perfetto.

- Esercizio 5: Questo esercizio richiedeva l'applicazione del teorema di Desargues per disegnare l'omologo di un quadrato dato, conoscendo il centro e l'asse dell'omologia, e avendo già nella figura una retta passante per uno dei lati e la sua omologa. 12 tra i ragazzi hanno svolto l'esercizio perfettamente, dimostrando di aver compreso l'applicazione del teorema di Desargues, nei casi proposti a lezione. Un ragazzo non ha completato il quadrato, ma l'esercizio era praticamente risolto, uno ha invertito le proiezioni di due vertici, 2 lo hanno sbagliato e uno solo lo ha appena cominciato. Ciò indica che questo argomento, di una matematica considerata più avanzata rispetto al livello scolastico, se opportunamente introdotto può essere spiegato e compreso già alla scuola media superiore, laddove è possibile.

- Esercizio 6 (facoltativo): 11 ragazzi hanno lo hanno appena iniziato, oppure hanno cominciato un procedimento non corretto: ad esempio spesso non hanno trovato la linea di orizzonte oppure altri hanno descritto il procedimento fuori dal quadro senza applicarlo o un altro ancora ha svolto un procedimento totalmente diverso; 6 ragazzi lo hanno svolto maggiormente, magari verificando il metodo di Alberti non sulle colonne di destra come chiedeva il comando, oppure usando il procedimento giusto, ma traendo come conclusione (sbagliata) che il metodo usato non fosse quello ottimo. Solo un ragazzo l'ha svolto in modo esatto.

2.3 Cosa ne pensano i ragazzi

Ho sottoposto ai ragazzi un questionario in forma anonima che valutasse l'esperienza che avevano fatto, di cui riporto le risposte date.

LA PROSPETTIVA PIANA: VALUTAZIONE DELL'ESPERIENZA

- Rispondi alle seguenti domande contrassegnando la casella più appropriata, dove i simboli corrispondono a:

DECISAMENTE NO — PIÙ NO CHE SÌ

PIÙ SÌ CHE NO — DECISAMENTE SÌ

nr	Domanda				
1	Sapevi dell'esistenza della geometria proiettiva?				
2	Gli argomenti delle lezioni svolte erano interessanti?				
3	Gli argomenti delle lezioni svolte erano difficili da apprendere?				
4	La tua preparazione scolastica era sufficiente per affrontare questi argomenti?				
5	È stato impegnativo seguire la lezioni?				
6	Gli argomenti introdotti in ogni lezione erano proporzionati con il tempo disponibile?				
7	Gli strumenti forniti (schede didattiche e immagini proiettate) ti sono stati utili per capire meglio gli argomenti proposti?				
8	Le attività di disegno ti sono risultate utili per capire l'evoluzione storica della prospettiva?				
9	Gli esercizi svolti ti hanno aiutato ad entrare nel merito della geometria proiettiva?				
10	La laureanda ha esposto gli argomenti in modo chiaro?				
11	La laureanda è risultata disponibile in caso di richiesta di chiarimenti?				
12	La laureanda ha motivato il tuo interesse verso questi argomenti?				

- Indica quali argomenti ti sono piaciuti maggiormente e perché.

  - L'ottica euclidea (in particolare l'apparente allineamento dei punti e l'apparente incidenza delle linee rette);
  - La rappresentazione sul piano di un quadro (specialmente i concetti di punto di fuga e linea di orizzonte);
  - Il metodo di Alberti per rappresentare una pavimentazione;
  - Il metodo di Piero della Francesca per rappresentare una pavimentazione;
  - Il piano proiettivo, soprattutto nell'introduzione dei punti all'infinito e della retta all'infinito;
  - Il teorema di Desargues e le sue implicazioni;
  - Altro: ....

Perché

....

....

....

....

COMMENTI LIBERI:

1) Sapevi dell'esistenza della geometria proiettiva?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	3	11	4	0

2) Gli argomenti delle lezioni svolte erano interessanti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	3	11	4	0

3) Gli argomenti delle lezioni svolte erano difficili da apprendere?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
4	10	4	0	0

4) La tua preparazione scolastica era sufficiente per affrontare questi argomenti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	2	6	10	0

5) È stato impegnativo seguire le lezioni?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
5	9	4	0	0

6) Gli argomenti introdotti in ogni lezione erano proporzionati con il tempo disponibile?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
1	4	5	9	0

7) Le schede didattiche e le immagini proiettate ti sono state utili per capire gli argomenti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	0	1	17	0

8) Le attività di disegno ti sono risultate utili per capire l'evoluzione storica della prospettiva?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	più sì che no / più no che sì
0	5	6	6	1

9) Gli esercizi svolti ti hanno aiutato ad entrare nel merito della geometria proiettiva?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	0	11	7	0

10) La laureanda ha esposto gli argomenti in modo chiaro?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	1	11	6	0

11) La laureanda è risultata disponibile in caso di richiesta di chiarimenti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	0	1	17	0

12) La laureanda ha motivato il tuo interesse verso questi argomenti?

Decisamente no	Più no che sì	Più sì che no	Decisamente sì	Vuoto
0	3	12	3	0

Indica quali argomenti ti sono piaciuti maggiormente e perché.

a. L'ottica euclidea (in particolare l'apparente allineamento dei punti e l'apparente incidenza delle linee rette);

b. La rappresentazione sul piano di un quadro (specialmente i concetti di punto di fuga e linea di orizzonte);

c. Il metodo di Alberti per rappresentare una pavimentazione;

d. Il metodo di Piero della Francesca per rappresentare una pavimentazione;

e. Il piano proiettivo, soprattutto nell'introduzione dei punti all'infinito e della retta all'infinito;

f. Il teorema di Desargues e le sue implicazioni;

g. Altro...

risposta	a	b	c	d	e	f	g
nr preferenze	4	5	3	9	8	6	0

Motivazioni:

Risposte a, c, d: *Ho imparato nuove cose, che non sapevo esistessero.*

Risposte e, f: *Erano cose che non conoscevo e mi hanno affascinato.*

Risposta b: *Perché non ho mai fatto attenzione in un disegno a questi concetti.*

Risposta d: *Mi ha insegnato a creare una buona pavimentazione.*

Risposta f: *Soprattutto per l'omologia, argomento di studio odierno in classe.*

Risposta d: *Perché ci ha fatto capire meglio come si può realizzare una pavimentazione con la prospettiva.*

Risposte d, e: *Perché erano cose nuove ed interessanti.*

Risposta b: *Sono argomenti poco sviluppati a disegno.*

Risposta b: *Perché è un argomento mai svolto con la scuola, ma invece essenziale e molto interno al programma scolastico.*

Risposte a, e, f: *Mi ha molto interessato il campo della geometria, ed è stato buono il modo con cui questi argomenti sono stati esposti.*

Risposte b, d: *Il metodo di Piero è il più vicino alla realtà.*

Risposte c, d: *Sono le lezioni a cui ho partecipato, alle altre non c'ero.*

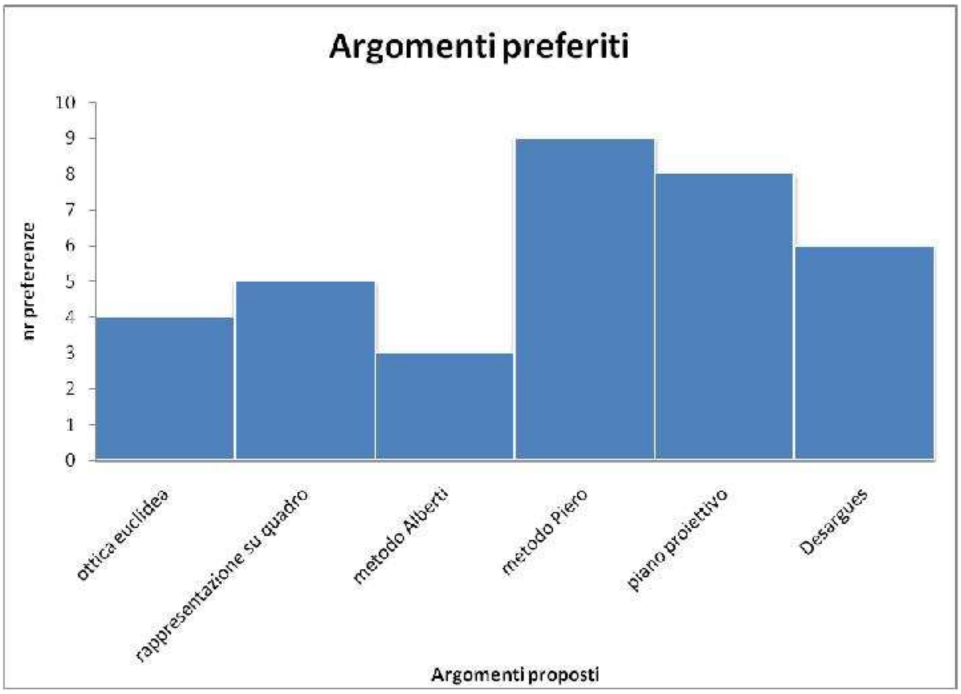
Risposte e, f: *Perché ho trovato più divertente fare le costruzioni dei triangoli, dei quadrati, ecc. ecc.*

Risposte c, e, f: *Sono gli argomenti che ho seguito con maggior chiarezza.*

Risposta a: *Perché è nuova.*

Risposta f: *Perché è un teorema molto utile per la risoluzione di molti problemi.*

Risposta b: *Perché consentiva di capire meglio l'applicazione della prospettiva alla pittura.*



Non ci sono stati commenti liberi.

Dalle risposte date dai ragazzi ho potuto constatare che l'esperienza è stata nel complesso positiva, oltre che per me, anche per loro. In particolare mi ha positivamente colpito la quasi unanimità delle risposte affermative rispetto all'utilità delle dispense fornite e degli strumenti utilizzati per capire di più gli argomenti.

Inoltre le maggiori preferenze degli argomenti trattati sono andate, in ordine decrescente, al metodo di costruzione di Piero della Francesca, al piano proiettivo e al teorema di Desargues, che erano gli argomenti con risvolti matematici più significativi e più nuovi rispetto alle loro conoscenze iniziali. Da questo si può evidenziare una grande propensione della classe per la matematica, ma anche una maggiore conoscenza del legame tra prospettiva piana e geometria proiettiva, che è un indice positivo rispetto alla riuscita della sperimentazione.

Parte II

Approfondimenti

Capitolo 3

Approfondimenti teorici

3.1 Teorema di Desargues

Vediamo come primo approfondimento, una versione affine del teorema di Desargues [7]. Nel seguito $\mathbb{K}$ denota il campo da cui viene definito lo spazio vettoriale $\mathbf{V}$ e il relativo spazio affine $\mathbf{A}$.

Teorema 13. *Siano A, B, C, A', B', $C' \in \mathbf{A}$ punti a tre a tre non allineati, tali che*

$$\overline{AB} \,||\, \overline{A'B'}\,, \quad \overline{BC} \,||\, \overline{B'C'}\,, \quad \overline{AC} \,||\, \overline{A'C'}\,.$$

Allora le tre rette $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ sono parallele oppure hanno un punto in comune.

Dimostrazione. Supponiamo che $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ non siano parallele. Allora due di esse si incontrano e possiamo quindi supporre che $\overline{AA'} \cap \overline{BB'} = \{O\}$. Per il teorema di Talete applicato ad $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, si ha

$$\vec{OA'} = k\vec{OA}\,, \quad \vec{OB'} = k\vec{OB}\,, \quad k \in \mathbb{K}$$

Sia $\{C''\} = \overline{OC} \cap \overline{A'C'}$. Poiché $\vec{OA'} = k\vec{OA}$, per il teorema di Talete

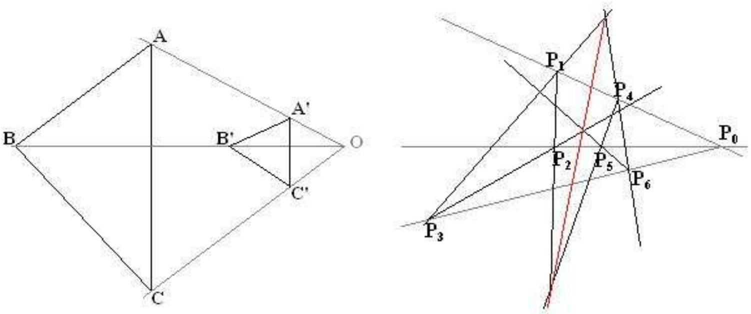


Figura 3.1: La figura a sinistra è riferita al teorema di Desargues in versione affine, mentre quella a destra a quello in versione proiettiva.

applicato ad $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, si ha

$$\vec{OC''} = k\vec{OC}\,. \tag{3.1}$$

D'altra parte, posto $\{C'''\} = \overline{OC} \cap \overline{B'C'}$, il teorema di Talete applicato a $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, implica che

$$\vec{OC'''} = k\vec{OC}\,, \tag{3.2}$$

perché $\vec{OB'} = k\vec{OB}$. Ora, confrontando le (3.1) e (3.2), vediamo che $C'' = C''' = C'$ e quindi O, C, C' sono allineati. $\square$

Torniamo alla versione proiettiva del teorema di Desargues già trovato a pag. 64, ma stavolta lo vediamo in termini vettoriali [7]. Osserviamo che il caso in cui le tre rette sono parallele viene meno, dato che rette con stessa direzione hanno lo stesso punto all'infinito.

Teorema 14. *Sia* $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{V})$ *un piano proiettivo e siano* P_1, ..., $P_6 \in \mathbf{P}$ *punti distinti tali che le tre rette* P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 *abbiano in comune un punto* P_0 *diverso da* P_1, ..., P_6. *In tali ipotesi, i punti*

$$P_1P_3 \cap P_4P_6\,, \quad P_2P_3 \cap P_5P_6\,, \quad P_1P_2 \cap P_4P_5$$

sono allineati.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v_0}$, $\mathbf{v_1}$, ..., $\mathbf{v_6} \in \mathbf{V}$ tali che $P_i = [\mathbf{v_i}]$, $i = 1, \ldots, 6$. Per ipotesi esistono scalari α_1, ..., $\alpha_k \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{v_0} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_4\mathbf{v_4} = \alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_5\mathbf{v_5} = \alpha_3\mathbf{v_3} + \alpha_6\mathbf{v_6}\,.$$

Poiché P_0 per ipotesi è diverso da P_1, ..., P_6, gli α_1, ..., α_6 sono tutti diversi da zero.

I tre punti $P_1P_3 \cap P_4P_6$, $P_2P_3 \cap P_5P_6$, $P_1P_2 \cap P_4P_5$ sono rispettivamente associati ai vettori

$$\alpha_1\mathbf{v_1} - \alpha_3\mathbf{v_3} = -\alpha_4\mathbf{v_4} + \alpha_6\mathbf{v_6}$$

$$-\alpha_2\mathbf{v_2} + \alpha_3\mathbf{v_3} = \alpha_5\mathbf{v_5} - \alpha_6\mathbf{v_6}$$

$$-\alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} = \alpha_4\mathbf{v_4} - \alpha_5\mathbf{v_5}$$

Questi tre vettori sono linearmente dipendenti perché la loro somma è $\mathbf{0}$, e quindi i tre punti corrispondenti sono allineati. $\square$

3.2 Realizzare una pavimentazione

Nella prima parte abbiamo visto i metodi con cui Leon Battista Alberti e Piero della Francesca realizzavano una vista prospettica di una pavimentazione a mattonelle quadrate. Per entrambi i metodi veniva suddivisa in

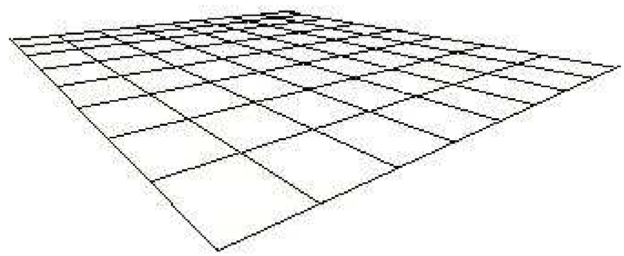


Figura 3.2: Vista prospettica di una pavimentazione con mattonelle quadrate o rettangolari.

parti uguali la retta corrispondente alla linea di terra e veniva scelto un punto di fuga al quale convergevano le rette perpendicolari alla linea di terra: le rette parallele alla linea di terra (o linee trasverse), in questi metodi, continuavano ad essere effettivamente parallele anche nella loro proiezione sul quadro. In realtà potremmo ottenere delle rappresentazioni di pavimentazioni con punti di vista diversi da quelli scelti dai due artisti, come quella in figura 3.2 ad esempio, procedendo nel modo seguente:

1. tracciamo la linea di orizzonte e, scelti due punti P e Q su di essa, tracciamo una coppia di rette passanti per P e una di rette passanti per Q, in modo che le due coppie, intesercandosi, formino un quadrangolo $ABCD$ come in figura 3.3;

2. disegnamo la diagonale BD di questa mattonella e prolunghiamola finché incontra l'orizzonte: il punto di intersezione O corrisponde al punto all'infinito di tutte le diagonali parallele a BD;

3. tracciamo la diagonale della seconda mattonella congiungendo O con A: individuiamo così il punto di interesezione E tra OA e PC;

4. tracciamo il lato della seconda mattonella congiungendo Q con E;

5. iteriamo gli ultimi due passaggi per i nuovi punti di intersezione trovati a piacimento, fino addirittura a riempire il piano. Il risultato, una volta cancellate le linee di costruzione superflue, somiglierà a quello in figura 3.2.

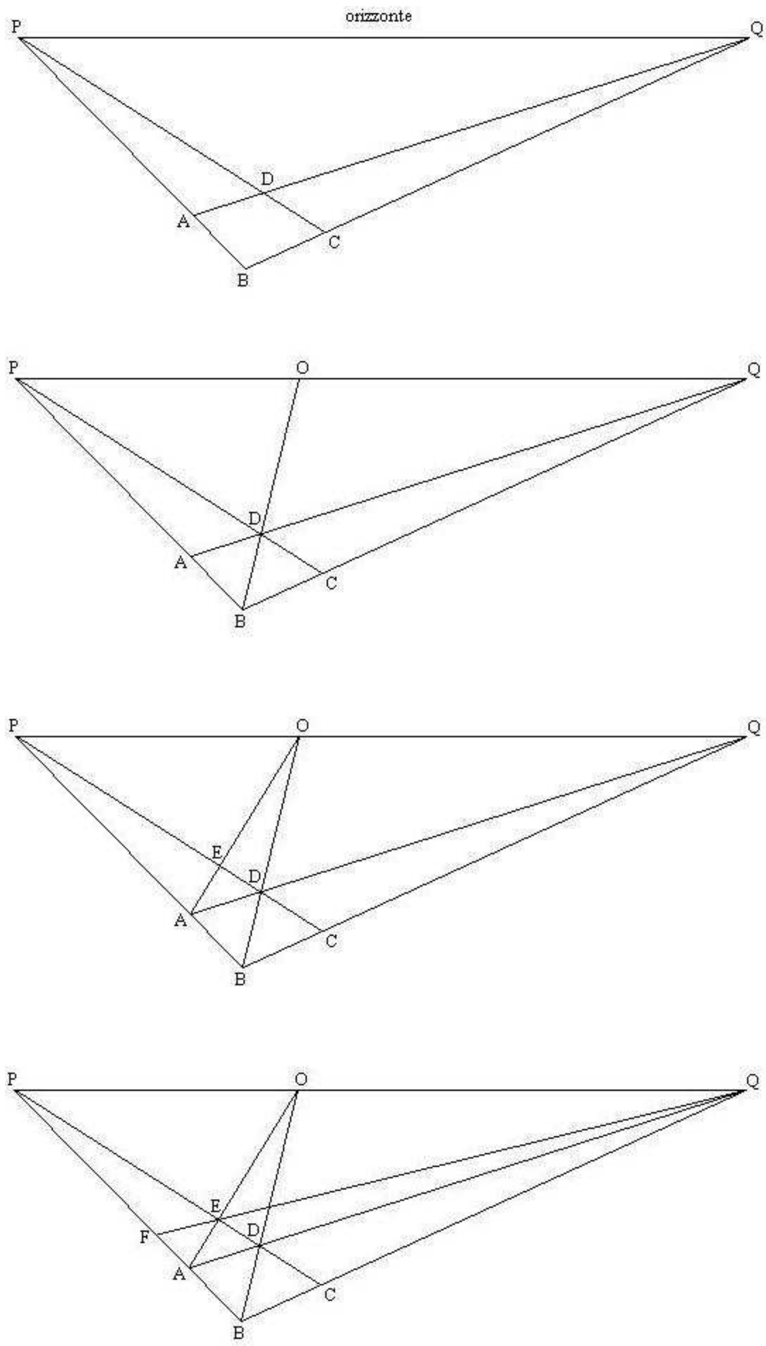


Figura 3.3: Passi per costruire una pavimentazione con mattonelle quadrate o rettangolari.

3.2.1 Correttezza della costruzione

Questa costruzione è facile da realizzare e, invece di richiedere l'uso sia della riga che del compasso (necessario, se volessimo ad esempio rendere equispaziata la suddivisione di una retta, o se volessimo tracciare una parallela a una retta data nel piano affine), *necessita della sola riga* (non graduata).

Notiamo anche che possiamo effettuare la costruzione per mattonelle quadrate, ma la stessa costruzione va bene anche per quelle rettangolari. Inoltre, con qualche tratto in più, è possibile pavimentare con mattonelle triangolari e, da queste, ricavare anche una pavimentazione esagonale.

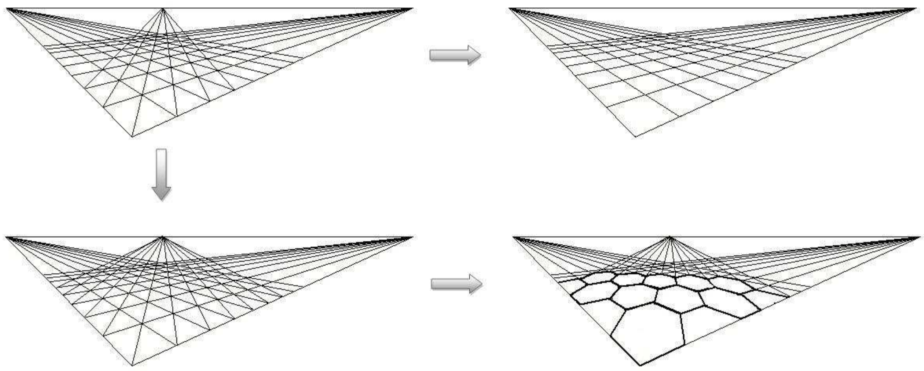


Figura 3.4: Come costruire mattonelle triangolari o esagonali.

Le pavimentazioni *sembrano* realistiche. Perché?

Se ci concentriamo sul procedimento descritto sopra per costruire una pavimentazione in prospettiva, possiamo facilmente accorgerci che il funzionamento di questa costruzione proviene dai risultati geometrici già enunciati e dimostrati nella prima parte di questa tesi.

Infatti, supponendo di voler disegnare tutte le mattonelle con stesse forma e dimensione della prima, poiché rette con stessa direzione che giacciono su un piano hanno un unico punto all'infinito, dovremo tracciare le diagonali di tutte le mattonelle (nella costruzione abbiamo scelto tutte quelle parallele a DB) convergenti nello stesso punto di fuga. Ora, dal teorema di Desargues sappiamo che se due triangoli sono omologhi, allora i lati corrispondenti dovranno incontrarsi in punti allineati. Viceversa, il suo inverso ci garantisce che se i lati corrispondenti di due triangoli si incontrano in punti allineati, allora i due triangoli sono omologhi.

Sappiamo che AB e DC si incontrano in P, mentre AD e BC in Q, entrambi punti sulla linea di orizzonte. Scegliendo quindi il punto O come il punto di fuga della retta BD, abbiamo esattamente che i prolungamenti dei lati dei triangoli ABC e ADC si intersecano in tre punti allineati e quindi ABC e ADC risultano omologhi, per l'inverso del teorema di Desargues.

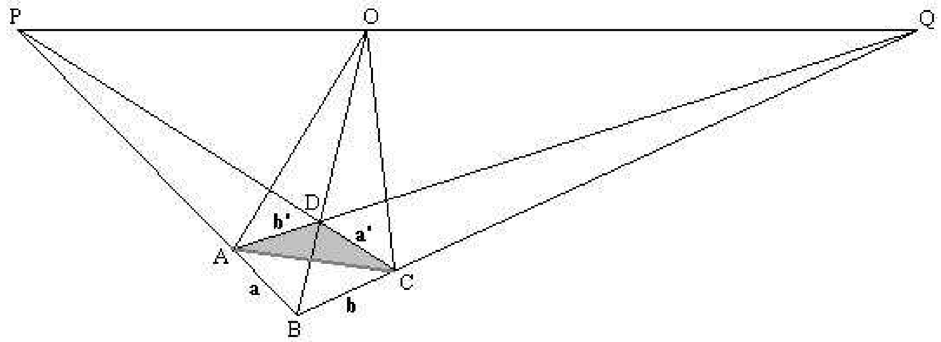


Figura 3.5: Omologia nella costruzione della pavimentazione a mattonelle quadrate o rettangolari.

L'omologia, evidenziata in figura 3.5, ha O come punto di proiezione e lascia fissa la retta AC.

Quindi, la prima mattonella risulta ben disegnata. Seguendo la procedura esposta in precedenza, arriveremo alla situazione disegnata in figura 3.6, in cui avremo disegnato le mattonelle $ABCD$, $ADEF$, $DHGE$ e $CIHD$. Per andare avanti nella costruzione, poiché si conservano le intersezioni e gli allineamenti, intuitivamente dovremo congiungere O con C. Adesso vedremo che questo passaggio è lecito molto più che a livello intuitivo, perché il teorema di Desargues ci garantisce che il passaggio è corretto, cioè andiamo a dimostrare che *la retta* OC *passa per* H.

Innanzitutto, considero i due triangoli ABE e DCG. Essi sono omologhi e vengono proiettati l'uno nell'altro dal punto Q. Poiché AB e DC si intersecano in P e AE e DG, si incontrano in O, esisterà un punto $R \in PO$ in cui si incontrano EB e GC. Poiché P, O e Q sono allineati sulla linea di orizzonte, anche R si trova proprio sulla linea di orizzonte.

Adesso considero i due triangoli BDE e CGH, anch'essi omologhi e proiettati l'uno nell'altro dal punto Q. In questo caso abbiamo che EB e GC si incontrano in R, mentre ED e GH si incontrano in P. Allora BD e HC dovranno, come in precedenza, incontrarsi in un punto della linea di orizzonte, che sarà proprio O, in quanto B appartiene alla retta DG che incontra la linea di orizzonte in O. *Quindi* C, H, O *sono allineati, come volevamo.*

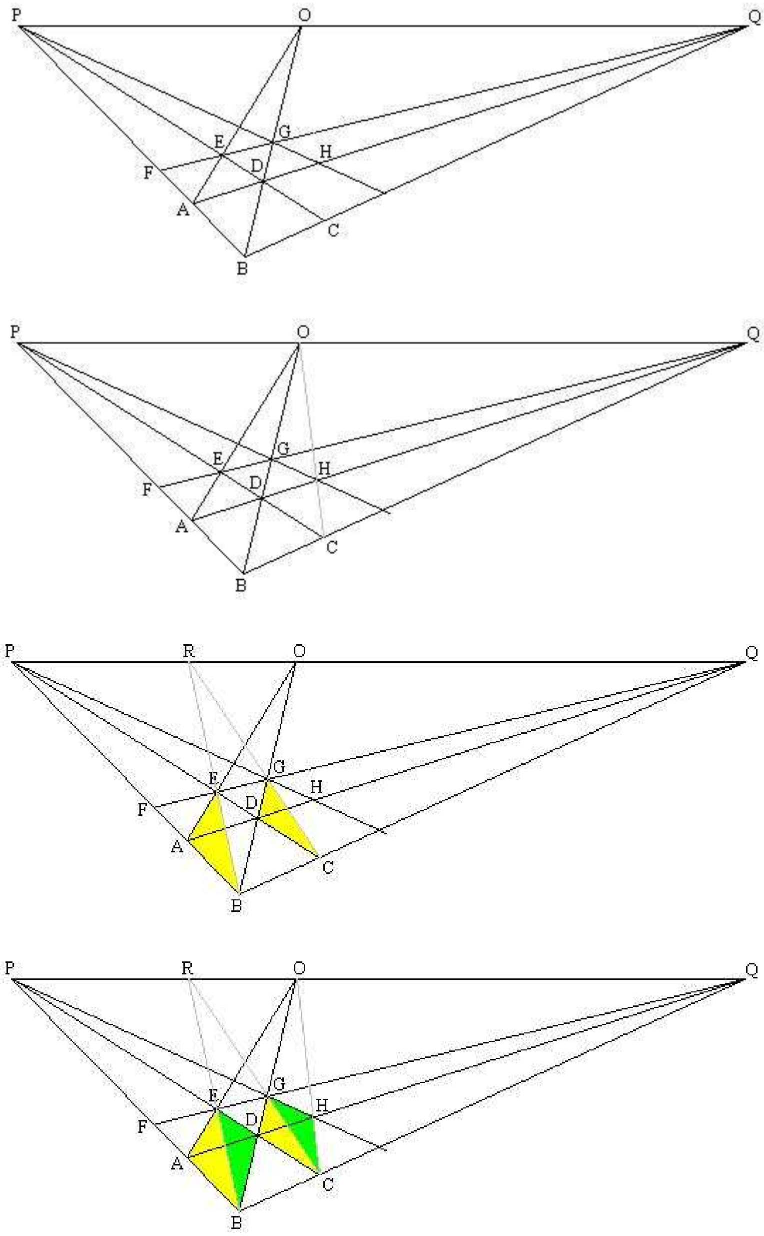


Figura 3.6: Le prime due immagini evidenziano due passaggi consecutivi della costruzione. Le ultime due mostrano che il funzionamento della costruzione è dovuto all'applicazione ripetuta del teorema di Desargues.

Verificata la correttezza della procedura, facciamo alcune considerazioni. Innanzitutto notiamo che non c'è un'unica direzione in cui procedere per costruire la pavimentazione: si potrebbe costruire prima tutta la fila di mattonelle a sinistra, per poi passare a quelle a destra e in seguito a quelle centrali o invertire l'ordine, ma il risultato finale è sempre lo stesso. La costruzione perciò è univoca, indipendentemente dal percorso scelto. Inoltre, partendo da un quadrangolo $ABCD$ arbitrario, abbiamo ottenuto proprio una rappresentazione prospettica di una pavimentazione. Quindi la pavimentazione ottenuta con questa costruzione è sempre lecita indipendentemente dal quadrangolo prescelto come prima mattonella. In un certo senso si può perciò affermare che il teorema di Desargues mostra che la costruzione fatta per rappresentare la pavimentazione è ben posta.

Inoltre, abbiamo già visto che costruire le diagonali di un rettangolo è semplice; sfruttiamo questo fatto per tutte le costruzioni seguenti.

3.2.2 La costruzione prospettica come ponte di collegamento tra geometria e algebra

Data una mattonella iniziale $ABCD$, ad esempio rettangolare, supponiamo di voler costruire il punto medio di uno dei suoi lati. In geometria euclidea si può procedere nel modo seguente:

1. traccia le diagonali AC e BD;
2. traccia la perpendicolare ad AB passante per l'intersezione delle diagonali;
3. il punto M di intersezione di questa retta con AB è esattamente il punto medio di AB.

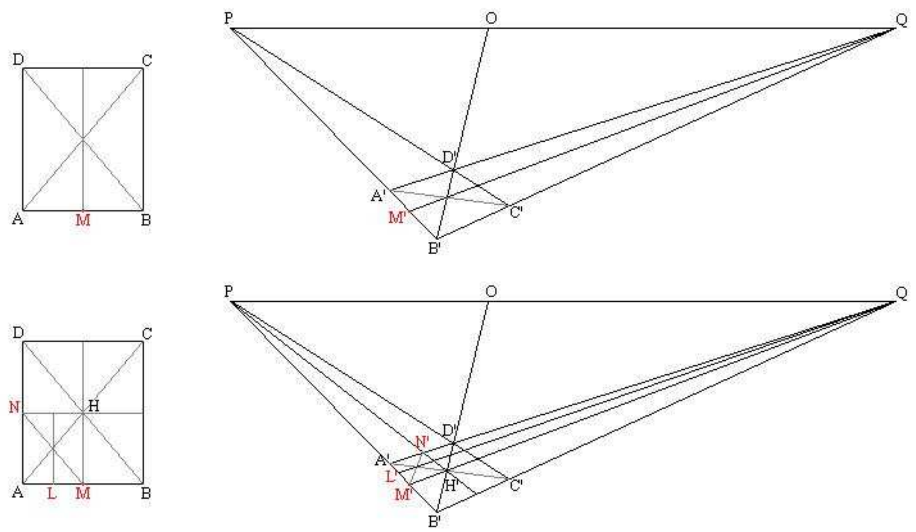


Figura 3.7: Costruzione del punto medio e di un quarto del lato di un rettangolo.

Allora, la costruzione prospettica del punto medio sulla corrispondente mattonella $A'B'C'D'$ sarà:

1. traccia le diagonali $A'C'$, $D'B'$;
2. unisci Q con il punto di intersezione delle diagonali;
3. il punto di intersezione M' tra questa retta e $A'B'$ è il punto medio di $A'B'$.

Se adesso volessimo costruire il punto L corrispondente ad un quarto della lunghezza di AB, potremmo trovare allo stesso modo il punto medio del lato AC e iterare quindi il procedimento appena visto per il rettangolo

$AMHN$. Andando avanti, in linea teorica [1] è possibile rappresentare tutti i punti che dividono il lato AB in rapporto $1 : 2^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Vediamo adesso come si può trovare un terzo di AB:

1. tracciare le diagonali di $ABCD$;

2. disegnare le mediane del triangolo ABD (ne bastano due): l'intersezione K delle mediane le divide in rapporti $2 : 1$;

3. tracciare la perpendicolare ad AB passante per H;

4. l'intersezione K tra questa retta e AB divide AB in rapporti $1 : 2$.

In modo analogo a come avevamo costruito il punto medio di $A'B'$, troviamo così anche un terzo di $A'B'$. La costruzione è riportata in figura 3.8.

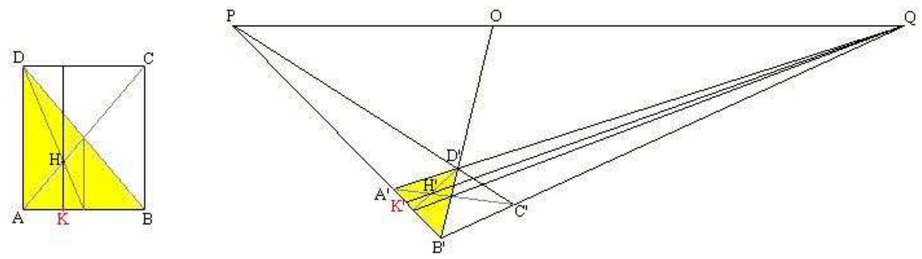


Figura 3.8: Costruzione di un terzo del lato di un rettangolo.

Similmente possiamo costruire $2/3$ di AB e, iterando il procedimento, possiamo costruire tutte le frazioni del tipo $1/3^n$ e $2/3^n$.

In realtà possiamo fare di meglio: combinando i due metodi per costruire frazioni con al denominatore potenze di 2 e potenze di 3, possiamo costruire frazioni che abbiano al denominatore dei multipli di $2 \cdot 3$ e quindi, ad esempio, razionali con denominatore 12, semplicemente usando due volte la costruzione per trovare il punto medio e una volta quella per trovare un terzo.

I procedimenti visti finora hanno la particolarità che la costruzione avviene all'interno della stessa mattonella. Potremmo costruire il punto medio di AB anche in un altro modo, che richiede l'utilizzo di due mattonelle di partenza invece che una sola:

1. presi due rettangoli identici come in figura, tracciare la diagonale AF, trovando così il punto H di intersezione tra AF e DC;

2. tracciare la perpendicolare ad AB passante per H;

[1] Nella pratica ci sono dei limiti di spazio nella realizzazione, a causa dell'inevitabile addensamento delle linee al crescere di n.

3. l'intersezione M tra questa retta e AB è il punto medio di AB.

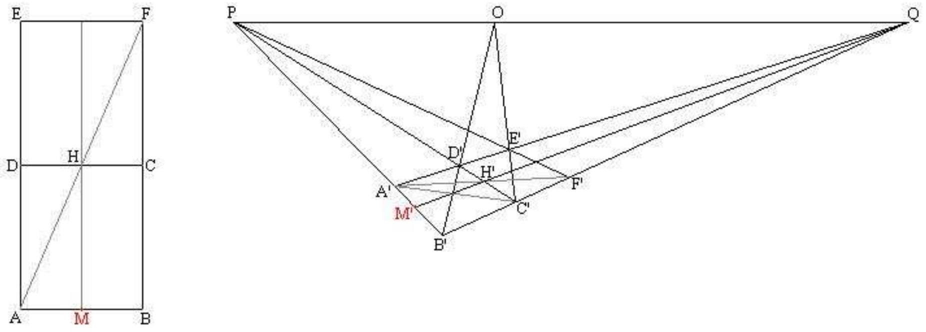


Figura 3.9: Costruzione del punto medio del lato di un rettangolo.

Nella figura 3.9 è riportata la costruzione prospettica (notare che la costruzione precedente per trovare il punto medio è in accordo con quella appena esposta).

In modo del tutto analogo è possibile costruire un terzo di AB considerando tre mattonelle invece che due, un quinto prendendone cinque, e così via con qualsiasi numero intero. Ora, costruire un decimo di AB in prospettiva potrebbe essere infattibile praticamente, in quanto richiederebbe di disegnare dieci mattonelle affiancate, che non sempre è possibile; tuttavia possiamo notare che, poiché il metodo funziona per frazioni con qualsiasi denominatore, in particolare si possono costruire teoricamente tutte le frazioni che abbiano un numero primo al denominatore.

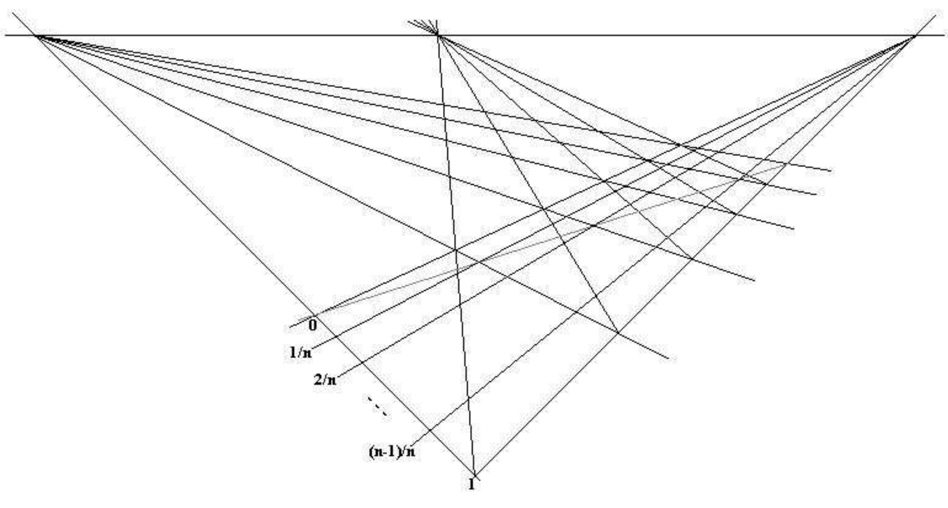


Figura 3.10: Generalizzazione della costruzione del punto medio del lato di un rettangolo.

In questo modo, combinando ad esempio le costruzioni per trovare il punto medio con quella per trovare un quinto di AB, si può trovare un decimo di AB. Fissato, dunque, un sistema di riferimento con l'origine nel punto A, possiamo costruire tutti i razionali con i metodi appena descritti, che corrisponderanno biunivocamente con dei punti sul piano anche nella costruzione prospettica.

Abbiamo così trovato un ponte tra geometria e algebra: combinando le varie costruzioni a nostro piacimento, è possibile rappresentare tutti i numeri razionali come punti su una pavimentazione in prospettiva con delle semplici regole di costruzione e usando una riga e una matita.

3.2.3 Costruzione del quarto armonico

Dalla costruzione fatta per trovare il punto medio, più in generale possiamo vedere che *dati tre punti allineati su una retta proiettiva, è sempre possibile costruirne un quarto allineato* in modo che tali punti costituiscano la cosiddetta *quaterna armonica.*

A tal scopo, tracciamo una retta e scegliamo tre punti P_1, P_2, P_3 su di essa. Scegliamo arbitrariamente un punto O fuori dalla retta e congiungiamo O con P_1, P_2, P_3. Disegnamo una retta, r, uscente da P_1 e una, s, uscente da P_2 in modo tale che si incontrino in un punto su OP_3 compreso tra O e P_3. Poniamo $Q = r \cap OP_2$ e $R = s \cap OP_1$. Troviamo, così un trapezio che ha per diagonali RP_2, QP_1. Tracciando, adesso, la retta per R e Q, troveremo $P_4 = P_1P_2 \cap RQ$. In questo modo abbiamo costruito il quarto armonico dei punti P_1, P_2, P_3.

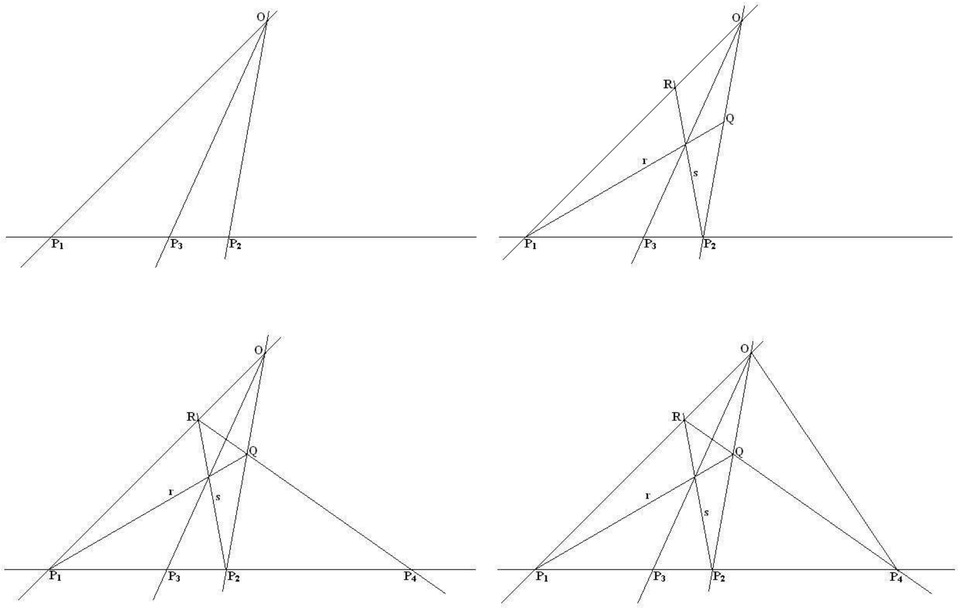


Figura 3.11: Costruzione del quarto armonico.

Viceversa, dati P_1, P_2, P_4 allineati, si può costruire P_3 allineato ai precedenti. Scelto un punto O, congiungiamo O con P_1, P_2, P_4. Traccio una retta per P_3 che tagli OP_1 in modo tale che il punto di intersezione stia tra O e P_1. Otteniamo nuovamente un trapezio P_1P_2QR. Tracciando le diagonali e la retta, t, passante la loro intersezione e O, troviamo $P_3 = t \cap P_1P_4$.

Se adesso proviamo a scegliere un altro punto O' al posto di O e a ripetere le costruzioni, ci accorgiamo che troveremo sempre gli stessi P_3 e P_4, ossia la costruzione non dipende da O. Questo fatto deriva dalla proprietà di invaranza del birapporto di quattro punti allineati, che nel caso di una quaterna

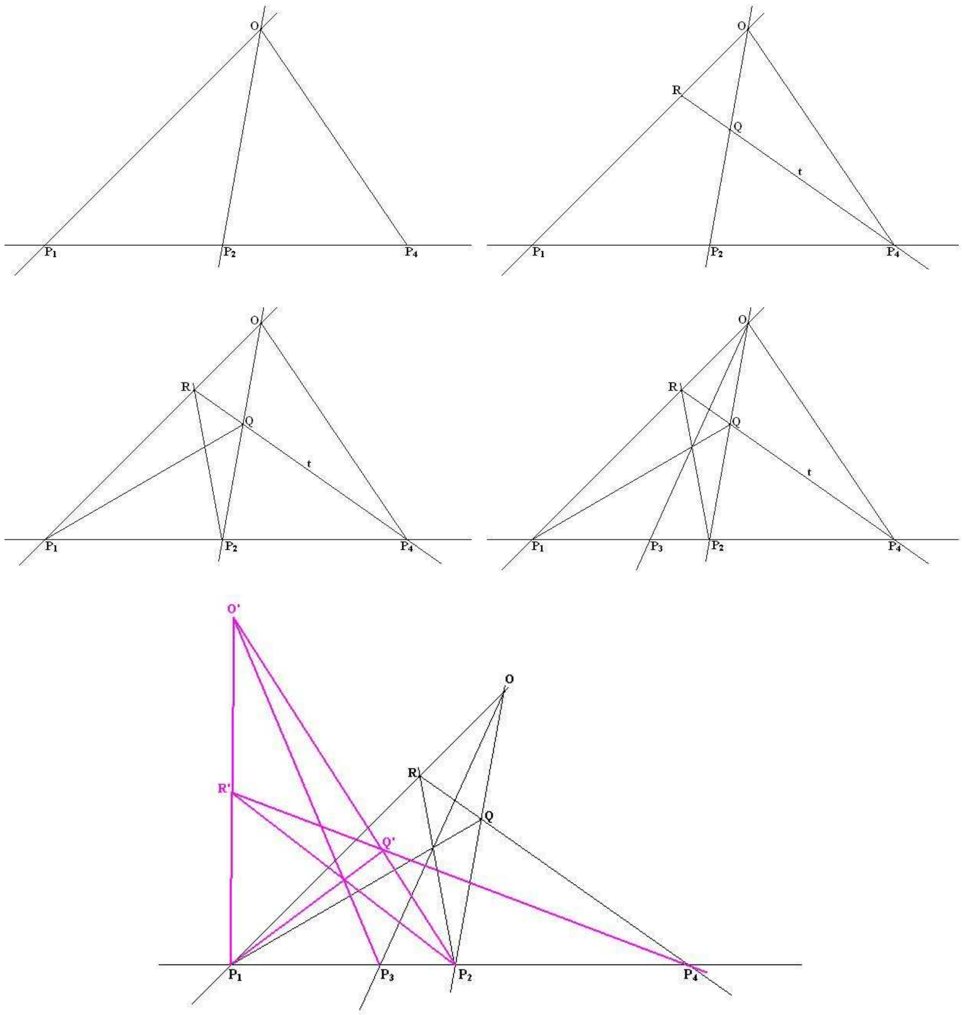


Figura 3.12: Costruzione del quarto armonico.

armonica è -1. Quindi *il quarto armonico risulta univocamente determinato.*

Osserviamo che, poiché P_3 risulta la proiezione dell'intersezione delle diagonali del trapezio da O, in realtà è proprio il punto medio di P_1P_2 e OP_4 non è che la linea di orizzonte di questa costruzione. Ma allora quanto abbiamo visto ci permette di affermare che *il punto medio può essere costruito con gli strumenti della geometria proiettiva*, dopo aver fissato il punto all'infinito. Dunque, benché non si conservino le lunghezze, il concetto di punto medio si conserva nel passaggio dalla geometria euclidea a quella proiettiva, tramite costruzioni geometriche con la sola riga (non graduata).

3.2.4 Numeri binari

Vediamo adesso cosa accade *cambiando base*: rappresentiamo i numeri binari sul piano proiettivo. Indicando con $[a]_b$ il numero a in base b, sappiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$[0]_2 = 0\,,\quad [1]_2 = 1\,,\quad \left[\frac{1}{2}\right]_2 = 0.1\,,\quad \left[\frac{1}{4}\right]_2 = 0.01\,,\quad \left[\frac{1}{8}\right]_2 = 0.001\ \ldots$$

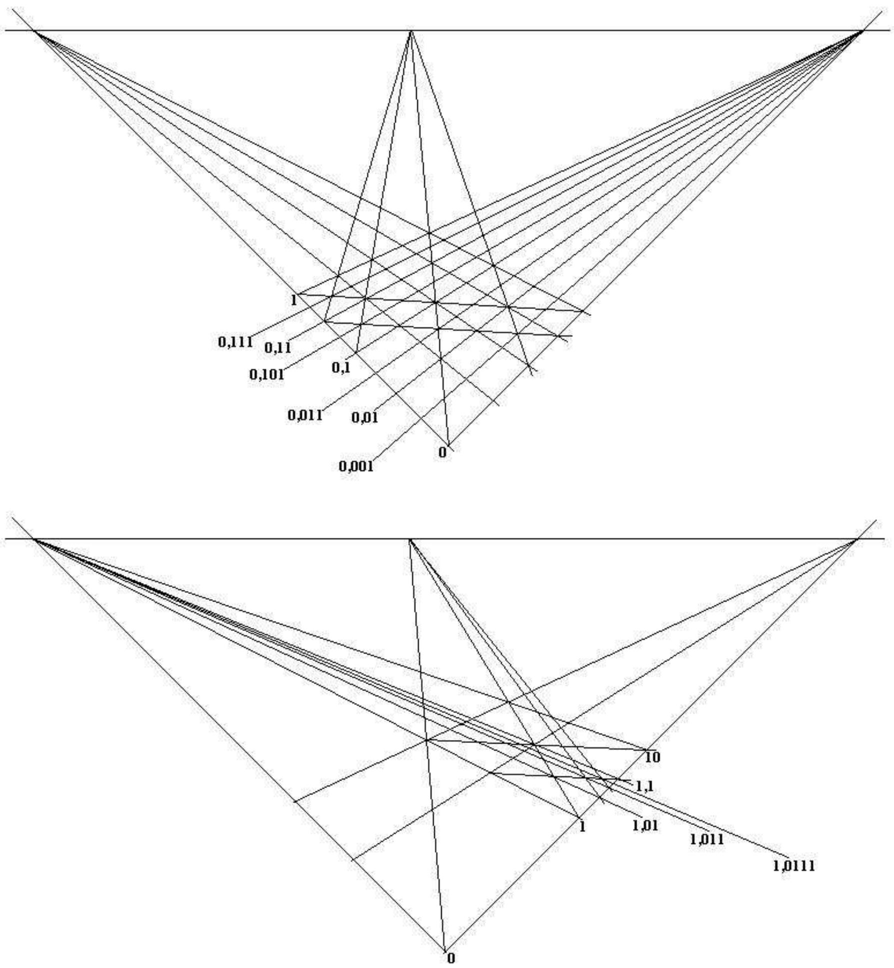


Figura 3.13: Sopra: rappresentazione dei numeri binari con la costruzione per la pavimentazione. Sotto: bisezioni successive per la rappresentazione di $\sqrt{2}$.

Perciò, se costruiamo la pavimentazione usando il primo metodo visto per trovare il punto medio, al primo passo troviamo 0.1. Adesso troviamo i punti medi dei due sottointervalli appena creati: saranno rispettivamente

0.01 il punto medio di $[0, 0.1]$ e 0.11 quello di $[0.1, 1]$. Notiamo che la rappresentazione binaria semplifica al massimo i conti, in quanto per trovare questi due punti medi ci è bastato, di fatto "prendere il punto medio precedente e inserire uno 0 prima dell'ultima cifra binaria non nulla (cioè 1), per trovare il punto medio dell'intervallo subito precedente, mentre inserendo un 1 al termine dello sviluppo decimale si trova quello dell'intervallo subito successivo." Il metodo funziona anche per i punti medi dei nuovi sottointervalli e si può procedere indefinitamente iterando il procedimento, come è mostrato in figura 3.13.

In questo modo, si può di fatto approssimare un qualsiasi numero reale. Proviamo ad esempio a rappresentare $\sqrt{2}$. Innanzitutto, poiché

$$\left[\sqrt{2}\right]_2 = [1.414\ldots]_2 = [1.0110101\ldots]_2 \ ,$$

sappiamo che, la sua immagine sul piano proiettivo dovrà trovarsi tra 1 e 1.5. Quindi avrò bisogno di due mattonelle, ma useremo il metodo per trovare i punti medi solo nella seconda mattonella, quella su cui si trova l'intervallo interessato, che in binario sarà $[1, 1.1]$.

Quindi dimezziamo questo intervallo, trovando 1.01. Poiché

$$1.01 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = \frac{5}{4} = 1.25 < \sqrt{2}\,,$$

allora proseguiamo dimezzando l'intervallo $[1.01, 1.1]$ e troveremo che il punto medio corrisponde a 1.011. Poiché

$$1.011 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{11}{8} = 1.375 < \sqrt{2}\,,$$

allora dimezziamo adesso $[1.011, 1.10]$ e otteniamo 1.0111:

$$1.0111 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{23}{16} = 1.4375 > \sqrt{2}\,.$$

Quindi dimezzeremo $[1.011, 1.0111]$. Il risultato dei passi appena descritti è quello mostrato in figura 3.13.

Iterando il procedimento, otteniamo una successione di approssimazioni dal basso e dall'alto del punto corrispondente a $\sqrt{2}$ e dunque si riesce a rappresentarlo sul lato della mattonella.

3.3 Foro stenopeico, prospettiva e geometria proiettiva

3.3.1 Rappresentare una scatola rettangolare in prospettiva

Passiamo dalla rappresentazione di una pavimentazione, ossia un oggetto piano, in prospettiva a quella di una scatola, ossia un oggetto tridimensionale. Essa potrebbe essere disegnata, ad esempio come in figura 3.14.

Proposizione 3. *Siano A, B, C, D, S cinque punti in una qualsiasi posizione su un piano e siano $X = AD \cap BS$ e $Y = BD \cap AS$. Prendiamo un qualsiasi punto Z su DC e siano $R = CX \cap AZ$, $Q = CY \cap BZ$, $P = RY \cap SZ$. Allora X, P, Q sono allineati.*

Dimostrazione. La dimostrazione è una conseguenza immediata del teorema di Desargues. Infatti, basta osservare che i triangoli RCQ e ADB sono omologhi e in prospettiva da Z; quindi, posto $K = AB \cap RQ$, X, Y e K sono allineati per il teorema di Desargues. Ma anche RPQ e ASB sono omologhi e in prospettiva da Z, perciò, per lo stesso motivo, Y, K e $PQ \cap SB$ sono allineati.

Dunque $X = PQ \cap SB$, perché entrambi questi punti sono punti di intersezione delle rette YK e BS. □

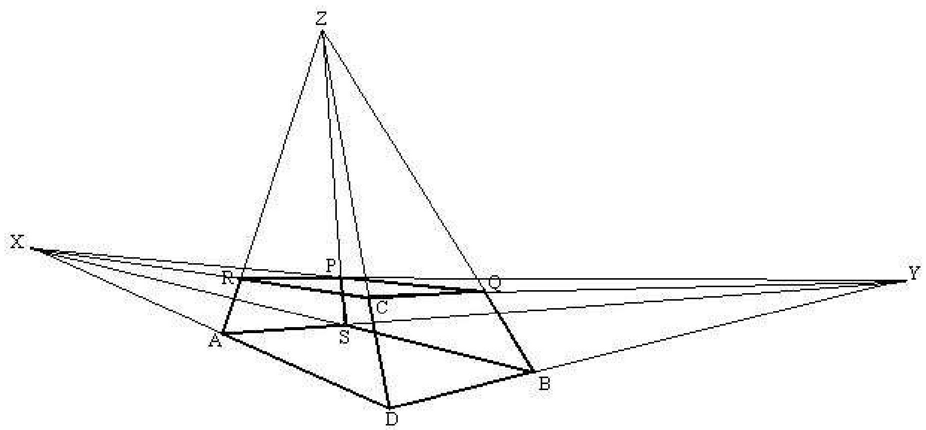


Figura 3.14: Rappresentazione prospettica di una scatola.

Notiamo che questa dimostrazione sarebbe di difficile visualizzazione se la figura fosse disegnata diversamente, ad esempio scegliendo Z tra C e D.

Inoltre potremmo usare delle ipotesi leggermente diverse da quelle dell'enunciato della proposizione 3, scegliendo quattro punti arbitrari sul piano A, B, C, D invece che cinque, richiedendo le scelte di X su AD, di Y su DB e definendo infine $S = AY \cap BX$.

3.3.2 Proiezione da un foro stenopeico

Abbiamo già visto che la situazione in cui un artista deve rappresentare un punto sul quadro è schematizzabile come in figura 3.15 sotto, dove E è la posizione dell'occhio, π è il piano della tela e T è il punto da disegnare, cioè π si trova tra E e T; nel caso di una foto scattata da una camera obscura, invece, la situazione è quella nella figura 3.15 sopra, in cui la posizione del foro stenopeico E si trova tra il punto dello spazio T fotografato e il piano del film π. In entrambi i casi, la funzione di proiezione che manda T in $T' = \pi \cap TE$ definisce una funzione continua da $\mathbb{R}^3 - \pi'$ in π, dove π' è il piano passante per E parallelo a π. Questa funzione si estende ad una funzione da $\mathbb{RP}^3 - \{E\}$ a $\mathbb{RP}^2$. Qui, il piano π è identificato con $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$ e i punti di $\pi' - \{E\}$ vengono proiettati nei punti all'infinito di $\mathbb{RP}^2$, cioè un punto all'infinito di $\mathbb{RP}^3$ viene mandato nel punto dove la retta per E nella direzione individuata dal punto all'infinito incontra π. Questa funzione da $\mathbb{RP}^3 - \{E\}$ a $\mathbb{RP}^2$ è continua e rispetta gli allineamenti, ossia ogni retta in $\mathbb{RP}^3 - \{E\}$ è mandata in una retta o in un punto in $\mathbb{RP}^2$.

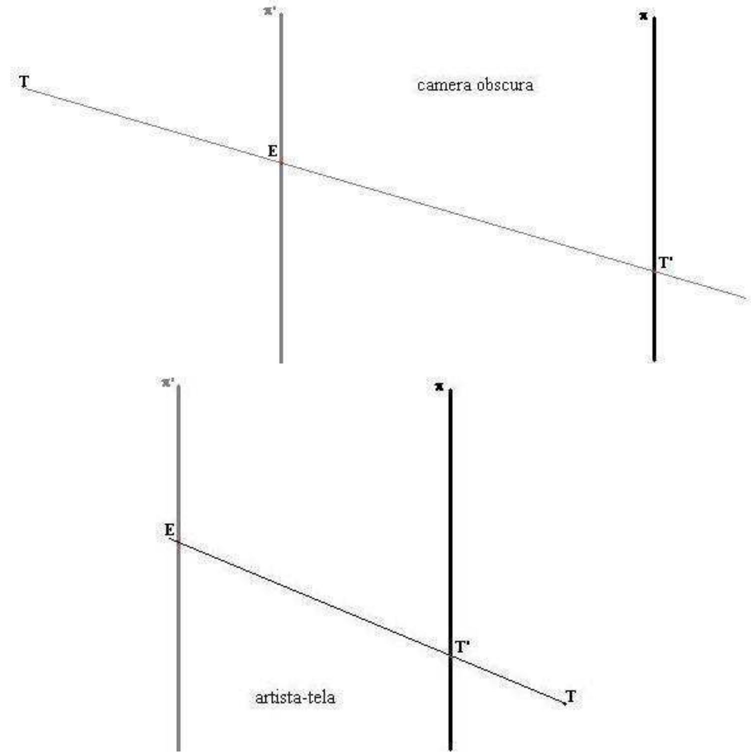


Figura 3.15: Sopra lo schema della proiezione fatta da un foro stenopeico; sotto viene schematizzata la proiezione dall'occhio di un artista.

A questo punto, sembra lecito chiedersi se ogni immagine tipo quella in figura 3.14 è realmente ottenuta da una proiezione dall'occhio dell'artista su una tela. Inoltre, in caso affermativo, è interessante scoprire dall'immagine in che modo si possa ricostruire la posizione dell'occhio dell'artista e della tela. Quello appena esposto è un problema analogo a localizzare da una piccola parte di una foto fatta con una camera obscura la posizione dalla quale la foto è stata scattata. Analizziamo pertanto questo secondo problema. Supponiamo di avere una fotografia di una scatola scattata con una camera obscura e descriviamo in che modo dall'immagine sia possibile risalire a posizione e orientazione della fotocamera e alla distanza tra il foro stenopeico e il film.

Per studiare il problema geometricamente, ci occorre il seguente risultato:

Teorema 15. *Siano X, Y, Z tre punti su un piano π di $\mathbb{R}^3$. Se tutti gli angoli del triangolo XYZ sono acuti, allora ci sono esattamente due posizioni per un punto $E \in \mathbb{R}^3$ tali che EX, EY ed EZ sono perpendicolari tra loro. Se invece uno degli angoli di XYZ non è acuto, allora non c'è una tale posizione per E.*

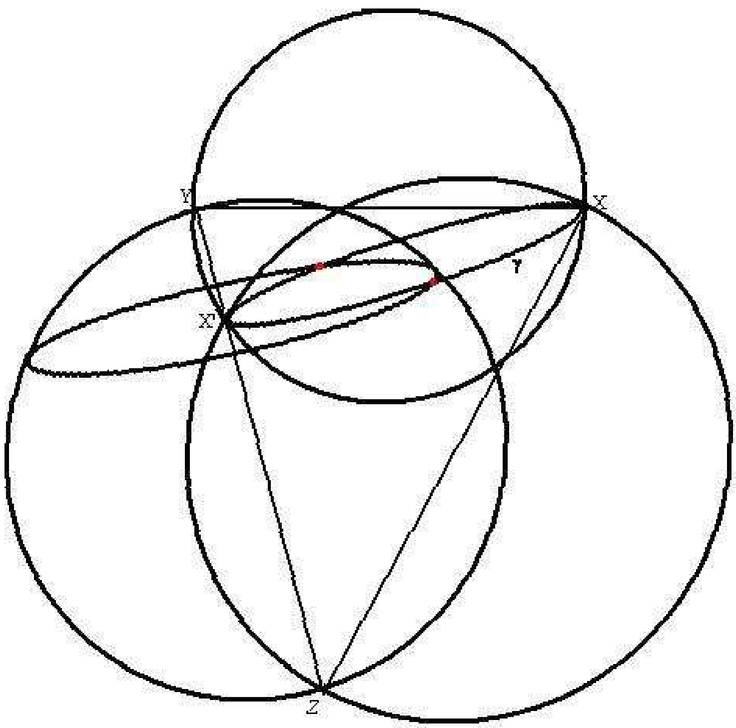


Figura 3.16: Dimostrazione teorema 15.

Dimostrazione. Consideriamo un triangolo XYZ su $\pi \subset \mathbb{R}^3$. Così come nel piano, dati due punti X, Y, il luogo geometrico dei punti E tali che $EX \perp EY$ è la circonferenza di diametro XY, nello spazio il luogo geometrico dei punti E tali che $EX \perp EY$ è la superficie della sfera di diametro XY. Analogamente $EX \perp EZ$ quando E sta sulla superficie della sfera di diametro XZ.

Osserviamo che le sfere di diametro XY e XZ si intersecano in una circonferenza γ che ha come punti antipodali X e un qualche $X' \in YZ$. Se gli angoli $Y\hat{X}Z$ e $X\hat{Z}Y$ sono acuti, allora abbiamo due casi:

1. $X\hat{Y}Z$ è acuto. Allora X' si trova tra Y e Z e quindi X' sta all'interno della sfera di diametro YZ, mentre X si trova all'esterno. Segue che questa sfera interseca γ in esattamente due punti, che sono le possibili posizioni di E.

2. $X\hat{Y}Z$ non è acuto. Allora
   - se $X\hat{Y}Z$ è retto, $X' \equiv Y$ e la sfera di diametro YZ interseca γ esattamente in $X' \equiv Y$. Segue che non esiste $E \in \mathbb{R}^3$ tale che EX, EY ed EZ sono perpendicolari tra loro: infatti ci troviamo davanti al caso degenere in cui $E \equiv Y$ è l'unico punto dove $EX \perp EZ$ e il segmento EY si è ridotto a un punto.
   - se $X\hat{Y}Z$ è ottuso, X' non sta fra Y e Z e la sfera di diametro YZ non interseca γ. Quindi neanche in questo caso esiste un punto E tale che EX, EY ed EZ sono perpendicolari tra loro.

□

Torniamo alla scena e alla sua fotografia. Per la scena scegliamo un sistema di coordinate in $\mathbb{R}^3$ con x, y, z paralleli agli spigoli della scatola e con l'origine sul foro E della camera obscura. Il film sia in un certo piano π in $\mathbb{R}^3$. Nel piano della foto, si possono così costruire i punti X, Y, Z prolungando le immagini degli spigoli paralleli finché non si incontrano.

Notiamo che l'immagine di una qualsiasi retta di $\mathbb{R}^3$ parallela ad uno degli spigoli passa per uno tra X, Y, Z e, in particolare, le immagini degli assi x, y e z sono rispettivamente i punti X, Y e Z. Dobbiamo immaginarci qualcosa di simile alla figura 3.17.

Per il teorema 3.16, la posizione di E è determinata rispetto alle posizioni di X, Y, Z su π e, in particolare, la distanza tra il foro stenopeico e il film coincide con la distanza di E da π. In questa situazione, le due possibili posizioni di E trovate nel teorema 3.16, saranno da riferirsi rispettivamente ai casi della camera obscura e al caso del pittore. Vediamo il primo.

Siano $d, a \in \mathbb{R}^3$ due vertici adiacenti della scatola e supponiamo che $D, A \in \pi$ siano le loro immagini nella foto. Supponiamo che X sia il punto di fuga di DA. Posizioniamo la rigida configurazione[2] $EXYZ$, corrispon-

[2]Questa configurazione risulta rigida come conseguenza del teorema 3.16.

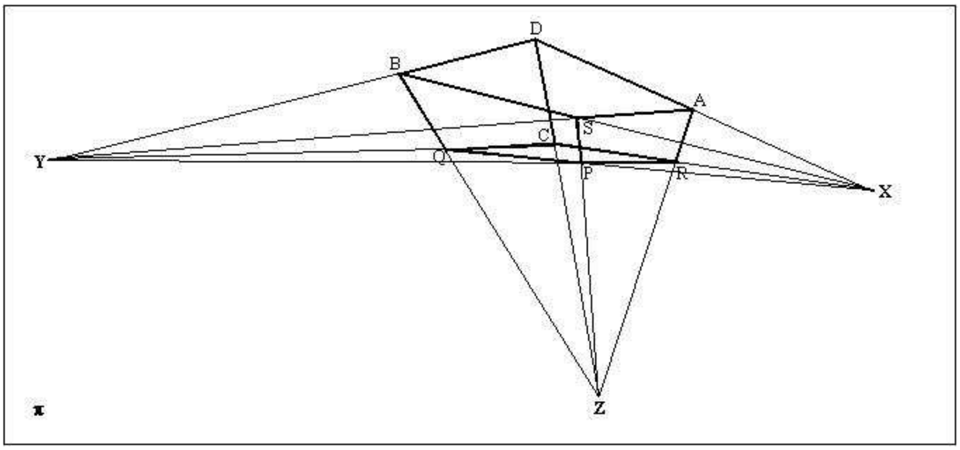


Figura 3.17: Esempio di fotografia della scatola che potremmo avere in mano per il nostro problema.

dente alla camera obscura, in modo tale che EX, EY, EZ siano parallele ai corrispondenti spigoli della scatola e D si trovi sulla retta dE, con E posto fra d e D. In questa situazione esiste un'unica posizione di $EXYZ$ tale che la retta aE passa per A. Quindi la posizione e l'orientazione della camera obscura in $\mathbb{R}^3$ risultano completamente e univocamente determinate in relazione alla scena.

3.3.3 Formula per determinare posizioni reciproche di foro stenopeico, piano della pellicola e scatola

Usando l'algebra lineare, è possibile anche ricavare una formula che determina le posizioni relative della scatola, del foro stenopeico E della camera obscura e del piano π del film in $\mathbb{R}^3$. Come prima, scegliamo un sistema di coordinate di $\mathbb{R}^3$ con l'origine in E e gli assi paralleli agli spigoli della scatola.

Sia $n_1x+n_2y+n_3z=b$ l'equazione del piano π, dove $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$ è il versore normale a π. Il punto più vicino ad E su π è $O=(n_1b,n_2b,n_3b)$. Sia $T=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tale che $T\notin\pi'$, dove π' è il piano parallelo a π passante per E. Allora il punto di intersezione di ET con π è dato da $(x',y',z')=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$, con $\lambda=\frac{b}{n_1x+n_2y+n_3z}$, in quanto (x',y',z') soddisfa l'equazione di π. Assumiamo l'ulteriore ipotesi che $n_3\neq\pm1$, che corrisponde a richiedere che la fotocamera non stia puntando verticalmente sopra o verticalmente sotto alla scatola.

Scegliamo un sistema di coordinate (u,v) sul piano π, in cui O sia l'origine, l'asse u sia dato dalla direzione $(n_2,-n_1,0)$ e l'asse v abbia direzione data dal prodotto vettoriale $(n_1,n_2,n_3)\times(n_2,-n_1,0)=(n_1n_3,n_2n_3,{n_3}^2-1)$. Trovo le coordinate (u,v) del punto (x',y',z'):

$$u=(x'-n_1b,y'-n_2b,z'-n_3b)\cdot\frac{1}{\sqrt{{n_1}^2+{n_2}^2}}(n_2,-n_1,0)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-{n_3}^2}}(n_2x'-n_1y')$$

$$v=(x'-n_1b,y'-n_2b,z'-n_3b)\cdot\frac{1}{\sqrt{{n_1}^2+{n_2}^2}}(n_1n_3,n_2n_3,{n_3}^2-1)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-{n_3}^2}}(n_1n_3x'+n_2n_3y'+({n_3}^2-1)z')$$

Moltiplicando per λ, perciò, otteniamo

$$u=(bn_2(1-{n_3}^2)^{-\frac{1}{2}}x-bn_1(1-{n_3}^2)^{-\frac{1}{2}}y)(n_1x+n_2y+n_3z)^{-1}$$

$$v=(bn_1n_3(1-{n_3}^2)^{-\frac{1}{2}}x-bn_2n_3(1-{n_3}^2)^{-\frac{1}{2}}y-b(1-{n_3}^2)^{\frac{1}{2}})(n_1x+n_2y+n_3z)^{-1}$$

Questa formula può essere espressa in modo più chiaro con il linguaggio delle matrici, dicendo che in coordinate omogenee, $[u,v,1]^T$ rappresenta lo stesso punto di $M[x,y,z,1]^T$, dove M è la matrice 3×4

$$M=\begin{pmatrix} bn_2 & -bn_1 & 0 & 0\\ bn_1n_3 & bn_2n_3 & -bk^2 & 0\\ n_1k & n_2k & n_3k & 0\end{pmatrix}$$

e $k = (1 - n_3{}^2)^{\frac{1}{2}}$. In particolare troviamo le coordinate (u, v) dei punti X, Y e Z dove rispettivamente gli assi x, y, z tagliano π:

$$u_X = \frac{bn_2}{n_1 k}, \quad v_X = \frac{bn_3}{k} \tag{3.3}$$

$$u_Y = -\frac{bn_1}{n_2 k}, \quad v_Y = \frac{bn_3}{k} \tag{3.4}$$

$$u_Z = 0, \quad v_Z = -\frac{bk}{n_3} \tag{3.5}$$

A questo punto possiamo esplicitare come trovare n_1, n_2, n_3, b dalla fotografia. Come già discusso, X, Y, Z possono essere trovati sul piano della fotografia poiché sono i punti di fuga degli spigoli paralleli della scatola. Ora, poiché $v_X = v_Y$ e $u_Z = 0$, l'asse v passa per Z ed è perpendicolare alla retta XY come in figura. Non siamo, invece, ancora in grado di dire dove si trovi l'asse u. Questo è il nostro punto di partenza, rappresentato in figura 3.18. La distanza di Z da XY può essere misurata sulla foto ed è pari a

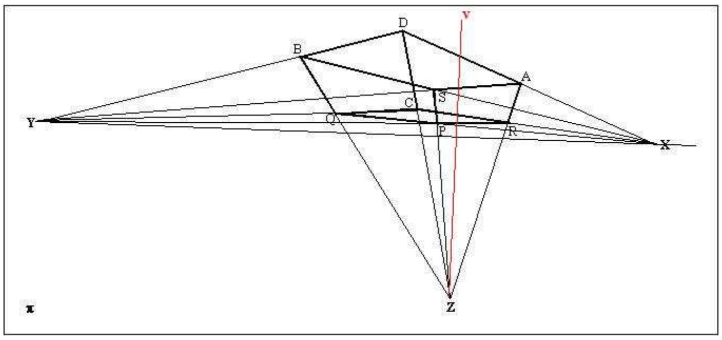


Figura 3.18: Situazione di partenza per individuare analiticamente la posizione della camera obscura rispetto alla scatola nella scena.

$$v_X - v_Z = \frac{bn_3}{k} + \frac{bk}{n_3} = \frac{bn_3{}^2 + bk^2}{kn_3} = \frac{b}{kn_3} \tag{3.6}$$

Si possono misurare anche le distanze di X e di Y dall'asse v:

$$u_X = \frac{bn_2}{n_1 k}, \quad u_Y = -\frac{bn_1}{n_2 k} \tag{3.7}$$

Combinando le (3.6) e (3.7), abbiamo che

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = -\frac{u_X}{u_Y}, \quad \frac{n_2 n_3}{n_1} = \frac{u_X}{v_X - v_Z} \tag{3.8}$$

dalle quali possiamo ricavare le componenti del versore normale n_1, n_2, n_3:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_3}\frac{u_X}{v_X - v_Z} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_X{}^2}{n_3{}^2 \left(v_X - v_Z\right)^2} = -\frac{u_X}{u_Y} \quad \Rightarrow \quad n_3{}^2 = -\frac{u_X u_Y}{\left(v_X - v_Z\right)^2}$$

Sapendo che ${n_1}^2 + {n_2}^2 + {n_3}^2 = 1$, raccogliamo ${n_1}^2$ e sostituiamo i valori di $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$ e ${n_3}^2$:

$$ {n_1}^2 \left(1 - \frac{u_X}{u_Y} - \frac{u_X u_Y}{(v_X - v_Z)^2} \frac{1}{{n_1}^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad {n_1}^2 = \frac{u_Y \left[(v_X - v_Z)^2 + u_X u_Y\right]}{(u_Y - u_X)(v_X - v_Z)^2} $$

A questo punto ricaviamo facilmente anche n_2:

$$ {n_2}^2 = -{n_1}^2 \frac{u_X}{u_Y} = -\frac{u_X \left[(v_X - v_Z)^2 + u_X u_Y\right]}{(u_Y - u_X)(v_X - v_Z)^2} $$

Ora che conosciamo n_1, n_2, n_3, possiamo trovare anche b, cioè la distanza di E da π:

$$ u_X = \frac{bn_2}{n_1 k} = \frac{bn_2}{n_1\sqrt{1 - {n_3}^2}} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{n_1 u_X \sqrt{1 - {n_3}^2}}{n_2} $$

Trovati n_1, n_2, n_3 e b, siamo dunque in grado di calcolare le (3.3), (3.4), (3.5) e dunque di disegnare l'asse u, trovando così anche l'origine del sistema (u, v) su π.

Adesso ci resta solo da trovare le coordinate (x, y, z) di un vertice della scatola, diciamo d, perché questo è sufficiente per collocare la camera obscura nella scena. Osserviamo innanzitutto che le coordinate (x, y, z), $\mathbf{x}(u, v)$ di un generico punto $(u, v) \in \pi$ sono date da

$$ \mathbf{x}(u, v) = (bn_1, bn_2, bn_3) + u\mathbf{i} + v\mathbf{j} $$

dove $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono i versori lungo gli assi u e v. Dalla foto, possiamo trovare le coordinate (u, v), (u_A, v_A) e (u_D, v_D), di A e D (proiezioni su π degli spigoli a e d della scatola) e calcolarne le coordinate $\mathbf{x}(u_A, v_A)$ e $\mathbf{x}(u_D, v_D)$ in $\mathbb{R}^3$. Di conseguenza, le coordinate dei punti a e d, saranno $\lambda_1\mathbf{x}(u_A, v_A)$ e $\lambda_2\mathbf{x}(u_D, v_D)$ rispettivamente, per qualche λ_1, λ_2 costanti. Sappiamo che scegliendo a e d come vertici di uno stesso spigolo, essi avranno coordinate y (o z) uguali e questo ci permette di scrivere (diciamo) λ_1 in termini di λ_2. Supponiamo ora che la lunghezza dello spigolo ad sia nota. Allora è noto

$$ ad = \|\lambda_1\mathbf{x}(u_A, v_A) - \lambda_2\mathbf{x}(u_D, v_D)\| $$

e possiamo dunque dedurre il valore di λ_2. Segue che abbiamo individuato la posizione del vertice d rispetto al sistema xyz.

Le coordinate (x, y, z) di d ci permettono di posizionare il foro stenopeico della camera obscura esattamente sull'origine del sistema di riferimento, mentre l'inclinazione esatta della fotocamera sarà individuata dall'allinearsi degli spigoli della scatola con i rispettivi punti di fuga X, Y, Z su π.

3.3.4 Correttezza della formula

Il procedimento adottato è lecito. Per verificarlo, serve un risultato di esistenza e unicità per mappe continue. Ricordiamo innanzitutto la nozione di birapporto.

Definizione 12. *Il* **birapporto** *di quattro punti allineati F_1, F_2, F_3, F_4 è dato da*

$$R(F_1, F_2, F_3, F_4) = \frac{F_1F_3 \cdot F_4F_2}{F_3F_2 \cdot F_1F_4} \tag{3.9}$$

Il significato proiettivo del birapporto proviene dal seguente risultato, di cui riportiamo l'enunciato. Per una dimostrazione si può consultare [7].

Teorema 16. *Siano $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbf{P}' = \mathbf{P}(\mathbf{V}')$ rette proiettive e siano F_1, F_2, F_3, $F_4 \in \mathbf{P}$, G_1, G_2, G_3, $G_4 \in \mathbf{P}'$, con F_1, F_2, F_3 e G_1, G_2, G_3 distinti.*

Allora esiste un isomorfismo $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ tale che

$$f(P_i) = Q_i, \text{ per } i = 1, ..., 4$$

se e solo se $R(F_1, F_2, F_3, F_4) = R(G_1, G_2, G_3, G_4)$.

Questo teorema garantisce che il birapporto è un invariante per trasformazione proiettiva, quindi, in particolare, se quattro punti sono proiezioni di altri quattro da uno stesso punto, allora i primi e gli ultimi avranno lo stesso birapporto.

Osservazione 4. *Il birapporto è indipendente dalla direzione scelta sulla retta.*

Adesso dimostriamo alcuni risultati tecnici necessari per il nostro scopo.

Lemma 1. *Siano D, X, Y, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 punti in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{RP}^2$) tali che A_1, A_2, A_3 stiano sulla retta BX e B_1, B_2, B_3 stiano sulla retta DY. Siano $S_i = B_iX \cap A_iY$, per $i = 1, 2, 3$.*

Allora S_1, S_2, S_3 sono allineati $\Leftrightarrow R(A_1, A_2, A_3, X) = R(B_1, B_2, B_3, Y)$.

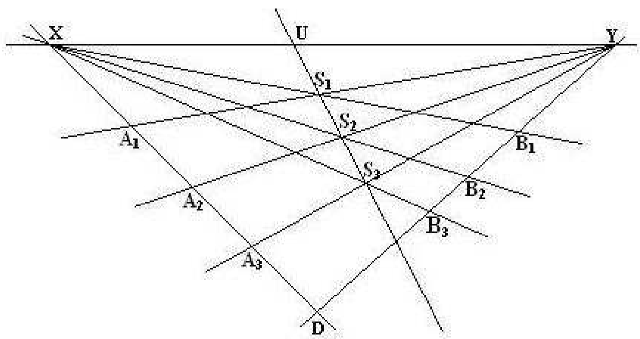


Figura 3.19: Dimostrazione lemma 3.19.

Dimostrazione. Supponiamo che S_1, S_2, S_3 siano allineati e sia $U = S_1S_3 \cap XY$. Allora S_1, S_2, S_3, U sono in prospettiva con A_1, A_2, A_3, X da Y e con B_1, B_2, B_3, Y da X. Allora, per il teorema 16,

$$R(A_1, A_2, A_3, X) = R(S_1, S_2, S_3, U) = R(B_1, B_2, B_3, Y)\,.$$

Viceversa, supponiamo che $R(A_1, A_2, A_3, X) = R(B_1, B_2, B_3, Y)$. Poniamo

$$U = S_1S_3 \cap XY \text{ e } \bar{S}_2 = S_1S_3 \cap A_2Y\,.$$

Vogliamo provare che $\bar{S}_2 = S_2$.

Per costruzione, S_1, $\bar{S}_2$, S_3, U sono in prospettiva con A_1, A_2, A_3, X da Y e quindi per il teorema 16

$$R(A_1, A_2, A_3, X) = R(S_1, \bar{S}_2, S_3, U)\,.$$

Analogamente, S_1, $\bar{S}_2$, S_3, U sono in prospettiva con B_1, $\bar{S}_2X \cap DY$, B_3, Y da X e quindi per il teorema 16

$$R(B_1, \bar{S}_2X \cap DY, B_3, Y) = R(S_1, \bar{S}_2, S_3, U)\,.$$

Segue che

$$R(B_1, \bar{S}_2X \cap DY, B_3, Y) = R(A_1, A_2, A_3, X) = R(B_1, B_2, B_3, Y)\,.$$

Poiché $\bar{S}_2X \cap DY$ e B_2 giacciono sulla stessa retta, allora $B_2 = \bar{S}_2X \cap DY$ Dunque $\bar{S}_2 = B_2X \cap A_2Y$ e quindi S_2 sta sulla retta S_1S_3. $\square$

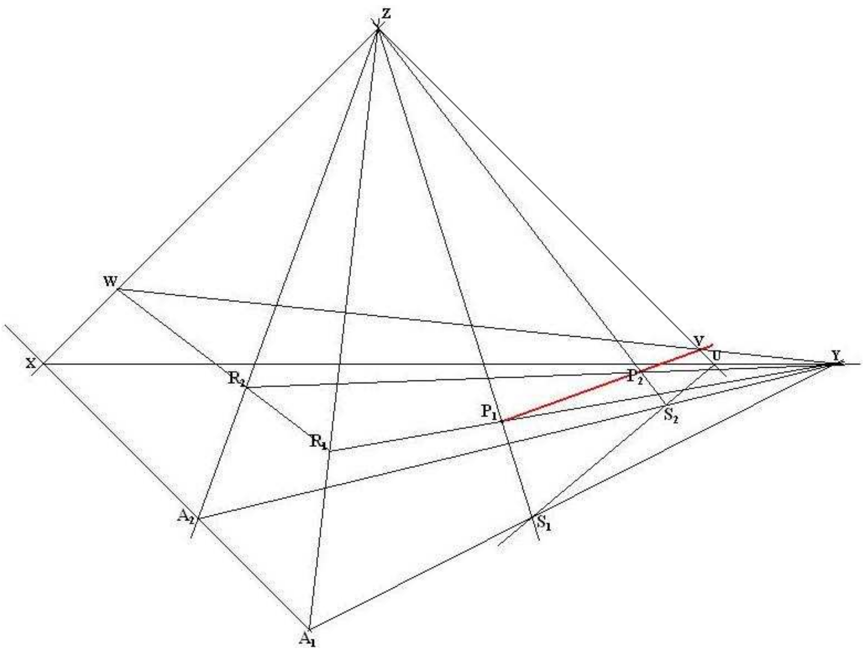


Figura 3.20: Da riferirsi alla proposizione 4.

Proposizione 4. *Siano X, Y, Z, A_1 quattro punti qualsiasi nel piano $\mathbb{R}^2$. Scegliamo dei punti arbitrari: A_2 su XA_1, W su XZ, R_1 su A_1Z, U su XY, S_1 su A_1Y. Siano $R_2 = WR_1 \cap A_2Z$, $S_2 = US_1 \cap A_2Y$, $P_1 = R_1Y \cap S_1Z$ e $P_2 = R_2Y \cap S_2Z$. Allora P_1, P_2, $V = UZ \cap WY$ sono allineati.*

Dimostrazione. Proviamo l'asserto nel caso più generale in cui tutti i punti sono in $\mathbb{RP}^2$, come in figura 3.21. Scegliamo un sistema di coordinate in cui X è l'origine e Y, Z sono punti ideali degli assi y e z rispettivamente. Siano $W = (0, w)$, $U = (u, 0)$, $A_1 = (a_1, ma_1)$, $A_2 = (a_2, ma_2)$ e sia μ il coefficiente angolare della retta WR_1. Allora l'equazione di WR_1 è $z = \mu y + w$. Quindi

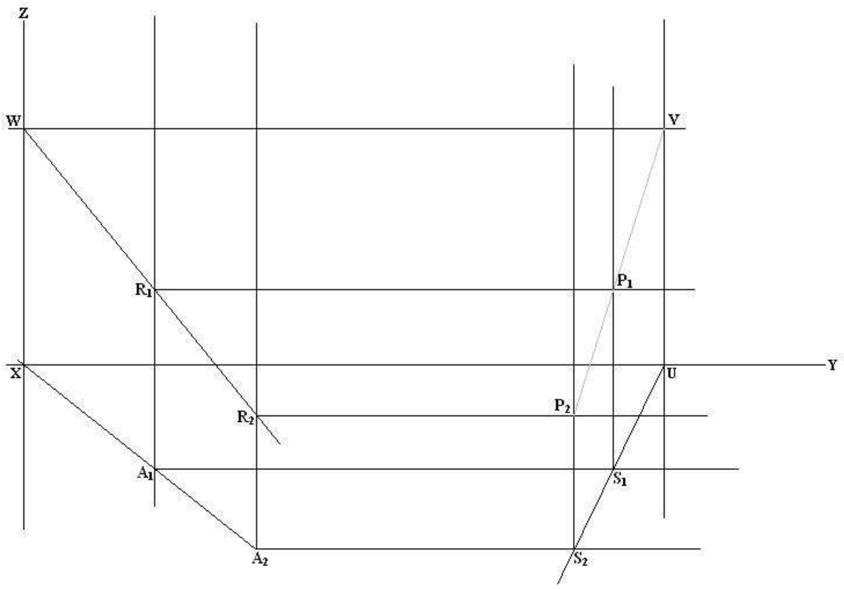


Figura 3.21: Dimostrazione della proposizione 4.

$$R_1 = (a_1, \mu a_1 + w) \text{ e } R_2 = (a_2, \mu a_2 + w)\,.$$

Sia invece ν il coefficiente angolare della retta US_1. Allora l'equazione di US_1 è $z = \nu(y - u) = \nu y - \nu u$.

Poiché le coordinate z di S_1 e S_2 sono ma_1 e ma_2 rispettivamente, le coordinate y di S_1 e S_2 sono rispettivamente

$$\frac{ma_1 + \nu u}{nu} \quad , \quad \frac{ma_2 + \nu u}{nu}\,.$$

Dunque possiamo ricavare le coordinate (y, z) di P_1 e P_2: ognuno dei P_i avrà per ascissa quella di S_i e per ordinata quella di R_i:

$$P_1 = \left(\frac{ma_1 + \nu u}{nu}, \mu a_1 + w \right) \quad , \quad P_2 = \left(\frac{ma_2 + \nu u}{nu}, \mu a_2 + w \right)\,.$$

Osserviamo che $V = UZ \cap WY = (u, v)$. Poiché i coefficienti angolari delle rette congiungenti V con P_1 e con P_2 sono entrambi $\frac{\mu\nu}{m}$, segue che P_1, P_2 e V sono allineati. □

Lemma 2. *Siano D, X, Y, Z punti in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{RP}^2$). Siano A_1, A_2, A_3 punti su DX, B_1, B_2, B_3 punti su DY e C_1, C_2, C_3 punti su DZ.*

Costruisco, per $i = 1, 2, 3$,

$$S_i = A_iY \cap B_iX\,, \quad R_i = A_iZ \cap C_iX\,, \quad Q_i = C_iY \cap B_iZ\,, \quad P_i = R_iY \cap S_iZ\,.$$

Se vale $R(A_1, A_2, A_3, X) = R(B_1, B_2, B_3, Y) = R(C_1, C_2, C_3, Z)$, allora i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati.

Dimostrazione. Poiché vale $R(A_1, A_2, A_3, X) = R(B_1, B_2, B_3, Y)$, il lemma 3.19 garantisce che S_1, S_2, S_3 sono allineati e, ripercorrendone la dimostrazione, vediamo che vale $R(S_1, S_2, S_3, U) = R(A_1, A_2, A_3, X)$, dove $U = S_1S_3 \cap XY$. Analogamente, poiché $R(A_1, A_2, A_3, X) = R(C_1, C_2, C_3, Z)$, sappiamo che R_1, R_2, R_3 sono allineati e $R(R_1, R_2, R_3, W) = R(A_1, A_2, A_3, X)$, con $W = R_1R_3 \cap XZ$. Quindi si ha

$$R(S_1, S_2, S_3, U) = R(R_1, R_2, R_3, W)\,.$$

Poniamo $V = WY \cap UZ$ e $\bar{P}_3 = P_1P_2 \cap S_3Z$.

Innanzitutto osserviamo che $V \in P_1P_2$, per la proposizione 4 Inoltre i punti S_1, S_2, S_3, U sono in prospettiva con P_1, P_2, $\bar{P}_3$, V da Z e dunque, per il teorema 16, si ha

$$R(S_1, S_2, S_3, U) = R(P_1, P_2, \bar{P}_3, V)\,.$$

Ma anche R_1, R_2, R_3, W sono in prospettiva con P_1, P_2, $R_3Y \cap P_1P_2$, V da Y e quindi

$$R(R_1, R_2, R_3, W) = R(P_1, P_2, R_3Y \cap P_1P_2, V)\,.$$

Riunendo le relazioni trovate, otteniamo che

$$R(P_1, P_2, \bar{P}_3, V) = R(P_1, P_2, R_3Y \cap P_1P_2, V)\,,$$

e concludiamo che $\bar{P}_3 = R_3Y \cap P_1P_2$. Segue che $\bar{P}_3 = S_3Z \cap R_3Y = P_3$, ossia P_1, P_2, P_3 sono allineati. □

A questo punto definiamo le funzioni che ci interessano. Sia M una matrice 3×4 a coefficienti reali e sia $\mathbf{x} = (x, y, z, w)^t$. Poiché

$$M(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(M\mathbf{x})\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

allora, se $K_m = \big\{[x, y, z, w] \in \mathbb{RP}^3 : M\mathbf{x} = 0\big\}$, si può definire una funzione

$$f_M : \mathbb{RP}^3 - K_M \longrightarrow \mathbb{RP}^2$$

ponendo $f_M([x, y, z, w]) = (M\mathbf{x})^t$.

É immediato verificare che f_M rispetta gli allineamenti. Inoltre, poiché $f_M = f_{M'}$ se e solo se M' è multiplo di M diverso dalla matrice nulla, allora esiste uno spazio di dimensione 11 di tali mappe f_M. Si dimostra che di fatto queste sono le uniche funzioni continue f da un sottinsieme denso di $\mathbb{RP}^3$ in $\mathbb{RP}^2$ che rispettano gli allineamenti:

Teorema 17. *Siano d, a, s, b, c, r, p, q i vertici di un cubo in $\mathbb{R}^3$ e sia z un punto ideale sulla retta dc. Siano D, A, S, B, C punti qualsiasi di $\mathbb{RP}^2$ e sia Z un punto arbitrario su DC. Allora esiste un'unica funzione continua f da un sottinsieme denso di $\mathbb{RP}^3$ in $\mathbb{RP}^2$ tale che f rispetta gli allineamenti e*

$$f(d) = D,\ f(a) = A,\ f(s) = S,\ f(b) = B,\ f(c) = C,\ f(z) = Z. \tag{3.10}$$

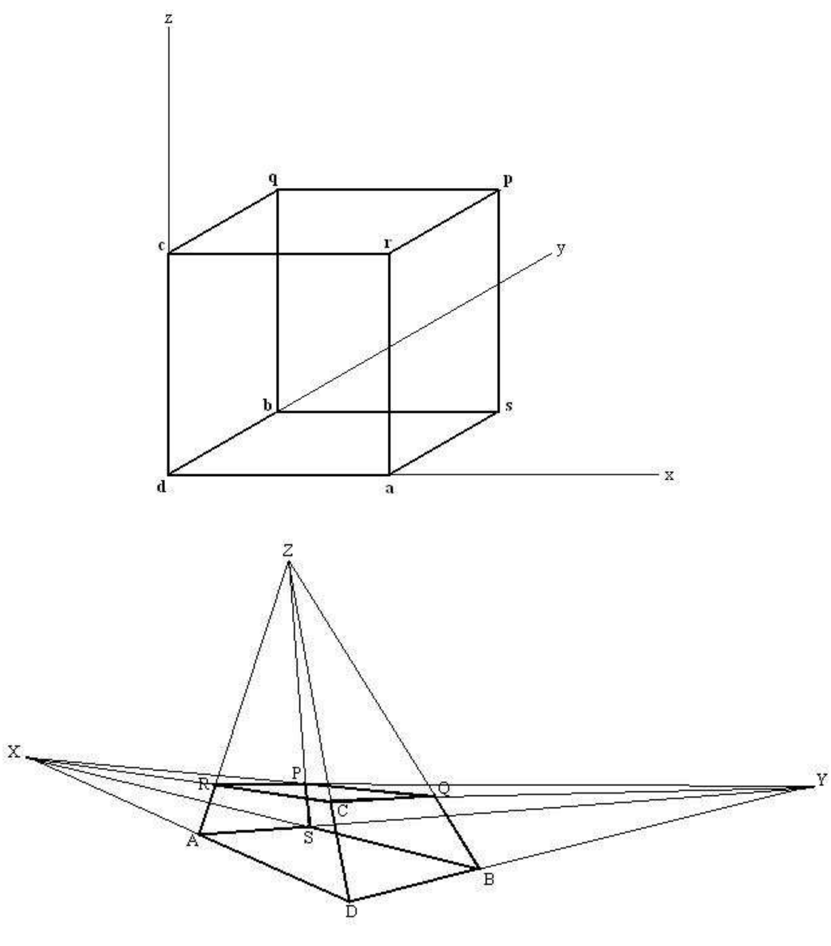


Figura 3.22: Teorema 17.

Dimostrazione. Unicità: supponiamo di aver trovato una funzione f che soddisfa l'enunciato e dimostriamo che, una volta scelti D, A, S, B, C, Z, allora f è univocamente determinata.

Poiché f rispetta gli allineamenti, il punto all'infinito su da, $x = da \cap bs$, deve essere proiettato in $X = DA \cap BS$, il punto ideale su db, $y = db \cap as$, deve andare in $Y = DB \cap AS$ mentre $r = cx \cap az$ e $q = cy \cap bz$ devono essere mandati in $R = CX \cap AZ$ e $Q = CY \cap BZ$ rispettivamente. Inoltre $p = sz \cap qx = sz \cap ry$ deve essere proiettato in $P = SZ \cap QX$ che coincide con $SZ \cap RY$, per la proposizione 3 (pag. 122).

Consideriamo adesso il punto medio di da, che possiamo ottenere geometricamente con la costruzione del punto medio vista nel capitolo precedente, cioè il punto medio di da si trova come intersezione tra a da e la retta passante per z e $rd \cap ac$, di cui abbiamo visto come determinare l'immagine sul piano. La sua immagine tramite f è perciò determinata. Abbiamo visto anche che, più in generale, $f(t)$ è determinata per un qualsiasi punto $t \in da$ tale che

$$\frac{\text{lunghezza}(dt)}{\text{lunghezza}(da)} = \frac{m}{2^n} \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}$$

Per continuità, allora, conosciamo $f(t)$ per ogni $t \in da$. Analogamente $f(t)$ è determinata per ogni $t \in db$ e per ogni $t \in dc$. Per un qualsiasi punto $t \in \mathbb{R}^3$, siano a_t, b_t, c_t le proiezioni sugli assi x, y, x (cioè su dx, dy, dz) rispettivamente. Allora, grazie alla proposizione 3 si dimostra che la posizione di $f(t)$ è determinata univocamente da $f(a_t)$, $f(b_t)$, $f(c_t)$.

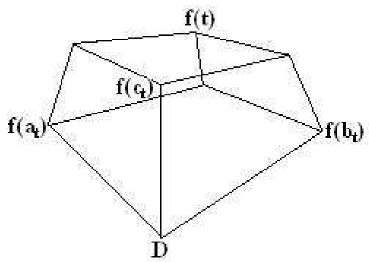


Figura 3.23: Teorema 17.

Esistenza: proviamo che dati D, A, S, B, C, Z, esiste una funzione continua f che rispetta gli allineamenti e tale che valgano le (3.10).

Per determinare f, osserviamo che la posizione di un punto t sull'asse x, dx, è determinata dal suo birapporto rispetto a d, a, x. Poniamo perciò $T = f(t)$ il punto sulla retta DA che ha lo stesso birapporto rispetto a D, A, X. Definiamo in modo analogo $f(t)$ per ogni t sull'asse y, dy, e sull'asse z, dz.

Per un generico punto $t \in \mathbb{R}^3$, siano a_t, b_t, c_t le proiezioni x, y, z

rispettivamente e definiamo $f(t) = P_t$, i punti determinati da $A_t = f(a_t)$, $B_t = f(b_t)$, $C_t = f(c_t)$.

Il lemma 2 mostra che la funzione f definita in questo modo rispetta gli allineamenti. $\square$

Questo teorema mostra che ogni funzione continua che rispetta gli allineamenti proviene da una matrice, a causa della quale ci sono $4 \times 3 - 1 = 11$ gradi di libertà per la determinazione di D, A, S, B, C e Z.

Dunque, conoscendo M, la matrice 3×4 che rappresenta la proiettività, troviamo la posizione di E notando che E è l'unico punto per cui la proiezione non è definita. Perciò le coordinate omogenee di E sono date dai vettori $\mathbf{x}$ tali che $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$. In particolare l'insieme $\{\mathbf{x} : M\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ deve essere unidimensionale. Per ulteriori analisi rimandiamo a [4].

Capitolo 4

Approfondimenti didattici

4.1 Insegnamento della geometria

Come anticipato nell'introduzione, l'idea di partire dalla prospettiva per parlare di geometria proiettiva rientra in un progetto educativo di educazione al metodo matematico e in particolare del *pensare geometricamente*, come si può trovare ben esposto in alcune parti del [6].

Non intendo delineare la situazione dei programmi di geometria attuali nella scuola italiana, per la quale rimando a [8], né scrivere un decalogo del buon insegnamento della geometria; mi interessa piuttosto sottolineare gli aspetti dell'attività svolta che risultano conformi alle indicazioni sollevate nell'ultimo decennio davanti all'evidente crisi della matematica.

4.1.1 Principi fondamentali

Innanzitutto ripropongo alcuni principi esposti in [6] che si possono riscontrare nel metodo adottato per pensare e svolgere le lezioni di questa sperimentazione. Gli obiettivi principali per l'insegnamento della geometria secondo la Commissione sono:

- Insegnare a pensare geometricamente, ossia davanti ad un problema insegnare ad essere innanzitutto capaci di fare un disegno (cioè di schematizzare il problema), ad appoggiarsi poi all'intuizione geometrica che si acquisisce con il disegno nel piano, o che si visualizza nello spazio, per applicarla anche a dei casi più complessi (che saranno meno visibili).

- Insegnare ai ragazzi a vedere nello spazio. Si tratta indubbiamente di uno degli obiettivi essenziali per ogni persona ed è l'aspetto della geometria che si impara per primo (già dalla scuola elementare o dalla scuola dell'infanzia), ma oltre ad una conoscenza familiare iniziale, si inserisce una pratica più propriamente geometrica che permette di perfezionare la conoscenza dello spazio. Ciò può essere fatto, ad esempio, con l'aiuto di tre tipi di supporto tecnologico-didattico:

1. L'utilizzo di materiale tridimensionale (poliedri, sfere, ...) con tutto il fascino che possono avere i materiali attuali;
2. L'utilizzo di software di geometria che permettono una visualizzazione dinamica e sotto angoli differenti di una figura dello spazio;
3. L'utilizzo del disegno (prospettiva, modelli, sotto-figure, proiezioni, sezioni, ...) che collegano la geometria nello spazio alla geometria piana. Sicuramente è più difficile disegnare un oggetto dello spazio, ma d'altra parte qualche volta accade che fare la figura dà la soluzione del problema (pensiamo al teorema di Desargues, ad esempio).

- Insegnare a ragionare. Il ragionamento geometrico è molto più ricco della semplice deduzione formale e l'apprendimento di questo ragionamento, guidato opportunamente, è molto importante, tenendo presente che può essere abbordato abbastanza presto (alla scuola media); il ragionamento interviene dal momento della formulazione del problema e si possono percepire agilmente le articolazioni di una logica la cui portata è universale. Senza dubbio risulta indispensabile per la formazione scientifica degli alunni; occorre tuttavia non sottovalutare due difficoltà:

    1. Il ragionamento geometrico non deve essere ridotto all'apprendimento formale della dimostrazione: innanzitutto si parte dall'osservazione della figura, prima di dar luogo ad un vero lavoro di ricerca, con l'elaborazione di congetture, sottomesse ad un esame critico e alla ricerca di controesempi; in seguito, grazie al lavoro precedente, giustifichiamo il risultato in modo convincente con una dimostrazione, mantenendo così un dialogo permanente tra l'intuizione e il rigore. Naturalmente, il confronto degli allievi con dei problemi aperti è molto costoso in termini di tempo e non può essere fatto continuamente, ma resta un obiettivo essenziale che merita di essere richiamato.
    2. L'apprendimento della matematica in generale, e della geometria in particolare, è difficile. Necessita, infatti, da parte degli allievi, un investimento intellettuale notevole e uno sforzo che non tutti sono pronti a fare, soprattutto se l'insieme del sistema non li incita (al contrario, tutti quelli che, stimolati dall'entusiasmo dei loro professori e dalla bellezza delle figure, hanno gustato questa disciplina, sanno bene quale risorsa di piacere essa possa essere, e non soltanto i matematici di professione che spesso le devono

la loro vocazione). Viceversa, agli insegnanti è richiesto di mettersi in gioco maggiormente, *rischiando* ad esempio di bloccarsi o di sbagliare davanti alla classe, nel cercare di risolvere o esporre problemi per via sintetica, come la geometria richiede. E' vero che ogni allievo può trovarsi, di fronte ad un problema di geometria, nella situazione angosciante di 'seccarsi'. E' una realtà in cui ciascun matematico, ciascun ricercatore, ciascun uomo, si imbatte quando affronta un problema di cui non conosce la soluzione: cominciare a superare questa difficoltà ci sembra un obiettivo essenziale, e non soltanto per i matematici.

Riguardo a quest'ultimo fatto, occorre che gli insegnanti dicano agli alunni che non bisogna vergognarsi e che valorizzino i loro tentativi; inoltre bisogna che facciano capire (sia con le parole, ma vale molto di più con il proprio esempio) che 'seccarsi' è un momento naturale di tutte le attività di ricerca. Occorre in seguito che siano capaci di fornire loro dei metodi di investigazione e di riflessione che diminuiscano questa angoscia. Si può infatti imparare a ricercare in modo riflessivo e metodico; e questo è un obiettivo al quale val la pena dedicare tempo ed energie.

- Evitare l'obsolescenza. La Commissione ha potuto constatare che certe nozioni prendono, nell'insegnamento, uno spazio sproporzionato in rapporto alla loro reale importanza matematica divenendo così degli stereotipi nell' insegnamento. Ci sono molte ragioni didattiche per cui avviene questo: il peso dei manuali, la presenza di esercizi facili da valutare, il ruolo del diploma, ecc. Sembra dunque importante, al fine di evitare ciò, fare attenzione al fatto che questi temi e le applicazioni suggerite dai programmi accanto del corpus fondamentale, per quanto siano interessanti, siano periodicamente rinnovate, così che allievi e insegnanti siano nuovamente motivati.

- Dare spazio alle nuove tecnologie. Esistono diversi software di geometria che procurano un aiuto considerevole a chi vuole imparare la geometria. Ad esempio, l'utilizzo delle funzioni di tipo traccia e animazione, che alcuni propongono, è molto efficace per la ricerca dei luoghi geometrici (e permette di realizzare delle figure molto belle). Si dispone, perciò, di un nuovo strumento di cui non è il caso di privarsi e che può sbloccare certi allievi scoraggiati dalla difficoltà di questa materia.

  Tuttavia occorre stare attenti a due fatti:

  1. mettere degli alunni davanti a dei software di geometria non significa che stiano facendo geometria;

2. è ancora più difficile convincere i ragazzi della necessità di dimostrare una proprietà, dal momento che il software risponde loro che è vera. Perciò l'utilizzo di questi strumenti devono avere come scopo un miglioramento dell'insegnamento e non il contrario.

- Legare la geometria alle altre discipline. Per questo obiettivo, la Commissione raccomanda più un cambiamento da parte degli insegnanti, che un cambiamento dei programmi. Infatti, i temi unificanti esistono: con la geografia (tutto ciò che riguarda la misura della Terra o dei fenomeni astronomici), con la fisica (compreso il legame con cinematica e meccanica), con le arti plastiche (prospettiva e rappresentazione degli oggetti dello spazio), ecc. Il problema maggiore è senza dubbio a livello della formazione dei maestri (di matematica come di altre discipline) che non dà quasi mai le conoscenze necessarie per dialogare con le altre materie (o con gli insegnanti di altre materie), né l'abitudine a questo dialogo.

4.1.2 Spazio e figure

Si riscontrano, nei principi sopra esposti, delle vicinanze notevoli con la proposta avanzata dalla C.I.I.M in [10] relativa all'insegnamento nella scuola secondaria in Italia del nucleo tematico *Spazio e figure*. In particolare viene richiesto di

«[...]mirare a omogeneizzare, correggere e rinforzare gli elementi di intuizione spaziale che gli studenti hanno acquisito, esaminando in un primo momento intuitivamente le figure fondamentali che caratterizzano lo studio della geometria dello spazio e analizzando i problemi di reciproca posizione che queste presentano. Ciò costituirà, tra l'altro, stimolo e motivazione per lo studio razionale e sistematico della geometria del piano, che a questo livello va avviato. In tale ottica è bene condurre progressivamente lo studente dall'intuizione e dalla scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale, partendo da un'attività di esplorazione di situazioni significative collegate alla realtà e procedendo allo sviluppo di limitate catene di deduzioni. In tale sviluppo è necessario, tuttavia, che ogni ipotesi e ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento. La geometria concorrerà, in modo significativo, alla maturazione di una consapevolezza argomentativa. Si proporranno agli allievi attività di rappresentazione e di esplorazione di situazioni geometriche atte a favorire la produzione di congetture, con l'aiuto di strumenti operativi di volta in volta più significativi nello specifico contesto[...].»

Inoltre

«[...]gli argomenti saranno ripresi dando una visione più sistematica del tema. Lo sviluppo degli argomenti sarà anche condotto in modo da stabilire un rapporto tra la realtà e la geometria con le sue applicazioni - nel disegno, nell'architettura, nell'ingegneria, nell'arte, nelle scienze sperimentali - interpretando il discorso geometrico come momento di rappresentazione e di modellizzazione della realtà.»

4.1.3 Il laboratorio di matematica

L'esperienza svolta, si colloca pienamente nel punto *Utilizzare le conoscenze di geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza* tra le abilità richieste per il secondo biennio della scuola secondaria e risulta attuata con un'attività di pseudo-laboratorio, così come presentato dalla Prof. Paola Domingo al XXIV Convegno Nazionale sull'Insegnamento della Matematica e riportato in [11].

«La didattica del laboratorio di matematica ha una lunga tradizione e non solo in Italia; la commissione ha scelto di indicare esplicitamente il ruolo di collante fra i vari argomenti che il laboratorio può svolgere; in altri termini, si tratta di un insieme di indicazioni su come si possano trattare i diversi argomenti previsti dai programmi in modo unitario e sensato (l'aggettivo sensato è da intendersi nella duplice accezione galileiana, oltre che in quella di ragionevole).

Mi limito qui a riassumere i principali ingredienti che deve avere un laboratorio di matematica:

- l'uso di strumenti come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenze; ovviamente quando si parla di strumenti non si hanno preclusioni preconcette tra strumenti poveri o ricchi, antichi o moderni: l'importante è che l'insegnante li utilizzi consapevolmente come mediatori nei processi di insegnamento - apprendimento.

- La didattica lunga, meno preoccupata dell'acquisizione di certe tecniche, meno attenta a certi aspetti sintattici e decisamente finalizzata a garantire a tutti gli studenti esperienze che consentano la costruzione di significati degli oggetti di studio. Tra l'altro tutto ciò può oggi essere facilitato con un uso sensato delle nuove tecnologie.

- L'attenzione alle dinamiche di interazione sociale in classe, perché difficilmente si costruisce conoscenza senza comunicare con gli altri. Il laboratorio non è quindi un luogo fisico, ma un ambiente di insegnamento - apprendimento che, metaforicamente, può essere paragonato alla bottega rinascimentale, dove si apprendeva facendo e vedendo fare, comunicando con i compagni oltre che per imitazione dell'esperto.

Concludo accennando a tre problemi che nascono nel laboratorio e dei quali si deve essere consapevoli:

- gli spazi delle nostre scuole spesso sono poco adatti a una didattica laboratoriale;
- la necessità di coinvolgere le famiglie in un progetto educativo che può essere fortemente innovativo, soprattutto per la priorità data a un approccio percettivo - motorio all'apprendimento rispetto a quello ricostruttivo - simbolico tipico della scuola italiana e non solo italiana;
- la consapevolezza che, come insegnanti, dobbiamo innanzitutto rivolgerci al futuro cittadino, più che al futuro matematico. Questa consapevolezza implica la convinzione che prima di risolvere i problemi per le eccellenze dobbiamo risolvere quelli per tutti.

Quanto detto, in particolare l'ultimo punto, suggerisce l'opportunità di un'analisi puntuale, approfondita e coraggiosa dei grandi problemi con i quali dobbiamo oggi confrontarci. Senza quest'analisi che consenta innanzitutto di individuare i problemi veramente importanti, non ha molto senso progettare e realizzare un percorso educativo formativo in tutti i suoi aspetti, in particolare in quelli di individuazione, formazione e valutazione delle conoscenze e competenze essenziali.»

4.1.4 Risolvere e porsi problemi

Osserviamo anche che la sperimentazione è stata svolta in modo da contribuire a sviluppare le seguenti abilità relative al nucleo trasversale *Risolvere e porsi problemi* conformemente a quanto proposto in [10]:

- Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) di situazioni e fenomeni matematici e non (fenomeni delle scienze sperimentali, economici, demografici, dei giochi sia di strategia che di sorte ecc.) per affrontare problemi (aperti o meno; posti da altri o auto-posti).
- Esplicitare le proprie aspettative in termini di possibilità di trovare una soluzione, individuando alcuni elementi di controllo da tenere sistematicamente presenti nel corso del processo risolutivo per comprendere se si progredisce verso la soluzione (ad es. gli ordini di grandezza delle soluzioni attese, le conoscenze e i metodi matematici ritenuti utili per la risoluzione, le somiglianze e differenze con problemi analoghi, i tempi).

- Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni (simbolici, geometrici, numerici, ecc.) e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata.

- Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie (formalizzazioni, calcoli, costruzioni geometriche, ecc.).

- Confrontare i risultati ottenuti con le aspettative precedentemente esplicitate. Individuare le cause delle inadeguatezze considerando ed eventualmente modificando gli elementi di controllo precedentemente individuati. Chiedersi se lo stesso modello matematico sia adatto a diverse situazioni concrete.

- Ricorrere ai mezzi tecnologici disponibili per esplorare le situazioni problematiche individuate o proposte (nel caso ciò sia opportuno); valutarne l'efficacia nei processi risolutivi che producono.

- Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie.

- Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, ecc.) per descrivere e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime in campo matematico e in altri ambiti riferibili a discipline scolastiche oppure ad altre esperienze culturali.

- Formulare congetture per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici diversi; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti, ricercando controesempi e (in mancanza di essi) cercare di costruire dimostrazioni via via più esaurienti e rigorose, riferite agli elementi di teoria disponibili.

4.1.5 Il lavoro di gruppo

Il cosiddetto *lavoro di gruppo*, di cui ci si è avvalsi con l'aiuto della professoressa presente in aula, è ritenuto uno dei metodi più efficaci per risolvere e porsi problemi in [10]:

«Gli studenti possono imparare a porsi e risolvere problemi sia in gruppo sia singolarmente. Pur perseguendo la stessa finalità, il lavoro di gruppo, rispetto a quello individuale, si prefigge anche altre finalità di tipo comportamentale, come il saper stare con gli altri, discutere in gruppo, rispettare l'opinione dell'altro e anche saper difendere la propria opinione, argomentando e dibattendo. È fondamentale quindi, come metodologia di classe, il lavoro in piccoli gruppi (a seconda dei casi, possono essere di due, tre o quattro persone). [...] Accanto al lavoro di gruppo, come in altri momenti del lavoro scolastico, è importante dedicare opportuni spazi alla discussione matematica. In essa, l'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe e influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo, in quanto ha presenti gli obiettivi generali e specifici dell'attività proposta. È anche possibile far intervenire nella discussione voci di persone che non fanno parte della classe, come per esempio voci dalla storia, attraverso la lettura di un testo storico, oppure voci dalla realtà esterna, attraverso un testo scritto, una audio-registrazione, una videoregistrazione o una tele-conferenza. La discussione si struttura quindi come una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.) all'interno del progetto didattico ed educativo. Il lavoro di gruppo o individuale finalizzato alla risoluzione di un problema, o la spiegazione stessa dell'insegnante possono servirsi del laboratorio per avere strumenti o ambienti o metodi utili all'espletamento di un compito o all'introduzione di concetti nuovi, o alla costruzione sociale del sapere. A tale scopo, le indicazioni relative al laboratorio di matematica sono particolarmente significative non solo per l'interazione con gli strumenti, ma soprattutto per l'impianto metodologico. Tale impianto si dovrebbe basare su quello che viene chiamato apprendistato cognitivo. L'apprendistato cognitivo coinvolge abilità e processi sia cognitivi sia metacognitivi: l'esperto modella e struttura l'attività del principiante, che osserva l'esperto e confronta e valuta il suo operato rispetto alle proprie attività intellettuali. È un metodo variegato e flessibile che si contrappone all'apprendistato pratico che, invece, si identifica con uno specifico metodo di apprendimento basato esclusivamente sull'osservazione dell'attività dell'esperto, sulla strutturazione graduale e crescente delle abilità e, soprattutto, su una particolare attenzione all'acquisizione di abilità di carattere pratico. L'apprendistato diventa cognitivo in quanto riesce a bilanciare la dialettica tra l'azione strutturatrice e facilitatrice dell'intervento dell'esperto e la sfida che un problema da risolvere rappresenta per il principiante, che non si limita a riprodurre i comportamenti dell'esperto ma diviene consapevole dei motivi che portano l'esperto a scegliere certe strategie e non certe altre. La metafora che può ben descrivere l'apprendistato cognitivo è quella della bottega d'arte del Rinascimento, in cui l'allievo impara facendo, vedendo altri che fanno e riflettendo sul perché fanno così, il tutto sotto la guida di uno più esperto di lui.»

4.2 La scelta dell'Ottica di Euclide

Come tutti sappiamo l'opera di geometria che si è più diffusa nel corso dei secoli è stata gli *Elementi* di Euclide, che tratta della geometria in un modo che è sopravvissuto fino ai giorni nostri. La sua arma vincente è indubbiamente il fatto di utilizzare termini che non sono privi di significato, ma che sono facilmente intuibili e afferrabili da tutti, tanto che è possibile introdurli già a partire dalla scuola elementare. Risultano pertanto un buon punto di partenza per l'insegnamento della geometria, in quanto dopo aver definito gli oggetti di cui si intende trattare e poche regole (assiomi), spesso intuitive, si procede con l'affermazione e la dimostrazione delle proposizioni. Tutto questo può essere fatto per via sintetica, non ricorrendo ai conti, ma confrontando direttamente lunghezze, angoli, aree e utilizzando risultati già precedentemente dimostrati come validi.

Nel tempo, la geometria ha subito un forte cambiamento richiesto dalla necessità di precisare in modo accurato le regole per la costruzione delle definizioni e delle dimostrazioni, che ha portato all'introduzione dell'assiomatica di Hilbert, un sistema formale di per sé privo di significato al quale si può e si deve trovare un modello *concreto* che lo soddisfi.

Poiché l'assiomatica moderna è basata su questo forte formalismo, che di per sé non è legato ad un preciso significato, va da sé che nell'insegnare la geometria solo a partire da questa, può esserci il rischio di comunicare qualcosa che viene percepito come *senza senso*.

Strutturalmente, infatti, una persona a qualsiasi età (e a maggior ragione in periodo di crescita) si interessa e impara solo cose per le quali intravede un significato per sé o per qualcuno di cui può fidarsi. Ad esempio un bambino al quale la mamma dice «Mangia la verdura, perché ti fa bene.», magari non capisce in che senso gli fa bene, però la assaggia oppure non lo fa per un capriccio, ma rimane comunque certo del fatto che la verdura gli faccia bene, perché glielo ha detto sua mamma, del cui bene è assolutamente certo. Crescendo sorge, giustamente, in lui la necessità di verificare quel significato; non gli basta più *solo* vedere la certezza in un altro, ma deve poter in qualche modo riscoprirla lui: l'insegnamento viene perciò messo in discussione ed è compito dell'educatore (genitore, insegnante, ecc..) di guidarlo senza imposizione alla scoperta di quel significato, permettendogli un percorso che lo aiuti a formare una capacità di giudizio critica, che gli consenta di poter guardare senza paura tutto quello che si trova davanti e acquisire una propria capacità di certezza. Ciò di cui ha bisogno è di scoprire i nessi tra ciò che vede, sente, ... con se stesso e tutta la tradizione che si porta dietro, senza tralasciare neanche un fattore e lasciandosi provocare dalle cose nuove o da quelle che non tornano: se trascura dei fattori, la visione diventa solo parziale ed essa perciò non sarà più in grado di soddisfare la sua esigenza di conoscenza. Le conseguenze più lampanti sono una iniziale delusione nei confronti della cosa che lo aveva provocato (che alla lunga può degenerare in una delusione nei confronti della realtà), una disaffezione e un atteggiamento scettico, che impedisce di entrare realmente in rapporto con la cosa e che difficilmente è sovvertibile in età adulta.

A mio parere non si può insegnare la geometria (o qualsiasi altra cosa) prescindendo dal modo con cui un bambino diventa uomo: se non adeguatamente introdotte, cose solo formali diventano automaticamente non interessanti ai più. Per questo motivo, il punto di partenza nella scuola per me *deve* essere la geometria euclidea. Solo in un secondo momento (e senza mescolare classico con moderno) passerei all'assiomatica moderna, che comunque genererà un po' di sconcerto; tale iniziale disorientamento però sarà più facilmente superabile, con la guida dell'insegnante, verificando il legame tra quanto studiato in precedenza e il formalismo introdotto (e magari percorrendo storicamente le ragioni per cui si è arrivati al radicale cambiamento e quali vantaggi ha portato).

L'utilizzo dell'*Ottica* di Euclide per introdurre la geometria della visione, all'interno della sperimentazione, ha lo stesso intento di quello degli *Elementi* nei confronti della geometria. Infatti, in modo analogo agli *Elementi*, anche l'*Ottica* si fonda su delle premesse iniziali (7 in totale): le prime due definiscono gli oggetti specifici della geometria della visione, mentre le altre cinque ne stabiliscono le regole operative. Inoltre, poiché tutte le grandezze esaminate in quest'opera vengono scomposte in figure più semplici o segmenti, le dimostrazioni presenti ricorrono alla geometria degli *Elementi*. Quindi per approcciarsi alla geometria della visione, basta la conoscenza della geometria euclidea. Ecco perciò il primo vantaggio di un tale percorso.

Inoltre, è più che ragionevole pensare che i nostri pionieri della prospettiva conoscessero in larga misura gli *Elementi* di Euclide: per tradizione, nel Medioevo veniva insegnata la geometria tra le arti del quadrivio e più successivamente nel Rinascimento sicuramente veniva studiata la geometria euclidea; addirittura, dall'invenzione della stampa in poi, si trovano copie degli *Elementi* un po' dappertutto: era uno dei libri più diffusi.

Volendo, dunque, fare un percorso storico della nascita della prospettiva, questo mi è sembrato, in accordo con gli autori di [12], il modo più naturale di procedere nell'attività didattica.

4.2.1 L'opera

Riportiamo di seguito le premesse dell'*Ottica* con alcuni commenti per un piccolo assaggio della struttura e del contenuto dell'opera.

1. Sia posto che: i segmenti rettilinei tracciati a partire dall'occhio si portino ad una distanza tra loro di grandi dimensioni[1].

[1] L'ultima parte di questa prima premessa è un punto di interpretazione controversa. Il

2. E che la figura formata dai raggi visuali sia un cono avente il vertice nell'occhio e la base sui contorni delle cose viste.

3. E che siano viste quelle cose sulle quali incidono i raggi visuali, mentre non siano viste quelle sulle quali i raggi visuali non incidono.

4. E che le cose viste sotto angoli più grandi appaiano più grandi, quelle [viste] sotto [angoli] più piccoli più piccole, e uguali quelle viste sotto angoli uguali.

5. E che le cose viste sotto raggi più alti appaiano più in alto, quelle [viste] sotto [raggi] più bassi più in basso.

6. E allo stesso modo che le cose viste sotto raggi più a destra appaiano più a destra, quelle [viste] sotto [raggi] più a sinistra appaiano più a sinistra.

7. E che le cose viste sotto un maggior numero di angoli appaiano con miglior risoluzione.

Euclide parla perciò di *raggi visivi*, cioè raggi uscenti dall'occhio e formanti un cono visivo, che rappresenta geometricamente come semirette. Inoltre, dato un segmento (che rappresenti una grandezza reale), concepisce un *angolo visivo* come un angolo formato dai due raggi passanti per gli estremi del segmento. Infine, all'interno del cono presuppone una *distribuzione discreta dei raggi visivi*, e di conseguenza anche l'esistenza di un *angolo visivo minimo*, al di sotto del quale nulla può essere visto. Una parafrasi delle premesse è la seguente:

- I raggi visivi si propagano radialmente dall'occhio e si stendono lontano quanto si vuole (premessa 1).
- I raggi visivi formano un cono (premessa 2).
- Vi è una visione attiva per gli angoli visivi (premesse 2 e 3).
- La dimensione apparente degli oggetti è funzione dell'angolo visivo (premessa 4).
- La stima della posizione relativa degli oggetti è funzione della posizione dei raggi che formano l'angolo visivo (premesse 5 e 6).

testo A, di cui qui si fa la traduzione ha letteralmente : *Si ponga che i segmenti rettilinei tracciati a partire dall'occhio si portino a distanza di grandi grandezze.* Il testo B porta invece : *Supponiamo che : i raggi visuali si proiettino dall'occhio in linea retta facendo un certo intervallo tra loro.* Ora, che Euclide da qualche parte stabilisca che i raggi sono discreti, cioè distanziati tra loro, è certamente necessario : sia la premessa 7 che numerosi teoremi fanno uso di questo fatto e non sarebbero comprensibili altrimenti. La maggiore chiarezza del testo B in questo punto, rispetto ad A, è uno degli argomenti usati per sostenere la attribuzione ad Euclide del testo B invece che dell'A.

- La risoluzione visiva è funzione del maggiore o minore numero di angoli sotto cui viene visto l'oggetto (premessa 7).

Per capire l'utilità della premessa 3, occorre collocare storicamente l'opera: lo studio dell'ottica era molto diffuso in epoca ellenistica e strettamente intrecciato a filosofia e metafisica. Vi erano inoltre più teorie contrapposte della percezione visiva. Le più importanti erano quelle emissioniste (Empedocle e Platone), secondo le quali si possono vedere solo gli oggetti che vengono colti attivamente dai raggi visivi che partono dall'occhio, e quelle estromissive (Democrito e Aristotele), le quali enunciavano che dagli oggetti si staccavano delle immagini che direttamente o indirettamente imprimevano sull'occhio la forma che contenevano. In questo modo la visione risultava passiva e non dipendeva dall'incidenza dei raggi visivi sull'oggetto. Con la premessa 3, quindi Euclide afferma di abbracciare la teoria emissionista.

Notiamo inoltre che la modellizzazione del raggio visivo come semiretta non prevede un verso, ma solo una direzione e quindi resta valida, oltre che per la teoria emissionista, anche per l'ottica geometrica moderna, in quanto si può sostituire il raggio visivo uscente dall'occhio con un raggio di luce entrante nell'occhio.

Bibliografia

[1] F. Enriques, *Lezioni di geometria proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1909.

[2] E. Vitti, M. Folchi, *Il meccanismo della visione*, Bovolenta, Ferrara 1992.

[3] L. Giussani, *Il rischio educativo*, SEI, Torino 1995.

[4] M. H. Eggar, *Pinhole Cameras, Perspective, and Projective Geometry*, in The American Mathematical Monthly, Vol. 105(1998), fasc. 7, pp. 618-630.

[5] G. Zwirner, L. Scaglianti, *Funzioni in* R^2*, Esponenziali, logaritmi, algebra lineare*, CEDAM, Padova 1998.

[6] Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*, Bull. APMEP 430(2000), pp. 571-599.

[7] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino 2000.

[8] G. Ottaviani, *Riflessioni sulla geometria e sul suo insegnamento oggi*, Atti *Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie*, Montevarchi 2001.

[9] AA.VV., *Visualizzazione*, in *Matemilano -percorsi matematici in città*, pp. 60-79, Springer, 2003.

[10] Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica, *MATEMATICA 2003 - Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculo di Matematica - Ciclo secondario*, in *Quaderni* del MIUR.

[11] *Matematica, Scuola, Società*, Atti XXIV Convegno Nazionale sull'Insegnamento della Matematica, Acireale (CT), 21-23 ottobre 2004.

[12] L. Catastini, F. Ghione, *Le geometrie della visione*, Springer, Milano 2004.

[13] G. Martini, *Fondamenti di geometria descrittiva e applicazioni*, CLITT, Roma 2005.

[14] J. Stillwell, *The four pillars of geometry*, Springer, San Francisco 2005.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare per primi il prof. Ottaviani che mi ha mostrato enorme stima e mi ha dato un sostegno e un aiuto più che valido nell'affrontare questo lavoro di tesi e la prof.ssa Rigato, dalla quale ho potuto imparare molto e senza la disponibilità della quale la mia tesi non avrebbe avuto un riscontro nell'esperienza.

Ringrazio al pari i miei genitori (e tutta la mia famiglia) per avermi sostenuto in tutti i modi a loro possibili in questi (molti) anni di università: non mi hanno mai fatto pesare il fatto di aver avuto delle difficoltà, ma hanno sempre creduto nelle mie possibilità, mostrandomi di avere a cuore la mia felicità, senza lasciarsi vincere dal dubbio che realmente potessi arrivare in fondo, incoraggiandomi anche a continuare gli studi dopo la triennale.

Considerato che otto anni in università non sono pochi, e di incontri ne ho fatti davvero tanti, mi perdoneranno coloro che non saranno citati, ma che non dimentico affatto. Ringrazio i miei 'compagni di avventure' di questi anni all'università.

Per primi i matematici e gli informatici, miei compagni di studio, di elezioni e iniziative varie dentro l'Ulisse Dini, e tutti coloro senza i quali il dipartimento sarebbe stato un edificio più grigio di tanti altri: Francesca Salvi, Francesca Buttazzo, Chiara Milone, Daniele Falassi, Caterina Paoletti, Antonio Tognon, Mauro, Emanuele, Liliana (il 'padrino'), Vik, Sara Cintolesi, Claudio Orlandi, Irene Lodone, Margherita Scarpelli, Sara Barontini, Valentina Boccini, Marta Menci, Elisa, Dimitri, , Monica Tursi, Valentina Bartolo (che in questo momento forse sta partorendo, bellina!), Gaia e Simone (fedeli compagni in biblioteca di questi tempi), Valentina e Manuele. Ringrazio anche i ragazzi del Collettivo di Scienze perché in questi anni hanno sempre cercato di rendermi 'meno noiosa' e 'meno tranquilla' la vita con la loro estrema simpatia e, loro malgrado, sono stati occasione per una crescita sempre più grande.

Ringrazio inoltre tutti gli amici di Scienze che non ho ancora citato e in modo particolare l'Alessia, il Just, Ale Matteucci, la Ciccia, Sigward, Farini, Sfrosali, Silvio, il Frosky, la Laura (la nostra biondissima segretaria), Bausi (il nostro un po' meno biondo segretario), Ale Murri, Pp e lo Spina (che alla fine ho battuto!), Matilde (le iniziative!), Lore Ghignone, Chiara Sciabolini, Tommaso Favalli, il Dino, il Mascio, il Bongio, Eleonora, Lore Bartolini, Ale Breschi, Valeria, Carolina, Serena.

Ringrazio gli Ingegneri, i 'vicini di casa' con i quali ho condiviso a lungo gioie e dolori, lodi, angelus, pranzi a mensa e serate: Black, Ivan, Lucia, Camilla Fabbri, Francesca Magnanini, i'Bazzica, il Fons e il Tassi, Lore Usai, Giova Fabbri, Alex e Andrea Mancini, Beppino, Beppone, Simone Paiano, il Gama, il Maresca.

Ringrazio 'quelle dell'appa' senza la cui presenza la mia vita non sarebbe stata sicuramente così intensa e che in modo particolare mi hanno sopportato negli ultimi due anni: Francesca, Letizia, Vanessa e Lucia.

Ringrazio la Mile e la Nico (cosa sarebbe stata Czestochowa senza di voi!), Rachele per i momenti passati insieme e perché la musica è tutta un'altra cosa adesso, il maestro Belli e la Gine per la loro profonda sensibilità e le loro immancabili domande, Ionela, 'il mio pagliaccetto', per la sua dolcezza.

Un ringraziamento speciale al Bella per la pazienza e la carità con cui mi ha guardata in questi anni mentre percorrevo la mia strada e al don Giuss per aver detto «Sì» dando inizio a tutta questa trama di rapporti.

Infine ringrazio i bibliotecari di Matematica: Silvana, Nuccia, Laura e Paolo per avermi fatto sentire fin dall'inizio del servizio civile un po' come a casa e che mi hanno permesso, nei momenti più duri, di salvaguardare il lavoro della tesi.