

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTA' DI S.M.F.N.**

Anno accademico 2007/2008

Tesi per la laurea specialistica in Matematica

di Ilaria Nesi

**Dalla didattica delle equazioni
di secondo e terzo grado
all'equazione di quinto grado**

relatore: Giorgio Ottaviani

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 3 |
| I Didattica delle equazioni di secondo e terzo grado | 5 |
| 1 Equazioni di secondo grado | 6 |
| 1.1 Descrizione del metodo geometrico | 6 |
| 1.2 Alcuni esempi | 11 |
| 1.3 Esercizi | 16 |
| 1.4 Soluzioni | 18 |
| 2 Equazioni di terzo grado | 28 |
| 2.1 Una formula risolutiva alternativa a quella di Cardano | 28 |
| 2.2 Descrizione del metodo geometrico | 33 |
| 2.3 Esercizi | 38 |
| 2.4 Soluzioni | 40 |
| II Risoluzione dell'equazione di quinto grado tramite l'icosaedro e le funzioni theta | 49 |
| 3 Preliminari | 50 |
| 3.1 Trasformazioni di Tschirnhaus | 50 |
| 3.2 Solidi platonici regolari | 52 |
| 3.2.1 Polinomi poliedrali | 53 |
| 3.2.2 Transvettanti di polinomi poliedrali | 57 |
| 3.3 Funzioni ellittiche | 58 |
| 3.3.1 Funzioni ellittiche generali | 58 |
| 3.3.2 La funzione \wp di Weierstrass | 60 |
| 3.3.3 La funzione $\zeta(z)$ | 66 |
| 3.3.4 La funzione $\sigma(z)$ | 68 |
| 3.3.5 Funzioni ellittiche di Jacobi | 70 |
| 3.3.6 La funzione $\psi_n(z)$ | 73 |
| 3.4 Funzioni θ di Jacobi | 76 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.4.1 | Relazioni delle θ fra loro e con le funzioni precedentemente considerate | 81 |
| 4 | L'algoritmo di Kiepert per risolvere l'equazione quintica generale | 84 |
| 4.1 | Passo 1: passaggio dalla quintica generale alla quintica principale | 85 |
| 4.2 | Passo 2: passaggio dalla quintica principale alla quintica di Brioschi | 87 |
| 4.3 | Passo 3: passaggio dalla quintica di Brioschi alla sestica di Jacobi | 94 |
| 4.4 | Passo 4: espressione delle soluzioni della sestica di Jacobi tramite la \wp di Weierstrass | 97 |
| 4.5 | Passo 5: espressione delle soluzioni della sestica di Jacobi tramite le funzioni theta | 99 |
| 4.6 | Passo 6: determinazione di q | 102 |
| 4.7 | Passo 7: inversione delle trasformazioni fatte | 104 |
| 4.8 | Computazione dell'algoritmo | 105 |
| 4.9 | Esempi | 107 |
| | Bibliografia | 110 |

Introduzione

In questo lavoro di tesi ci siamo occupati di equazioni algebriche e della loro risoluzione. Il problema di determinare le soluzioni di un'equazione in funzione dei coefficienti è stato affrontato fin dai tempi antichi.

Era noto già ai tempi dei Babilonesi come risolvere un'equazione quadratica. La formula per risolvere la generale equazione cubica fu invece trovata da Tartaglia e del Ferro, ma resa nota da Cardano, nel XVI secolo; poco tempo dopo Ferrari trovò un algoritmo per la risoluzione dell'equazione di quarto grado.

Sappiamo che tutte le equazioni di grado ≤ 4 possono essere risolte usando soltanto radici quadrate e cubiche. Le cose cambiano quando si passa alle equazioni di quinto grado: Abel(1802-1829) ha dimostrato che è impossibile risolvere per radicali la generale equazione di grado > 4 e la teoria di Galois(1811-1832) ha fornito una caratterizzazione delle equazioni solubili per radicali. Hermite, nel 1858, è stato il primo a studiare un algoritmo che utilizzasse funzioni ellittiche e funzioni theta per risolvere la generale equazione quintica e le sue idee sono state sviluppate, nel 1878, da Gordan e Kiepert.

Nella prima parte della tesi abbiamo lavorato sulle equazioni di secondo e terzo grado. Siamo partiti dalle equazioni quadratiche e abbiamo studiato un metodo di risoluzione geometrico, alternativo alla nota formula risolutiva. In seguito abbiamo costruito, con qualche difficoltà in più, un procedimento analogo per le equazioni cubiche.

Il nostro scopo non è *sostituire* le formule risolutive, ma presentare uno spunto didattico che permetta di avere informazioni immediate sulle soluzioni di un'equazione e soprattutto di ragionare sulle corrispondenze tra il mondo dell'algebra e il mondo della geometria. Solitamente si utilizza l'algebra per risolvere problemi geometrici (ad esempio, nella geometria analitica), mentre nei nostri procedimenti succede esattamente il contrario. Riteniamo che ciò sia istruttivo e che costituisca un valido complemento al tradizionale insegnamento delle equazioni nelle scuole superiori.

Gli argomenti di questa prima parte sono stati presentati dal professor Giorgio Ottaviani al *25° Convegno sulla didattica della matematica* (Viareggio, 11-12 settembre 2008) in una conferenza dal titolo *'La geometria delle*

equazioni di secondo e terzo grado' e la sottoscritta ha coordinato i lavori di gruppo collegati alla conferenza.

Nella seconda parte della tesi abbiamo abbandonato ogni intento didattico e ci siamo occupati della risoluzione della generale equazione di quinto grado. Abbiamo presentato un algoritmo basato sulle idee di Kiepert, cercando di fornire tutti i prerequisiti necessari a comprenderlo e mettendo in evidenza i vari passaggi da implementare a computer per renderlo operativo. Il libro *Beyond the quartic equation* di R. B. King ci è servito da guida per i vari passaggi, mentre libri classici sulla teoria delle funzioni ellittiche e sulle simmetrie dei poliedri ci hanno fornito gli strumenti per addentrarci nell'algoritmo.

Nel Capitolo 1 si descrive nei dettagli il procedimento geometrico per risolvere le equazioni di secondo grado, discutendone i vari aspetti dal punto di vista didattico. Poi si propongono esercizi (e le rispettive soluzioni) legati al metodo.

All'inizio del Capitolo 2 si cerca di ripetere nello spazio tridimensionale i ragionamenti fatti nel piano per le equazioni di grado 2; questo porterà ad una formula alternativa a quella di Cardano per trovare tutte le soluzioni di una cubica ma non a un procedimento geometrico. Per ottenere un metodo geometrico simile a quello visto nel capitolo precedente dovremo considerare equazioni cubiche in cui manchi il termine di grado 2. Anche in questo capitolo sono presenti esercizi inerenti al metodo.

Nel Capitolo 3 si passa alle equazioni di quinto grado; in particolare in ogni sezione del capitolo è affrontato un argomento che risulterà determinante per scrivere e comprendere l'algoritmo di Kiepert. Si inizia parlando delle trasformazioni di Tschirnhaus, poi si studiano i solidi platonici e i polinomi poliedrali a essi collegati; si prosegue con un'ampia trattazione delle funzioni ellittiche, in particolare della funzione \wp di Weierstrass, e delle funzioni theta.

Nel Capitolo 4 si utilizza quanto visto nel capitolo precedente per descrivere dettagliatamente i 7 passaggi dell'algoritmo di Kiepert. In fondo al capitolo sono riassunti i passaggi da svolgere per risolvere una quintica tramite questo algoritmo e sono riportati alcuni esempi per rendere più chiaro il procedimento.

Parte I

Didattica delle equazioni di secondo e terzo grado

Capitolo 1

Equazioni di secondo grado

1.1 Descrizione del metodo geometrico

Consideriamo una generica equazione di secondo grado, in cui abbiamo già diviso per il coefficiente del termine di grado maggiore:

$$x^2 + bx + c = 0. \quad (1.1)$$

Aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4}$ otteniamo: $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$, e tale passaggio va interpretato geometricamente come una traslazione dell'incognita. Si vede subito che vale il:

Teorema 1 *Si possono verificare tre casi:*

1. se $\frac{b^2}{4} - c > 0$ l'equazione ha due radici reali distinte
2. se $\frac{b^2}{4} - c = 0$ l'equazione ha una radice reale (doppia)
3. se $\frac{b^2}{4} - c < 0$ l'equazione non ha radici reali.

Vogliamo introdurre un metodo geometrico per trovare le soluzioni reali dell'equazione (1.1).

A tal proposito facciamo corrispondere a ogni equazione del tipo (1.1) il punto di coordinate (b, c) . Abbiamo quindi il piano (b, c) , nel quale consideriamo una parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$, con fuoco $F = (0, 1)$ e direttrice $c = -1$. Tale parabola è tutt'altra cosa rispetto a quella ottenuta come grafico di $f(x) = x^2 + bx + c$: quest'ultima varia da equazione a equazione, mentre la nostra è la stessa per tutte le equazioni del tipo (1.1).

Per i punti sulla parabola vale $(x + \frac{b}{2})^2 = 0$, quindi si vede subito che la soluzione reale (doppia) è $x = -\frac{b}{2}$. Dato un punto qualunque (b, c) , questo metodo ci permetterà, tracciando le tangenti alla parabola da quel punto, di trovare geometricamente le soluzioni dell'equazione corrispondente.

Se (b, c) è sopra la parabola (cioè $\frac{b^2}{4} - c < 0$), da esso non si possono tracciare

tangenti e infatti l'equazione non ha soluzioni reali (caso 1 del Teorema 1). Se invece il punto sta sotto la parabola (cioè $\frac{b^2}{4} - c > 0$), con riga e compasso riusciamo a costruire due tangenti: centriamo il compasso in (b, c) e portiamo la punta nel fuoco F ; tracciamo tale circonferenza, che intersecherà la direttrice c in due punti di ascissa a_1 e a_2 . I punti $(a_1, a_1^2/4)$ e $(a_2, a_2^2/4)$ sono i punti in cui le tangenti per (b, c) toccano la parabola. Infatti, un punto P della parabola è, per definizione, equidistante dal fuoco e dalla direttrice, quindi la tangente per quel punto è l'asse del segmento che congiunge F con il piede della perpendicolare condotta da P sulla direttrice (Figura 1.1).

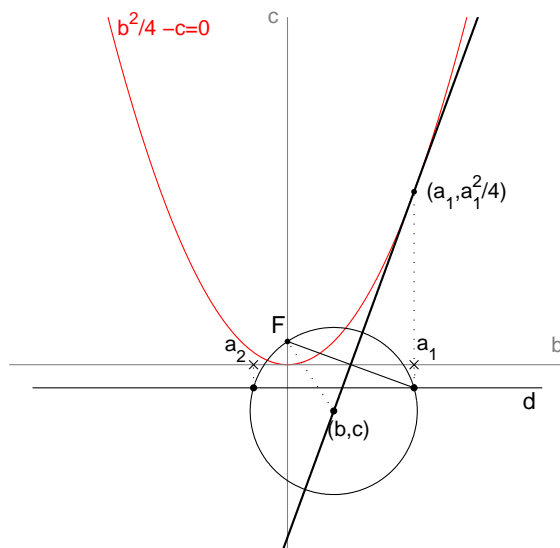


Figura 1.1: Costruzione di una tangente alla parabola.

Teorema 2 *Se x_1 e x_2 sono le soluzioni reali dell'equazione (1.1), allora le tangenti tracciate da (b, c) toccano la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$ nei punti di ascissa $-2x_1$ e $-2x_2$.*

Dimostrazione:

Essendo x_1, x_2 le soluzioni, possiamo scrivere: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$, da cui: $-(x_1 + x_2) = b$, $x_1 x_2 = c$. Considerando x_1 fissata e $x_2 = s$ variabile, otteniamo una retta in forma parametrica, i cui punti corrispondono alle equazioni che hanno una soluzione uguale a x_1 :

$$b = -(x_1 + s) \quad , \quad c = x_1 s.$$

La forma cartesiana di tale retta è $c = -x_1 b - x_1^2$, cioè la (1.1), in cui si sostituisce $x = x_1$ e lo si considera come parametro.

Poiché i punti della parabola corrispondono a equazioni che hanno una radice doppia, e si ha una radice doppia se e solo se $s = x_1$, la retta incontrerà la parabola solo nel punto $(-2x_1, x_1^2)$. Questa retta è proprio la retta tangente in quel punto (Figura 1.2). Ci sarebbe anche la retta verticale $b = -2x_1$, ma in realtà essa incontra la parabola anche nel punto all'infinito, e comunque, al variare di s , b non è costante.

Analogamente, considerando x_2 fissata e x_1 variabile, si ottiene l'altra tangente alla parabola, nel punto $(-2x_2, x_2^2)$. ■

Dunque, una volta fatta la costruzione, basterà considerare le ascisse dei

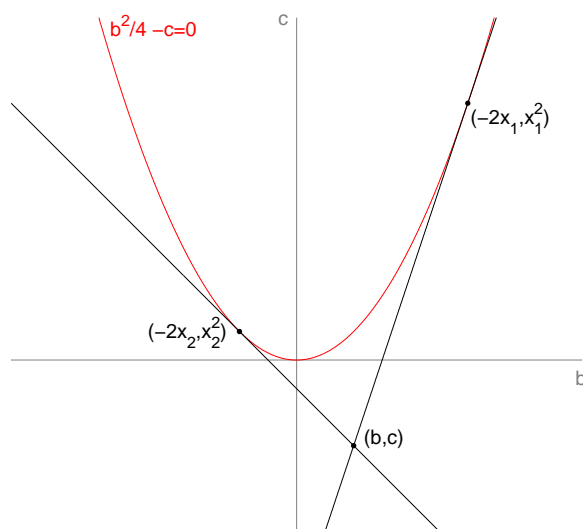


Figura 1.2: Metodo di risoluzione grafico di $x^2 + bx + c = 0$.

due punti di tangenza, cambiarle di segno e dividerle per due; si avranno così le due soluzioni.

Osserviamo anche che si può vedere la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$ come l'inviluppo della famiglia a un parametro di rette nel piano (b, c) , data da $c = -xb - x^2$ al variare di x . Infatti, per definizione l'inviluppo è la curva tangente in ogni punto a una delle rette della famiglia, e ripercorrendo quanto dimostrato sopra si vede che questa è proprio la proprietà che ha la nostra parabola (Figura 1.3).

Vediamo ora quali sono pregi e difetti del metodo visto, per quanto riguarda l'approccio didattico.

Rispetto alla nota formula algebrica risolutiva, questo metodo permette

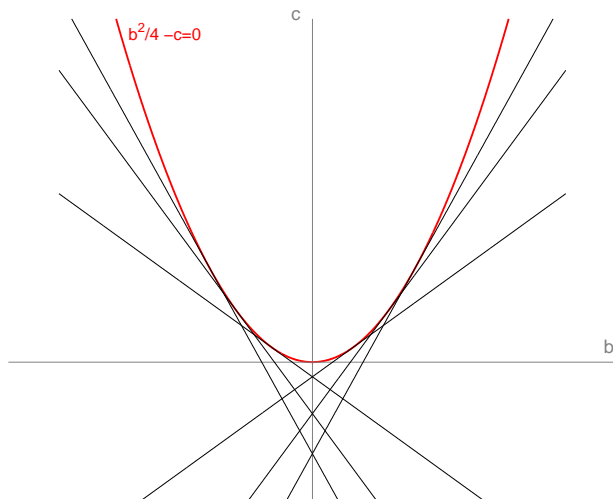


Figura 1.3: La parabola come involuppo delle rette $c = -xb - x^2$.

di dire immediatamente quando un'equazione ha zero, una o due soluzioni; basta individuare il punto (b, c) nel piano. Inoltre, ancora prima di costruire le tangenti con riga e compasso, riusciamo a capire il segno delle soluzioni che troveremo e anche ad avere un'idea approssimativa del loro valore.

Nell'illustrare il metodo, siamo partiti dalla forma più generale possibile di equazione di secondo grado (il passaggio di divisione per il coefficiente a non dovrebbe creare problemi). Questo è positivo, perché fa capire che il procedimento seguito è valido per una qualsiasi equazione.

Partire da questa forma generale ha però anche un difetto. Una volta trovate le ascisse dei punti di tangenza, non si hanno automaticamente le soluzioni: bisogna dividere per 2 e cambiare segno. Ciò rende più artificioso il procedimento e costringe a essere prudenti nel dedurre dal disegno informazioni sulle radici. Ad esempio, se un punto di tangenza ha ascissa positiva, bisogna ricordare che la soluzione corrispondente è negativa.

Un miglioramento da questo punto di vista si ha se, anziché partire da $x^2 + bx + c = 0$, si parte dalla forma:

$$x^2 - 2bx + c = 0. \tag{1.2}$$

Quest'ultima si può scrivere come $(x - b)^2 = b^2 - c$, quindi la parabola da disegnare sarà $b^2 - c = 0$ e avrà fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e direttrice $c = -\frac{1}{4}$. Per i punti sulla parabola si avrà la soluzione doppia $x = b$, per i punti sotto la parabola (cioè $b^2 - c > 0$) si avranno due soluzioni reali distinte e per

quelli sopra (cioè $b^2 - c < 0$) non si avranno soluzioni reali. Qui, al posto del Teorema 2 visto, abbiamo:

Teorema 3 *Se x_1 e x_2 sono le soluzioni reali dell'equazione (1.2), allora le tangenti tracciate da (b, c) toccano la parabola $b^2 - c = 0$ nei punti di ascissa x_1 e x_2 .*

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 2, solo che qui $-(x_1 + x_2) = -2b$, $x_1 x_2 = c$. La retta i cui punti corrispondono alle equazioni che hanno una soluzione fissata uguale a x_1 ha forma parametrica:

$$b = \frac{x_1 + s}{2}, \quad c = x_1 s.$$

La retta incontra la parabola solo quando $s = x_1$, cioè è la tangente alla parabola nel punto (x_1, x_1^2) (Figura 1.4).

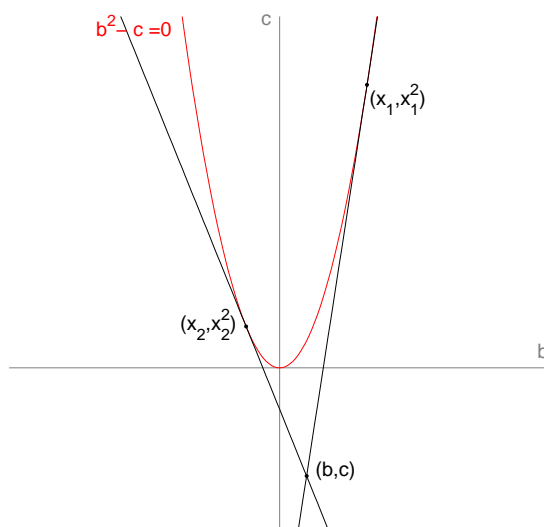


Figura 1.4: Risoluzione grafica dell'equazione $x^2 - 2bx + c = 0$.

In questo caso, una volta fatta la costruzione, basta prendere le ascisse dei due punti di tangenza, che sono esattamente le soluzioni dell'equazione.

Anche questa modifica ha un piccolo difetto: partire da $x^2 - 2bx + c = 0$ può sembrare artificioso ed è meno intuitivo riconoscere in questa forma un'equazione che ha il coefficiente della x dispari, oppure positivo.

Non c'è dunque un metodo migliore in assoluto, ma didatticamente può

essere preferibile usare quello appena descritto, perché ci permette di dedurre immediatamente dal disegno le informazioni sulle soluzioni.

Un'altra alternativa è quella di partire da $x^2 + 2bx + c = 0$; questa si può riscrivere come $(x + b)^2 = b^2 - c$, quindi la parabola da disegnare è la stessa del caso precedente. È una soluzione intermedia, nella quale si ha un piccolo artificio iniziale dato dal 2 a moltiplicare b , e uno finale dato dal dover cambiare segno per avere le soluzioni.

1.2 Alcuni esempi

Esempio 1

Vogliamo risolvere col metodo geometrico l'equazione:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 ,$$

prendendo come forma di riferimento: $x^2 + bx + c = 0$.

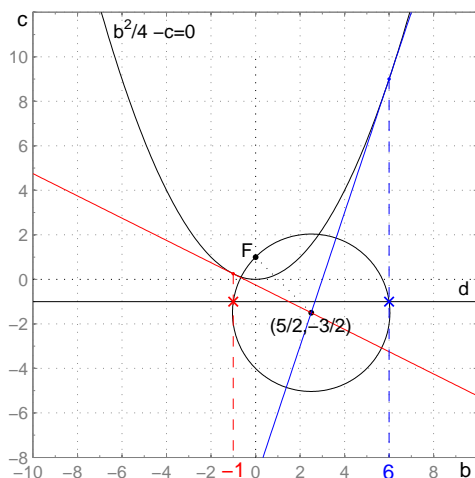


Figura 1.5: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ con la prima variante del metodo.

Dividiamo innanzitutto per 2: $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$; quindi $b = \frac{5}{2}$ e $c = -\frac{3}{2}$.

Disegniamo sul foglio la parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$, il fuoco $F = (0, 1)$, la direttrice $d : c = -1$ e il punto (b, c) che in questo esempio è $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Dobbiamo tracciare le tangenti alla parabola passanti per $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$, e per far questo usiamo

la costruzione spiegata precedentemente (vedi Figura 1.5).

Le ascisse dei due punti di tangenza sono $-1, 6$ e quindi le soluzioni sono $x_1 = -\frac{6}{2} = -3$ e $x_2 = -(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2}$.

È molto importante osservare che l'esercizio si risolve anche senza disegnare la parabola: bastano il fuoco F , la direttrice d e il punto $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Tracciamo, come prima, la circonferenza con centro in quest'ultimo punto e passante per F ; i due punti $(-1, -1)$ e $(6, -1)$ in cui essa interseca la direttrice d hanno la stessa ascissa dei corrispondenti punti di tangenza, quindi essi bastano per trovare le soluzioni dell'equazione (vedi Figura 1.6).

Per capire l'importanza anche pratica di questa osservazione, prendiamo

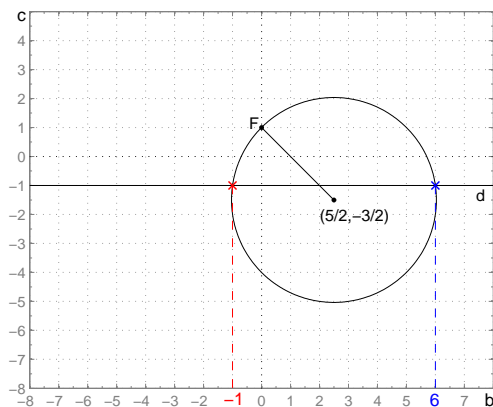
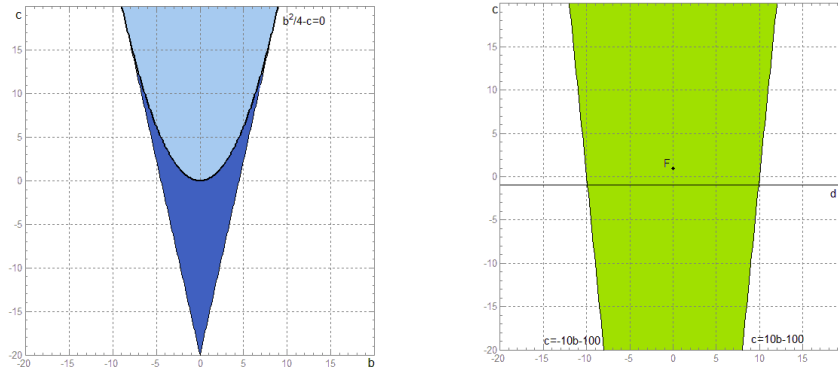


Figura 1.6: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ senza disegnare la parabola.

due figure rappresentanti la stessa identica porzione di piano (b, c) , ad esempio $-20 \leq b, c \leq 20$.

Sulla prima figura disegniamo la parabola e coloriamo in blu la zona costituita dai punti per i quali, tracciando le due tangenti alla parabola, i punti di tangenza rimangono entro la figura. Tale zona è quella effettivamente utilizzabile se si vuole lavorare su quella porzione di piano. Sulla seconda figura disegniamo solo fuoco e direttrice e coloriamo in verde la zona costituita dai punti per i quali, tracciando la circonferenza di centro (b, c) e passante per F , i punti di intersezione con la direttrice restano entrambi dentro la figura. Tale zona è quella effettivamente utilizzabile se facciamo questa costruzione. Confrontando le due figure, si vede che la zona verde è più estesa di quella blu; ciò vuol dire che, fissato il foglio e la scala da usare, se facciamo la costruzione senza parabola possiamo risolvere più esercizi su quel foglio.



Risolviamo la stessa equazione usando la variante del metodo in cui la forma di riferimento dell'equazione è: $x^2 - 2bx + c = 0$.

In questo caso $-2b = \frac{5}{2}$, quindi $(b, c) = (-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2})$; oltre a tale punto, per quanto osservato, è sufficiente disegnare il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d : c = -\frac{1}{4}$. Poi si procede come nel caso precedente, disegnando la circonferenza di centro $(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2})$ e passante per F e andando a vedere nel grafico il valore delle ascisse dei punti di intersezione tra la circonferenza e d . Le due ascisse sono -3 e $\frac{1}{2}$ e corrispondono esattamente alle due soluzioni dell'equazione di partenza (vedi Figura 1.7).

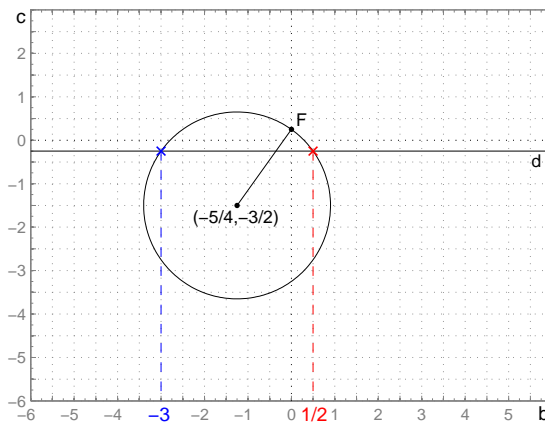
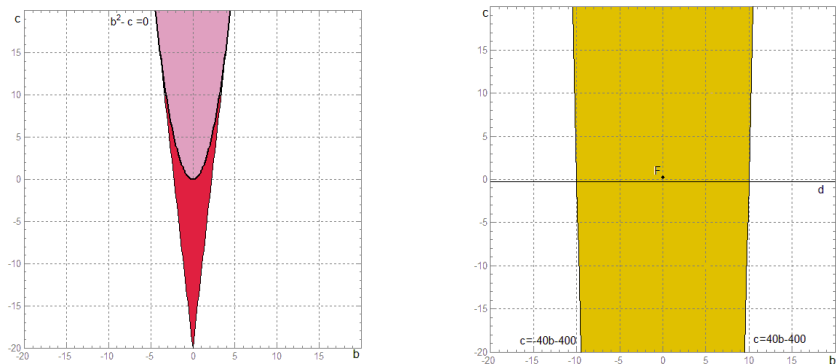


Figura 1.7: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ con la seconda variante del metodo.

In questo caso, il guadagno che si ha nel non disegnare la parabola è addirittura maggiore rispetto alla variante precedente. Ciò risulta chiaro con-

frontando le due seguenti figure:



Per completezza, vediamo anche il disegno che si ottiene risolvendo la stessa equazione riferendosi alla forma: $x^2 + 2bx + c = 0$ (Figura 1.8):

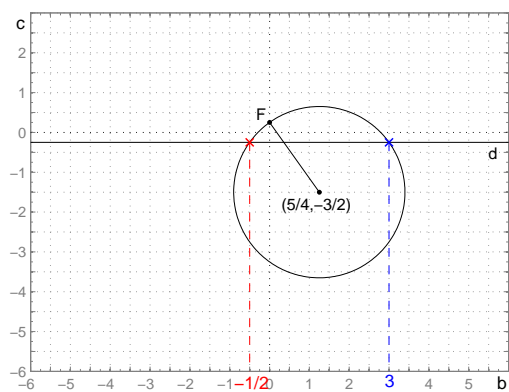


Figura 1.8: Risoluzione di $2x^2 + 5x - 3 = 0$ con la terza variante del metodo.

Osserviamo che tra questa e la figura precedente c'è una simmetria rispetto all'asse c . Qui, una volta trovati i valori 3 e $-\frac{1}{2}$ delle ascisse, bisogna cambiar loro di segno per avere le soluzioni dell'equazione.

Esempio 2

Prendiamo l'equazione: $x^2 + x + 3 = 0$ e proviamo ad applicarvi il procedimento seguito nell'esempio 1, riferendosi alla forma $x^2 + bx + c = 0$. C'è da disegnare, oltre a $F = (0, 1)$ e $d : c = -1$, il punto $(b, c) = (1, 3)$. Otteniamo la Figura 1.9.

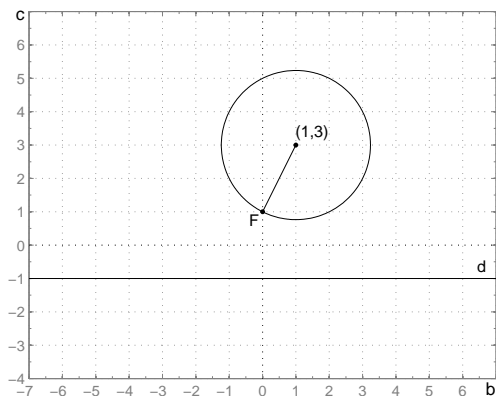


Figura 1.9: Metodo geometrico applicato a $x^2 + x + 3 = 0$.

Il metodo non funziona perché la circonferenza non interseca la direttrice; ciò vuol dire che l'equazione non ha soluzioni reali. Dunque ci accorgiamo che un'equazione non ha soluzioni reali anche senza disegnare la parabola.

Esempio 3

Prendiamo l'equazione: $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ e applichiamo il procedimento dell'esempio 1, riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$. Oltre a $F = (0, \frac{1}{4})$ e $d : c = -\frac{1}{4}$, dobbiamo disegnare il punto $(b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Otteniamo la Figura 1.10.

La circonferenza è tangente alla direttrice nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$, quindi l'equazione ha una soluzione doppia uguale a $\frac{1}{2}$.

Dunque, disegnando nel piano (b, c) due punti, una retta e una circonferenza si riesce a dire quante e quali soluzioni reali abbia una qualsiasi equazione di secondo grado (o almeno a dare una buona approssimazione del loro valore). La costruzione risulta particolarmente semplice, dato che non è neanche necessario disegnare la parabola.

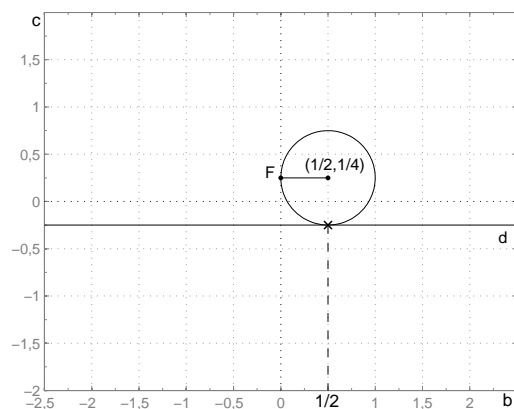


Figura 1.10: Metodo geometrico applicato a $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.

Quanto visto negli esempi precedenti può essere sostituito da passaggi puramente algebrici, coi quali però viene meno proprio quell'approccio visivo che rende interessante il metodo grafico.

Data una generica equazione $x^2 + bx + c = 0$, prendiamo la circonferenza di centro (b, c) e passante per $F = (0, 1)$, che ha equazione:

$$(x - b)^2 + (y - c)^2 = (0 - b)^2 + (1 - c)^2.$$

Intersecandola con la direttrice $y = -1$ otteniamo:

$$(x - b)^2 + (-1 - c)^2 = b^2 + (1 - c)^2,$$

cioè: $(x - b)^2 = b^2 - 4c$ e quindi $x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 4c}$. Quest'ultime sono proprio le soluzioni dell'equazione di partenza, pur di cambiare segno e dividere per due.

1.3 Esercizi

In questa sezione vediamo alcuni esercizi pensati per comprendere e applicare il metodo appena visto (quando non è specificato, usare la variante che si preferisce. Ovviamente tutti gli esercizi sono da farsi senza usare la nota formula risolutiva per le equazioni di secondo grado.

- 1) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 + bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $x^2 + x - 6 = 0$, $2x^2 - 7x + 3 = 0$, $x^2 - x + 6 = 0$.
- 2) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 + 2bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $9x^2 - 25 = 0$, $4x^2 - 12x + 10 = 0$, $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
- 3) Applicare il metodo geometrico nella variante in cui la forma di riferimento è $x^2 - 2bx + c = 0$, per risolvere, se possibile, le equazioni: $3x^2 - 22x + 24 = 0$, $x^2 - 3x + 7 = 0$, $2x^2 + 11x + 5 = 0$.
- 4) A cosa corrispondono nel piano (b, c) le equazioni per cui:
 - a) il prodotto delle radici è uguale a 3?
 - b) la somma delle radici è uguale a 5?
 - c) il prodotto delle radici è uguale alla loro somma?
 - d) una soluzione è uguale a 4?
 - e) una soluzione è il doppio dell'altra?

Per ogni caso, disegnare il luogo dei punti corrispondente.

Dire inoltre cosa cambia se ci limitiamo a considerare radici reali.

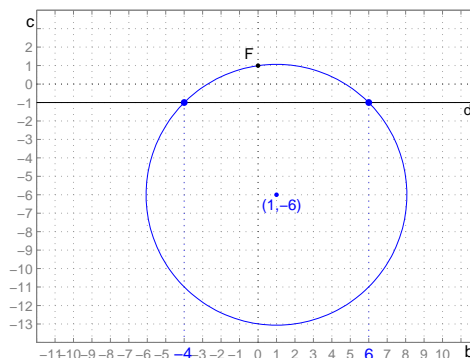
- 5) L'equazione $x^2 - 2bx + (b + 1) = 0$ ha soluzioni reali $\forall b$? Giustificare graficamente la risposta.
- 6) L'equazione $x^2 + (c + 2)x + c = 0$ ha soluzioni reali $\forall c$? Giustificare graficamente la risposta.
- 7) Individuare le zone del piano (b, c) che corrispondono a equazioni con soluzioni reali: concordi positive, concordi negative, discordi (da suddividere ulteriormente a seconda di quale soluzione abbia modulo maggiore).
Farlo sia nel caso $x^2 + bx + c = 0$ che nel caso $x^2 - 2bx + c = 0$.
- 8) Siano $x_1 > x_2$ le soluzioni reali di $x^2 + bx + c = 0$; dire quali sono le soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$. Esistono sempre (reali)?
- 9) Dire per quali valori di b l'equazione $4x^2 - 8bx + 5 - b = 0$ ha due soluzioni reali positive. Giustificare graficamente la risposta.
- 10) Dire per quali valori di c l'equazione $4x^2 - 3(c + 4)x + 4c = 0$ ha due soluzioni reali discordi, con quella positiva di modulo maggiore. Giustificare graficamente la risposta.

1.4 Soluzioni

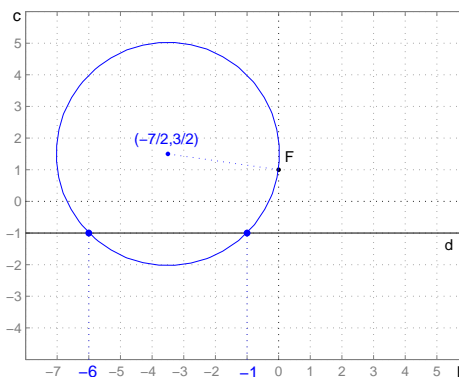
Esercizio 1

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 + bx + c = 0$, dobbiamo disegnare innanzitutto il fuoco $F = (0, 1)$ e la direttrice $d : c = -1$ della parabola $\frac{b^2}{4} - c = 0$.

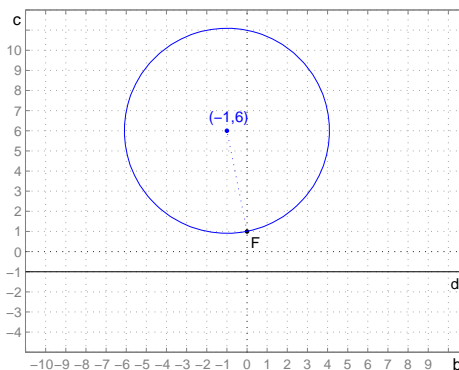
a) Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (1, -6)$ (il punto corrispondente a $x^2 + x - 6 = 0$) passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse 6 e -4. Le soluzioni sono quindi $x_1 = -6/2 = -3$ e $x_2 = -(-4)/2 = 2$.



b) Dividiamo tutto per 2, ottenendo $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (-7/2, 3/2)$ passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse -1 e -6. Le soluzioni sono quindi $x_1 = -(-1)/2 = 1/2$ e $x_2 = -(-6)/2 = 3$.



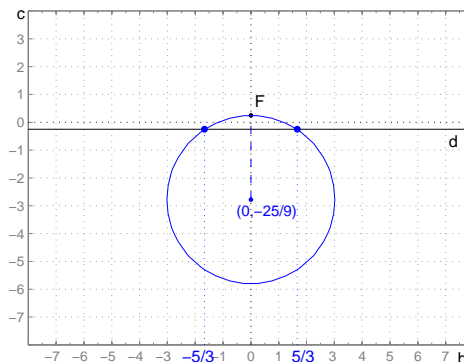
c) Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (-1, 6)$ (il punto corrispondente a $x^2 - x + 6 = 0$) passante per F e vediamo che non interseca d . Ciò vuol dire che l'equazione non ha soluzioni reali.



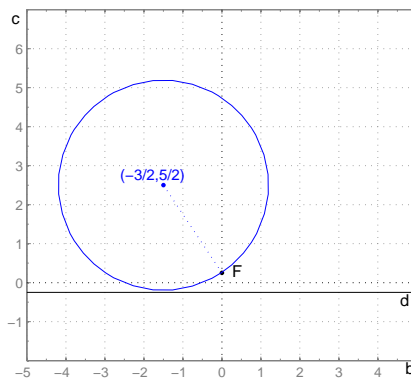
Esercizio 2

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 + 2bx + c = 0$, dobbiamo disegnare innanzitutto il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d : c = -\frac{1}{4}$ della parabola $b^2 - c = 0$.

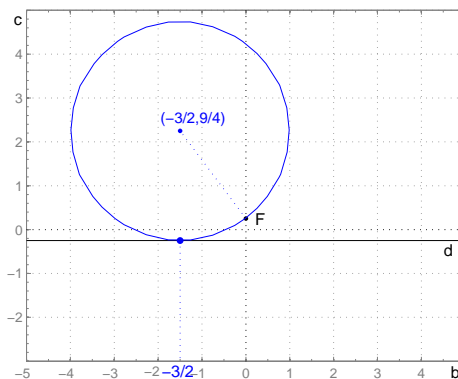
a) Dividiamo innanzitutto per 9: $x^2 - \frac{25}{9} = 0$. Manca il termine di primo grado, perciò $b = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (0, -\frac{25}{9})$ passante per F e vediamo che interseca d nei punti di ascisse $-\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{3}$. Per avere le soluzioni si deve cambiare segno; in questo particolare caso si ottengono gli stessi valori: $x_1 = \frac{5}{3}$ e $x_2 = -\frac{5}{3}$.



b) Dividiamo tutto per 4, ottenendo $x^2 - 3x + \frac{5}{2} = 0$. Abbiamo $2b = -3$, quindi tracciamo la circonferenza di centro $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ passante per F e vediamo che non interseca d . L'equazione non ha soluzioni reali.



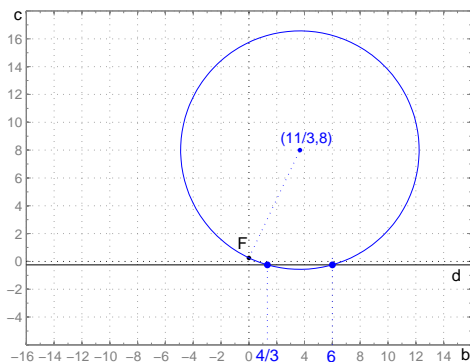
c) Dividiamo tutto per 4, ottenendo $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$. Tracciamo la circonferenza di centro $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ passante per F e vediamo che risulta tangente a d nel punto di ascissa $-\frac{3}{2}$. Ciò significa che l'equazione ha una soluzione reale doppia $x_1 = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$.



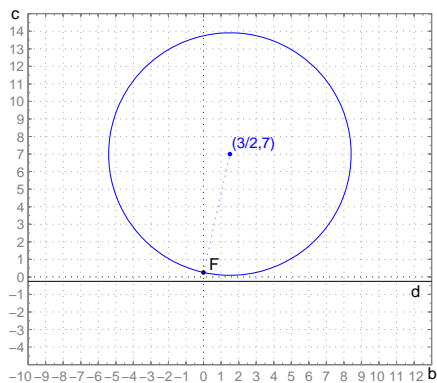
Esercizio 3

Per risolvere ognuna di queste equazioni, visto che ci riferiamo alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dobbiamo disegnare prima di tutto il fuoco $F = (0, \frac{1}{4})$ e la direttrice $d: c = -\frac{1}{4}$, perché la parabola associata a questo tipo di equazioni è la stessa dell'esercizio 2.

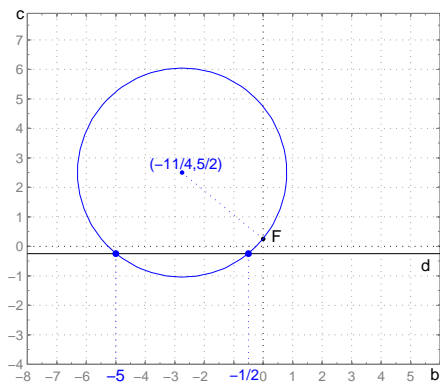
a) Dividiamo tutto per 3 ottenendo $x^2 - \frac{22}{3}x + 8 = 0$. Dato che $-2b = -\frac{22}{3}$, si ha $b = \frac{11}{3}$. Tracciamo la circonferenza di centro $(b, c) = (\frac{11}{3}, 8)$ e passante per F , la quale interseca d nei punti di ascisse $\frac{4}{3}$ e 6 . Questi due valori corrispondono già alle soluzioni x_1, x_2 dell'equazione.



b) Siccome deve essere $-2b = -3$, si ha $b = \frac{3}{2}$; la circonferenza da tracciare è quella di centro $(\frac{3}{2}, 7)$ (il punto corrispondente a $x^2 - 3x + 7 = 0$) e passante per F . Essa non interseca la retta d , quindi l'equazione non ha soluzioni reali.



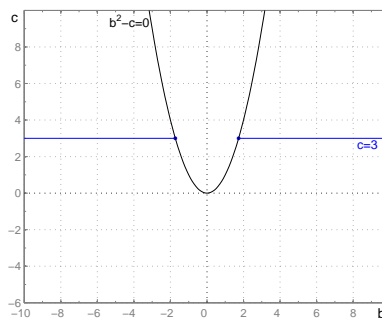
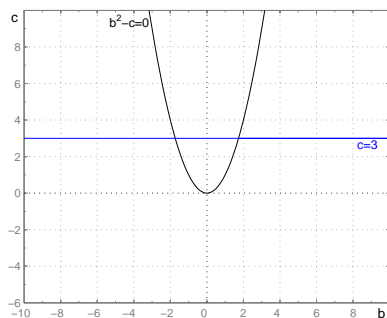
c) Dividiamo tutto per 2 ottenendo $x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{5}{2} = 0$. Poiché deve essere $-2b = \frac{11}{2}$, si ha $(b, c) = (-\frac{11}{4}, \frac{5}{2})$. Tracciamo la circonferenza che ha tale punto come centro e che passa per F : essa interseca d nei punti di ascisse -5 e $-1/2$ e tali valori sono proprio le soluzioni x_1, x_2 .



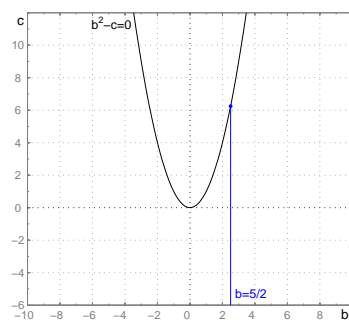
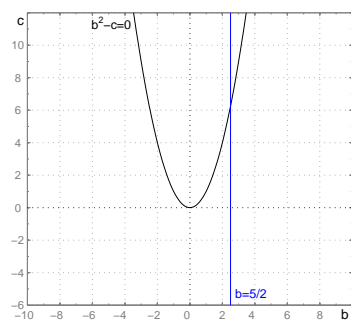
Esercizio 4

Questo esercizio si risolve tenendo conto che, se x_1, x_2 sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2bx + c = 0$, allora vale: $b = \frac{x_1+x_2}{2}$, $c = x_1x_2$.

a) Vale $x_1x_2 = c$, quindi il luogo dei punti corrispondenti a equazioni per cui il prodotto delle radici è 3 è la retta orizzontale $c = 3$ (figura a sinistra). Se però vogliamo considerare solo equazioni con soluzioni reali il cui prodotto sia 3, allora dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola, visto che quella zona corrisponde a equazioni che non hanno soluzioni reali. Il luogo di punti che otteniamo è dato dalle due semirette nella figura di destra. I due punti della parabola da cui partono le semirette sono compresi e corrispondono alle equazioni con radice reale doppia uguale a $\sqrt{3}$ e con radice doppia uguale a $-\sqrt{3}$.



b) Vale $x_1 + x_2 = 2b$, quindi il luogo dei punti corrispondenti a equazioni per cui la somma delle radici è 5 è la retta verticale $b = \frac{5}{2}$ (figura di sinistra). Se vogliamo considerare solo equazioni con soluzioni reali la cui somma sia 5, allora, analogamente a quanto visto nel punto a), dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola. Il luogo dei punti risulta essere una semiretta (figura di destra). Il punto sulla parabola da cui parte la semiretta è compreso e corrisponde all'equazione che ha radice reale doppia $x = \frac{5}{2}$.

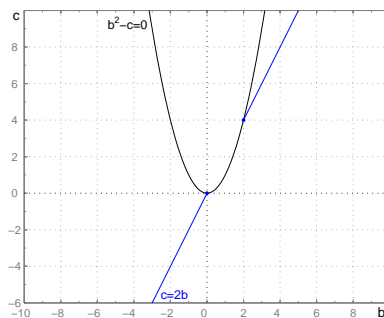
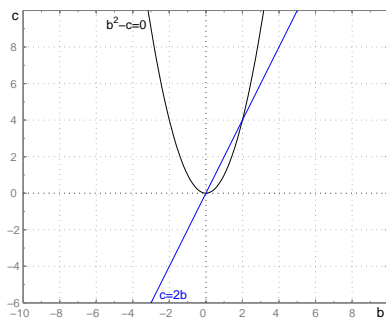


c) Se la somma e il prodotto delle radici sono uguali, abbiamo

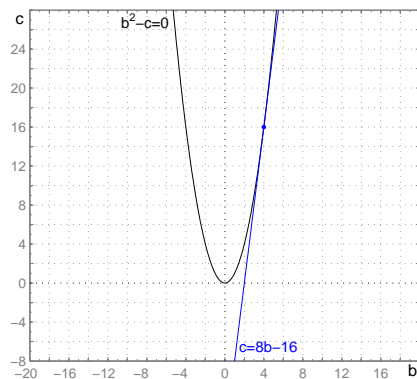
$$2b = x_1 + x_2 = x_1 x_2 = c,$$

quindi il luogo dei punti cercato è la retta $c = 2b$ (figura di sinistra).

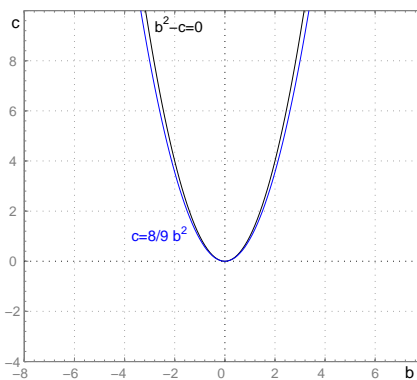
Se consideriamo solo equazioni con soluzioni reali la cui somma e il cui prodotto siano uguali, allora, analogamente a quanto visto nel punto a), dobbiamo togliere la parte di retta che sta sopra la parabola. Il luogo di punti che otteniamo è formato dalle due semirette disegnate nella figura di destra. I due punti sulla parabola da cui partono le semirette sono compresi: le equazioni corrispondenti sono quelle con soluzione reale doppia $x = 0$ oppure $x = 2$.



d) Se una soluzione, ad esempio x_1 , è uguale a 4, le due equazioni ricordate all'inizio dell'esercizio diventano $2b = 4 + x_2$, $c = 4x_2$. Eliminando il parametro x_2 otteniamo $c = 8b - 16$, che è una retta, tangente alla parabola. Osserviamo che il punto di tangenza corrisponde all'equazione che ha radice doppia uguale a 4.



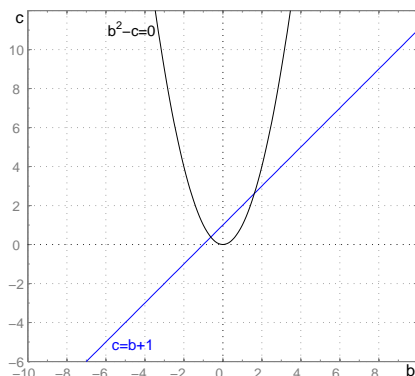
e) Se una soluzione è il doppio dell'altra, ad esempio $x_1 = 2x_2$, le due equazioni ricordate all'inizio dell'esercizio diventano $2b = 3x_2$, $c = 2x_2^2$. Eliminando il parametro x_2 otteniamo $c = \frac{8}{9}b^2$, che è una parabola che sta sempre sotto la parabola $b^2 - c = 0$ ed è tangente a essa nel punto $(0, 0)$. Proprio perché il luogo di punti trovato sta tutto sotto la parabola $b^2 - c = 0$, le soluzioni delle equazioni corrispondenti sono sempre reali.



Esercizio 5

Riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dall'equazione $x^2 - 2bx + (b+1) = 0$ si ricava $c = b + 1$, quindi nel piano (b, c) questa famiglia di equazioni corrisponde alla retta $c = b + 1$. Dalla figura si vede che una parte di tale retta sta sopra la parabola $b^2 - c = 0$, ciò vuol dire che ci sono alcuni valori di b

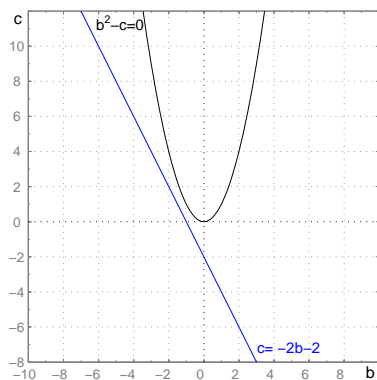
per cui l'equazione $x^2 - 2bx + (b + 1) = 0$ non ha soluzioni reali.



Esercizio 6

Riferendosi alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$, dall'equazione $x^2 + (c + 2)x + c = 0$ si ricava $b = -\frac{c+2}{2}$, quindi nel piano (b, c) questa famiglia di equazioni corrisponde alla retta $c = -2b - 2$. Dalla figura si vede che tale retta sta tutta sotto la parabola $b^2 - c = 0$, ciò significa che per qualsiasi valore di c l'equazione $x^2 + (c + 2)x + c = 0$ ha entrambe le soluzioni reali.

Osserviamo che la retta non è tangente alla parabola, quindi per queste equazioni non può accadere di avere una soluzione reale doppia.



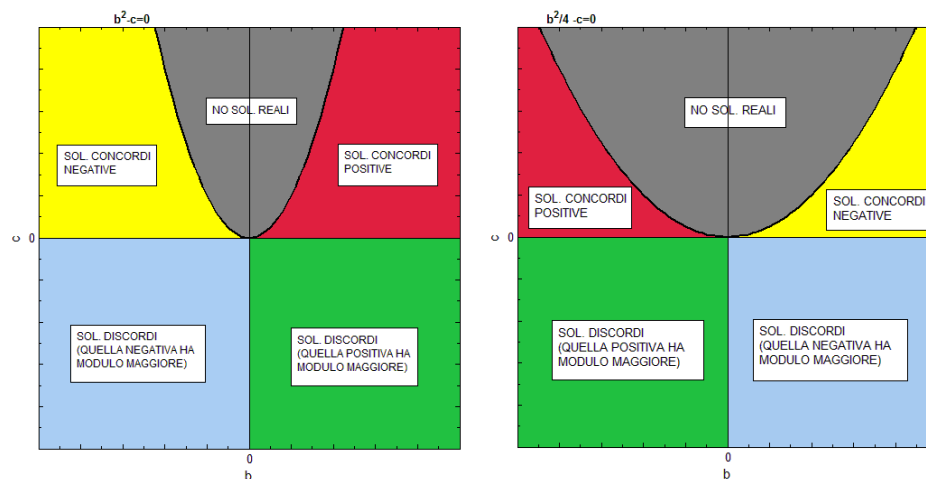
Esercizio 7

Vediamo il caso $x^2 - 2bx + c = 0$ (figura di sinistra).

Per i punti della zona rossa, tracciando le tangenti alla parabola $b^2 - c = 0$, si trovano due punti di tangenza con ascisse positive, quindi le due soluzioni sono concordi positive. Per i punti della zona gialla i punti di tangenza hanno entrambi ascissa negativa, quindi le due soluzioni sono concordi negative. Le equazioni corrispondenti ai punti del terzo e quarto quadrante hanno invece soluzioni discordi. In particolare, nel terzo quadrante la soluzione negativa, corrispondente all'ascissa negativa, è maggiore in modulo della soluzione positiva, corrispondente all'ascissa positiva (zona celeste); nel quarto quadrante vale esattamente il viceversa (zona verde); per $b = 0$ le due soluzioni hanno stesso modulo, cioè sono una l'opposto dell'altra. L'asse delle ascisse può essere considerato una zona a parte, visto che una delle due soluzioni reali è uguale a zero: per $c > 0$ l'altra soluzione è positiva, mentre per $c < 0$ l'altra è negativa.

Vediamo ora il caso $x^2 + bx + c = 0$.

I ragionamenti da fare sono analoghi a quelli fatti nel caso precedente, ma qui bisogna tener conto che le soluzioni cambiano segno rispetto alle ascisse dei punti di tangenza. La suddivisione che ne risulta è quella nella figura di destra.

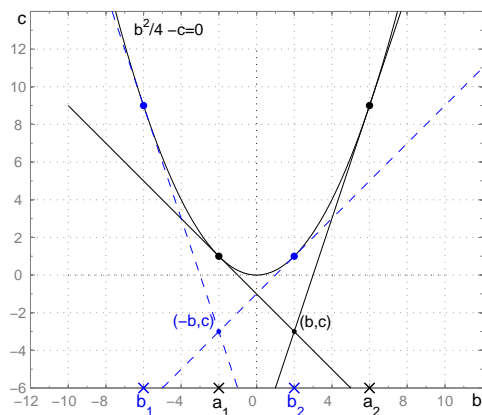


Esercizio 8

Prendiamo nel piano (b, c) un punto generico, ma che stia al di sotto della parabola, visto che per ipotesi l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni

reali. A partire da (b, c) , facendo la costruzione in nero (vedi figura), si ottengono le due ascisse $a_2 > a_1$, da cui si trovano le soluzioni $x_1 > x_2$, dividendo per due e cambiando segno.

Ora chiamiamo $y_1 > y_2$ le due soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$. A partire dal punto $(-b, c)$ facciamo la costruzione in blu (vedi figura): essa risulta essere simmetrica a quella precedente rispetto all'asse delle ordinate. Dunque, le ascisse $b_2 > b_1$ sono tali che $b_1 = -a_2$ e $b_2 = -a_1$.

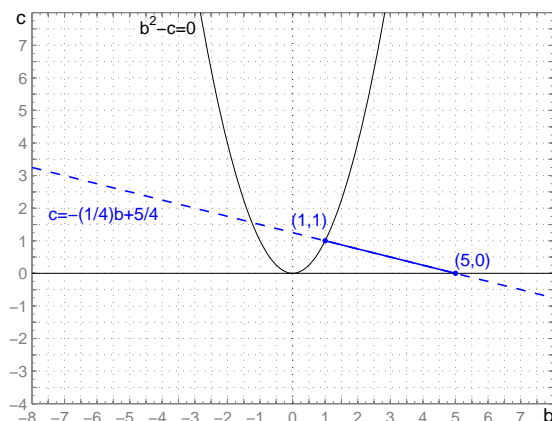


Segue che le soluzioni di $x^2 - bx + c = 0$ sono $y_1 = -x_2$ e $y_2 = -x_1$, che ovviamente sono sempre reali.

Esercizio 9

Per risolvere questo esercizio facciamo riferimento alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$. Prima di tutto dividiamo per 4, ottenendo: $x^2 - 2bx + \frac{5-b}{4} = 0$; abbiamo allora la relazione: $c = \frac{5-b}{4}$. Dunque questa famiglia di equazioni, nel piano (b, c) , è rappresentata dalla retta $c = \frac{5-b}{4}$.

Per quanto visto nell'esercizio 7, solo la parte di retta che giace nel primo quadrante, e sotto alla parabola, corrisponde a equazioni che hanno soluzioni reali entrambe positive. Disegnando la retta nel piano e individuando i suoi punti d'intersezione con la parabola e con l'asse b , si vede che la risposta all'esercizio è: $b \in (1, 5)$.

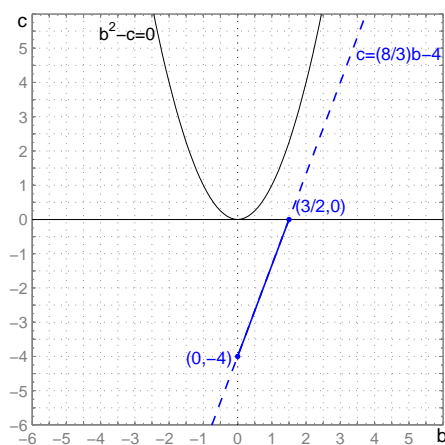


Esercizio 10

Anche per risolvere questo esercizio facciamo riferimento alla forma $x^2 - 2bx + c = 0$.

Per prima cosa dividiamo per 4, ottenendo $x^2 - \frac{3}{4}(c + 4)x + c = 0$, che confrontata con la forma di riferimento ci dà la relazione $2b = \frac{3}{4}(c + 4)$. Dunque questa famiglia di equazioni è rappresentata, nel piano (b, c) , dalla retta $c = \frac{8}{3}b - 4$.

Per quanto visto nell'esercizio 7, solo la parte di retta che giace nel quarto quadrante corrisponde a equazioni che hanno soluzioni reali discordi delle quali quella positiva ha modulo maggiore. Disegnando la retta nel piano e



individuando i punti di intersezione tra essa e gli assi, si vede che la risposta all'esercizio è: $c \in (-4, 0)$.

Capitolo 2

Equazioni di terzo grado

2.1 Una formula risolutiva alternativa a quella di Cardano

Consideriamo ora un'equazione di terzo grado, che senza perdere di generalità, ma semplificando i calcoli, si può prendere della forma:

$$x^3 - 3bx^2 + 3cx - d = 0. \quad (2.1)$$

A ogni equazione facciamo corrispondere un punto di coordinate (b, c, d) nello spazio tridimensionale. Come per le equazioni di secondo grado, vorremmo un metodo geometrico per trovare le soluzioni reali di (2.1).

Se x_1, x_2, x_3 sono le soluzioni, si può scrivere: $x^3 - 3bx^2 + 3cx - d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, da cui:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3b \quad , \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3c \quad , \quad x_1x_2x_3 = d.$$

Quando $x_1 = x_2 = x_3 = t$ si ottengono le equazioni con una radice reale tripla; esse sono descritte dalla curva:

$$C: \quad b = t \quad c = t^2 \quad d = t^3$$

che prende il nome di cubica gobba.

Le equazioni con due radici fissate uguali a t e la terza, x_3 , variabile sono descritte da:

$$b = (2t + x_3)/3 \quad , \quad c = (t^2 + 2tx_3)/3 \quad , \quad d = t^2x_3$$

che al variare di x_3 è una retta. Questa retta interseca C in un solo punto, cioè quando $x_3 = t$, quindi è la retta tangente alla cubica gobba in (t, t^2, t^3) . L'unione delle rette tangenti forma la superficie tangente a C , che ha equazione parametrica: $(t, t^2, t^3) + s(1, 2t, 3t^2)$.

Il piano osculatore alla cubica gobba nel punto (t, t^2, t^3) corrisponde invece alle equazioni che hanno radici t, x_2, x_3 al variare di x_2, x_3 . Il punto in cui il

piano osculatore tocca C corrisponde a $x_2 = x_3 = t$.

Dato un punto (b, c, d) , ci sono tre punti su C il cui piano osculatore contiene (b, c, d) , e tali punti corrispondono alle tre radici. Questa però non è una strada percorribile per descrivere un metodo grafico.

Consideriamo allora un altro approccio al problema. L'idea è questa: dato un punto (b, c, d) si cerca una retta secante la cubica gobba che passi per quel punto; se la si trova, allora l'equazione può essere scritta come somma di due cubi e può essere risolta.

A tal proposito, consideriamo una generica funzione omogenea di terzo grado di due variabili:

$$f(x, y) = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 \quad (2.2)$$

il cui determinante hessiano è:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a_0x + a_1y & a_1x + a_2y \\ a_1x + a_2y & a_2x + a_3y \end{vmatrix} = \\ &= 6[(a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2]. \end{aligned}$$

Se ora prendiamo una particolare $\hat{f}(x, y) = x^3 - 3bx^2y + 3cxy^2 - dy^3$, il calcolo dell'hessiano, trascurando il fattore 6, porta a:

$$\hat{H}(x, y) = \begin{vmatrix} x - by & -bx + cy \\ -bx + cy & cx - dy \end{vmatrix} = (c - b^2)x^2 + (bc - d)xy + (bd - c^2)y^2.$$

Nel proiettivo $\hat{f}(x, y) = 0$ rappresenta proprio la nostra equazione (2.1); in geometria affine invece l'equazione $t^3 - 3bt^2 + 3ct - d = 0$ (la (2.1) con $x = t$) si ottiene da $\hat{f}(x, y) = 0$ dividendo per y^2 e chiamando $t = \frac{x}{y}$, cioè passando dalle coordinate omogenee alle coordinate affini. Con le stesse operazioni si passa da $\hat{H}(x, y) = 0$ a $(c - b^2)t^2 + (bc - d)t + bd - c^2 = 0$.

A meno di traslazione (che corrisponde a fare la sostituzione $x = y + b$ nella (2.1)), possiamo limitarci a considerare equazioni della forma:

$$x^3 + 3cx - d = 0 \quad (2.3)$$

e quindi punti del tipo $(0, c, d)$.

In questo caso, ponendo il determinante hessiano uguale a zero ed esprimendolo in coordinate affini, abbiamo: $ct^2 - dt - c^2 = 0$.

Il determinante hessiano è fondamentale per la nostra procedura, come spiega il seguente:

Teorema 4 *Il punto $(0, c, d)$ appartiene alla retta secante la cubica gobba nei punti (t_1, t_1^2, t_1^3) e (t_2, t_2^2, t_2^3) se e solo se t_1 e t_2 sono soluzioni reali distinte dell'equazione:*

$$ct^2 - dt - c^2 = 0. \quad (2.4)$$

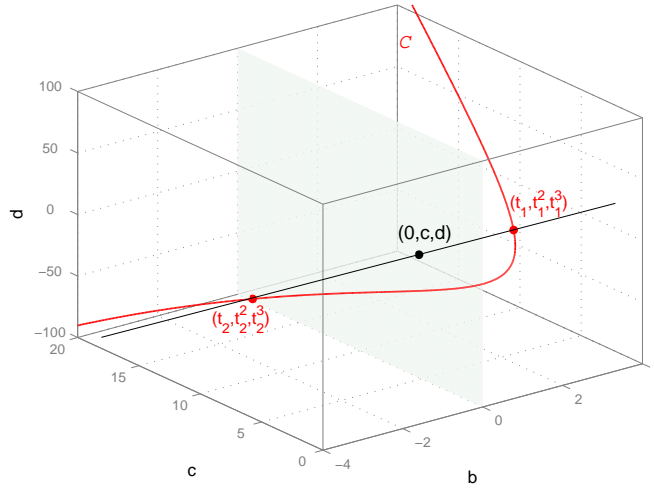


Figura 2.1: Una secante alla cubica gobba.

Dimostrazione:

Prendiamo due punti (t_1, t_1^2, t_1^3) e (t_2, t_2^2, t_2^3) sulla cubica gobba. La retta passante per questi due punti è:

$$\begin{aligned} & \lambda[t_1, t_1^2, t_1^3] + (1 - \lambda)[t_2, t_2^2, t_2^3] = \\ & = [\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2, \lambda t_1^2 + (1 - \lambda)t_2^2, \lambda t_1^3 + (1 - \lambda)t_2^3]. \end{aligned}$$

Per ipotesi il punto $(0, c, d)$ appartiene a tale retta, quindi sappiamo che esiste un $\lambda \neq 0, 1$ tale che:

$$\begin{cases} \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2 = 0 \\ \lambda t_1^2 + (1 - \lambda)t_2^2 = c \\ \lambda t_1^3 + (1 - \lambda)t_2^3 = d \end{cases} .$$

Dalle tre equazioni, se $t_1 \neq \pm t_2$, si ottiene rispettivamente:

$$\lambda = \frac{-t_2}{t_1 - t_2}, \quad \lambda = \frac{c - t_2^2}{t_1^2 - t_2^2}, \quad \lambda = \frac{d - t_2^3}{t_1^3 - t_2^3}.$$

Uguagliando le prime due si ha $-t_2(t_1 + t_2) = c - t_2^2$, e semplificando $-t_2^2$ si ottiene: $-t_2 t_1 = c$.

Uguagliando la prima e la terza si ha invece $-t_2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = d - t_2^3$, che, semplificando $-t_2^3$, diventa $-t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2 = d$, cioè $-t_1 t_2(t_1 + t_2) = d$. Sostituendo $-t_1 t_2 = c$ viene $t_1 + t_2 = -\frac{d}{c}$.

Quindi t_1, t_2 sono tali che: $\begin{cases} t_1 t_2 = -c \\ t_1 + t_2 = -d/c \end{cases}$, il che vuol dire che sono

soluzioni dell'equazione (2.4).

Viceversa, prendiamo t_1 e t_2 soluzioni dell'equazione (2.4) e consideriamo i punti (t_1, t_1^2, t_1^3) e (t_2, t_2^2, t_2^3) della cubica gobba. Facciamo vedere che il punto $(0, c, d)$ appartiene alla retta per questi due punti. Il sistema da considerare è esattamente quello di prima, solo che ora bisogna mostrare che esiste un $\lambda \neq 0, 1$ per cui il sistema è verificato. Dalla prima equazione si ha $\lambda = \frac{-t_2}{t_1 - t_2}$; sostituendo questo valore nelle altre due equazioni e tenendo conto che $t_1 t_2 = -c$ e $t_1 + t_2 = d/c$, si ottengono due identità. ■

L'equazione (2.3) diventa allora:

$$\left(\frac{x - t_1}{x - t_2}\right)^3 = \frac{t_1}{t_2}. \quad (2.5)$$

Infatti, per il Teorema 4 possiamo scrivere l'equazione (2.3) così: $\lambda(x - t_1)^3 + (1 - \lambda)(x - t_2)^3 = 0$. Per quanto visto nella dimostrazione, $\lambda = -\frac{t_2}{t_1 - t_2}$ e sostituendo tale valore otteniamo appunto:

$$t_2(x - t_1)^3 = t_1(x - t_2)^3.$$

Adesso siamo in grado di trovare le soluzioni dell'equazione, nel caso in cui t_1, t_2 siano reali, cioè quando esiste la retta secante.

Teorema 5 Sia α_0 tale che $\alpha_0^3 = \frac{t_1}{t_2}$ e siano $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ le tre radici cubiche dell'unità. Allora le soluzioni della (2.3) sono:

$$x_i = \frac{t_1 - \alpha_0 \varepsilon_i t_2}{1 - \alpha_0 \varepsilon_i}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.6)$$

Infatti, nell'equazione (2.5) poniamo $\alpha = \frac{x - t_1}{x - t_2}$, ottenendo $\alpha^3 = \frac{t_1}{t_2}$. Quest'ultima ha una soluzione reale, che possiamo supporre sia α_0 , e altre due soluzioni complesse coniugate α_1, α_2 . Per $i = 0, 1, 2$ vale: $\alpha_i = \varepsilon_i \alpha_0$, dunque $\frac{x_i - t_1}{x_i - t_2} = \alpha_0 \varepsilon_i$, da cui segue la (2.6).

Se le due soluzioni t_1, t_2 di (2.4) sono complesse coniugate non abbiamo una retta passante per $(0, c, d)$ che secchi la cubica gobba, però si può parlare di retta secante complessa. In questo caso vale un analogo del teorema 4: il punto $(0, c, d)$ appartiene alla retta secante complessa se e soltanto se t_1 e t_2 sono soluzioni complesse (coniugate) dell'equazione (2.4); quindi, anche in tal caso, si può scrivere l'equazione nella forma data dalla (2.5). Continua a valere anche il Teorema 5, se con α_0 indichiamo una qualsiasi delle tre soluzioni di $\alpha^3 = t_1/t_2$.

A seconda del segno del discriminante dell'equazione (2.4), $\Delta = d^2 + 4c^3$, si verificano quindi due diversi casi:

- i) se $\Delta > 0$ allora t_1, t_2 sono entrambe reali (cioè troviamo la retta secante), α_0 è un numero reale e $x_0 = \bar{x}_0$ è reale, mentre $x_1 = \bar{x}_2$, $x_2 = \bar{x}_1$ sono complesse coniugate;

ii) se $\Delta < 0$ allora t_1, t_2 sono complesse coniugate (cioè abbiamo una retta secante complessa), α_0 è un numero complesso di norma 1 e le x_i sono tutte e tre reali.

In entrambi i casi, comunque, la formula (2.6) ci dà le tre soluzioni dell'equazione di partenza (la (2.3)).

Si noti che le soluzioni delle equazioni di terzo grado hanno un comportamento in un certo senso paradossale: quando t_1, t_2 sono reali si trovano le soluzioni complesse, mentre quando t_1, t_2 sono complesse coniugate le soluzioni sono tutte reali.

C'è un'altra particolarità da osservare. Nel caso più generale in cui partiamo da un'equazione del tipo (2.1), al posto della (2.4) abbiamo $(c - b^2)t^2 + (bc - d)t + bd - c^2 = 0$ e vale l'analogo del Teorema 4. Qui il discriminante è $\tilde{\Delta} = (bc - d)^2 - 4(c - b^2)(bd - c^2)$ e l'equazione $\tilde{\Delta} = 0$ rappresenta la superficie tangente alla cubica gobba: con semplici calcoli si può verificare l'equivalenza tra questa forma cartesiana e la forma parametrica che avevamo dato. Dunque questa superficie divide lo spazio (b, c, d) in due parti: in una vale $\tilde{\Delta} > 0$ e nell'altra vale $\tilde{\Delta} < 0$. I punti per cui vale $\tilde{\Delta} > 0$ sono esattamente quelli da cui si riesce a tracciare una secante a C . Dunque, se prendiamo una qualsiasi retta secante a C , per ogni punto sulla retta dovrà valere $\tilde{\Delta} > 0$ (e $\tilde{\Delta} = 0$ nei due punti in cui secca); ciò vuol dire che le secanti stanno tutte dalla stessa parte dello spazio rispetto alla superficie tangente alla cubica gobba. Questo fatto è curioso e per niente intuitivo.

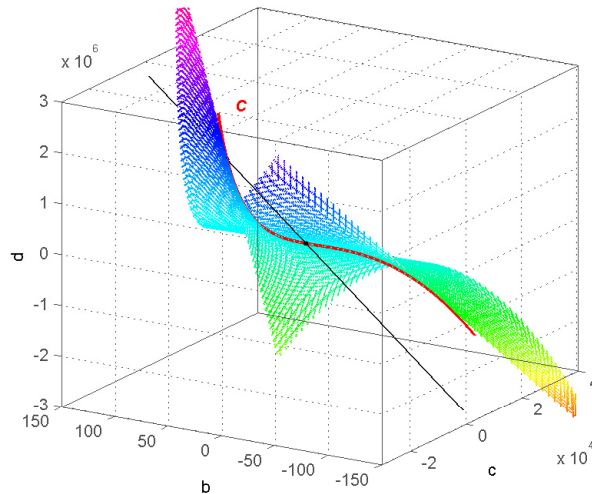


Figura 2.2: Una secante alla cubica gobba: la retta giace tutta dalla stessa parte rispetto alla superficie tangente alla cubica.

Confrontiamo la formula (2.6) con la più nota formula risolutiva delle equazioni di terzo grado: se l'equazione è della forma $x^3 + 3cx - d = 0$, le soluzioni sono date da

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \frac{d^2}{4}}} - \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \frac{d^2}{4}}}. \quad (2.7)$$

Nella scrittura della formula (2.7) c'è un'ambiguità che può portare a usarla male e a ottenere valori sbagliati. La radice cubica di un numero individua tre valori α_i , ognuno corrispondente a una delle radici cubiche dell'unità ε_i ($i = 0, 1, 2$). Nella (2.7) compaiono due radici cubiche: devo prendere due radici che corrispondano alla stessa ε_i , altrimenti ciò che ottengo non è una soluzione della mia equazione.

Nella formula (2.6) questo problema è risolto: la presenza dell'indice i ci ricorda che dobbiamo prendere la stessa radice cubica dell'unità al numeratore e al denominatore, mentre per α_0 qualsiasi delle tre scelte va bene.

Va detto però che anche la formula (2.7) può essere scritta evitando l'ambiguità. Si verifica facilmente che essa può essere riscritta così:

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \frac{d^2}{4}}} - \frac{c}{\sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \frac{d^2}{4}}}};$$

qui gli argomenti delle due radici cubiche sono uguali, quindi basta prendere lo stesso valore per entrambe per essere sicuri di non sbagliare. Meglio ancora, se prendiamo β_0 tale che $\beta_0 = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{c^3 + \frac{d^2}{4}}}$ (abbiamo tre possibili valori; quando $c^3 + \frac{d^2}{4} \geq 0$ possiamo scegliere quello reale, altrimenti una scelta vale l'altra), la formula diventa:

$$x_i = \beta_0 \varepsilon_i - \frac{c}{\beta_0 \varepsilon_i} \quad \text{con } i = 0, 1, 2;$$

in questo modo l'ambiguità è totalmente eliminata.

2.2 Descrizione del metodo geometrico

Nel procedimento appena illustrato ci siamo serviti di un'equazione di secondo grado per risolvere quella di terzo. Si è visto che il discriminante $\Delta = d^2 + 4c^3$ dell'equazione (2.4) ha un ruolo fondamentale: a seconda del suo segno cambia il numero di soluzioni reali dell'equazione (2.3).

Questo discriminante ci permette di descrivere anche un metodo grafico, simile a quello visto per le equazioni di secondo grado, col quale possiamo

capire immediatamente quante soluzioni reali ha l'equazione, e dare un'approssimazione di ogni soluzione.

Lavoriamo nel piano (c, d) : ogni punto corrisponde a un'equazione del tipo $x^3 + 3cx - d = 0$. L'equazione $\Delta = 0$ descrive la curva cuspidale $d^2 + 4c^3 = 0$, che in forma parametrica è descritta da:

$$D: \quad c = -t^2, \quad d = -2t^3.$$

I punti di D sono quelli corrispondenti alle equazioni che hanno una radice reale doppia. Infatti, vale il seguente criterio generale:

Lemma 1 *Un polinomio $f(x)$ ha una radice multipla se e solo se ha una radice in comune con la sua derivata $f'(x)$.*

Nel nostro caso $f(x) = x^3 + 3cx - d$ e $f'(x) = 3x^2 + 3c$, quindi:

$$\begin{cases} x^3 + 3cx - d = 0 \\ 3x^2 + 3c = 0 \end{cases} \text{ ha soluzione} \iff \begin{cases} c = -x^2 \\ d = -2x^3 \end{cases},$$

e questa è proprio l'equazione parametrica della curva D .

Osserviamo che, tranne che nel caso $x^3 = 0$, l'equazione (2.3) non può avere una soluzione tripla, perché la somma delle tre radici deve essere uguale a zero (b è zero nella (2.3)).

Adesso prendiamo un qualsiasi punto (c, d) che non stia sulla curva cuspidale: il numero di rette tangenti alla curva D che passano per (c, d) corrisponde al numero di soluzioni reali dell'equazione di terzo grado, e i punti di tangenza corrispondono alle radici stesse.

Se vale $\Delta > 0$, si può tracciare una sola tangente e quindi c'è una sola soluzione reale (Figura 2.3); se invece vale $\Delta < 0$, ci sono tre tangenti e cioè tre soluzioni reali (Figura 2.4).

Facciamo vedere che in effetti il punto di tangenza corrisponde a una soluzione. Sia $(c_0, d_0) = (-t_0^2, -2t_0^3)$ il punto in cui una retta tangente alla curva cuspidale, tracciata da (c, d) , tocca la curva. Tale retta tangente è data, al variare di λ , da:

$$(c_0, d_0) + \lambda(-2t_0, -6t_0^2).$$

Siccome (c, d) appartiene a tale retta, deve esistere un $\lambda \neq 0$ per cui:

$$\begin{cases} c = c_0 - 2\lambda t_0 \\ d = d_0 - 6\lambda t_0^2 \end{cases}.$$

Dalla prima equazione otteniamo $\lambda = \frac{c_0 - c}{2t_0}$ ($t_0 \neq 0$), e sostituendo nella seconda si ha:

$$d = d_0 + 3t_0(c - c_0);$$

infine ricordiamoci che $c_0 = -t_0^2$ e $d_0 = -2t_0^3$, quindi:

$$d = t_0^3 + 3ct_0,$$

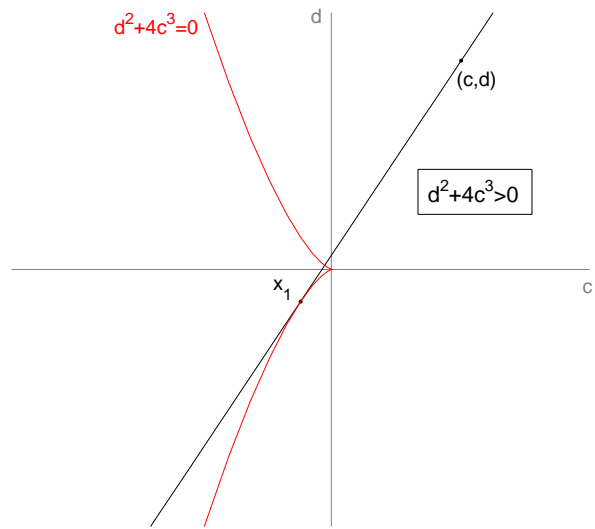


Figura 2.3: Caso in cui si ha 1 tangente alla curva.

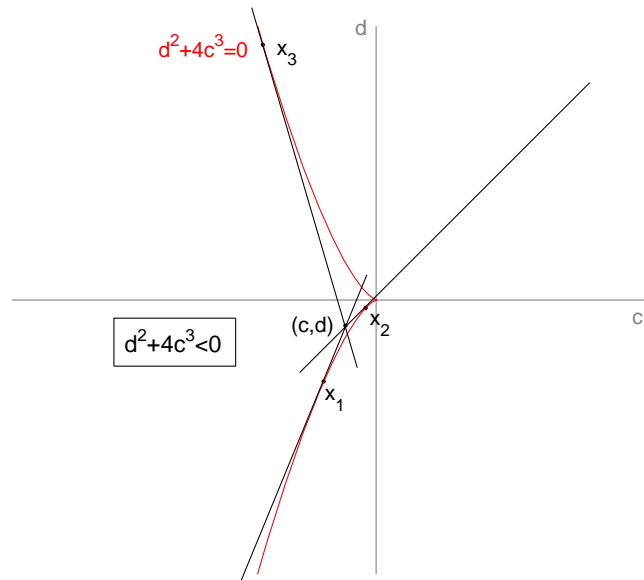


Figura 2.4: Caso in cui si hanno 3 tangenti alla curva.

che è proprio l'equazione (2.3).

Dunque, abbiamo mostrato che se (c_0, d_0) è punto di tangenza, il corrispondente valore del parametro, t_0 , è soluzione della nostra equazione.

Quando t_0 è negativo stiamo percorrendo la parte di D che si trova nel secondo quadrante, quando invece t_0 è positivo percorriamo quella nel terzo quadrante. Quindi, visualizzando nel piano un punto di tangenza, riusciamo subito a capire il segno della soluzione corrispondente.

Purtroppo qui, contrariamente a quanto fatto con la parabola per le equazioni di secondo grado, non si possono costruire le rette tangenti usando soltanto riga e compasso.

Bisogna osservare che, dal punto di vista didattico, il modo in cui abbiamo presentato questo metodo geometrico presenta un problema.

Il problema consiste nell'aver utilizzato il concetto di derivata per dimostrare che la curva cuspidale D è formata dai punti corrispondenti a equazioni con una soluzione doppia, e anche per scrivere la retta tangente a D in un punto (c_0, d_0) : tale concetto non può essere considerato elementare. È inoltre preferibile introdurre la curva D indipendentemente dal discriminante Δ e dalla cubica gobba.

Procediamo allora diversamente, partendo da un'equazione di terzo grado senza il termine al quadrato nella forma più generale possibile:

$$x^3 + px + q = 0. \quad (2.8)$$

Come abbiamo fatto per le equazioni di secondo grado nel Teorema 2, consideriamo una soluzione fissata, uguale a t . Quindi vale $t^3 + pt + q = 0$, cioè $q = -pt - t^3$, che può essere vista come una retta nel piano (p, q) , al variare del parametro t .

Siccome t è soluzione, $(x - t)$ deve dividere $x^3 + px + q$; applicando la regola di Ruffini si trova che: $x^3 + px + q = (x - t)(x^2 + tx + p + t^2)$.

L'equazione (2.8) ha una soluzione doppia uguale a t se e soltanto se per $x = t$ si annulla anche il polinomio $x^2 + tx + p + t^2$, cioè se e soltanto se $p = -3t^2$. Sostituendo quest'ultima nell'equazione della retta si ha $q = 2t^3$. Dunque la curva, che indichiamo con S , formata dai punti del piano (p, q) che corrispondono a equazioni con una soluzione doppia, è parametrizzata da:

$$S: \quad p = -3t^2, \quad q = 2t^3.$$

Questa è una curva cuspidale, come la D introdotta precedentemente; non coincide esattamente con la D perché le due equazioni (2.3) e (2.8) da cui siamo partiti sono in due forme diverse.

La forma cartesiana della curva S è: $4p^3 + 27q^2 = 0$.

A differenza di quanto accade per D , quando t_0 è positivo, stiamo percorrendo la parte di S che giace nel secondo quadrante, mentre quando t_0 è negativo percorriamo quella che giace nel terzo quadrante.

È meno semplice dimostrare, senza usare le derivate, che i punti di tangenza corrispondono alle soluzioni reali.

Si può procedere come nel Teorema 2 per le equazioni di secondo grado. Partiamo dalle relazioni che devono essere soddisfatte dalle soluzioni x_1, x_2, x_3 di un'equazione del tipo (2.8):

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad , \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \quad , \quad -x_1x_2x_3 = q \quad .$$

Consideriamo $x_1 = t$ fissata e otteniamo (dalla prima equazione trovo x_3 in funzione di x_2):

$$p = -t^2 - tx_2 - x_2^2 \quad , \quad q = t^2x_2 + tx_2^2 \quad ,$$

che è l'equazione di una retta nel piano (p, q) , al variare di x_2 .

L'equazione ha una radice doppia in esattamente due casi: quando $x_2 = t$ (e quindi $x_3 = -2t$) o quando $x_2 = x_3 = -\frac{t}{2}$; dunque la retta incontra la curva cuspidale in esattamente due punti: $(-3t^2, 2t^3)$, ottenuto sostituendo $x_2 = t$ nell'equazione della retta, e $(-\frac{3t^2}{4}, -\frac{t^3}{4})$, ottenuto sostituendo $x_2 = -\frac{t}{2}$ nell'equazione della retta.

Non è facile da dimostrare rigorosamente, ma si capisce subito guardando

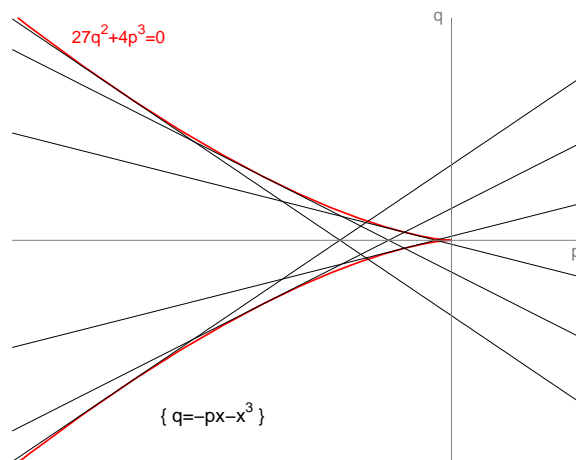


Figura 2.5: La curva cuspidale come involuppo delle rette $q = -px - x^3$.

il grafico di S che una retta che incontra la curva in esattamente in due punti, deve essere tangente a essa in uno dei due punti (tranne se la retta è verticale, ma non è un caso che ci riguarda).

Notiamo che si può anche considerare la (2.8) come l'equazione di una famiglia a un parametro di rette nel piano (p, q) , data da $q = -px - x^3$ al variare di x . La curva cuspidale S è allora l'involuppo di questa famiglia (Figura 2.5).

2.3 Esercizi

Ecco alcuni esercizi da risolvere applicando il metodo grafico visto e senza mai usare formule algebriche risolutive.

1) Dire quante soluzioni reali hanno le equazioni:

- a) $x^3 + 3x - 2 = 0$;
- b) $x^3 - 10x + 3 = 0$;
- c) $x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$;
- d) $4x^3 - 3x^2 - 10x + 2 = 0$.

2) A cosa corrispondono nel piano (p, q) le equazioni $x^3 + px + q = 0$ per cui:

- a) una radice è uguale a 0?
- b) il prodotto delle radici è uguale a 2?
- c) c'è una radice doppia uguale a -1?
- d) prese due radici distinte, il loro prodotto è sempre $-\frac{1}{2}$?
- e) prese due radici distinte, il loro prodotto è sempre la metà del prodotto di tutte e tre?

3) Sia $x^3 + px + q = 0$ un'equazione per cui il prodotto delle radici è uguale a 1; quanti sono i p per cui l'equazione ha una radice doppia? Utilizzando il grafico, dare una stima dei valori di tali p (se esistono).

Rispondere alla stessa domanda nel caso in cui il prodotto delle radici sia uguale a $-\frac{5}{2}$.

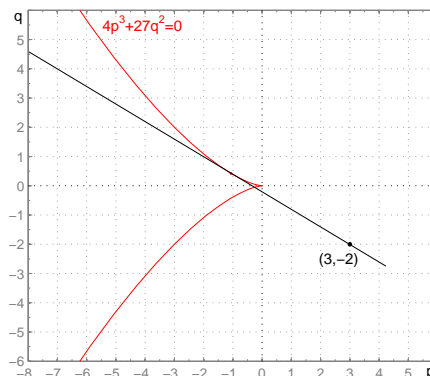
- 4) Quanti sono i q per cui l'equazione $x^3 - 4x + q = 0$ ha una radice doppia?
Dare una stima dei valori di tali q (se esistono).
Rispondere alla stessa domanda per l'equazione $3x^3 + 4x + 3q = 0$.
- 5) Utilizzando il metodo grafico, dedurre il segno delle soluzioni reali delle seguenti equazioni della forma $x^3 + px + q = 0$:
- a) $x^3 + 7x - 2 = 0$;
 - b) $2x^3 - 3x - 10 = 0$;
 - c) $3x^3 - 20x - 4 = 0$;
 - d) $x^3 - 10x + 8 = 0$;
 - e) $x^3 + 5x + 4 = 0$;
 - f) $x^3 - 3x + 2 = 0$.
- 6) Utilizzando il grafico, dare una stima più precisa possibile delle soluzioni reali delle seguenti equazioni:
- a) $8x^3 + 6x - 3 = 0$;
 - b) $5x^3 - 6x + 1 = 0$;
 - c) $x^3 + 5x + 20 = 0$;
 - d) $10x^3 - 14x - 3 = 0$.

2.4 Soluzioni

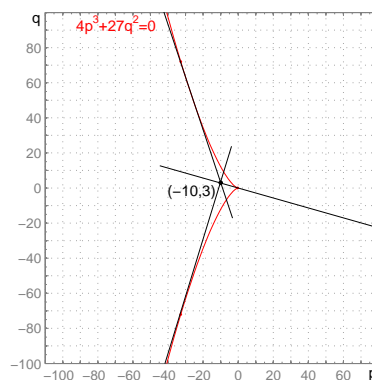
Esercizio 1

Per questo esercizio la nostra equazione di riferimento è $x^3 + px + q = 0$, quindi servirà disegnare nel piano (p, q) la curva cuspidale $S: 4p^3 + 27q^2 = 0$.

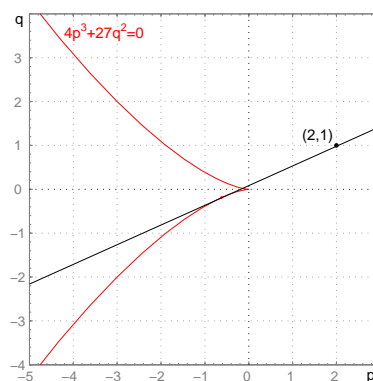
a) Poiché $p = 3$ e $q = -2$, prendiamo nel piano (p, q) il punto $(3, -2)$: da esso si può tracciare una sola retta tangente alla curva S , dunque l'equazione ha una sola soluzione reale.



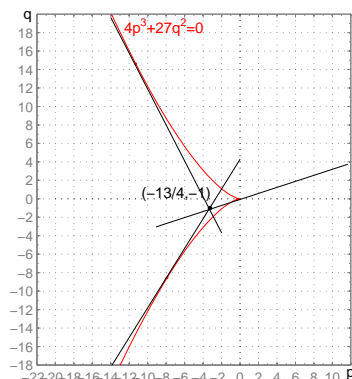
b) In questo caso $p = -10$ e $q = 3$. Dal punto $(-10, 3)$ possiamo tracciare 3 rette tangenti a S , quindi le soluzioni reali sono 3.



c) Prima di tutto l'equazione va riportata nella forma $x^3 + px + q = 0$: facendo la trasformazione $x = y + 1$ si ottiene la nuova equazione $y^3 + 2y + 1 = 0$, nella quale $p = 2$ e $q = 1$. Dal punto $(2, 1)$ si può condurre una sola tangente a S , quindi l'equazione corrispondente ha 1 soluzione reale. Poiché la trasformazione fatta è lineare, anche l'equazione di partenza ha 1 soluzione reale.



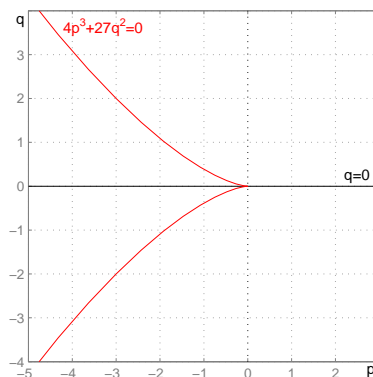
d) Tramite la trasformazione $x = y + \frac{1}{2}$, l'equazione diventa $y^3 - \frac{13}{4}y - 1 = 0$, in cui $p = -\frac{13}{4}, q = -1$. Ci sono 3 rette tangenti a S passanti per $(-\frac{13}{4}, -1)$, quindi l'equazione corrispondente, e dunque anche l'equazione di partenza, hanno 3 soluzioni reali.



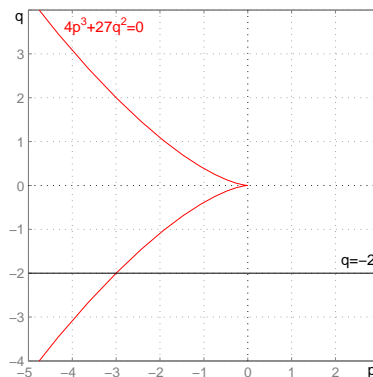
Esercizio 2

Per risolvere questo esercizio si deve tener conto delle relazioni: $x_1x_2x_3 = -q$ e $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p$ (oltre a valere $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, dato che si considerano equazioni senza il termine di secondo grado).

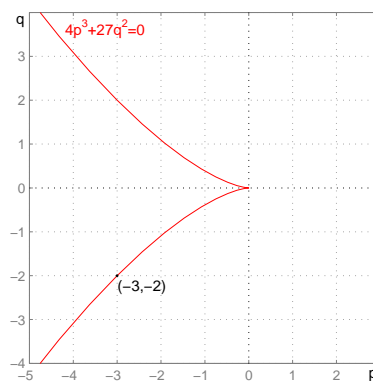
a) Se una radice è zero, ad esempio $x_1 = 0$, allora $q = -x_1x_2x_3 = 0$, quindi nel piano (p, q) abbiamo la retta $q = 0$.



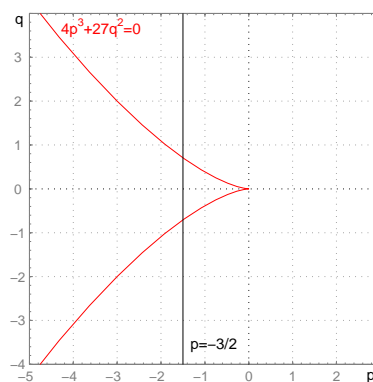
b) Sappiamo che il prodotto delle radici è uguale a $-q$, quindi tali equazioni si rappresentano nel piano (p, q) con la retta $q = -2$.



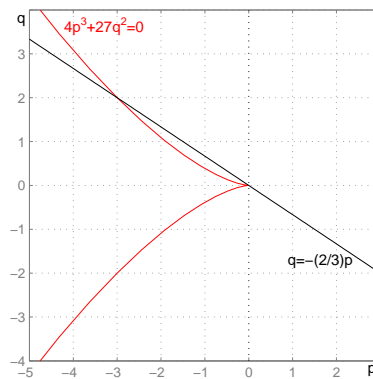
c) Ricordiamoci che la somma delle tre radici è zero, quindi se conosciamo due soluzioni, automaticamente conosciamo la terza. Qui $x_1 = x_2 = -1$, perciò: $x_3 = -x_1 - x_2 = -2$. Allora, viste le relazioni che legano p, q alle radici: $p = 1 - 2 - 2 = -3$, $q = -2$. Abbiamo una sola equazione che soddisfa le richieste dell'esercizio e nel piano (p, q) è il punto $(-3, -2)$.



d) Prendiamo la seconda delle due relazioni ricordate all'inizio: ogni addendo sarà uguale a $-\frac{1}{2}$, quindi $p = -\frac{3}{2}$. Quest'ultima è la retta da disegnare nel piano (p, q) .



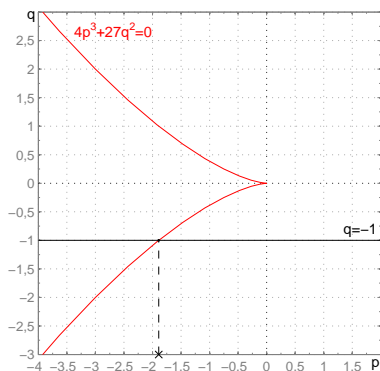
e) Qui vanno usate entrambe le relazioni ricordate all'inizio: se indichiamo con k il prodotto di due qualsiasi radici distinte, il prodotto delle tre radici sarà $2k$ e quindi: $-q = 2k$, $p = 3k$. Eliminando k dalle due equazioni, cioè passando dalla forma parametrica alla forma cartesiana, si ottiene $q = -\frac{2}{3}p$, che è la retta da disegnare nel piano (p, q) .



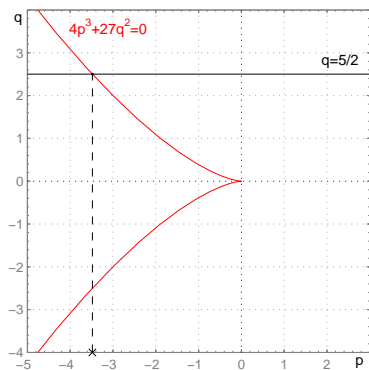
Esercizio 3

i) Abbiamo una famiglia di equazioni per le quali il prodotto delle tre radici è uguale a 1, quindi le equazioni sono della forma $x^3 + px - 1 = 0$ e sono

rappresentate nel piano (p, q) dalla retta $q = -1$. I punti del piano corrispondenti a equazioni che hanno una radice doppia sono tutti e soli quelli della curva S , quindi i valori di p per cui $x^3 + px - 1 = 0$ ha una radice doppia corrispondono ai punti di intersezione tra S e la retta $q = -1$. C'è un solo punto d'intersezione, dunque un solo valore di p . Si vede dalla figura che tale p è compreso tra -2 e $-\frac{7}{4}$.

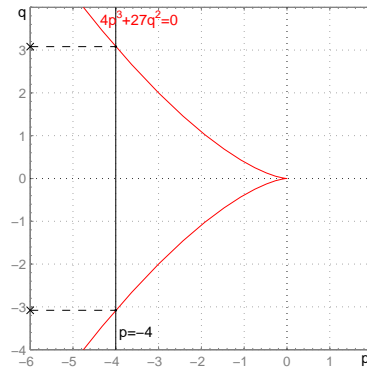


ii) In questo caso il prodotto delle radici è uguale a $-\frac{5}{2}$, quindi abbiamo a che fare con equazioni della forma $x^3 + px + \frac{5}{2} = 0$, che nel piano (p, q) sono rappresentate dalla retta $q = \frac{5}{2}$. C'è un solo valore di p per cui $x^3 + px + \frac{5}{2} = 0$ ha una soluzione doppia, che corrisponde all'unico punto d'intersezione tra S e la retta; tale p è compreso tra $-\frac{18}{5}$ e $-\frac{17}{5}$, come si vede in figura.

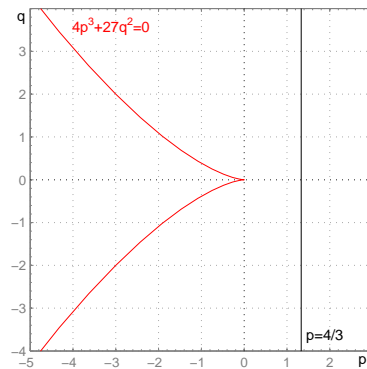


Esercizio 4

i) La famiglia di equazioni $x^3 - 4x + q = 0$ è rappresentata nel piano (p, q) dalla retta $p = -4$. Tale retta incontra la curva S , i cui punti sono tutti e soli quelli corrispondenti a equazioni con radice doppia, in due punti, quindi ci sono due valori di q per cui la nostra equazione ha una soluzione doppia. Tali valori sono le ascisse dei due punti d'intersezione e si riesce a darne una stima guardando il disegno: il q positivo è compreso tra 3 e $\frac{16}{5}$, mentre il q negativo è compreso tra $-\frac{16}{5}$ e -3 .

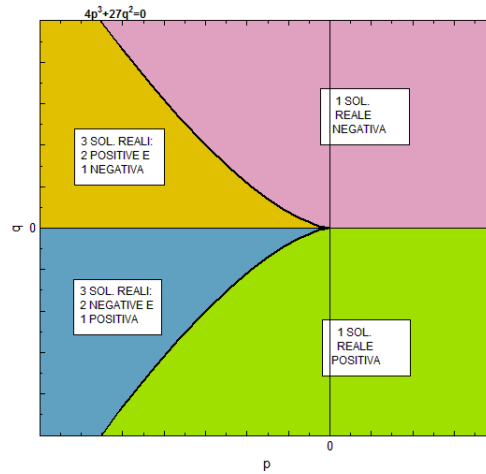


ii) Dividendo per 3 otteniamo $x^3 + \frac{4}{3} + q = 0$; questa famiglia di equazioni è rappresentata nel piano (p, q) dalla retta $p = \frac{4}{3}$. Tale retta non interseca la curva S , quindi non esiste nessun q tale che l'equazione $x^3 + \frac{4}{3} + q = 0$ abbia una radice doppia.

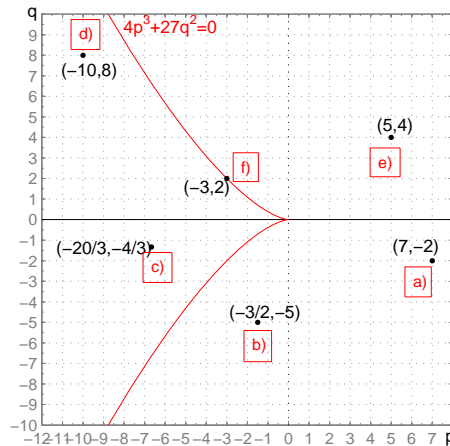


Esercizio 5

Invece di risolvere i punti dell'esercizio uno ad uno, suddividiamo una volta per tutte il piano (p, q) in zone, a seconda del numero e del segno delle soluzioni reali delle equazioni associate ai vari punti. La figura che ne risulta è quella che segue:



Adesso individuamo nel piano i 6 punti corrispondenti alle 6 equazioni dell'esercizio (ricordandosi di dividere per il coefficiente della x^3 quando esso non è 1):



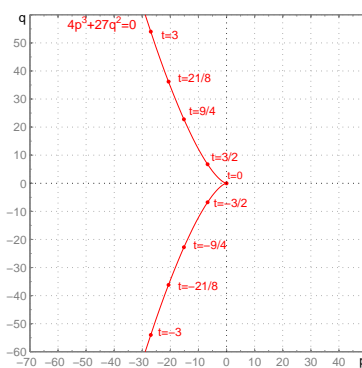
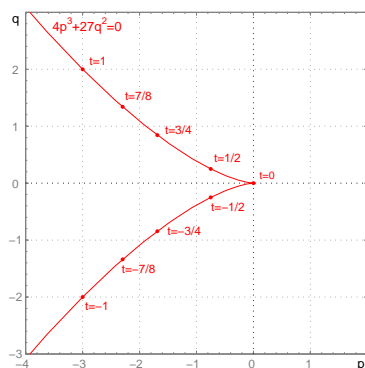
Confrontando le due figure vediamo che: le equazioni a) e b) hanno una sola soluzione reale positiva; l'equazione c) ha due soluzioni reali negative e una positiva; la d) ha due soluzioni reali positive e una negativa; la e) ha una sola soluzione reale negativa. Bisogna fare attenzione all'equazione f): il punto corrispondente appartiene alla curva cuspide, precisamente al ramo

di curva che giace nel secondo quadrante; anche delle equazioni corrispondenti a questo tipo di punti si può dire che abbiano due radici reali positive e una negativa, ricordando però che le due radici positive sono in realtà una radice doppia.

Esercizio 6

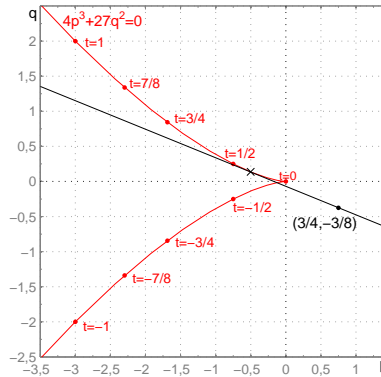
In questo esercizio, oltre a disegnare le tangenti alla curva S , dobbiamo dare, per ogni soluzione reale, un intervallo in cui essa è contenuta. Dal grafico possiamo leggere le ascisse p dei punti di tangenza, ma poiché vale la relazione $p = -3t^2$, per avere t si dovrebbe fare una radice quadrata, e questo lo vogliamo evitare.

Allora, prima di iniziare l'esercizio, conviene sostituire alcuni valori di t nell'equazione parametrica della curva cuspidale e disegnare nel grafico i punti corrispondenti. È quello che abbiamo fatto nelle figure seguenti, con valori di t più piccoli (a sinistra) o più grandi (a destra). Useremo l'una o l'altra, o altre figure con altri valori di t , a seconda della posizione dei punti di tangenza nei vari punti dell'esercizio.

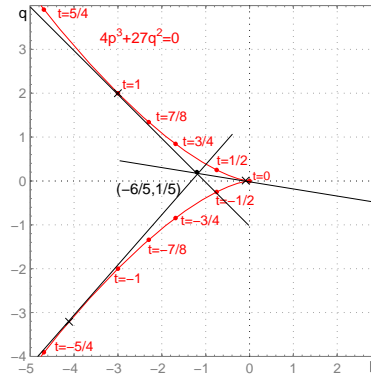


In questo modo basterà leggere sul grafico tra quali t è compreso un certo punto di tangenza per poter dare un intervallo in cui cade la soluzione corrispondente.

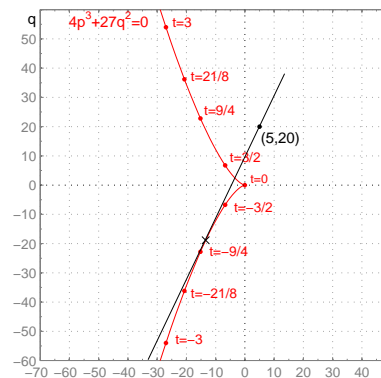
a) Dividiamo tutto per 8 ottenendo $x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} = 0$, quindi disegniamo il punto $(p, q) = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{8})$ e da esso tracciamo l'unica tangente alla curva S . Il punto di tangenza è compreso tra i punti $t = 0$ e $t = \frac{1}{2}$, perciò la soluzione reale (unica) dell'equazione è $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$.



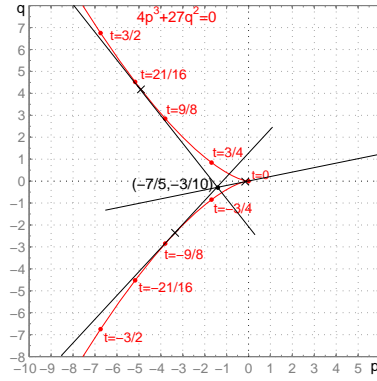
b) Dividiamo tutto per 5 ottenendo $x^3 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5} = 0$, quindi disegniamo il punto $(p, q) = (-\frac{6}{5}, \frac{1}{5})$ e da esso tracciamo le tre tangenti alla curva S . Un punto di tangenza è compreso tra i punti $t = 0$ e $t = \frac{1}{2}$, un altro sembra essere esattamente $t = 1$ (e sostituendo nell'equazione si verifica che in effetti è così), mentre quello nel terzo quadrante è compreso tra $t = -\frac{5}{4}$ e $t = -1$. Dunque le tre soluzioni reali dell'equazione sono: $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$, $x_2 = 1$ e $x_3 \in (-\frac{5}{4}, -1)$.



c) Disegniamo il punto $(p, q) = (5, 20)$ e da esso tracciamo l'unica tangente alla curva S . Il punto di tangenza è compreso tra i punti $t = -\frac{9}{4}$ e $t = -\frac{3}{2}$, perciò la soluzione reale (unica) dell'equazione è $x_1 \in (-\frac{9}{4}, -\frac{3}{2})$.



d) Dividiamo tutto per 10 ottenendo $x^3 - \frac{7}{5}x - \frac{3}{10} = 0$. Disegniamo il punto $(p, q) = (-\frac{7}{5}, -\frac{3}{10})$ e da esso tracciamo le tre tangenti alla curva S . Un punto di tangenza è compreso tra $t = -\frac{3}{4}$ e $t = 0$, un altro tra $t = -\frac{9}{8}$ e $t = -\frac{3}{4}$ e quello nel secondo quadrante tra $t = \frac{9}{8}$ e $t = \frac{21}{16}$. Dunque le tre soluzioni reali dell'equazione sono: $x_1 \in (-\frac{3}{4}, 0)$, $x_2 \in (-\frac{9}{8}, -\frac{3}{4})$ e $x_3 \in (\frac{9}{8}, \frac{21}{16})$.



Parte II

Risoluzione dell'equazione di quinto grado tramite l'icosaedro e le funzioni theta

Capitolo 3

Preliminari

3.1 Trasformazioni di Tschirnhaus

Consideriamo una generica equazione algebrica monica di grado n :

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (3.1)$$

e definiamo, per $k = 1, \dots, n$:

$$y_k = \alpha_0 + \alpha_1x_k + \dots + \alpha_{n-1}x_k^{n-1} \quad (3.2)$$

dove le x_k sono le radici dell'equazione precedente.

Vogliamo trovare una nuova equazione algebrica monica di grado n che abbia come radici y_1, \dots, y_n :

$$y^n + A_1y^{n-1} + \dots + A_n = 0. \quad (3.3)$$

Questa procedura si chiama *trasformazione di Tschirnhaus* ed è utile quando i coefficienti α_j sono scelti in modo che la (3.3) sia più facile da risolvere rispetto alla (3.1). La semplicità della trasformazione dipende anche, ovviamente, dal grado dell'equazione (3.2).

Esempio 1

Vogliamo risolvere l'equazione: $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

Facciamo la trasformazione di Tschirnhaus: $y_k = x_k + \frac{a_1}{3}$, cioè prendiamo come coefficienti $\alpha_0 = \frac{a_1}{3}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$.

Per ottenere la nuova equazione dobbiamo invertire la trasformazione, il che è estremamente semplice perché è lineare: $x_k = y_k - \frac{a_1}{3}$ e poi dobbiamo sostituire $x = y - \frac{a_1}{3}$ nell'equazione di partenza. Si trova: $y^3 + 3A_2y + A_3 = 0$, in cui $A_1 = 0$.

La trasformazione è stata utile, perché adesso abbiamo una cubica senza il termine di grado 2, quindi sappiamo risolverla.

Spesso vogliamo che la trasformazione (3.2) sia tale da far annullare alcuni dei coefficienti A_k della nuova equazione. Per questo ci vengono in aiuto le relazioni di Newton:

$$\left. \begin{aligned} \sum x_k + a_1 &= 0 \\ \sum x_k^2 + a_1 \sum x_k + 2a_2 &= 0 \\ \sum x_k^3 + a_1 \sum x_k^2 + a_2 \sum x_k + 3a_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ per la (3.1) ,}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum y_k + A_1 &= 0 \\ \sum y_k^2 + A_1 \sum y_k + 2A_2 &= 0 \\ \sum y_k^3 + A_1 \sum y_k^2 + A_2 \sum y_k + 3A_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ per la (3.3) .}$$

Da esse si capisce che se, ad esempio, vogliamo che sparisca il termine $A_1 y^{n-1}$, allora deve essere $\sum y_k = 0$. Possiamo prendere $y_k = \alpha_0 + x_k$ e poi sommare su k : $\sum y_k = n\alpha_0 + \sum x_k$; porre $\sum y_k = 0$ vuol dire prendere $\alpha_0 = \frac{a_1}{n}$, dunque la trasformazione da usare è: $y_k = \frac{a_1}{n} + x_k$ (per $n = 3$ è quella vista nell'esempio precedente).

Esempio 2

Vedremo che il primo passo dell'algoritmo per risolvere le equazioni di quinto grado consiste nel trasformare la quintica generale $x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$ in una quintica, detta principale, in cui mancano i termini con y^4 e y^3 , cioè $A_1 = A_2 = 0$: $y^5 + A_3 y^2 + A_4 y + A_5 = 0$.

Serve una trasformazione: $y_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 x_k^2$, che al quadrato è: $y_k^2 = \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 x_k + \alpha_1^2 x_k^2 + 2\alpha_0 \alpha_2 x_k^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 x_k^3 + \alpha_2^2 x_k^4$.

Sommando su k nelle due equazioni precedenti e ponendo $\sum y_k = 0$ e $\sum y_k^2 = 0$:

$$n\alpha_0 + \alpha_1 \sum x_k + \alpha_2 \sum x_k^2 = 0,$$

$$n\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \sum x_k + \alpha_1^2 \sum x_k^2 + 2\alpha_0 \alpha_2 \sum x_k^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sum x_k^3 + \alpha_2^2 \sum x_k^4 = 0.$$

Risolvere simultaneamente queste due porta a un'equazione quadratica per il rapporto α_1/α_2 . Una volta scelto α_2 e trovati gli α_0, α_1 corrispondenti, abbiamo la trasformazione e per invertirla dobbiamo solo estrarre una radice quadrata.

Bisogna osservare che nel corso dell'algoritmo parleremo di trasformazione di Tschirnhaus anche per una trasformazione che non soddisfa la definizione (3.2), perché non è un polinomio. La consideriamo un tipo più generale di trasformazione di Tschirnhaus.

3.2 Solidi platonici regolari

I solidi platonici regolari e le loro simmetrie sono fondamentali per la risoluzione di equazioni algebriche. Ricordiamoci che essi sono 5:

| <i>Poliedro</i> | <i>n° vertici</i> | <i>n° lati</i> | <i>n° facce</i> |
|-----------------|-------------------|----------------|-----------------|
| tetraedro | 4 | 6 | 4 |
| ottaedro | 6 | 12 | 8 |
| cubo | 8 | 12 | 6 |
| ottaedro | 20 | 30 | 12 |
| icosaedro | 12 | 30 | 20 |



È interessante analizzare i loro *gruppi di simmetria*, cioè i gruppi che consistono di operazioni di simmetria dei poliedri e che descrivono appunto la simmetria dell'oggetto. Un'operazione di simmetria è un'isometria dello spazio che porta il poliedro in sé; i 4 tipi fondamentali di operazioni di simmetria sono:

| <i>Operazione di simmetria</i> | <i>Simbolo</i> | <i>Elemento di simmetria corrisp.</i> |
|--------------------------------|----------------|---------------------------------------|
| identità | E | oggetto intero |
| riflessione | σ | piano di riflessione |
| rotazione | C_n | asse di rotazione |
| rotazione impropria | S_n | asse di rotazione improprio |

dove C_n è la rotazione di $360^\circ/n$ attorno all'asse di rotazione e S_n (detta anche riflessione rotatoria) consiste nella rotazione di $360^\circ/n$ attorno a un'asse di rotazione (proprio) seguita da una riflessione rispetto a un piano perpendicolare all'asse (con asse improprio di rotazione si intende il punto di intersezione tra l'asse e il piano). Va notato che l'operazione di riflessione σ è equivalente all'operazione S_1 , quindi è un caso particolare di rotazione impropria.

Il tetraedro ha simmetria T_d (24 operazioni): ha 4 assi C_3 non collineari e un piano di riflessione σ_d diagonale. Il suo gruppo di simmetria è isomorfo al gruppo simmetrico S_4 .

L'ottaedro ha simmetria O_h (48 operazioni): ha 4 assi C_3 non collineari, 3 assi C_4 non collineari e un piano di riflessione orizzontale. Anche il cubo ha questa simmetria. I loro gruppi di simmetria sono isomorfi a $S_4 \times \mathbb{Z}_2$.

L'icosaedro e il dodecaedro hanno simmetria I_h (120 operazioni): hanno 10 assi C_3 non collineari, 6 assi C_5 non collineari e un piano di riflessione orizzontale. I loro gruppi di simmetria sono isomorfi a $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ (A_5 è il gruppo alterno).

Maggiori dettagli sono presenti in ([4], cap II).

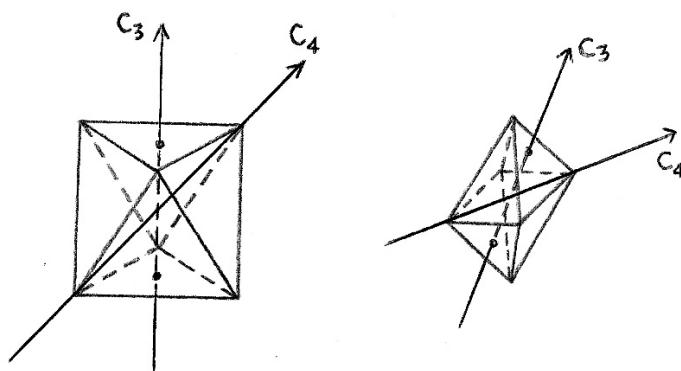


Figura 3.1: Ottaedro regolare visto da due diverse angolazioni; in entrambi i casi sono disegnati uno degli assi C_3 e uno degli assi C_4 .

Tra i solidi platonici regolari si trovano esempi di *poliedri duali*. Dato un poliedro P , il suo duale P^* è un poliedro i cui vertici corrispondono ai centri delle facce di P e i cui centri delle facce corrispondono ai vertici di P ; due vertici in P^* sono connessi da un lato quando le corrispondenti facce in P condividono un lato. Osserviamo che:

- a) se con v, e, f indichiamo rispettivamente il numero di vertici, lati e facce di un poliedro, tra P e P^* valgono le relazioni: $v^* = f, e^* = e, f^* = v$;
- b) due poliedri duali hanno lo stesso gruppo punto di simmetria;
- c) il duale del duale di un poliedro è il poliedro stesso.

Esempi di poliedri duali sono: ottaedro/cubo (simmetria O_h); icosaedro/dodecaedro (simmetria I_h) e tetraedro/tetraedro (simmetria T_d).

Anticipiamo che in un passaggio dell'algoritmo di Kiepert sarà cruciale un fatto riguardante i poliedri: la possibilità di partizionare un icosaedro regolare in 5 ottaedri regolari. I 30 lati dell'icosaedro vengono divisi in 5 insiemi di 6 lati ciascuno, come è suggerito in Figura 3.2, e così i punti medi dei lati di ciascun insieme sono i vertici di un ottaedro.

3.2.1 Polinomi poliedrali

I poliedri convessi si possono rappresentare come punti sulla sfera di Riemann, sfera di raggio unitario ottenuta aggiungendo al piano complesso il punto all'infinito ($\mathbb{C} \cup \infty$). I numeri complessi invece possono essere rappresentati dal piano di Argand, che corrisponde al piano equatoriale della sfera di

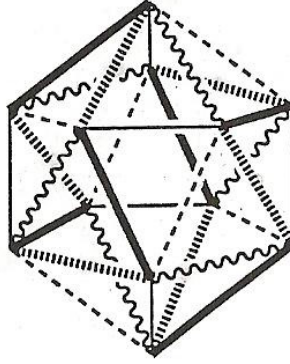


Figura 3.2: suddivisione dei 30 lati dell'icosaedro in 5 insiemi di 6 lati ciascuno

Riemann (dunque l'origine O del piano coincide con il centro della sfera). C'è una corrispondenza biunivoca tra i punti della sfera e quelli del piano, data dalla proiezione stereografica Π dal polo nord N :

$$(\xi, \eta, \zeta) \xrightarrow{\Pi} (x, y) = \left(\frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta} \right).$$

Il punto N corrisponde, tramite Π , al punto all'infinito.

Siano $A = (\lambda, \mu, \nu)$ e $P = (\xi, \eta, \zeta)$ due punti sulla sfera di Riemann e siano $a = \lambda \sin \frac{\alpha}{2}$, $b = \mu \sin \frac{\alpha}{2}$, $c = \nu \sin \frac{\alpha}{2}$, $d = \cos \frac{\alpha}{2}$ ($a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$); consideriamo la rotazione attorno all'asse OA di un angolo α in senso antiorario (guardandola da A verso O), con la quale: $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi', \eta', \zeta')$. Tale rotazione corrisponde alla trasformazione:

$$z' = \frac{(d+ic)z - (b-ia)}{(b+ia)z + (d-ic)} \quad (3.4)$$

dove $z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$ e $z' = x' + iy' = \frac{\xi' + i\eta'}{1-\zeta'}$ (per i calcoli vedi [2], cap. XIII).

Ogni rotazione corrisponde a una trasformazione del tipo (3.4). In particolare una rotazione attorno all'asse polare di un angolo α corrisponde alla trasformazione: $z' = e^{i\alpha}z$.

Ora limitiamoci a considerare i tre poliedri con facce triangolari (detti *deltaedri*). Definiamo cosa si intende per *polinomi poliedrali*: sono polinomi le cui radici corrispondono alla posizione dei vertici, dei punti medi dei lati o dei baricentri delle facce del poliedro sulla superficie della sfera di Riemann. I polinomi poliedrali vengono espressi in termini di variabili omogenee, cioè in termini di u, v , dove $z = u/v$.

Per quanto detto sui poliedri duali, i polinomi dei vertici e delle facce di un

poliedro corrispondono rispettivamente ai polinomi delle facce e dei vertici del duale.

Per il nostro algoritmo sarà sufficiente studiare i polinomi di ottaedro e icosaedro, ma per completezza vediamo anche il caso del tetraedro.

Prendiamo un cubo inscritto nella sfera di Riemann: 4 dei suoi vertici sono i vertici di un tetraedro regolare (1, 2, 3, 4), mentre gli altri 4 sono i vertici del tetraedro duale (1', 2', 3', 4') (vedi Figura 3.3).

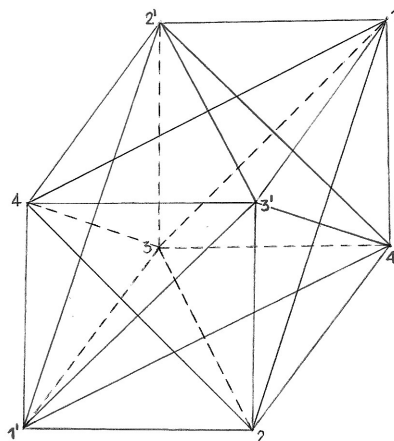


Figura 3.3: scomposizione del cubo in due tetraedri duali

I vertici del tetraedro 1234 sono punti sulla sfera di Riemann che hanno coordinate: $\xi, \eta, \zeta = \pm 3^{-1/2}$, con un numero dispari di segni +; i corrispondenti valori di z nel piano di Argand sono: $\pm a, \pm b$, con $a = \frac{1+i}{3^{1/2}-1}$ e $b = \frac{1-i}{3^{1/2}+1}$. Il polinomio dei vertici Φ di questo tetraedro è allora il prodotto dei fattori $(u \mp av), (u \mp bv)$, e poiché vale: $a^2 = i(2 + 3^{1/2}), b^2 = -1(2 - 3^{1/2}), a^2 b^2 = 1$ e $a^2 + b^2 = 2 \cdot 3^{1/2}i$, allora:

$$\Phi = u^4 - 2 \cdot 3^{1/2} i u^2 v^2 + v^4 . \quad (3.5)$$

Il polinomio delle facce del tetraedro 1234 corrisponde al polinomio dei vertici del tetraedro 1'2'3'4', perché sono duali. Quest'ultimo ha vertici di coordinate $\xi, \eta, \zeta = \pm 3^{-1/2}$, con un numero dispari di segni -; i corrispondenti valori di z sono $\pm \bar{a}, \pm \bar{b}$, quindi il polinomio Ψ delle facce di 1234 è:

$$\Psi = u^4 + 2 \cdot 3^{1/2} i u^2 v^2 + v^4 . \quad (3.6)$$

Per quanto riguarda i lati, i loro punti medi sono i punti in cui gli assi coordinati intersecano la sfera e i corrispondenti valori di z sono $0, \infty, \pm 1, \pm i$. Il prodotto di funzioni lineari che si annulla per tali valori è il polinomio t dei lati:

$$t = uv(u^4 - v^4) . \quad (3.7)$$

Adesso prendiamo un ottaedro regolare inscritto nella sfera di Riemann, orientato in modo che $z = \infty$ sia uno dei vertici.

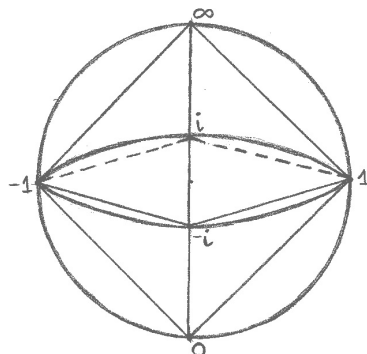


Figura 3.4: ottaedro regolare inscritto nella sfera di Riemann

I suoi polinomi sono:

$$\begin{aligned}
 \text{vertici: } \tau &= uv(u^4 - v^4) \\
 \text{lati: } \chi &= u^{12} - 33u^8v^4 - 33u^4v^8 + v^{12} \\
 \text{facce: } W &= u^8 + 14u^4v^4 + v^8
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Soffermiamoci soltanto sulla derivazione del polinomio dei vertici: se l'ottaedro è orientato come in Figura 3.4, i suoi vertici devono corrispondere ai valori $z = 0, \infty, 1, -1, i, -i$ e $z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = z(z^4-1)$, perciò $\tau = uv(u^4 - v^4)$ (da notare che coincide col polinomio dei lati del tetraedro).

Vediamo infine i polinomi dell'icosaedro:

$$\begin{aligned}
 \text{vertici: } f &= uv(u^{10} + 11u^5v^5 - v^{10}) \\
 \text{lati: } H &= -u^{20} - v^{20} + 228(u^{15}v^5 - u^5v^{15}) - 494u^{10}v^{10} \\
 \text{facce: } W &= u^{30} + v^{30} + 522(u^{25}v^5 - u^5v^{25}) - 10005(u^{20}v^{10} + u^{10}v^{20})
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Anche qui si trova facilmente il polinomio dei vertici, una volta che sappiamo che i 12 vertici dell'icosaedro corrispondono a $z = 0, \infty, \varepsilon^k(\varepsilon + \varepsilon^4), \varepsilon^k(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)$, con $\varepsilon = \exp(2\pi i/5)$ e $k = 0, 1, 2, 3, 4$: la forma che si annulla per questi 12 valori è proprio f .

La speciale simmetria dei deltaedri regolari porta alle seguenti identità, che legano i polinomi tra loro:

$$\begin{aligned}
 \text{tetraedro: } & 12(-3)^{1/2}t^2 + \Phi^3 - \Psi^3 \equiv 0 \\
 \text{ottaedro: } & 108\tau^4 - W^3 + \chi^2 \equiv 0 \\
 \text{icosaedro: } & 1728f^5 - H^3 - T^2 \equiv 0 .
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

L'identità dell'icosaedro sarà indispensabile per risolvere le equazioni quintiche. Dovremo anche tener conto di questo importante fatto (vedi [2], cap XIII):

Teorema 6 *Ogni polinomio omogeneo in u, v che sia invariante per le trasformazioni del gruppo I_h è un polinomio in f, H, T .*

3.2.2 Transvettanti di polinomi poliedrali

La teoria degli invarianti ci permette di collegare tra loro i polinomi dei poliedri in forma omogenea. A questo scopo definiamo il *transvettante n -esimo* di due polinomi omogenei $f(x, y)$ e $g(x, y)$:

$$(f, g)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right) \left(\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \right) \left(\frac{\partial^n g(x, y)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \right). \quad (3.11)$$

Il primo transvettante è lo jacobiano di f e g :

$$(f, g)^1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix},$$

mentre il secondo transvettante è:

$$(f, g)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \end{vmatrix}.$$

Analizziamo i transvettanti di un polinomio con se stesso. I transvettanti dispari $(f, f)^n$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) ovviamente si annullano, perché hanno un numero pari di termini con segni alternati. Invece $(f, f)^2$ è uguale a due volte il determinante hessiano di f .

Per quanto riguarda i deltaedri, se indichiamo con $V(u, v)$ il polinomio dei vertici, con $E(u, v)$ il polinomio dei lati e con $F(u, v)$ il polinomio delle facce, si può verificare che valgono le relazioni:

$$(V, V)^2 = k_{vv} \cdot F \quad (V, F)^1 = k_{vf} \cdot E \quad (3.12)$$

dove k_{vv} e k_{vf} sono due interi. Una caratteristica dei $V(u, v)$ di tetraedro, ottaedro e icosaedro è che i loro transvettanti quarti si annullano: $(\tau, \tau)^4 \equiv 0$, $(f, f)^4 \equiv 0$, $(\Phi, \Phi)^4 \equiv 0$.

3.3 Funzioni ellittiche

3.3.1 Funzioni ellittiche generali

La teoria delle funzioni ellittiche sarà determinante per la risoluzione della nostra equazione di quinto grado. In questo e nei prossimi capitoli cercheremo di familiarizzare con queste funzioni e, non potendo esaurire l'argomento, ci soffermeremo su quegli aspetti e quelle proprietà che useremo esplicitamente nell'algoritmo.

Iniziamo dando alcune definizioni. Sia f una funzione meromorfa nel piano complesso; un *periodo* di f è un $p \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) = f(z + p)$ per ogni z . Sia Ω l'insieme dei punti z del piano complesso che corrispondono a periodi della funzione $f(z)$; si possono avere 3 casi:

1. $f(z)$ è una costante $\Rightarrow \Omega$ è tutto il piano complesso;
2. $f(z)$ è una funzione periodica singola $\Rightarrow \Omega$ è un sistema di punti equidistanti su una retta per l'origine (es: funzioni trigonometriche);
3. $f(z)$ è una *funzione doppiamente periodica* $\Rightarrow \Omega$ è un reticolo di punti formato dalle intersezioni di due famiglie di rette equidistanti parallele.

I punti del reticolo di una funzione del tipo 3 possono essere pensati come generati dalla ripetizione di parallelogrammi congruenti: prendiamo un tale parallelogramma che abbia un vertice nell'origine e supponiamo che gli altri 3 vertici siano $2\omega, 2\omega', 2\omega + 2\omega'$; 2ω e $2\omega'$ sono un paio di *periodi primitivi* per $f(z)$ e tutti i periodi di $f(z)$ hanno la forma

$$2\omega_{m,n} = 2m\omega + 2n\omega' \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Ovviamente il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale; inoltre i periodi primitivi sono scelti convenzionalmente in modo che:

$$\text{Im}(\omega'/\omega) > 0. \quad (3.13)$$

Due punti del piano complesso sono *congruenti* rispetto a $f(z)$ se differiscono per un periodo. Un insieme connesso di punti è una *regione fondamentale* se ogni punto del piano è congruente a esattamente un punto dell'insieme. Se z_0 è un punto fissato, i punti $z = z_0 + 2\xi\omega + 2\eta\omega'$ ($0 \leq \xi, \eta < 1$) formano il *parallelogramma di periodo fondamentale*; ogni parallelogramma ottenuto da quello fondamentale con una traslazione di un numero intero di periodi è detto *maglia* (o parallelogramma di periodo) e corrisponde all'insieme dei punti: $z = z_0 + 2(m + \xi)\omega + 2(n + \eta)\omega'$ ($m, n \in \mathbb{Z}$). È sufficiente descrivere il comportamento di una funzione doppiamente periodica in una singola maglia; visto che f ha singolarità e zeri isolati, tale maglia può essere scelta in modo che nessuna singolarità e nessuno zero stiano sul suo bordo, e in questo caso parliamo di *cella*.

Definizione 1 Una funzione ellittica è una funzione analitica, meromorfa e doppiamente periodica.

Vediamo alcune proprietà fondamentali delle funzioni ellittiche.

Proprietà 1 Una funzione ellittica non costante non può essere olomorfa.

Dimostrazione: Se f non ha poli in una maglia, è ivi limitata, quindi lo è in tutto il piano \Rightarrow deve essere costante per il teorema di Liouville. ■

Corollario 1 Due funzioni ellittiche $f_1(z), f_2(z)$ che hanno stessi zeri e stessi poli, con stesse molteplicità, differiscono per un fattore costante; se invece hanno stessi poli e stesse parti principali differiscono per un termine costante.

(infatti $f_1(z)/f_2(z)$ nel primo caso e $f_1(z) - f_2(z)$ nel secondo sono funzioni ellittiche senza poli \Rightarrow costanti)

Proprietà 2 Una funzione ellittica ha soltanto un numero finito di poli e zeri in ogni maglia, purché non sia identicamente uguale a zero.

(infiniti poli o zeri in una maglia implicano la presenza di singolarità essenziali)

Il numero di poli in una cella, ognuno contato con la sua molteplicità, è detto *ordine* della funzione ellittica.

Proprietà 3 Data una funzione ellittica f di ordine r , f assume ciascun valore c esattamente r volte (contando la molteplicità) in ogni maglia.

Dimostrazione: Basta dimostrarlo per $c = 0$ (cioè per gli zeri di f), poi si sostituisce $f(z) - c$ a $f(z)$.

Prendo come maglia un parallelogramma $ABCD$ tale che il suo contorno γ non contenga né poli né zeri di f . Il principio dell'argomento ci dice che:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

dove N è il numero di zeri e P il numero di poli nella maglia. Sappiamo che $P = r$, quindi dobbiamo dimostrare che l'integrale è nullo: $\frac{f'(z)}{f(z)}$ è anch'essa doppiamente periodica con stessi periodi, quindi

$$\int_A^B \frac{f'}{f} dz = - \int_C^D \frac{f'}{f} dz \quad \text{e} \quad \int_B^C \frac{f'}{f} dz = - \int_D^A \frac{f'}{f} dz . \quad \blacksquare$$

Nello stesso modo si dimostra che l'integrale di f esteso al bordo di una cella è zero, quindi:

Proprietà 4 La somma dei residui di una funzione ellittica nei poli di una qualsiasi cella è zero.

Corollario 2 Non esistono funzioni ellittiche di ordine 1.

Teorema 7 (Abel) Se $f(z)$ è una funzione ellittica con poli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ e zeri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ (ognuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità) situati in una stessa regione fondamentale, abbiamo, per certi m, n interi:

$$\sum \alpha - \sum \beta = 2m\omega + 2n\omega'.$$

Dimostrazione: Supponiamo che la regione fondamentale sia il parallelogramma $ABCD$ già utilizzato nella dimostrazione precedente. Per il principio dell'argomento generalizzato:

$$\begin{aligned} \sum \alpha - \sum \beta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} z dz = \frac{1}{2\pi i} \int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)} [z - (z + 2\omega')] dz + \frac{1}{2\pi i} \int_B^C \frac{f'(z)}{f(z)} [z - \\ &\quad - (z - 2\omega)] dz = \frac{1}{2\pi i} \left[2\omega \int_B^C \frac{f'}{f} dz - 2\omega' \int_A^B \frac{f'}{f} dz \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum \alpha - \sum \beta = \frac{1}{2\pi i} \{ 2\omega [\ln f(z_C) - \ln f(z_B)] - 2\omega' [\ln f(z_B) - \ln f(z_A)] \}$$

$f(z_C) = f(z_B)$ e $f(z_B) = f(z_A) \Rightarrow$ le due coppie di logaritmi differiscono per multipli di $2\pi i \Rightarrow \sum \alpha - \sum \beta$ è somma di un multiplo di 2ω e di un multiplo di $2\omega'$. ■

Non è difficile vedere che tutte le funzioni ellittiche con stessi periodi $2\omega, 2\omega'$ formano un campo K . è un campo differenziale, perché la derivata di una funzione che sta in K appartiene a K ; l'integrale della funzione, invece, non necessariamente appartiene a K .

Le più semplici funzioni ellittiche non banali sono quelle di ordine 2; ce ne sono di due tipi:

- *funzioni ellittiche di Weierstrass*: hanno 1 polo doppio con residuo zero in ogni cella;
- *funzioni ellittiche di Jacobi*: hanno 2 poli semplici in ogni cella, con residui uguali in modulo ma di segno opposto.

3.3.2 La funzione \wp di Weierstrass

Cerchiamo ora una funzione ellittica con periodi $2\omega, 2\omega'$ fissati, che sia di ordine 2 e che abbia poli doppi nei vertici delle maglie, cioè nei punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$, con parti principali corrispondenti uguali a $\frac{1}{(z-w)^2}$. Una tale funzione è determinata a meno di una costante additiva; la costante si individua ponendo che la differenza tra la funzione e $\frac{1}{z^2}$ si annulli in $z = 0$. Abbiamo così definito univocamente una funzione detta \wp di Weierstrass, che risulta essere:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left[\frac{1}{(z - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right]. \quad (3.14)$$

In effetti le proprietà richieste sono verificate da \wp , inoltre si può dimostrare che la serie converge assolutamente e uniformemente in ogni dominio privo di punti $2m\omega + 2n\omega'$.

Oss: \wp è una funzione pari di z .

La sua derivata è:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(z - w)^3} = -2 \sum_{(m,n)} \frac{1}{(z - w)^3}. \quad (3.15)$$

Integrando la \wp invece otteniamo $\wp(z) = -\zeta'(z)$, con:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left[\frac{1}{(z - w)} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right], \quad (3.16)$$

la quale è detta *zeta di Weierstrass*. È una funzione meromorfa con poli semplici ed è dispari in z ; non è una funzione ellittica, dato che, come vedremo in seguito, non è doppiamente periodica.

Per mettere in evidenza i periodi della \wp di Weierstrass, scriveremo spesso $\wp(z|\omega, \omega')$. Va però osservato che le variabili della \wp non sono effettivamente 3 come può sembrare, ma solo 2, ad esempio z/ω e

$$\tau := \omega'/\omega. \quad (3.17)$$

Infatti, si capisce dalla formula per \wp che essa è una funzione omogenea di grado -2 nei suoi 3 argomenti e vale quindi la formula:

$$\wp(tz|t\omega, t\omega') = t^{-2}\wp(z|\omega, \omega')$$

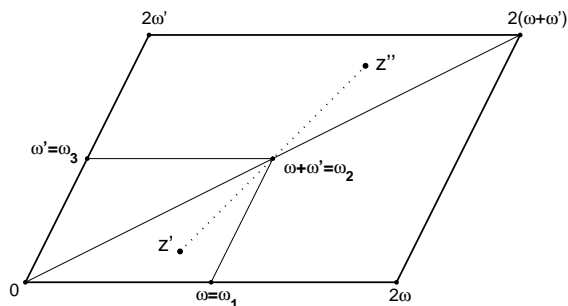
da cui, ponendo $t = \omega^{-1}$ si ottiene:

$$\wp(z|\omega, \omega') = \frac{1}{\omega^2}\wp\left(\frac{z}{\omega} \mid 1, \frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Studiamo ora la funzione $\wp(z) - c = 0$, con c costante. Essa deve avere esattamente due soluzioni nel parallelogramma fondamentale. Dal fatto che \wp è una funzione pari, segue che:

$$\wp(z) = \wp(2\omega - z) = \wp(2\omega' - z) = \wp(2\omega + 2\omega' - z)$$

e quindi i punti z', z'' in cui $\wp(z) = c$ sono simmetrici rispetto al centro $\omega + \omega'$ del parallelogramma se cadono all'interno, e rispetto a ω o ω' se cadono sul lato inferiore o sinistro, rispettivamente (vedi figura).



In particolare, $z' = z''$ se e soltanto se c corrisponde al valore che assume \wp in uno dei tre centri di simmetria, cioè se corrisponde a uno tra:

$$e_1 := \wp(\omega_1) \quad e_2 := \wp(\omega_2) \quad e_3 = \wp(\omega_3) \quad (3.18)$$

dove

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega + \omega', \quad \omega_3 = \omega'. \quad (3.19)$$

Nei tre punti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ vale $\wp' = 0$, anzi essi sono tutti e soli gli zeri di $\wp'(z)$ nel parallelogramma, dato che dalla formula per \wp' si capisce che essa è una funzione ellittica del terzo ordine.

Oss: e_1, e_2, e_3 sono distinti.

Infatti, se fosse ad esempio $e_1 = e_2 = \varepsilon$, la funzione ellittica del secondo ordine $\wp(z) - \varepsilon$ avrebbe 4 zeri nel parallelogramma: $z = \omega_1$ e $z = \omega_3$, entrambi doppi, il che è assurdo.

Teorema 8 Vale l'equazione differenziale:

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \quad (3.20)$$

Dimostrazione: Le funzioni al 1° e 2° membro sono ellittiche del sesto ordine, con periodi $2\omega, 2\omega'$, aventi entrambe come poli sestupli i punti $2m\omega + 2n\omega'$ e come zeri doppi i punti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (e i punti a essi congruenti) \Rightarrow l'equazione sicuramente vale a meno di un fattore costante, per una proprietà vista. Il fattore è 1, dato che le parti principali dei poli di \wp e \wp' nell'origine sono, rispettivamente, $\frac{1}{z^2}$ e $-\frac{2}{z^3}$. ■

Se poniamo $\wp(z) = u$, la formula trovata si può scrivere come $\frac{dz}{du} = \frac{1}{du/dz} = \frac{1}{\sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}$, cioè, visto che a $z = 0$ corrisponde $u = \infty$:

$$z = \int_{\infty}^u \frac{du}{\sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}.$$

Torneremo sugli integrali di questo tipo nella prossima sezione.

Possiamo ricavare l'equazione (3.20) anche in un altro modo, partendo dalla definizione di $\zeta(z)$:

$$\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} = -\frac{1}{w} \left(\frac{z^2}{w^2} + \frac{z^3}{w^3} + \frac{z^4}{w^4} + \dots \right) \quad (\text{se } |w| > |z|) \Rightarrow$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - z^2 \sum' \frac{1}{w^3} - z^3 \sum' \frac{1}{w^4} - z^4 \sum' \frac{1}{w^5} - \dots$$

(notazione: \sum' vuol dire che stiamo sommando per tutti i $w \neq 0$); osserviamo che le somme $\sum'(1/w^n)$ relative a esponenti n dispari sono tutte nulle, inoltre poniamo $S_4 = \sum' \frac{1}{w^4}$ e $S_6 = \sum' \frac{1}{w^6}$ in modo che:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - S_4 z^3 - S_6 z^5 - \dots;$$

derivando: $-\zeta'(z) = \wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3S_4 z^2 + 5S_6 z^4 + \dots$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2 \cdot 3S_4 z + 4 \cdot 5S_6 z^3 + \dots;$$

considerando solo termini con potenze negative o nulle di z si ha:

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + 3^2 S_4 \frac{1}{z^2} + 3 \cdot 5 S_6 + \dots$$

$$\wp'^2(z) = \frac{4}{z^6} - 2^3 \cdot 3 S_4 \frac{1}{z^2} - 2^4 \cdot 5 S_6 + \dots,$$

segue: $\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) = -60S_4 \frac{1}{z^2} - 140S_6 + \dots$

$$\Rightarrow \wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 60S_4 \wp(z) = -140S_6 + \dots$$

La funzione al 1° membro non può avere poli oltre all'origine (e punti a esso congruenti), ma il 2° membro ci dice che l'origine non è un polo \Rightarrow la funzione non ha poli \Rightarrow la funzione è costante, e tale costante è $-140S_6$.

Segue che:

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - 60S_4 \wp(z) - 140S_6.$$

Ora, la (3.20) possiamo scriverla come:

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - 4(e_1 + e_2 + e_3)\wp^2(z) + 4(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2)\wp(z) - 4e_1e_2e_3$$

e confrontando le due formule abbiamo:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ 4(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2) &= -60S_4, \\ 4e_1e_2e_3 &= 140S_6. \end{aligned}$$

Poniamo allora $g_2 = -4(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2) = 60S_4$ e $g_3 = 4e_1e_2e_3 = 140S_6$, cioè:

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{w^4} \quad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{w^6} \quad (3.21)$$

dunque:

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3, \quad (3.22)$$

$$z = \int_{\infty}^u \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} \quad (u = \wp(z)). \quad (3.23)$$

I numeri g_2, g_3 si dicono *invarianti* e individuano esattamente la $\wp(z)$. I 3 numeri e_1, e_2, e_3 sono detti invece *invarianti irrazionali* della funzione e sono le soluzioni dell'equazione

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0. \quad (3.24)$$

Sia Δ il discriminante dell'equazione cubica (3.24):

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2 \neq 0; \quad (3.25)$$

nelle applicazioni accade spesso che g_2, g_3 siano reali, quindi si distinguono due casi:

- se $\Delta > 0$: e_1, e_2, e_3 sono reali,
- se $\Delta < 0$: uno è reale e gli altri due sono complessi coniugati.

Vediamo qualche altra proprietà di \wp . Innanzitutto, con derivazioni successive della (3.22) possiamo esprimere qualsiasi derivata di \wp in funzione di \wp e \wp' (e di g_2, g_3):

$$\begin{aligned} \wp''(z) &= 6\wp^2(z) - \frac{1}{2} g_2 \\ \wp'''(z) &= 12\wp(z)\wp'(z) \\ \wp^{IV}(z) &= 120\wp^3(z) - 18g_2\wp(z) - 12g_3 \\ \wp^V(z) &= 360\wp^2(z)\wp'(z) - 18g_2\wp'(z) \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Lemma 2 *Le somme $S_{2n} = \sum' \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^{2n}}$ sono polinomi in g_2, g_3 (cioè in S_2, S_4) con coefficienti razionali e positivi.*

Dimostrazione: Posto $(2n - 1)S_{2n} = c_n$, possiamo scrivere lo sviluppo visto come:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3S_4z^2 + 5S_6z^4 + \dots = \frac{1}{z^2} + c_2z^2 + c_3z^4 + \dots;$$

deriviamo due volte rispetto a z :

$$\wp''(z) = \frac{6}{z^4} + 2c_2 + 12c_3z^2 + 30c_4z^4 + \dots$$

e sostituiamo quanto trovato nell'equazione per \wp'' :

$$\frac{6}{z^4} + 2c_2 + 12c_3z^2 + 30c_4z^4 + \dots = 6\left(\frac{1}{z^2} + c_2z^2 + c_3z^4 + \dots\right)^2 - 10c_2.$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze di z che si corrispondono nei due membri troviamo: $c_4 = \frac{1}{3} c_2^2$, $c_5 = \frac{3}{11} c_2c_3$, ecc. e in generale si ha:

$$c_n = \frac{3}{(n-3)(2n+1)} (c_2c_{n-2} + c_3c_{n-3} + \dots c_{n-2}c_2) \quad (n > 3).$$

Da questa formula e dalle (3.21) segue:

$$S_4 = \frac{c_2}{3} = \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}, \quad S_6 = \frac{c_3}{5} = \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7}, \quad S_8 = \frac{c_4}{7} = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7},$$

$$S_{10} = \frac{c_5}{9} = \frac{3g_2g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}, \quad \text{ecc...} \quad \blacksquare$$

Segue immediatamente dal lemma lo sviluppo per la \wp :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} z^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} z^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} z^6 + \frac{3g_2g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} z^8 + \dots \quad (3.27)$$

che vale nel cerchio avente per centro l'origine e per raggio il più piccolo dei tre numeri $2|\omega_1|, 2|\omega_2|$ e $2|\omega_3|$, cioè nel più grande dei cerchi di centro l'origine non comprendenti al loro interno alcun altro polo della funzione oltre all'origine. All'interno di tale cerchio si ha anche:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{2 \cdot 5} z + \frac{g_3}{7} z^3 + \frac{g_2^2}{2^3 \cdot 5^2} z^5 + \frac{3g_2g_3}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} z^7 + \dots \quad (3.28)$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} z^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} z^5 - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} z^7 - \frac{g_2g_3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} z^9 - \dots \quad (3.29)$$

Un'altra importante proprietà della \wp è il seguente:

Teorema 9 (teorema di addizione algebrico)

$$\wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} \right)^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2). \quad (3.30)$$

Senza entrare nei dettagli della dimostrazione (vedi [11] cap I §6, oppure [6] cap I §3), accenniamo soltanto al fatto che le funzioni al primo e al secondo membro sono funzioni ellittiche con stessi periodi, stessi poli e stesse parti principali, e hanno lo stesso valore in certi punti.

Da questo teorema, se facciamo tendere $z_2 \rightarrow z_1$ e usiamo la regola di de l'Hopital, troviamo:

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 . \quad (3.31)$$

Abbiamo detto precedentemente che le funzioni ellittiche con periodi $2\omega, 2\omega'$ fissati formano un campo K . Adesso che abbiamo introdotto la funzione \wp possiamo enunciare un importante teorema (vedi [11] cap I, §7):

Teorema 10 *Qualsiasi funzione $f(z) \in K$ si può sempre esprimere razionalmente in \wp e \wp' tramite una formula del tipo:*

$$f(z) = R_1(\wp) + R_2(\wp) \cdot \wp'$$

dove R_1, R_2 sono due funzioni razionali del loro argomento.

Seguono alcune proprietà:

- Tra due qualsiasi funzioni ellittiche con stessi periodi (o periodi congruenti) sussiste sempre un'equazione algebrica a coefficienti costanti.
- Ogni funzione ellittica soddisfa a un'equazione differenziale algebrica del primo ordine.
- Ogni funzione ellittica possiede un teorema di addizione algebrico.

3.3.3 La funzione $\zeta(z)$

Quando abbiamo definito la funzione ζ , abbiamo detto che essa non è una funzione ellittica, nonostante sia strettamente collegata alla \wp . Vediamo perché:

Lemma 3 *Se chiamiamo $\eta = \zeta(\omega)$, $\eta' = \zeta(\omega')$ allora vale*

$$\zeta(z + 2\omega) = \zeta(z) + 2\eta \quad , \quad \zeta(z + 2\omega') = \zeta(z) + 2\eta' . \quad (3.32)$$

Dimostrazione: Valgono le equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [\zeta(z + 2\omega) - \zeta(z)] &= \wp(z) - \wp(z + 2\omega) = 0 \\ \frac{d}{dz} [\zeta(z + 2\omega') - \zeta(z)] &= \wp(z) - \wp(z + 2\omega') = 0 , \end{aligned}$$

quindi sicuramente vale la tesi con η, η' costanti. Dobbiamo far vedere che tali costanti sono proprio $\zeta(\omega)$ e $\zeta(\omega')$. Poiché $\zeta(-z) = -\zeta(z)$, abbiamo:

$$\zeta(\omega) = \zeta(-\omega + 2\omega) = \zeta(-\omega) + 2\eta = -\zeta(\omega) + 2\eta \Rightarrow \zeta(\omega) = \eta.$$

Analogo per $\zeta(\omega')$. ■

Dunque la funzione ζ non è doppiamente periodica e di conseguenza non è ellittica. Grazie alle (3.32) possiamo scrivere anche:

$$\zeta(\omega + \omega') = -\zeta(\omega + \omega' - 2\omega - 2\omega') = -\zeta(\omega + \omega') + 2\eta + 2\eta' \Rightarrow \zeta(\omega + \omega') = \eta + \eta'.$$

Analogamente a quanto fatto per $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, possiamo introdurre

$$\eta_1 = \eta, \quad \eta_2 = \eta + \eta', \quad \eta_3 = \eta' \quad (3.33)$$

e dire che

$$\zeta(\omega_a) = \eta_a \quad (a = 1, 2, 3) . \quad (3.34)$$

Queste due costanti η, η' sono legate fra loro e con ω, ω' da una semplice relazione:

Proprietà 5 (relazione di Legendre) $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}i\pi$.

Dimostrazione: Integrando $\zeta(z)$ attorno a una cella C abbiamo:

$$\oint_C \zeta(z)dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_\zeta(0) = 2\pi i$$

($\text{Res}=1$ perché la parte principale di $\zeta(z)$ è $\frac{1}{z}$).

$$\begin{aligned} \oint_C \zeta(z)dz &= \int_0^{2\omega} \zeta(z)dz + \int_{2\omega}^{2\omega+2\omega'} \zeta(z)dz + \int_{2\omega+2\omega'}^{2\omega'} \zeta(z)dz + \int_{2\omega'}^0 \zeta(z)dz = \\ &= \int_0^{2\omega} \zeta(z)dz + \int_0^{2\omega'} \zeta(\xi + 2\omega)d\xi - \int_0^{2\omega} \zeta(\xi + 2\omega')d\xi - \int_0^{2\omega'} \zeta(z)dz = \\ &= \int_0^{2\omega} \zeta(z)dz + \int_0^{2\omega'} [\zeta(z) + 2\eta]dz - \int_0^{2\omega} [\zeta(z) + 2\eta']dz - \int_0^{2\omega'} \zeta(z)dz = \\ &= \int_0^{2\omega'} 2\eta dz - \int_0^{2\omega} 2\eta' dz = 4\eta\omega' - 4\eta'\omega \end{aligned}$$

Dunque: $4(\eta\omega' - \eta'\omega) = 2\pi i$, da cui la tesi. ■

Vale un teorema di addizione, non algebrico ma algebrico-differenziale, anche per la $\zeta(z)$ (per i dettagli vedere [11], cap I, §9):

$$\zeta(z_1 + z_2) = \zeta(z_1) + \zeta(z_2) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} . \quad (3.35)$$

3.3.4 La funzione $\sigma(z)$

Introduciamo un'altra funzione $\sigma(z)$, ponendo $\zeta(z)$ uguale alla sua derivata logaritmica:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z) . \quad (3.36)$$

Integrando:

$$\ln \sigma(z) = \ln z + \sum' \left[\ln(z-w) + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2} \right] + cost \implies$$

$$\ln \sigma(z) = \ln z + \sum' \left[\ln \left(\left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2} \right) \right] + cost .$$

Possiamo prendere

$$\sigma(z) = z \prod' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2} \quad (3.37)$$

la quale, dato che la produttorica che compare è sempre assolutamente convergente, è una funzione intera.

La (3.36) fornisce una rappresentazione della funzione meromorfa ζ come quoziente di due funzioni intere σ e σ' . Derivando rispetto a z troviamo una rappresentazione del genere anche per \wp :

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2} \ln \sigma(z) = -\frac{d \sigma'(z)}{dz \sigma(z)} = \frac{\sigma'^2(z) - \sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)} . \quad (3.38)$$

Per ottenere lo sviluppo di $\sigma(z)$ in serie di potenze, il quale dovrà convergere su tutto il piano, partiamo dallo sviluppo di $\zeta(z)$ e sfruttiamo il fatto che

$$\frac{d}{dz} \left(\ln \frac{\sigma(z)}{z} \right) = \frac{z}{\sigma(z)} \cdot \left(\frac{\sigma'(z)z - \sigma(z)}{z^2} \right) = \zeta(z) - \frac{1}{z},$$

da cui, integrando:

$$\ln \frac{\sigma(z)}{z} = \int_0^z \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) dz \implies \sigma(z) = z \cdot e^{\int_0^z (\zeta(z) - \frac{1}{z}) dz} .$$

Poiché:

$$-\int_0^z \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) dz = \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} z^4 + \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} z^6 + \frac{g_2^2}{2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} z^8 + \dots,$$

otteniamo:

$$\sigma(z) = z - \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} z^5 - \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} z^7 - \frac{g_2^2}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} z^9 - \dots \quad (3.39)$$

Oss: $\sigma(z)$ è una funzione dispari e si annulla in tutti e soli i punti $z = 2m\omega + 2n\omega'$ per certi m, n interi.

Vediamo come si comporta $\sigma(z)$ quando z aumenta di un multiplo dei periodi 2ω e $2\omega'$. Conosciamo le (3.32), che si possono equivalentemente scrivere come un'unica formula:

$$\zeta(z + 2m\omega + 2n\omega') = \zeta(z) + 2m\eta + 2n\eta' .$$

Chiamiamo:

$$2m\eta + 2n\eta' = \tilde{\eta} \quad (3.40)$$

e, come abbiamo già fatto in precedenza, $w = 2m\omega + 2n\omega'$; così:

$$\zeta(z + w) = \zeta(z) + \tilde{\eta}.$$

Integrando:

$$\ln \sigma(z + w) = \ln \sigma(z) + \tilde{\eta}z + cost \implies \sigma(z + w) = c \cdot e^{\tilde{\eta}z} \sigma(z)$$

con c costante da determinare.

Per trovare c dobbiamo distinguere due casi. Se m, n non sono entrambi pari, cioè $w/2$ non è un periodo di $\wp(z)$, allora, ponendo $z = -\frac{w}{2}$:

$$\sigma\left(\frac{w}{2}\right) = c \cdot e^{-\tilde{\eta}\frac{w}{2}} \sigma\left(-\frac{w}{2}\right) = -c \cdot e^{-\tilde{\eta}\frac{w}{2}} \sigma\left(\frac{w}{2}\right) \implies c = -e^{\tilde{\eta}\frac{w}{2}}.$$

Se invece m, n sono pari, sia 2^h la più alta potenza di 2 che divide m e n ; applichiamo 2^h volte la formula precedente, con $w/2^h$ al posto di w e otteniamo che $c = e^{\tilde{\eta}\frac{w}{2}}$. Dunque, in generale:

$$\sigma(z + w) = (-1)^{m+n+mn} e^{\tilde{\eta}\left(z+\frac{w}{2}\right)} \sigma(z) \quad (w = 2m\omega + 2n\omega') \quad (3.41)$$

La funzione σ è molto importante per questo fatto (vedi [11], cap I, §9):

Teorema 11 *Se $f(z)$ è una funzione ellittica di ordine r e a_1, a_2, \dots, a_r ; b_1, b_2, \dots, b_r sono due sistemi completi rispettivamente di poli e zeri, scelti in modo che $\sum a_i - \sum b_i = 0$ (è sempre possibile, perché se fosse $\sum a_i - \sum b_i = 2m\omega + 2n\omega'$ si sostituisce a_r con $a_r + 2m\omega + 2n\omega'$), allora vale:*

$$f(z) = c \cdot \frac{\sigma(z - b_1)\sigma(z - b_2)\dots\sigma(z - b_r)}{\sigma(z - a_1)\sigma(z - a_2)\dots\sigma(z - a_r)}$$

con c costante opportuna.

Applichiamo questo teorema a $f(z) = \wp(z) - \wp(v)$, con v fissato (diverso da un periodo). Qui $r = 2$, e come poli e zeri possiamo prendere $a_1 = a_2 = 0$ e $b_1 = v, b_2 = -v$; così:

$$\wp(z) - \wp(v) = c \cdot \frac{\sigma(z-v)\sigma(z+v)}{\sigma^2(z)}.$$

Per trovare la costante moltiplichiamo tutto per z^2 e facciamo il limite per $z \rightarrow 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \wp(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1 \implies 1 = c \cdot \sigma(-v) \sigma(v) = -c \cdot \sigma^2(v).$$

Dunque:

$$\wp(z) - \wp(v) = -\frac{\sigma(z+v)\sigma(z-v)}{\sigma^2(z)\sigma^2(v)}. \quad (3.42)$$

Segue (per $v \rightarrow z$):

$$\wp'(z) = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)}. \quad (3.43)$$

3.3.5 Funzioni ellittiche di Jacobi

Consideriamo funzioni f definite in questo modo:

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

con $P(x)$ polinomio. Potenze e funzioni trigonometriche, che sono sufficienti per risolvere equazioni fino al 4° grado, si possono esprimere con integrali di questo tipo in cui $P(x)$ è di grado 2; ad esempio:

$$z = \int_0^{\sin(z)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se invece prendiamo come $P(x)$ un polinomio di grado 3 o 4, gli integrali del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ non sono esprimibili in termini di funzioni elementari e sono detti *integrali ellittici*.

Prendiamo $P(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ e definiamo una nuova funzione così:

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

facendo la sostituzione $x = \sin \vartheta$:

$$z = \int_0^\phi \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\cos^2 \vartheta (1-k^2 \sin^2 \vartheta)}} = \int_0^\phi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

con $f(z) = \sin \phi$. Si chiamano *funzioni ellittiche di Jacobi* le tre funzioni:

$$\begin{aligned} sn(z) &= \sin \phi \\ cn(z) &= \cos \phi = \sqrt{1 - sn^2(z)} \\ dn(z) &= \sqrt{1 - k^2 sn^2(z)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Esse dipendono da k , che è detto *modulo*; $k' = \sqrt{1-k^2}$ è invece il *modulo complementare* a k .

Si può dimostrare ([11], cap III, §2) che queste funzioni sono doppiamente

periodiche del loro argomento e quindi sono funzioni ellittiche. Si devono dunque poter ricondurre alla \wp di Weierstrass. Partiamo da:

$$z = \int_{\infty}^u \frac{du}{\sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}},$$

dove $\wp(z) = u$, e cambiamo z in $-z$:

$$z = \int_u^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}.$$

Facciamo la sostituzione

$$u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \phi} : \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} z &= \int_{\phi}^0 \frac{-2(\cos \phi / \sin^3 \phi)(e_1 - e_3)d\phi}{\sqrt{4\left(e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \phi} - e_1\right)\left(e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \phi} - e_2\right)\left(e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \phi} - e_3\right)}} = \\ &= \int_0^{\phi} \frac{(\cos \phi / \sin^3 \phi)(e_1 - e_3)d\phi}{\sqrt{\left(\frac{e_1 - e_3 - (e_1 - e_3)\sin^2 \phi}{\sin^2 \phi}\right)\left(\frac{e_1 - e_3 - (e_2 - e_3)\sin^2 \phi}{\sin^2 \phi}\right)\left(\frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \phi}\right)}} = \\ &= \int_0^{\phi} \frac{\cos \phi (e_1 - e_3)d\phi}{\sqrt{e_1 - e_3}(e_1 - e_3)\sqrt{1 - \left(\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right)\sin^2 \phi - \sin^2 \phi + \left(\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right)\sin^4 \phi}} = \\ &= \int_0^{\phi} \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right)\sin^2 \phi\right]\cos^2 \phi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned}$$

con

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \quad (3.46)$$

Questo prova che: $\sin \phi = \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} z)$; sostituiamo in (3.45), tenendo conto che $\wp(z) = u$:

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} z)}.$$

Invertendo si ottiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} z) &= \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}} \\ \operatorname{cn}(\sqrt{e_1 - e_3} z) &= \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}} \\ \operatorname{dn}(\sqrt{e_1 - e_3} z) &= \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Possiamo anche scrivere le tre funzioni ellittiche di Jacobi in termini della funzione σ e di altre tre funzioni che adesso definiamo.

Riprendiamo la formula (3.42) e poniamo $v = \omega_a$ ($a = 1, 2, 3$):

$$\wp(z) - \wp(\omega_a) = -\frac{\sigma(z+\omega_a)\sigma(z-\omega_a)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega_a)} ;$$

ma tenendo conto della formula (3.41) e del fatto che σ è dispari, si ha anche:

$$\begin{aligned} \sigma(z + \omega_a) &= \sigma(z - \omega_a + 2\omega_a) = -\sigma(z - \omega_a)e^{2\eta_a z} = \sigma(\omega_a - z)e^{2\eta_a z} \implies \\ \wp(z) - \wp(\omega_a) &= \left[\frac{\sigma(\omega_a - z)e^{\eta_a z}}{\sigma(z)\sigma(\omega_a)} \right]^2 . \end{aligned}$$

Introduciamo tre nuove funzioni intere $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ così definite:

$$\sigma_a(z) = \frac{\sigma(\omega_a - z)e^{\eta_a z}}{\sigma(\omega_a)} \quad (a = 1, 2, 3) \quad (3.48)$$

e riscriviamo l'equazione precedente nella forma:

$$\wp(z) - e_a = \left(\frac{\sigma_a(z)}{\sigma(z)} \right)^2 . \quad (3.49)$$

Se conveniamo una volta per tutte che sia:

$$\sqrt{\wp(z) - e_a} = + \frac{\sigma_a(z)}{\sigma(z)} , \quad (3.50)$$

la formula per sn diventa: $sn(\sqrt{e_1 - e_3} z) = \pm \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}$. Senza entrare nei dettagli, diciamo che sotto certe ipotesi il segno del secondo membro dovrà essere +:

$$sn(\sqrt{e_1 - e_3} z) = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}$$

e analogamente:

$$cn(\sqrt{e_1 - e_3} z) = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)} , \quad dn(\sqrt{e_1 - e_3} z) = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)} .$$

Vediamo una proprietà delle funzioni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Esse sono legate fra loro e alla σ da due relazioni algebriche, che si ottengono immediatamente eliminando $\wp(z)$ dalle tre (3.49):

$$\sigma_1^2(z) + e_1 \sigma^2(z) = \sigma_2^2(z) + e_2 \sigma^2(z) = \sigma_3^2(z) + e_3 \sigma^2(z) .$$

Un altro modo di scrivere queste funzioni si trova prendendo la (3.41) e ricordandosi che $\sigma(z)$ è dispari e quindi:

$$\sigma_a(z) = \frac{\sigma(\omega_a + z)e^{-\eta_a z}}{\sigma(\omega_a)} \quad (a = 1, 2, 3) ;$$

confrontando le due formule si capisce che le σ_a sono funzioni pari, e inoltre $\sigma_a(0) = 1, \forall a = 1, 2, 3$. Per quanto riguarda la relazione di periodicità delle σ_a , cioè la relazione tra $\sigma_a(z)$ e $\sigma_a(z + w)$, con $w = 2m\omega + 2n\omega'$ come al solito:

$$\sigma_a(z+w) = \frac{\sigma(\omega_a+z+w)}{\sigma(\omega_a)} e^{\eta_a(z+w)} = (-1)^{m+n+mn} \sigma_a(z) e^{\tilde{\eta}(z+\frac{w}{2}) + \tilde{\eta}\omega_a - \eta_a w};$$

siccome la relazione di Legendre si può dare nella forma:

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \eta_2\omega_3 - \eta_3\omega_2 = \frac{1}{2}\pi i,$$

segue:

$$\tilde{\eta}\omega_a - \eta_a w = \begin{cases} -n\pi i & \text{se } a = 1 \\ (m-n)\pi i & \text{se } a = 2 \\ m\pi i & \text{se } a = 3 \end{cases} .$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \sigma_1(z+w) &= (-1)^{mn+m} e^{\tilde{\eta}(z+\frac{w}{2})} \sigma_1(z) \\ \sigma_2(z+w) &= (-1)^{mn} e^{\tilde{\eta}(z+\frac{w}{2})} \sigma_2(z) \\ \sigma_3(z+w) &= (-1)^{mn+n} e^{\tilde{\eta}(z+\frac{w}{2})} \sigma_3(z). \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.3.6 La funzione $\psi_n(z)$

C'è un'ultima funzione da considerare nell'ambito delle funzioni ellittiche, la quale sarà esplicitamente utilizzata, nel caso $n = 5$, nell'algorithmo per la risoluzione delle equazioni di quinto grado. Tale funzione è:

$$\psi_n(z) = \frac{\sigma(nz)}{\sigma^{n^2}(z)}. \quad (3.52)$$

Le formule fondamentali per $\sigma(z)$ dimostrano che $\psi_n(z)$ è ellittica con periodi $2\omega, 2\omega'$, ha un polo di ordine $n^2 - 1$ in $z = 0$ e ha $n^2 - 1$ zeri nel parallelogramma fondamentale, esattamente nei punti $\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}$ ($r, s = 0, 1, \dots, n-1$ tranne $(r, s) = (0, 0)$).

Dunque se considero $\prod'_{r,s} [\wp(z) - \wp(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n})]$, questa funzione ha in comune con $\psi_n^2(z)$ periodi, poli e zeri \Rightarrow

$$\psi_n^2(z) = C \cdot \prod'_{r,s} \left[\wp(z) - \wp\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right) \right]. \quad (*)$$

Supponiamo che n sia dispari. Osserviamo che:

$$\wp\left(\frac{2(n-r)\omega+2(n-s)\omega'}{n}\right) = \wp\left(\frac{2r\omega+2s\omega'}{n}\right)$$

e, poiché n è dispari, le coppie opposte (r, s) e $(n-r, n-s)$ sono sempre distinte. Dunque il secondo membro della (*) è il quadrato perfetto di un polinomio in $\wp(z) \Rightarrow$

$$\psi_n(z) = C' \cdot \prod''_{r,s} \left[\wp(z) - \wp\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right) \right] \quad (n \equiv 1 \pmod{2});$$

con $\prod''_{r,s}$ si intende che r, s percorrono $\frac{n^2-1}{2}$ coppie non congrue mod n , che con le opposte $(-r, -s)$ formino un sistema completo mod n ($(0, 0)$ esclusa). Per calcolare la costante C' , si moltiplica a sinistra e a destra per z^{n^2-1} e si passa al limite per $z \rightarrow 0$, trovando:

$$\psi_n(z) = n \cdot \prod''_{r,s} \left[\wp(z) - \wp\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right) \right] \quad (n \equiv 1 \pmod{2}). \quad (3.53)$$

Se invece n è pari, le 3 coppie $(\frac{n}{2}, 0), (0, \frac{n}{2}), (\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ coincidono con le loro opposte e i fattori corrispondenti nella (*) si riuniscono in:

$$(\wp(z) - \wp(\omega))(\wp(z) - \wp(\omega'))(\wp(z) - \wp(\omega + \omega')) = \frac{1}{4}\wp'^2(z),$$

mentre le restanti $n^2 - 4$ coppie (r, s) si distribuiscono due a due in coppie opposte \Rightarrow

$$\psi_n(z) = C'' \prod_{r,s} \left[\wp(z) - \wp\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right) \right] \quad (n \equiv 0 \pmod{2}),$$

in cui (r, s) percorrono $\frac{n^2-4}{2}$ coppie, scelte col criterio detto nel caso precedente. Determinando la costante C'' come prima:

$$\psi_n(z) = -\frac{n}{2}\wp'(z) \cdot \prod_{r,s} \left[\wp(z) - \wp\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right) \right] \quad (n \equiv 0 \pmod{2}). \quad (3.54)$$

Dunque la funzione $\psi_n(z)$ per n dispari è un polinomio di grado $\frac{n^2-1}{2}$ in $\wp(z)$, mentre per n pari è il prodotto di $\wp'(z)$ per un polinomio di grado $\frac{n^2-4}{2}$ in $\wp(z)$.

Ora preoccupiamoci di dare una definizione ricorsiva delle $\psi_n(z)$. Vediamo subito che:

$$\psi_1(z) = \frac{\sigma(z)}{\sigma(z)} = 1 \quad \text{e} \quad \psi_2(z) = -\wp'(z).$$

Al fine di calcolare $\psi_3(z)$ prendiamo la formula (3.42) (teorema di addizione) e poniamo $z = nz, v = z$:

$$\begin{aligned} \wp(nz) - \wp(z) &= -\frac{\sigma[(n-1)z] \cdot \sigma[(n+1)z]}{\sigma^2(nz) \cdot \sigma^2(z)} = \\ &= -\frac{\left(\frac{\sigma[(n-1)z]}{\sigma^{(n-1)^2}(z)}\right) \cdot \left(\frac{\sigma[(n+1)z]}{\sigma^{(n+1)^2}(z)}\right)}{\left(\frac{\sigma(nz)}{\sigma^{n^2}(z)}\right)} = -\frac{\psi_{n-1}(z) \cdot \psi_{n+1}(z)}{\psi_n^2(z)}. \end{aligned}$$

Per $n = 2$: $\wp(2z) - \wp(z) = -\frac{\psi_1(z) \cdot \psi_3(z)}{\psi_2^2(z)} \Rightarrow \psi_3(z) = -\wp'^2(z)(\wp(2z) - \wp(z))$; usiamo la formula (3.31) ed esprimiamo \wp', \wp'' in termini di \wp :

$$\begin{aligned}\psi_3(z) &= -\wp'^2(z) \left[-2\wp(z) + \left(\frac{\wp''(z)}{2\wp'(z)} \right)^2 - \wp(z) \right] = -\frac{1}{4}(\wp''^2(z) - 12\wp(z)\wp'^2(z)) \\ &= -\frac{1}{4} \left[(6\wp^2(z) - \frac{g_2}{2})^2 - 12\wp(z)(4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3) \right],\end{aligned}$$

da cui, con calcoli banali:

$$\psi_3(z) = 3\wp^4(z) - \frac{3}{2}g_2\wp^2(z) - 3g_3\wp(z) - \frac{1}{16}g_2^2.$$

Adesso occupiamoci di $\psi_4(z)$. Il teorema di addizione per la $\wp(z)$ può essere scritto (la verifica è banale) come:

$$\wp(z+v) = \frac{2(\wp(z)\wp(v) - \frac{1}{4}g_2)(\wp(z)+\wp(v)) - g_3 - \wp'(z)\wp'(v)}{2(\wp(z)-\wp(v))^2};$$

ora cambiamo v con $-v$ e teniamo conto che \wp è pari e \wp' è dispari:

$$\wp(z-v) = \frac{2(\wp(z)\wp(v) - \frac{1}{4}g_2)(\wp(z)+\wp(v)) - g_3 + \wp'(z)\wp'(v)}{2(\wp(z)-\wp(v))^2};$$

sommiamo membro a membro e troviamo:

$$\wp(z+v) + \wp(z-v) = \frac{2(\wp(z)\wp(v) - \frac{1}{4}g_2)(\wp(z)+\wp(v)) - g_3}{(\wp(z)-\wp(v))^2}$$

Se poniamo $z = 2z$ e $v = z$:

$$\wp(3z) + \wp(z) = \frac{2[\wp(2z)\wp(z) - \frac{1}{4}g_2][\wp(2z) + \wp(z)] - g_3}{(\wp(2z) - \wp(z))^2}.$$

Facendo alcuni calcoli e confrontando quest'ultima con: $\wp(3z) - \wp(z) = -\frac{\psi_2(z)\cdot\psi_4(z)}{\psi_3^2(z)}$ si ha:

$$\psi_4(z) = \wp'(z)(\wp'^4(z) - \psi_3(z)\wp''(z)).$$

Abbiamo così trovato una formula per le prime quattro funzioni ψ_n . Poiché, dati a, b, c, d 4 valori qualsiasi dell'argomento z , vale banalmente l'identità:

$$(\wp(a) - \wp(b))(\wp(c) - \wp(d)) + (\wp(a) - \wp(c))(\wp(d) - \wp(b)) + (\wp(a) - \wp(d))(\wp(b) - \wp(c)) = 0$$

abbiamo, sfruttando la (3.42):

$$\begin{aligned}\sigma(a-b)\sigma(a+b)\sigma(c-d)\sigma(c+d) + \sigma(a-c)\sigma(a+c)\sigma(d-b)\sigma(d+b) + \\ + \sigma(a-d)\sigma(a+d)\sigma(b-c)\sigma(b+c) = 0.\end{aligned}$$

Mettiamo $a = mz$, $b = nz$, $c = z$, $d = 0$ e poi dividiamo tutto per $\sigma^{2m^2+2n^2+2}(z)$:

$$\psi_{m+n}\psi_{m-n} = \psi_{m-1}\psi_{m+1}\psi_n^2 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}\psi_m^2 ;$$

ponendo $m = n + 1$ e ricordando che $\psi_1 = 1$:

$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3, \quad (3.55)$$

mentre ponendo $n = n - 1$ e $m = n + 1$ e ricordando che $\psi_2 = -\wp'$:

$$\psi_{2n} = \frac{\psi_n}{\wp'(z)}(\psi_{n-2}\psi_{n+1}^2 - \psi_{n+2}\psi_{n-1}^2). \quad (3.56)$$

Quello che ci interessa, come già anticipato, è calcolare $\psi_5(z) = \frac{\sigma(5z)}{\sigma^{25}(z)}$. Usiamo la prima delle due formule ricorsive (omettiamo l'argomento, che è sempre z):

$$\psi_5 = \psi_4\psi_2^3 - \psi_1\psi^3 = -\wp'^8 + \frac{1}{4}\wp'^4\wp''(\wp'\wp''' - \wp''^2) - \frac{1}{64}(\wp'\wp''' - \wp''^2)^3 .$$

Se sostituiamo $\wp''' = 12\wp\wp'$ troviamo che:

$$\psi_5 = 0 \Leftrightarrow (\wp''^2 - 12\wp\wp'^2)^3 - 16\wp'^4\wp''(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2) - 64\wp'^8 = 0 \quad (3.57)$$

che è proprio ciò che useremo a un certo punto nell'algoritmo.

3.4 Funzioni θ di Jacobi

Ora occupiamoci di un ultimo gruppo di funzioni trascendenti: le 4 funzioni *theta di Jacobi* $\theta_1(v), \theta_2(v), \theta_3(v), \theta_4(v)$. Esse non sono funzioni ellittiche ma sono profondamente collegate alle 4 funzioni $\sigma(z), \sigma_1(z), \sigma_2(z), \sigma_3(z)$. Sono inoltre importanti per la computazione numerica delle funzioni ellittiche, dato che, come vedremo, sono rappresentate da serie la cui convergenza è molto rapida.

Dalle formule (3.41) e (3.48) sappiamo che:

$$\begin{aligned} \sigma(z + 2\omega) &= -e^{2\eta(z+\omega)}\sigma(z), & \sigma_1(z + 2\omega) &= -e^{2\eta(z+\omega)}\sigma_1(z), \\ \sigma_2(z + 2\omega) &= e^{2\eta(z+\omega)}\sigma_2(z), & \sigma_3(z + 2\omega) &= e^{2\eta(z+\omega)}\sigma_3(z); \end{aligned}$$

inoltre con semplici calcoli possiamo osservare che le funzioni $\frac{1}{\omega}\sigma(z|\omega, \omega')$ e $\sigma_a(z|\omega, \omega')$ sono omogenee di grado zero nei loro tre argomenti; ciò vuol dire, prendendo $t = 1/\omega$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\sigma(z|\omega, \omega') &= \frac{1}{\omega}\sigma\left(\frac{z}{\omega} \mid 1, \frac{\omega'}{\omega}\right) \\ \sigma_a(z, \omega, \omega') &= \sigma_a\left(\frac{z}{\omega}, 1, \frac{\omega'}{\omega}\right) \quad (a = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

e quindi dipendono solo, ad esempio, dai rapporti $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ e:

$$\nu = \frac{z}{2\omega}. \quad (3.58)$$

Definiamo le funzioni theta così:

$$\begin{aligned}
\theta_1(\nu|\tau) &= \frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}z^2} \sigma(z) \\
\theta_2(\nu|\tau) &= A_2 e^{-\frac{\eta}{2\omega}z^2} \sigma_1(z) \\
\theta_3(\nu|\tau) &= A_3 e^{-\frac{\eta}{2\omega}z^2} \sigma_2(z) \\
\theta_4(\nu|\tau) &= \frac{A_4}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}z^2} \sigma_3(z)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

con A_1, A_2, A_3, A_4 costanti da determinare.

Vediamo cosa succede a queste funzioni quando si rimpiazza z con $z + 2\omega$. Notiamo subito che a un accrescimento di 2ω per z corrisponde un accrescimento di 1 per ν (perché $(z + 2\omega)/2\omega = \nu + 1$); allora:

$$\begin{aligned}
\theta_1(\nu + 1|\tau) &= \frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}(z+2\omega)^2} \sigma(z + 2\omega) = \\
&= \frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}z^2} \cdot e^{-2\eta z^2} \cdot e^{-2\eta\omega} \cdot [-e^{2\eta(z+\omega)} \sigma(z)] = -\frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}z^2} \sigma(z) = -\theta_1(\nu)
\end{aligned}$$

e per $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ si fanno calcoli analoghi, trovando:

$$\begin{aligned}
\theta_1(\nu + 1) &= -\theta_1(\nu) & \theta_2(\nu + 1) &= -\theta_2(\nu) \\
\theta_3(\nu + 1) &= \theta_3(\nu) & \theta_4(\nu + 1) &= \theta_4(\nu) \quad .
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Ora invece aumentiamo z di $2\omega'$, il che corrisponde ad aumentare ν di τ (perché $(z + 2\omega')/2\omega = \nu + \tau$), e analizziamo quel che succede alle theta. Facciamo i calcoli per θ_1 , quelli per le altre saranno analoghi. Osserviamo innanzitutto che:

$$\sigma(z + 2\omega') = -e^{\tilde{\eta}(z+\frac{2\omega'}{2})} \sigma(z) = -e^{2\eta'(z+\omega')} \sigma(z),$$

e allora:

$$\begin{aligned}
\theta_1(\nu + \tau) &= \frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}(z+2\omega')^2} \sigma(z + 2\omega') = -\frac{A_1}{\omega} \sigma(z) e^{[-\frac{\eta}{2\omega}z^2 - \frac{2\eta}{\omega}(\omega'^2 + z\omega') + 2\eta'(z+\omega')]} \\
&= -\frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}z^2} \sigma(z) \cdot e^{-\frac{2\omega'}{\omega}(\eta\omega' - \eta'\omega) - \frac{2}{\omega}(\eta\omega' - \eta'\omega)z} = -\theta_1(\nu) \cdot e^{-2i\pi\nu - i\pi\tau};
\end{aligned}$$

nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione di Legendre (Proprietà 5). Se adesso chiamiamo:

$$q = e^{i\pi\tau}, \tag{3.61}$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\theta_1(\nu + \tau) &= -q^{-1} e^{-2i\pi\nu} \theta_1(\nu) & \theta_2(\nu + \tau) &= q^{-1} e^{-2i\pi\nu} \theta_2(\nu) \\
\theta_3(\nu + \tau) &= q^{-1} e^{-2i\pi\nu} \theta_3(\nu) & \theta_4(\nu + \tau) &= -q^{-1} e^{-2i\pi\nu} \theta_4(\nu).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Oss: $\theta_1(\nu)$ è dispari, $\theta_2(\nu), \theta_3(\nu), \theta_4(\nu)$ sono pari.

(segue dal fatto che $\sigma(z)$ è dispari e $\sigma_1(z), \sigma_2(z), \sigma_3(z)$ sono pari)

Per sapere quali sono gli zeri delle θ , dobbiamo sapere quali sono gli zeri delle σ . Poiché la funzione $\sigma(z)$ ha come zeri tutti e soli i punti $z = 2m\omega + 2n\omega'$,

dalla formula (3.48), ricordando come sono definiti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, segue che:
 $\sigma_1(z)$ ha come zeri tutti e soli i punti $z = (2m + 1)\omega + 2n\omega'$,
 $\sigma_2(z)$ ha come zeri tutti e soli i punti $z = (2m + 1)\omega + (2n + 1)\omega'$,
 $\sigma_3(z)$ ha come zeri tutti e soli i punti $z = 2m\omega + (2n + 1)\omega'$.
Adesso possiamo trovare gli zeri delle theta:

$$\theta_1(z) = 0 \Leftrightarrow \sigma(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2m\omega + 2n\omega' \Leftrightarrow \nu = m + n\tau$$

$$\theta_2(z) = 0 \Leftrightarrow \sigma_1(z) = 0 \Leftrightarrow z = (2m + 1)\omega + 2n\omega' \Leftrightarrow \nu = m + \frac{1}{2} + n\tau$$

$$\begin{aligned} \theta_3(z) = 0 \Leftrightarrow \sigma_2(z) = 0 \Leftrightarrow z = (2m + 1)\omega + (2n + 1)\omega' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nu = m + \frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \end{aligned}$$

$$\theta_4(z) = 0 \Leftrightarrow \sigma_3(z) = 0 \Leftrightarrow z = m\omega + (2n + 1)\omega' \Leftrightarrow \nu = m + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau.$$

Le funzioni θ , a differenza delle σ , ammettono un periodo: si vede dalle (3.60) che θ_1, θ_2 hanno periodo 2, mentre θ_3, θ_4 hanno periodo 1. Questo è importante dal punto di vista degli sviluppi in serie, visto che vale:

Teorema 12 *Se la funzione intera $f(z)$ ammette il periodo p , essa si può rappresentare come: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \zeta^n$ con $\zeta = e^{\frac{2i\pi z}{p}}$ e α_n opportune costanti. La serie è assolutamente convergente in $\mathbb{C} - \{0\}$ (è conseguenza della sviluppabilità in serie di Laurent).*

Applichiamo il teorema alle funzioni theta. Prendiamo prima θ_3, θ_4 , per le quali $p = 1 \Rightarrow \theta_a(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^{(a)} (e^{2i\pi\nu})^n$ per α_n opportune costanti ($a = 3, 4$). Per determinare le $\alpha_n^{(a)}$ usiamo la terza e la quarta delle (3.62) e teniamo conto che quando $\nu \mapsto \nu + \tau$, $e^{i\pi\nu} \mapsto e^{i\pi\nu} e^{i\pi\tau} = qe^{i\pi\nu}$; allora:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^{(3)} q^{2n} e^{2ni\pi\nu} = \theta_3(\nu + \tau) = q^{-1} e^{-2i\pi\nu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^{(3)} e^{2ni\pi\nu} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^{(3)} q^{-1} e^{2(n-1)i\pi\nu} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n+1}^{(3)} q^{-1} e^{2ni\pi\nu} \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^{(4)} q^{2n} e^{2ni\pi\nu} = \theta_4(\nu + \tau) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n+1}^{(4)} q^{-1} e^{2ni\pi\nu}$$

da cui seguono le relazioni: $\alpha_{n+1}^{(3)} = q^{2n+1} \alpha_n^{(3)}$ e $\alpha_{n+1}^{(4)} = -q^{2n+1} \alpha_n^{(4)}$
e quindi $\alpha_n^{(3)} = \alpha_0^{(3)} q^{n^2}$ e $\alpha_n^{(4)} = (-1)^n \alpha_0^{(4)} q^{n^2}$.

Per ora θ_3, θ_4 sono determinate a meno di un fattore costante, ma se si pone $\alpha_0^{(3)} = \alpha_0^{(4)} = 1$:

$$\theta_3(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2ni\pi\nu}, \quad \theta_4(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2ni\pi\nu}. \quad (3.63)$$

Adesso prendiamo θ_1, θ_2 , le quali ammettono il periodo $p = 2$. Per il teorema precedente: $\theta_a(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^{(a)} (e^{i\pi\nu})^n$ ($a = 1, 2$). I calcoli sono analoghi a quelli appena visti per θ_3, θ_4 , solo che qui usiamo la prima e la seconda delle (3.62) e teniamo conto che quando $\nu \mapsto \nu + 1$, $e^{i\pi\nu} \mapsto e^{i\pi\nu} e^{i\pi} = -e^{i\pi\nu}$. Otteniamo:

$$\theta_1(\nu) = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)i\pi\nu}, \quad \theta_2(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)i\pi\nu}. \quad (3.64)$$

Il fattore q^{n^2} ci fa subito capire la convergenza estremamente rapida di queste funzioni. Se nella prima delle (3.63) raccogliamo i termini corrispondenti a valori di n uguali e contrari:

$$q^{n^2} e^{2ni\pi\nu} + q^{(-n)^2} e^{-2ni\pi\nu} = q^{n^2} (2 \cos(2n\pi\nu))$$

e nelle altre si può fare la stessa cosa. Allora possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned} \theta_1(\nu) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin[(2n+1)\pi\nu] \\ \theta_2(\nu) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n(n+1)} \cos[(2n+1)\pi\nu] \\ \theta_3(\nu) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n^2} \cos(2n\pi\nu) \\ \theta_4(\nu) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2n\pi\nu) \end{aligned} \quad (3.65)$$

e cioè:

$$\begin{aligned} \theta_1(\nu) &= 2q^{\frac{1}{4}} (\sin(\pi\nu) - q^2 \sin(3\pi\nu) + q^6 \sin(5\pi\nu) - \dots) \\ \theta_2(\nu) &= 2q^{\frac{1}{4}} (\cos(\pi\nu) + q^2 \cos(3\pi\nu) + q^6 \cos(5\pi\nu) + \dots) \\ \theta_3(\nu) &= 1 + 2(q \cos(2\pi\nu) + q^4 \cos(4\pi\nu) + q^9 \cos(6\pi\nu) + \dots) \\ \theta_4(\nu) &= 1 - 2(q \cos(2\pi\nu) - q^4 \cos(4\pi\nu) + q^9 \cos(6\pi\nu) - \dots) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ponendo $\nu = 0$ in $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ e derivando rispetto a ν e poi ponendo $\nu = 0$ in θ_1 abbiamo:

$$\begin{aligned}\theta_1'(0) &= 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots) \\ \theta_2(0) &= 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \dots) \\ \theta_3(0) &= 1 + 2(q + q^4 + q^9 + \dots) \\ \theta_4(0) &= 1 - 2(q - q^4 + q^9 - \dots).\end{aligned}\tag{3.67}$$

Vediamo infine gli sviluppi delle funzioni theta come prodotti infiniti (per i dettagli vedi [1], p.437). Per fare ciò dobbiamo prima sviluppare le funzione σ in prodotti infiniti. Ad esempio, abbiamo visto che σ_3 ha queste proprietà:

1. è trascendente intera con zeri semplici nei punti $z = 2m\omega + (2n - 1)\omega'$,
2. $\sigma_3(z + 2\omega) = e^{2\eta(z+\omega)} \cdot \sigma_3(z)$ e $\sigma_3(z + 2\omega') = -e^{2\eta'(z+\omega')} \cdot \sigma_3(z)$,
3. $\sigma_3(0) = 1$.

Tali proprietà caratterizzano la funzione, che avrà la forma:

$$\sigma_3(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n-1} e^{\frac{\pi iz}{\omega}})(1 - q^{2n-1} e^{-\frac{\pi iz}{\omega}})}{(1 - q^{2n-1})^2}.$$

Nello stesso modo si arriva a esprimere $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ con prodotti infiniti. A questo punto, ricordando anche le formule (3.59): se chiamiamo

$$q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})\tag{3.68}$$

allora gli sviluppi delle theta saranno:

$$\begin{aligned}\theta_1(\nu) &= 2q_0 q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi\nu) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos(2\pi\nu) + q^{4n}) \\ \theta_2(\nu) &= 2q_0 q^{\frac{1}{4}} \cos(\pi\nu) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos(2\pi\nu) + q^{4n}) \\ \theta_3(\nu) &= q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos(2\pi\nu) + q^{4n-2}) \\ \theta_4(\nu) &= q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos(2\pi\nu) + q^{4n-2}).\end{aligned}\tag{3.69}$$

3.4.1 Relazioni delle θ fra loro e con le funzioni precedentemente considerate

In questa sezione vedremo le principali relazioni che legano le funzioni theta alle funzioni viste in precedenza.

Come prima cosa, diamo le relazioni tra le θ e le σ . Abbiamo definito le θ tramite le formule (3.59), quindi dobbiamo semplicemente trovare i coefficienti A_1, A_2, A_3, A_4 . Per gli ultimi tre basta prendere $z = \nu = 0$ per avere: $A_a = \theta_a(0)$ ($a = 2, 3, 4$). Per trovare A_1 , invece, deriviamo rispetto a z :

$$\frac{1}{2\omega} \theta'_1(\nu) = \frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega} z^2} \left(\sigma'(z) - \frac{\eta}{\omega} z \sigma(z) \right),$$

poi poniamo $z = \nu = 0$ e otteniamo: $A_1 = \frac{\theta'_1(0)}{2} \cdot \frac{1}{\sigma'(0)} = \frac{1}{2} \theta'_1(0)$. Dunque:

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= 2\omega e^{\frac{\eta}{2\omega} z^2} \cdot \frac{\theta_1(\nu)}{\theta'_1(0)} & \sigma_1(z) &= e^{\frac{\eta}{2\omega} z^2} \cdot \frac{\theta_2(\nu)}{\theta_2(0)} \\ \sigma_2(z) &= e^{\frac{\eta}{2\omega} z^2} \cdot \frac{\theta_3(\nu)}{\theta_3(0)} & \sigma_3(z) &= e^{\frac{\eta}{2\omega} z^2} \cdot \frac{\theta_4(\nu)}{\theta_4(0)}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Per quanto riguarda la relazione tra le θ e \wp, \wp', ζ , con pochi e semplici passaggi arriviamo a queste formule (ricordiamo che $\nu = z/2\omega$):

$$\begin{aligned} \wp(z) &= e_a + \frac{1}{4\omega^2} \left[\frac{\theta'_1(0) \cdot \theta_{a+1}(\nu)}{\theta_{a+1}(0) \cdot \theta_1(\nu)} \right]^2 \\ \wp'(z) &= -\frac{1}{4\omega^3} \frac{\theta_2(\nu)\theta_3(\nu)\theta_4(\nu)\theta_1^3(0)}{\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)\theta_1^3(\nu)} \\ \zeta(z) &= \frac{1}{2\omega} \frac{\theta'_1(\nu)}{\theta_1(\nu)} + 2\eta\nu. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Per completezza, scriviamo anche le formule che esprimono le 3 funzioni ellittiche di Jacobi in funzione delle theta:

$$\begin{aligned} sn(\sqrt{e_1 - e_3} z) &= 2\omega \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\theta_4(0)\theta_1(\nu)}{\theta_4(\nu)\theta'_1(0)} \\ cn(\sqrt{e_1 - e_3} z) &= \frac{\theta_4(0)\theta_2(\nu)}{\theta_2(0)\theta_4(\nu)} \\ dn(\sqrt{e_1 - e_3} z) &= \frac{\theta_4(0)\theta_3(\nu)}{\theta_3(0)\theta_4(\nu)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ora occupiamoci delle relazioni che legano le θ tra loro. Supponiamo di sostituire ν con $\nu + \frac{1}{2}$ e teniamo presente che:

$$\begin{aligned} \sin \left[(2m+1) \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \pi \right] &= (-1)^m \cos \left[(2m+1) \nu \pi \right], \\ \cos \left[(2m+1) \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \pi \right] &= (-1)^{m+1} \sin \left[(2m+1) \nu \pi \right], \\ \cos \left[2m \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \pi \right] &= (-1)^m \cos(2m\nu\pi); \end{aligned}$$

allora:

$$\begin{aligned}\theta_1\left(\nu + \frac{1}{2}\right) &= \theta_2(\nu) & \theta_2\left(\nu + \frac{1}{2}\right) &= -\theta_1(\nu) \\ \theta_3\left(\nu + \frac{1}{2}\right) &= \theta_4(\nu) & \theta_4\left(\nu + \frac{1}{2}\right) &= \theta_3(\nu) .\end{aligned}\quad (3.73)$$

Se invece sostituiamo ν con $\nu + \frac{\tau}{2}$, visto che $e^{i\pi(\nu + \frac{\tau}{2})} = e^{i\pi\nu} \cdot e^{i\pi\frac{\tau}{2}} = z \cdot \sqrt{q}$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\theta_3\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} (z\sqrt{q})^{2n} = q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(n+\frac{1}{2})} z^{2n} \\ &= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(n-\frac{1}{2})} z^{2n-2} = q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \theta_2(\nu)\end{aligned}$$

e facendo calcoli analoghi per le altre theta, si ha:

$$\begin{aligned}\theta_1\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) &= iq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \theta_4(\nu) & \theta_2\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \theta_3(\nu) \\ \theta_3\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) &= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \theta_2(\nu) & \theta_4\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) &= iq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \theta_1(\nu) .\end{aligned}\quad (3.74)$$

Insistiamo ancora un po' sulle funzioni theta, per ottenere delle formule che si riveleranno utili in seguito. Ci interessa, in particolare, collegare le θ ai tre invarianti irrazionali e_1, e_2, e_3 della \wp . Se nella formula (3.50) mettiamo $z = \omega_b$:

$$\sqrt{e_b - e_a} = \frac{\sigma_a(\omega_b)}{\sigma(\omega_b)} \quad (a, b = 1, 2, 3),$$

quindi:

$$\begin{aligned}\sqrt{e_1 - e_2} &= \frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma(\omega)} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta_3(\frac{1}{2}) \cdot \theta_1'(0)}{\theta_3(0) \cdot \theta_1(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta_1'(0) \cdot \theta_4(0)}{\theta_2(0) \cdot \theta_3(0)} , \\ \sqrt{e_1 - e_3} &= \frac{\sigma_3(\omega)}{\sigma(\omega)} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta_4(\frac{1}{2}) \cdot \theta_1'(0)}{\theta_4(0) \cdot \theta_1(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta_1'(0) \cdot \theta_3(0)}{\theta_2(0) \cdot \theta_4(0)} , \\ \sqrt{e_2 - e_3} &= \frac{\sigma_3(\omega + \omega')}{\sigma(\omega + \omega')} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta_4(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) \cdot \theta_1'(0)}{\theta_4(0) \cdot \theta_1(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2})} = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta_1'(0) \cdot \theta_2(0)}{\theta_3(0) \cdot \theta_4(0)} .\end{aligned}$$

Valendo le (3.46), segue immediatamente:

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} \quad \sqrt{k'} = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} \quad (3.75)$$

(per scrivere queste formule abbiamo implicitamente scelto il segno + quando abbiamo estratto la radice).

Siccome $k^2 + k'^2 = 1$, $[\theta_2^4(0)/\theta_3^4(0)] + [\theta_4^4(0)/\theta_3^4(0)] = 1$, cioè:

$$\theta_2^4(0) + \theta_4^4(0) = \theta_3^4(0) .$$

Citiamo soltanto queste altre proprietà:

$$\theta_1'(0) = \pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0) \quad (\text{identità di Jacobi}) \quad (3.76)$$

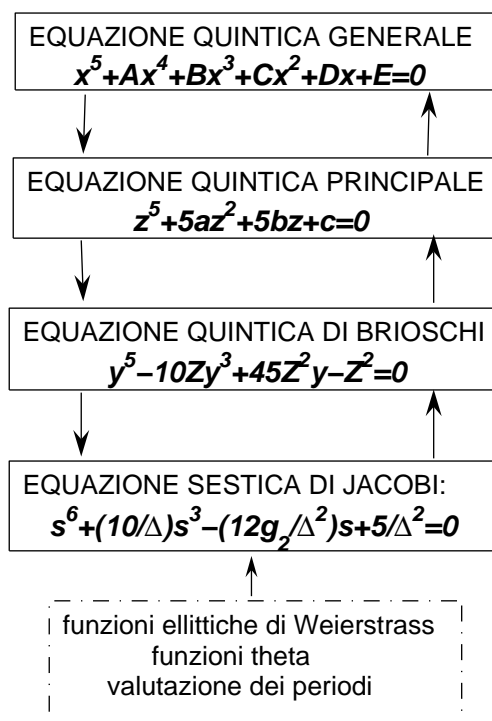
$$\eta = -\frac{1}{12\omega} \frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)} \quad (3.77)$$

$$\sqrt[4]{\Delta} = \frac{\pi}{4\omega^3} \theta_1'^2(0) . \quad (3.78)$$

Capitolo 4

L'algoritmo di Kiepert per risolvere l'equazione quintica generale

La struttura dell'algoritmo di Kiepert è descritta dallo schema seguente.



L'algoritmo può essere diviso in 7 passi:

- 1) Si applica una trasformazione di Tschirnhaus per passare dalla quintica

generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \quad (4.1)$$

alla quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0. \quad (4.2)$$

- 2) Si usa una seconda trasformazione di Tschirnhaus del tipo più generale (vedi sezione 3.1) per passare dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0. \quad (4.3)$$

In questo passaggio ci verranno in aiuto i polinomi poliedrali introdotti nella sezione 3.2.

- 3) Si trasforma la quintica di Brioschi nella corrispondente sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0 \quad (4.4)$$

(teorema di Perron) e si collegano i coefficienti della sestica agli invarianti g_2, g_3, Δ delle funzioni ellittiche.

- 4) Si utilizza la teoria delle funzioni ellittiche per esprimere le soluzioni della sestica di Jacobi in termini di un'opportuna \wp di Weierstrass.
- 5) Si utilizzano le relazioni tra funzioni ellittiche e funzioni theta per esprimere le soluzioni della sestica di Jacobi in termini di serie theta con parametro q .
- 6) Si calcola il parametro q corrispondente a una particolare sestica di Jacobi (problema dell'inversione), il che permette di calcolare i valori delle radici s_∞, s_k della sestica.
- 7) Si percorrono al contrario le tre trasformazioni fatte per arrivare alla sestica di Jacobi, ricavando nell'ordine le y_k , le z_k e infine le x_k .

4.1 Passo 1: passaggio dalla quintica generale alla quintica principale

Partiamo dall'equazione (4.1) e scriviamo le relazioni che discendono dalle identità di Newton:

$$\begin{aligned} \sum x_k &= -A & \sum x_k^3 &= -A^3 + 3AB - 3C \\ \sum x_k^2 &= A^2 - 2B & \sum x_k^4 &= A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D. \end{aligned}$$

Consideriamo la trasformazione di Tschirnhaus:

$$z = x^2 - ux + v. \quad (4.5)$$

Nella quintica principale manca il termine con z^4 , quindi deve essere:

$$0 = \sum z_k = \sum x_k^2 - u \sum x_k + 5v = A^2 - 2B - u(-A) + 5v,$$

da cui: $5v = -Au - A^2 + 2B$.

Manca anche il termine con z^3 , e quindi:

$$0 = \sum z_k^2 = \sum (x_k^2 - ux_k + v)^2 = \dots = u^2(A^2 - 2B) + 5v^2 + 2Auv + 2u(A^3 - 3AB + 3C) + 2v(A^2 - 2B) + A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D;$$

sostituendo in essa la prima relazione trovata tra u e v troviamo:

$$(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + (2A^4 - 8A^2B + 10AC + 3B^2 - 10D) = 0.$$

Risolviamo quest'ultima per u (avrà in generale 2 soluzioni, ma ne scegliamo una) e da u ricaviamo anche il valore di v ; sostituendo questi due valori nella (4.5) troviamo la trasformazione da applicare.

Adesso ricaviamo i coefficienti a, b, c dell'equazione (4.2) in cui quella generale viene trasformata. A tale scopo definiamo A', B', C', D', E' come coefficienti della quintica modificata, le cui radici sono le radici della (4.1) meno u :

$$\begin{aligned} x^5 + A'x^4 + B'x^3 + C'x^2 + D'x + E' &= \\ = (x + u)^5 + A(x + u)^4 + B(x + u)^3 + C(x + u)^2 + D(x + u) + E &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Scriviamo la quintica principale come prodotto di fattori lineari, usando v come variabile, e ci sostituiamo la (4.5):

$$v^5 + 5av^2 + 5bv + c = \prod (v - z_k) = -\prod (x_k^2 - ux_k) = -\prod x_k \prod (x_k - u) = -EE'.$$

Uguagliando i termini noti nella (4.6) abbiamo $E' = E + Du + Cu^2 + Bu^3 + Au^4 + u^5$ e otteniamo un'equazione per il coefficiente c :

$$c = -E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E) - v^5 - 5av^2 - 5bv. \quad (4.7)$$

Per trovare una formula per il coefficiente b , deriviamo $v^5 + 5av^2 + 5bv + c = \prod (v - z_k)$ rispetto a v :

$$\begin{aligned} 5v^4 + 10av + 5b + c &= \sum_j \prod_{k \neq j} (v - z_k) = \sum_j \prod_{k \neq j} x_k (u - x_k) = \\ &= \prod_k x_k (u - x_k) \sum_j \frac{1}{x_j (u - x_j)} = -EE' \frac{1}{u} \sum_j \left(\frac{1}{u - x_j} + \frac{1}{x_j} \right); \end{aligned}$$

$$\sum_j \frac{1}{x_j} = \frac{\sum_k \prod_{j \neq k} x_j}{\prod_j x_j} = -\frac{D}{E} \quad \text{e} \quad \sum_j \frac{1}{u - x_j} = \frac{D'}{E'}$$

e sostituendo e facendo semplici calcoli troviamo la formula per b :

$$5b = D(u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D) - E(5u^3 + 4Au^2 + 3Bu + C) - 5v^4 - 10av. \quad (4.8)$$

Derivando un'altra volta e facendo calcoli analoghi ai precedenti otteniamo anche la formula per a :

$$5a = -C(u^3 + Au^2 + Bu + C) + D(4u^2 + 3Au + 2B) - E(5u + 2A) - 10v^3. \quad (4.9)$$

4.2 Passo 2: passaggio dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

Nel passaggio dall'equazione quintica principale a quella di Brioschi, dipendente da un unico parametro Z , giocano un ruolo fondamentale i polinomi poliedrali di ottaedro e icosaedro. Avevamo visto come dividere i 30 lati dell'icosaedro regolare in 5 insiemi di 6 lati ciascuno, in modo che i punti medi dei lati di ogni insieme fossero i vertici di 5 ottaedri (Figura 3.2). Ricordiamo quali sono i polinomi poliedrali di ottaedro e icosaedro, posizionati entrambi in modo che abbiano un vertice nel polo nord della sfera di Riemann:

$$\begin{aligned} \text{vertici ottaedro: } \tau &= uv(u^4 - v^4) \\ \text{lati ottaedro: } X &= u^{12} - 33(u^8v^4 + u^4v^8) + v^{12} \\ \text{facce ottaedro: } W &= u^8 + 14u^4v^4 + v^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vertici icosaedro: } f &= uv(u^{10} + 11u^5v^5 - v^{10}) \\ \text{lati icosaedro: } T &= u^{30} + 522(u^{25}v^5 - u^5v^{25}) - 10005(u^{20}v^{10} + u^{10}v^{20}) + v^{30} \\ \text{facce icosaedro: } H &= -u^{20} + 228(u^{15}v^5 - u^5v^{15}) - 494u^{10}v^{10} - v^{20}. \end{aligned}$$

Ricordiamo anche l'identità dell'icosaedro, della quale avevamo anticipato l'utilità per la risoluzione dell'equazione di quinto grado:

$$1728f^5 - H^3 - T^2 \equiv 0. \quad (4.10)$$

Poiché la strada che ci porterà alla trasformazione cercata è piuttosto lunga, dividiamo in vari punti il percorso.

- Come prima cosa vogliamo trovare i polinomi dei vertici dei 5 ottaedri in cui suddividiamo l'icosaedro. Nessuno di questi sarà esattamente τ perché nessuno degli ottaedri ha un vertice nel polo nord.

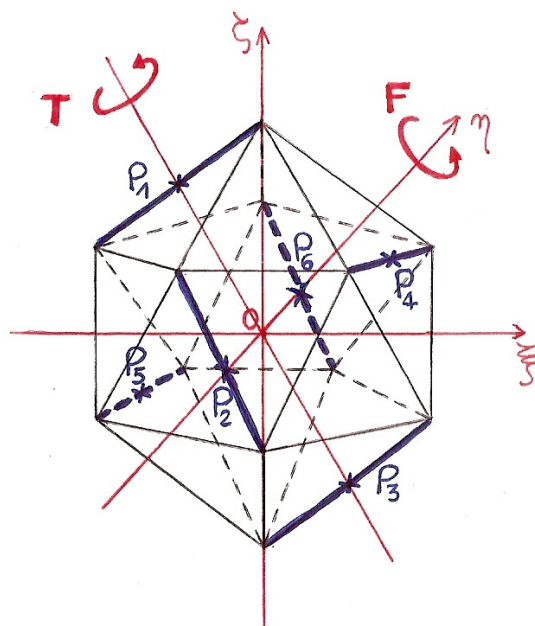


Figura 4.1: Sono evidenziati i lati dell'icosaedro i cui punti medi danno origine a uno dei 5 ottaedri.

Nella Figura 4.1 sono evidenziati 6 lati dell'icosaedro che formano uno dei 5 insiemi e che quindi corrispondono a uno dei 5 ottaedri, il quale ha vertici $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Sono stati inoltre tracciati gli assi cartesiani ξ, η, ζ . Consideriamo tre particolari rotazioni: la rotazione F di 180° attorno all'asse η , la rotazione T di 180° attorno all'asse OP_1 , dove P_1 è il punto medio del lato A_0V , e la composizione TF , che è la rotazione di 180° attorno all'asse perpendicolare a entrambi gli assi η e OP_1 . Si intuisce dalla figura (ma si potrebbero fare anche i calcoli) che le rotazioni F, T appartengono al gruppo delle simmetrie dell'icosaedro, e di conseguenza anche TF vi appartiene, visto che I_h è un gruppo. Queste trasformazioni si possono scrivere così:

$$\begin{aligned}
 F : \quad z' &= -\frac{1}{z} \\
 T : \quad z' &= \frac{(\varepsilon - \varepsilon^4)z + (\varepsilon^3 - \varepsilon^2)}{(\varepsilon^3 - \varepsilon^2)z - (\varepsilon - \varepsilon^4)} & (\varepsilon = \exp(2\pi i/5)) \\
 TF : \quad z' &= \frac{(\varepsilon^3 - \varepsilon^2)z - (\varepsilon - \varepsilon^4)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4)z - (\varepsilon^3 - \varepsilon^2)}.
 \end{aligned}$$

Vediamo quali sono i punti lasciati inalterati dalle tre trasformazioni. Per F , ad esempio, sostituiamo $z' = z$ nella formula che esprime la rotazione e otteniamo $z^2 + 1 = 0$. Nello stesso modo troviamo che i punti fissi per

T devono soddisfare $z^2 - 2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)z - 1 = 0$ e quelli per TF soddisfano $z^2 - 2(\varepsilon + \varepsilon^4)z - 1 = 0$. Se in queste 3 equazioni sostituiamo $z = u/v$ e chiamiamo:

$$A_0 = u^2 + v^2, \quad B_0 = u^2 - 2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)uv - v^2, \quad C_0 = u^2 - 2(\varepsilon + \varepsilon^4)uv - v^2,$$

abbiamo che:

$$\begin{aligned} A_0 = 0 &\iff (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } F, \\ B_0 = 0 &\iff (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } T, \\ C_0 = 0 &\iff (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } TF. \end{aligned}$$

Con semplici calcoli vediamo che

$$t_0 := A_0 B_0 C_0 = u^6 + 2u^5 v - 5u^4 v^2 - 5u^2 v^4 - 2uv^5 + v^6; \quad (4.11)$$

t_0 si annulla nei punti lasciati fissi da una delle tre rotazioni. P_1, P_3 appartengono all'asse della rotazione T , P_2, P_6 appartengono all'asse della rotazione F , mentre (si vede componendo T e F) P_4, P_5 appartengono all'asse di TF . Dunque t_0 si annulla nei vertici dell'ottaedro, e non può annullarsi in altri punti perché ha grado 6. Questo ci dice che t_0 è il polinomio dei vertici per l'ottaedro $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$.

Si capisce immediatamente che gli altri 4 ottaedri si ottengono dal primo facendo rotazioni di $k \cdot \pi/5$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Quindi consideriamo la rotazione

$$S^k : \quad U = \varepsilon^{3k} u, \quad V = \varepsilon^{2k} v \quad (k = 1, 2, 3, 4);$$

essa rimpiazza A_0, B_0, C_0 rispettivamente con:

$$\begin{aligned} A_k &= \varepsilon^k u^2 + \varepsilon^{4k} v^2, \quad B_k = \varepsilon^k u^2 - 2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)uv - \varepsilon^{4k} v^2, \\ C_k &= \varepsilon^k u^2 - 2(\varepsilon + \varepsilon^4)uv - \varepsilon^{4k} v^2. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$t_k = A_k B_k C_k = \varepsilon^{3k} u^6 + 2\varepsilon^{2k} u^5 v - 5\varepsilon^k u^4 v^2 - 5\varepsilon^{4k} u^2 v^4 - 2\varepsilon^{3k} uv^5 + \varepsilon^{2k} v^6. \quad (4.12)$$

I punti per cui t_k si annulla sono i vertici dell'ottaedro regolare che si ottiene da quello precedente facendo una rotazione di $\frac{k}{5}\pi$.

Abbiamo dunque trovato i 5 polinomi dei vertici t_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) degli ottaedri.

- Il passo successivo è dimostrare che questi t_k sono le 5 radici di un'equazione quintica di Brioschi che ha la forma:

$$t^5 - 10ft^3 + 45f^2t - T = 0; \quad (4.13)$$

la nostra equazione di Brioschi (4.3) è un caso particolare di questa, in cui $Z = f$, $Z^2 = T \Rightarrow f^2 = T$.

Ricordiamoci che i vertici dei 5 ottaedri, cioè i punti in cui t_0, \dots, t_4 si annullano, sono anche i punti medi dei 30 lati dell'icosaedro. Segue che t_0, \dots, t_4 sono le 5 radici di un'equazione quintica:

$$t^5 + c_1 t^4 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5 = 0$$

dove c_k è un polinomio di grado $6k$ in u, v che è invariante per I_h . Il più grande $6k$ è uguale a $30 < 60$, quindi segue dal Teorema 6 che ogni c_k è un prodotto di fattori f, H, T , che hanno grado 12, 20, 30 rispettivamente. Poiché nessun prodotto del genere può avere grado 6 o 18, abbiamo $c_1 = c_3 = 0$, mentre dovrà valere, sempre per un ragionamento sui gradi: $c_2 = af$, $c_4 = bf^2$, $c_5 = cT$ (a, b, c sono costanti).

Tre delle identità di Newton per la quintica che ha t_0, \dots, t_4 come radici sono:

$$\begin{aligned} t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + 2c_2 &= 0 \\ t_0^4 + t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 + t_4^4 + c_2(t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) + 4c_4 &= 0 \\ t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 + c_5 &= 0 \end{aligned}$$

e, tenendo conto delle relazioni trovate per c_k :

$$\begin{aligned} t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + 2af &= 0 \\ t_0^4 + t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 + t_4^4 - 2a^2 f^2 + 4bf^2 &= 0 \\ t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 + cT &= 0. \end{aligned}$$

Dobbiamo sostituire in queste tre equazioni le espressioni (4.11), (4.12) per t_0 e t_k . Facendo i calcoli e andando a guardare i coefficienti di $u^{11}v$ nella prima equazione, $u^{22}v^2$ nella seconda e u^{30} nella terza, troviamo:

$$20 + 2a = 0 \quad , \quad 20 + 4b - 2a^2 = 0 \quad \text{e} \quad c + 1 = 0,$$

da cui: $a = -10$, $b = 45$, $c = -1$. Questo prova che i polinomi degli ottaedri t_0, \dots, t_k sono effettivamente le soluzioni dell'equazione (4.13).

• Torniamo a considerare la quintica principale (4.2) e cerchiamo di esprimere i suoi coefficienti in termini di funzioni poliedrali.

Calcoliamo l'hessiano di t_k e troviamo che è $400W_k$, dove:

$$\begin{aligned} W_k = -\varepsilon^{4k} u^8 + \varepsilon^{3k} u^7 v - 7\varepsilon^{2k} u^6 v^2 - 7\varepsilon^k u^5 v^3 + 7\varepsilon^{4k} u^3 v^5 - 7\varepsilon^{3k} u^2 v^6 - \\ - \varepsilon^{2k} u v^7 - \varepsilon^k v^8 \end{aligned}$$

è il polinomio delle facce dell'ottaedro che ha come vertici le radici di t_k (quindi nella prima delle formule (3.12) in questo caso $k_{vv} = 400$). I polinomi t_k sono permutati tra loro dalle trasformazioni del gruppo I_h , quindi la stessa cosa succede per i loro hessiani e dunque per i W_k .

Segue che $\sum t_k^r W_k^s$, al variare di r, s , sono invarianti per I_h e quindi, per il

Teorema 6, sono polinomi in f, H, T , i quali hanno grado 12, 20, 30 rispettivamente. Nessuna combinazione lineare di f, H, T a coefficienti interi e non negativi può avere grado 8, 14, 16, 22 o 28, quindi

$$\sum W_k = 0, \quad \sum t_k W_k = 0, \quad \sum W_k^2 = 0, \quad \sum t_k W_k^2 = 0, \quad \sum t_k^2 W_k^2 = 0.$$

Allora, se

$$z_k = \sigma W_k + \tau t_k W_k \quad (4.14)$$

per certi σ, τ (che determineremo in seguito, vedi (4.17)), segue dalle equazioni precedenti che $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$. Ciò vuol dire che tali z_k sono le radici di una quintica principale $z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$.

Dalle identità di Newton abbiamo: $\sum z_k^3 = -15a$, $\sum z_k^4 = -20b$; inoltre un'indagine sui gradi degli invarianti porta alle seguenti identità (sottintendiamo a primo membro gli indici k):

$$\begin{aligned} \sum W^3 &= -5 \cdot 24f^2 && \text{(termini con } u^{22}v^2) \\ \sum tW^3 &= -5T && \text{(termini con } u^{30}) \\ \sum t^2W^3 &= -5 \cdot 72f^3 && \text{(termini con } u^{33}v^3) \\ \sum t^3W^3 &= -15fT && \text{(termini con } u^{41}v) \\ \sum W^4 &= 20fH && \text{(termini con } u^{31}v) \\ \sum tW^4 &= 0 && \text{(nessun prodotto di f,H,T può avere grado 38)} \\ \sum t^2W^4 &= -60f^2H && \text{(termini con } u^{42}v^2) \\ \sum t^3W^4 &= -5HT && \text{(termini con } u^{50}) \\ \sum t^4W^4 &= -540f^3H && \text{(termini con } u^{53}v^3). \end{aligned}$$

I fattori numerici sono trovati comparando i termini di ogni membro. Da queste relazioni ricaviamo delle espressioni per i coefficienti a, b, c della quintica principale:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{15} \sum z_k^3 = -\frac{1}{15} \sum (\sigma W_k + \tau t_k W_k)^3 = -\frac{1}{15} \sigma^3 \sum W_k^3 - \frac{1}{15} \tau^3 \sum t_k^3 W_k^3 - \\ &\quad -\frac{1}{5} \sigma \tau^2 \sum t_k^2 W_k^3 - \frac{1}{5} \sigma^2 \tau \sum t_k W_k^3 = 8f^2 \sigma^3 + T \sigma^2 \tau + 72f^3 \sigma \tau^2 + fT \tau^3, \end{aligned}$$

e analogamente si trova:

$$b = -fH\sigma^4 + 18f^2H\sigma^2\tau^2 + HT\sigma\tau^3 + 27f^3H\tau^4.$$

Per trovare una formula per c , consideriamo che:

$$x^5 - 10fx^3 + 45f^2x - T \equiv \prod (x - t_k).$$

Per $x = -\sigma/\tau$:

$$\begin{aligned}\prod\left(-\frac{\sigma}{\tau} - t_k\right) &= \left(-\frac{\sigma}{\tau}\right)^5 - 10f\left(-\frac{\sigma}{\tau}\right)^3 + 45f^2\left(-\frac{\sigma}{\tau}\right) - T \quad \Rightarrow \\ \frac{(-1)^5}{\tau^5} \prod(\sigma + \tau t_k) &= -\frac{\sigma^5}{\tau^5} + 10f\frac{\sigma^3}{\tau^3} - 45f^2\frac{\sigma}{\tau} - T \quad \Rightarrow \\ \prod(\sigma + \tau t_k) &= \sigma^5 - 10f\sigma^3\tau^2 + 45f^2\sigma\tau^4 + T\tau^5.\end{aligned}$$

Vale:

$$\begin{aligned}\prod W_k \cdot \prod(\sigma + \tau t_k) &= \prod(\sigma W_k + \tau t_k W_k) = \prod z_k \quad \text{e} \quad \prod W_k = -H^2 \\ \Rightarrow \quad c &= -\prod z_k = H^2(\sigma^5 - 10f\sigma^3\tau^2 + 45f^2\sigma\tau^4 + T\tau^5).\end{aligned}$$

• Ora vogliamo dare opportuni valori a σ, τ , in modo che le espressioni trovate per a, b, c coinvolgano f, H, T esplicitamente solo nelle combinazioni:

$$Z = \frac{f^5}{T^2} \quad \text{e} \quad V = \frac{H^3}{f^5}, \quad (4.15)$$

che sono legate dalla relazione:

$$\frac{1}{Z} + V = 1728. \quad (4.16)$$

Per come abbiamo definito Z , segue che in effetti la nostra quintica di Brioschi (4.3) è un caso particolare della (4.13). Infatti, se $Z = f$, da $Z = f^5/T^2$ si ottiene $f^2 = T$.

Prendiamo:

$$\sigma = \frac{\lambda f}{H} \quad , \quad \tau = \frac{\mu f^3}{HT} \quad (4.17)$$

con λ, μ costanti, e sostituendo questi valori nelle formule per a, b, c otteniamo, con semplici calcoli:

$$\begin{aligned}Va &= 8\lambda^3 + \lambda^2\mu + (72\lambda\mu^2 + \mu^3)Z \\ Vb &= -\lambda^4 + 18\lambda^2\mu^2Z + \lambda\mu^3Z + 27\mu^4Z^2 \\ Vc &= \lambda^5 - 10\lambda^3\mu^2Z + 45\lambda\mu^4Z^2 + \mu^5Z^2.\end{aligned} \quad (4.18)$$

• Dobbiamo far vedere che le equazioni viste sopra possono essere invertite in modo che i parametri λ, μ, Z e V siano calcolati a partire dalla quintica principale con coefficienti a, b, c . Dobbiamo cioè provare che le equazioni (4.18) e (4.16) possono essere soddisfatte da una certa scelta di λ, μ, Z, V .

Calcolando $Vc + \lambda Vb$ troviamo che $c + \lambda b = \mu^2 Z a$, mentre calcolando $\lambda Vc - \mu^2 Z Vb$ si ha $V(\lambda c - \mu^2 Z b) = (\lambda^2 - 3\mu^2 Z)^3$. Facendo semplici calcoli, che consistono nel combinare in altri modi le tre equazioni (4.18) e nell'utilizzare la (4.16) si arriva a un'equazione quadratica in λ :

$$\lambda^2(a^4 + abc - b^3) - \lambda(11a^3b - ac^2 + 2b^2c) + 64a^2b^2 - 27a^3c - bc^2 = 0. \quad (4.19)$$

Da questa equazione troviamo un valore per λ (in realtà troviamo in generale 2 valori, ma ne scegliamo 1); poi, sfruttando il fatto che $\mu^2 Z = \frac{\lambda b + c}{a}$, calcoliamo V :

$$V = \frac{(\lambda^2 - 3\mu^2 Z)^3}{\lambda c - \mu^2 Z b} = \dots = \frac{(a\lambda^2 - 3\lambda b - 3c)^3}{a^2(\lambda a c - \lambda b^2 - bc)}. \quad (4.20)$$

Per trovare μ , riscriviamo l'equazione per Va come:

$$(\lambda^2 + \mu^2 Z)\mu = Va - 8\lambda^3 - 72\lambda\mu^2 Z,$$

sostituiamoci $\mu^2 Z = \frac{\lambda b + c}{a}$ e risolviamo per μ :

$$\mu = \frac{Va^2 - 8\lambda^3 a - 72\lambda^2 b - 72\lambda c}{\lambda^2 a + \lambda b + c}. \quad (4.21)$$

Infine il valore di Z lo troviamo grazie all'equazione (4.16).

Si sono così ottenuti i valori dei parametri λ, μ, Z, V in termini di a, b, c .

- A questo punto possiamo esprimere le radici della quintica principale in termini di λ, μ, Z e V . Basta prendere la (4.14) e sostituirci i valori di σ, τ dati dalle (4.17):

$$z_k = \left(\frac{\lambda f}{H}\right)W_k + \left(\frac{\mu f^3}{HT}\right)t_k W_k. \quad (4.22)$$

- Rimane il problema di trovare la trasformazione di Tschirnhaus che esprime le soluzioni z_k della quintica principale in funzione delle soluzioni y_k della quintica di Brioschi associata.

Ci vengono in aiuto ancora una volta i polinomi poliedrali. I polinomi W_k si annullano nei punti medi delle facce dei 5 ottaedri, e tali punti sono collocati in corrispondenza dei baricentri delle facce dell'icosaedro, dove il polinomio H si annulla. Quindi ogni W_k è un fattore di H .

Inoltre, eleviamo al quadrato la quintica di Brioschi nella forma (4.13) e sostituiamoci $t^2 = 3f$:

$$T^2 = (t^5 - 10ft^3 + 45f^2t)^2 = (3f)^5 - 10f(3f)^3 + 45f^2(3f) = 1728f^5.$$

Tenendo conto dell'identità icosaedrale (4.10), otteniamo: $H = 0$; quindi, $\forall k$, $(t_k^2 - 3f)$ è un fattore di H . Poiché H ha grado 20, non possono esserci altri fattori, perciò: $H = W_k(t_k^2 - 3f)$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$). Sostituendo quest'ultima in (4.22) si ha:

$$z_k = \frac{\lambda f}{(t_k^2 - 3f)} + \frac{\mu f^3}{(t_k^2 - 3f)T} t_k;$$

siccome $Z = f^5/T^2$ e $t_k = y_k \cdot T/f^2$ ($T/f^2 = 1$), con un po' di calcoli arriviamo a:

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}, \quad (4.23)$$

che è finalmente la trasformazione di Tschirnhaus cercata.

4.3 Passo 3: passaggio dalla quintica di Brioschi alla sestica di Jacobi

Per la trasformazione della quintica di Brioschi nella corrispondente sestica di Jacobi è fondamentale il seguente:

Teorema 13 (teorema di Perron) *Se abbiamo la quintica di Brioschi $y^5 - 10fy^3 + 45f^2y - T = 0$, la quantità H della corrispondente sestica di Jacobi $s^6 - 10fs^3 + Hs + 5f^2 = 0$ deve soddisfare l'identità icosaedrale $1728f^5 - H^3 - T^2 = 0$.*

Se le radici della sestica sono s_∞, s_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), allora le 5 radici della quintica di Brioschi sono:

$$y_k = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})}. \quad (4.24)$$

Per prendere il segno giusto va scritta la quintica di Brioschi così:

$$y = \frac{T}{y^4 - 10fy^2 + 45f^2}$$

in modo che a destra ci siano solo potenze pari di y , e va controllato quale delle due y_k soddisfa l'equazione.

Dimostrazione:

Consideriamo una speciale equazione quintica:

$$\prod_{k=0}^4 (\eta - \eta_k) = \eta^5 + a_1\eta^4 + a_2\eta^3 + a_3\eta^2 + a_4\eta + a_5 = 0$$

in cui le radici hanno la forma $\eta_k = c_1\varepsilon^k + c_2\varepsilon^{2k} + c_3\varepsilon^{3k} + c_4\varepsilon^{4k}$.

Nel caso speciale in cui, per un certo r : $c_1 = r, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = -1/r$, cioè le radici hanno la forma $\eta_k = r\varepsilon^k - \frac{1}{r}\varepsilon^{4k}$ ($\varepsilon^{4k} = \varepsilon^{-k}$), le identità di Newton ci dicono che: $a_1 = 0, a_2 = 5, a_3 = 0, a_4 = 5, a_5 = -(r^5 - \frac{1}{r^5}) \Rightarrow$

$$\prod_{k=0}^4 \left[\eta - \left(r\varepsilon^k - \frac{1}{r\varepsilon^k} \right) \right] = \eta^5 + 5\eta^3 + 5\eta - \left(r^5 - \frac{1}{r^5} \right)$$

Se al posto di η mettiamo $\eta - 1$ e facciamo un po' di calcoli troviamo, se si pone

$$11 + r^5 - \frac{1}{r^5} = 125\sigma \quad :$$

$$\prod_{k=0}^4 \left[\eta - \left(1 + r\varepsilon^k - \frac{1}{r\varepsilon^k} \right) \right] = \eta^5 - 5\eta^4 + 15\eta^3 - 25\eta^2 + 25\eta - 125\sigma$$

e se ora al posto di η mettiamo $-\eta$:

$$\prod_{k=0}^4 \left[\eta + \left(1 + r\varepsilon^k - \frac{1}{r\varepsilon^k} \right) \right] = \eta^5 + 5\eta^4 + 15\eta^3 + 25\eta^2 + 25\eta + 125\sigma;$$

moltiplichiamo queste ultime due equazioni:

$$\begin{aligned} & \prod_{k=0}^4 \left[\eta^2 - \left(1 + r\varepsilon^k - \frac{1}{r\varepsilon^k} \right)^2 \right] = \\ & = \eta^{10} + 5\eta^8 + 25\eta^6 + 125(1 - 10\sigma)\eta^4 + 625(1 - 10\sigma)\eta^2 - (125\sigma)^2 \end{aligned}$$

e facciamo la sostituzione $\eta^2 = 5s/\rho$ (per un certo ρ). Dopo vari passaggi che qui non riportiamo si ottiene:

$$(s - \rho) \prod_{k=0}^4 \left[s - \frac{\rho}{5} \left(1 + r\varepsilon^k - \frac{1}{r\varepsilon^k} \right)^2 \right] = s^6 - 10\sigma\rho^3 s^3 - (1 - 10\sigma + 5\sigma^2)\rho^5 s + 5\sigma^2\rho^6.$$

Il secondo membro uguagliato a zero corrisponde proprio alla sestica di Jacobi $s^6 - 10fs^3 + Hs + 5f^2 = 0$, in cui:

$$f = \sigma\rho^3 \text{ e } H = -(1 - 10\sigma + 5\sigma^2)\rho^5.$$

Dal primo membro invece si capisce che le radici di questa equazione sono:

$$s_\infty = \rho \quad \text{e} \quad s_k = \frac{\rho}{5} \left(1 + r\varepsilon^k - \frac{1}{r\varepsilon^k} \right)^2 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Ora consideriamo queste 5 quantità:

$$v_k = (s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})$$

e sostituiamoci i valori di s_∞, s_k ; segue, dopo vari calcoli:

$$\begin{aligned} \frac{v_k}{\sqrt{5}} - 4f &= \frac{\rho^3}{125} \left[\left(r^6 - 24r - \frac{6}{r^4} \right) \varepsilon^k + \left(15r^2 + \frac{20}{r^3} \right) \varepsilon^{2k} + \right. \\ & \left. + \left(-20r^3 + \frac{15}{r^2} \right) \varepsilon^{3k} + \left(-6r^4 + \frac{24}{r} + \frac{1}{r^6} \right) \varepsilon^{4k} \right]. \end{aligned}$$

Se guardiamo questa equazione come un caso particolare di $c_1\varepsilon^k + c_2\varepsilon^{2k} + c_3\varepsilon^{3k} + c_4\varepsilon^{4k} = \eta_k$, usando le identità di Newton si avrà:

$$\prod_{k=0}^4 \left[v - \left(\frac{v_k}{\sqrt{5}} - 4f \right) \right] = v^5 + 30f^2v^3 + 100f^3v^2 + 105f^4v + 36f^5 + H^3.$$

Adesso, con la sostituzione $v = \frac{w}{\sqrt{5}} - 4f$ e ponendo tutto = 0, si arriva a:

$$\prod_{k=0}^4(w - v_k) = w^5 - 20\sqrt{5}fw^4 + 950f^2w^3 - 4500\sqrt{5}f^3w^2 + 50625f^4w + 25\sqrt{5}(H^3 - 1728f^5) = 0.$$

Poniamo infine $w = \sqrt{5}y^2$:

$$\frac{1}{25\sqrt{5}} \prod_{k=0}^4(\sqrt{5}y^2 - v_k) = y^{10} - 20fy^8 + 190f^2y^6 - 900f^3y^4 + 2025f^4y^2 + (H^3 - 1728f^5) = 0$$

cioè, per via dell'identità icosaedrale:

$$(y^5 - 10fy^3 + 45f^2y)^2 = -H^3 + 1728f^5 = T^2.$$

$$\Rightarrow y^5 - 10fy^3 + 45f^2y - T = 0$$

che è l'equazione quintica di Brioschi!

Le soluzioni di questa equazione sono $y_k = \sqrt{\frac{v_k}{\sqrt{5}}}$, perché $y = \sqrt{\frac{w}{\sqrt{5}}}$ e quando w è la variabile le 5 soluzioni sono i v_k ($\prod(w-v_k)$).

Abbiamo dunque la tesi. ■

A questo punto entrano in gioco le funzioni ellittiche. Vogliamo collegare i coefficienti f, T, H della sestica agli invarianti g_2, g_3, Δ delle funzioni ellittiche. Ricordiamo che essi sono legati dall'identità ellittica:

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2. \quad (4.25)$$

Scriviamo la quintica di Brioschi come:

$$y^5 + \frac{10}{\Delta}y^3 + \frac{45}{\Delta^2}y - \frac{216g_3}{\Delta^3} = 0 \quad (4.26)$$

cioè:

$$f = -\frac{1}{\Delta} \quad , \quad T = \frac{216g_3}{\Delta^3}. \quad (4.27)$$

Applicando le identità icosaedrale ed ellittica e le (4.27):

$$g_2^3 = 27g_3^2 + \Delta = \frac{\Delta^6}{1728} \left(\frac{216^2g_3^2}{\Delta^6} + \frac{1728}{\Delta^5} \right) = \frac{\Delta^6}{1728} (T^2 - 1728f^5) = \frac{\Delta^6}{1728} (-H^3)$$

$$\Rightarrow \Delta = -\left(\frac{H\Delta^2}{12}\right)^3 - 27g_3^2.$$

La sestica di Jacobi diventa:

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0, \quad (4.28)$$

perché $f = -\frac{1}{\Delta}$ e $g_2 = -\frac{H\Delta^2}{12} \Rightarrow H = -\frac{12g_2}{\Delta^2}$.

I coefficienti della sestica sono così espressi in termini dei tre invarianti

ellittici. Colleghiamo anche il coefficiente Z della quintica di Brioschi con questi invarianti. Confrontando la (4.3) e la (4.26) otteniamo:

$$\begin{aligned} Z = -\frac{1}{\Delta} \quad , \quad Z^2 = \frac{216g_3}{\Delta^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta^2} = \frac{216g_3}{\Delta^3} \\ \Rightarrow \quad g_3 = \frac{\Delta}{216} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sostituendo quest'ultima nell'identità ellittica:

$$\Delta = g_2^3 - \frac{\Delta^2}{1728} \quad \Rightarrow \quad \frac{g_2^3}{\Delta} = 1 + \frac{\Delta}{1728} = 1 - \frac{1}{1728Z} ;$$

avevamo definito $V = H^3/f^5$, quindi:

$$V = -\frac{1728g_2^3}{\Delta^6} (-\Delta^5) = \frac{1728g_2^3}{\Delta} .$$

Dunque gli invarianti ellittici g_2, Δ possono essere ottenuti da Z così:

$$\Delta = -\frac{1}{Z} \quad \text{e} \quad g_2 = \sqrt[3]{\frac{V\Delta}{1728}} = \frac{1}{12} \sqrt[3]{\frac{1-1728Z}{Z^2}} . \quad (4.30)$$

4.4 Passo 4: espressione delle soluzioni della se- stica di Jacobi tramite la \wp di Weierstrass

Partiamo dalla condizione (3.57) trovata al termine della sezione 3.3:

$$\frac{\sigma(5z)}{\sigma^{25}(z)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\wp''^2 - 12\wp\wp'^2)^3 - 16\wp'^4\wp''(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2) - 64\wp'^8 = 0 .$$

Avendo studiato la funzione σ , sappiamo che gli zeri di $\sigma(z)$ sono i punti $z + 2m\omega + 2n\omega'$, dunque $\sigma(5z)$ si annulla nei punti $z_{mn} = \frac{2m\omega + 2n\omega'}{5}$ ($m, n \in \mathbb{Z}_5$). Dall'altra parte, se scriviamo \wp' e \wp'' in funzione di \wp , abbiamo un polinomio di grado 12 in \wp .

I 24 valori di z_{mn} (sono $24 = 5^2 - 1$, perché va escluso $(0, 0)$) corrispondono alle 12 radici $\wp_{m,n} = \wp\left(\frac{2m\omega + 2n\omega'}{5}\right)$ del polinomio in \wp . In particolare, ogni $\wp_{m,n}$ corrisponde a due z_{mn} , tenendo conto del fatto che $\wp_{-m,-n} = \wp_{m,n}$. Siano:

$$y_{mn} = \wp_{2m,2n} - \wp_{m,n} = \wp\left(\frac{4m\omega + 4n\omega'}{5}\right) - \wp\left(\frac{2m\omega + 2n\omega'}{5}\right) . \quad (4.31)$$

Dalla formula (3.31) segue che:

$$\wp(z) - \wp(2z) = \wp(z) + 2\wp(z) - \frac{\wp''^2(z)}{4\wp'^2(z)} = \frac{12\wp(z)\wp'^2(z) - \wp''^2(z)}{4\wp'^2(z)} ;$$

sostituendoci la (4.31):

$$y_{mn} = \frac{(\varphi''_{m,n})^2 - 12\varphi_{m,n}(\varphi'_{m,n})^2}{4(\varphi'_{m,n})^2} . \quad (4.32)$$

Dall'equazione differenziale per φ che compare nella condizione (3.57) abbiamo:

$$\begin{aligned} & \frac{(\varphi''^2 - 12\varphi\varphi'^2)^3}{(4\varphi'^2)^3} - \frac{16\varphi'^4\varphi''(\varphi''^2 - 12\varphi\varphi'^2)}{(4\varphi'^2)^3} - \frac{64\varphi'^8}{(4\varphi'^2)^3} = 0 \\ \Rightarrow & \left[\frac{\varphi''^2 - 12\varphi\varphi'^2}{4\varphi'^2} \right]^3 - \frac{\varphi''(\varphi''^2 - 12\varphi\varphi'^2)}{4\varphi'^2} - \varphi'^2 = 0 . \end{aligned}$$

Sostituiamoci la (4.32), togliendo i pedici m, n :

$$y^3 - \varphi''y - \varphi'^2 = 0 . \quad (4.33)$$

Risolviamo quest'ultima per φ''^2 :

$$\varphi''^2 = 4\varphi'^2y + 12\varphi\varphi'^2 = (4y + 12\varphi)\varphi'^2$$

e combiniamola proprio con la (4.33):

$$\varphi''^2 = (4y + 12\varphi)(y^3 - \varphi''y) ;$$

in questa e nella (4.33) mettiamoci le espressioni per φ'^2 e φ'' :

$$\begin{aligned} & y^3 - \left(6\varphi^2 - \frac{g_2}{2}\right)y - (4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3) = 0 , \\ & \left(6\varphi^2 - \frac{g_2}{2}\right)^2 = (4y + 12\varphi)\left(y^3 - 6\varphi^2y + \frac{g_2}{2}y\right) . \end{aligned}$$

Introduciamo una nuova variabile u tale che:

$$\varphi = \frac{1}{2}(u - y) \quad (4.34)$$

e facciamo la sostituzione nelle due equazioni precedenti. Dopo alcuni banali calcoli si ha:

$$\begin{aligned} & u^3 - (3y^2 + g_2)u - 2g_3 = 0 , \\ & 9u^4 - 6(5y^2 + g_2)u^2 + 5y^4 - 2g_2y^2 + g_2^2 = 0 . \end{aligned}$$

Risolviamo la seconda per u^2 , ottenendo:

$$u^2 = \frac{1}{3}(5y^2 + g_2 \pm 2y\sqrt{5y^2 + 3g_2}) ,$$

prendiamo quella col +, così:

$$3u^2 = 5y^2 + g_2 + 2y\sqrt{5y^2 + 3g_2} .$$

Dalla prima invece:

$$u(u^2 - 3y^2 - g_2) = 2g_3 ;$$

elevando al quadrato e sostituendo l'espressione precedente per u^2 :

$$5y^6 - 2y^5\sqrt{5y^2 + 3g_2} + g_2^3 = 27g_3^2 ;$$

sostituendoci l'identità ellittica ed elevando al quadrato, infine:

$$5y^{12} - 12g_2y^{10} + 10\Delta y^6 + \Delta^2 = 0 . \quad (4.35)$$

Ricordiamoci da dove eravamo partiti: le 12 radici di questa equazione sono date dalla formula (4.32).

È facile verificare che la sestica di Jacobi nella forma (4.28) si ottiene dalla (4.35) col cambio di variabile:

$$y^2 = \frac{1}{s} , \quad (4.36)$$

dunque le soluzioni s_{mn} della sestica sono tali che:

$$\sqrt{s_{mn}} = \frac{1}{\wp\left(\frac{4m\omega+4n\omega'}{5}\right) - \wp\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{5}\right)} . \quad (4.37)$$

4.5 Passo 5: espressione delle soluzioni della sestica di Jacobi tramite le funzioni theta

Per ora abbiamo espresso le soluzioni della sestica di Jacobi tramite una \wp di Weierstrass di periodi $2\omega, 2\omega'$. Il problema è che ancora non conosciamo quali siano questi periodi, quindi non siamo in grado di trovare i valori delle 6 radici s_{mn} . Per valutare tale \wp ci vengono in aiuto le funzioni theta. Abbiamo visto nella sezione 3.4 che negli sviluppi delle θ compare:

$$q = \exp\left(\frac{\pi i\omega'}{\omega}\right) , \quad (4.38)$$

dunque q dipende dal rapporto dei periodi di una certa funzione ellittica. Le serie che definiscono le θ convergono, molto rapidamente, quando $|q| < 1$.

Le sei (4.37) si possono scrivere, grazie alla doppia periodicità delle funzioni ellittiche, come:

$$\begin{aligned} \sqrt{s_\infty} &= \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)} & (m = 1, n = 0) \\ \sqrt{s_k} &= \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega'-2k\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega'-4k\omega}{5}\right)} & (m = -k, n = 1) \end{aligned}$$

per $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Cerchiamo di riscrivere la formula per $\sqrt{s_\infty}$ usando la funzione σ . Teniamo presente i risultati trovati nelle sezioni 3.3 e 3.4, in particolare la prima delle (3.70):

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= 2\omega e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{\theta_1(\nu)}{\theta_1'(0)} = 2\omega e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2\omega}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 2q^{2k} \cos\left(\frac{\pi z}{\omega}\right) + q^{4k}\right)}{\pi \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2q^{2k} + q^{4k})} = \\ &= \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \left(\frac{e^{\frac{\pi iz}{2\omega}} - e^{-\frac{\pi iz}{2\omega}}}{2i}\right) \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k} \left(e^{\frac{\pi iz}{\omega}} + e^{-\frac{\pi iz}{\omega}}\right) + q^{4k}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})^2} =\end{aligned}$$

ponendo $r(z, \omega) = \exp\left(\frac{\pi iz}{2\omega}\right)$:

$$\begin{aligned}&= \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \left(\frac{r - r^{-1}}{2i}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2k}(r^2 + r^{-2}) + q^{4k})}{(1 - q^{2k})^2} = \\ &= \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \left(\frac{r - r^{-1}}{2i}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2k}r^2)}{(1 - q^{2k})} \cdot \frac{(1 - q^{2k}r^{-2})}{(1 - q^{2k})}.\end{aligned}\quad (4.39)$$

Inoltre, dalla formula (3.42) segue, dato che σ è dispari:

$$\wp(z) - \wp(v) = \frac{\sigma(v - z)\sigma(v + z)}{\sigma^2(v)\sigma^2(z)}\quad (4.40)$$

e la formula (3.41) ci dice che:

$$\sigma(z + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} \sigma(z) \exp[(2m\eta + 2n\eta')(z + m\omega + n\omega')].\quad (4.41)$$

Mettiamo la (4.40) nell'espressione per $\sqrt{s_\infty}$:

$$\sqrt{s_\infty} = \frac{\sigma^2\left(\frac{4\omega}{5}\right) \cdot \sigma^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{\left[\sigma\left(\frac{4\omega}{5} - \frac{2\omega}{5}\right) \cdot \sigma\left(\frac{4\omega}{5} + \frac{2\omega}{5}\right)\right]} = \frac{\sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot \sigma^2\left(\frac{4\omega}{5}\right)}{\sigma\left(\frac{6\omega}{5}\right)};$$

sfruttiamo la (4.41), con $z = -4\omega/5$, $m = 1$, $n = 0$:

$$\sigma\left(\frac{6\omega}{5}\right) = \sigma\left(\frac{-4\omega}{5} + 2\omega\right) = \sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right) \cdot \exp\left(\frac{2\eta\omega}{5}\right),$$

allora:

$$\sqrt{s_\infty} = \frac{\sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot \sigma^2\left(\frac{4\omega}{5}\right)}{\sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right) \cdot \exp\left(\frac{2\eta\omega}{5}\right)} = \sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot \sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\eta\omega}{5}\right).$$

Chiamiamo, come al solito, $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$, così:

$$r\left(\frac{2\omega}{5}, \omega\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\varepsilon} \quad \text{e} \quad r\left(\frac{4\omega}{5}, \omega\right) = \varepsilon;$$

se ora scriviamo la (4.39) per $z = \frac{2\omega}{5}$ e per $z = \frac{4\omega}{5}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right) &= \frac{2\omega}{\pi} \exp\left(\frac{2\eta\omega}{25}\right) \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2j}\varepsilon)}{(1-q^{2j})} \cdot \frac{(1-q^{2j}\varepsilon^4)}{(1-q^{2j})} \\ \sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right) &= \frac{2\omega}{\pi} \exp\left(\frac{8\eta\omega}{25}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2j}\varepsilon^2)}{(1-q^{2j})} \cdot \frac{(1-q^{2j}\varepsilon^3)}{(1-q^{2j})}\end{aligned}$$

e sostituendo nell'espressione per $\sqrt{s_{\infty}}$, dopo alcuni calcoli:

$$\sqrt{s_{\infty}} = \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^{10j}}{(1-q^{2j})^5}.$$

Valgono anche queste due relazioni:

$$4 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^3 - \varepsilon^2 = \sqrt{5},$$

$$\sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \sqrt[12]{q} \prod_{j=1}^{\infty} (1-q^{2j}) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(6n+1)^2/12};$$

alla prima si arriva semplicemente sfruttando il fatto che $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, mentre alla seconda si arriva utilizzando le formule (3.78) e (3.76):

$$\sqrt[4]{\Delta} = \frac{\pi}{4\omega^3} \theta_1'^2(0) = \frac{\pi}{4\omega^3} (\pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0))^2 = \dots = \frac{\pi^3}{\omega^3} \sqrt{q} \prod_{j=1}^{\infty} (1-q^{2j})^6$$

e poi elevando alla 1/6. Sostituendo anche queste due equazioni nella formula per $\sqrt{s_{\infty}}$ e facendo ulteriori semplici calcoli, otteniamo finalmente la forma voluta:

$$\sqrt{s_{\infty}} = \frac{\sqrt{5}}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{5\frac{(6n+1)^2}{12}} \quad (4.42)$$

dove:

$$B = \sqrt[6]{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}}. \quad (4.43)$$

Con un procedimento del tutto analogo si opera sull'espressione per $\sqrt{s_k}$, fino a trovare:

$$\sqrt{s_k} = \frac{1}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon^{k(6n+1)^2} q^{\frac{(6n+1)^2}{60}}. \quad (4.44)$$

Dunque siamo riusciti a scrivere le 6 radici s_{∞}, s_k come quozienti di due funzioni theta. Va però ancora determinato il valore di q a partire dai parametri della sestica di Jacobi.

4.6 Passo 6: determinazione di q

Per calcolare il valore del parametro q della funzione theta corrispondente a una determinata equazione sestica dobbiamo utilizzare le relazioni che sussistono tra funzioni ellittiche di Weierstrass e di Jacobi. In particolare, nella sezione 3.3 abbiamo visto le formule (3.46):

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad , \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} .$$

Ciò che dobbiamo risolvere è il cosiddetto *problema dell'inversione*: calcolare il valore di q ($|q| < 1$) corrispondente a un dato valore k^2 , dove k è il modulo della corrispondente funzione di Jacobi.

Il primo passo consiste nel calcolare il parametro L definito dalla seguente equazione:

$$L = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} . \quad (4.45)$$

La seconda uguaglianza segue dalle (3.46). Valgono anche le (3.75), perciò:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 - [\theta_4(0)/\theta_3(0)]}{1 + [\theta_4(0)/\theta_3(0)]} = \frac{\theta_3(0) - \theta_4(0)}{\theta_3(0) + \theta_4(0)} = \\ &= \frac{1 + 2(q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \dots) - 1 + 2(q - q^4 + q^9 - q^{16} + q^{25} + \dots)}{1 + 2(q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \dots) + 1 - 2(q - q^4 + q^9 - q^{16} + q^{25} + \dots)} \\ &\implies \frac{L}{2} = \frac{q + q^9 + q^{25} + \dots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots} . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Se invertiamo quest'ultima equazione, possiamo scrivere q in funzione di L , con un'espressione detta *nomo di Jacobi*:

$$q = \left(\frac{L}{2}\right) + 2\left(\frac{L}{2}\right)^5 + 12\left(\frac{L}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{L}{2}\right)^{13} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(\frac{L}{2}\right)^{4j+1} \quad (4.47)$$

in cui i coefficienti q_j formano la serie:

$$1, 2, 15, 150, 1707, 20910, 268616, 3567400, 48555069 \dots$$

Facciamo vedere soltanto come si trovano q_1 e q_2 ; gli altri valori sono ripresi da ([7], p. 737-738). Il nostro scopo è trovare i γ_i tali che:

$$q = \gamma_1 \left(\frac{L}{2}\right) + \gamma_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \gamma_3 \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \gamma_4 \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \gamma_5 \left(\frac{L}{2}\right)^5 + \dots$$

Dalla (4.46) abbiamo:

$$\left(\frac{L}{2}\right) (1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots) = q + q^9 + q^{25} + \dots$$

e sostituendoci l'espressione per q :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{L}{2}\right) \left\{ 1 + 2 \left[\gamma_1 \left(\frac{L}{2}\right) + \gamma_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \gamma_3 \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \dots \right]^4 + \dots \right\} = \\ & = \left[\gamma_1 \left(\frac{L}{2}\right) + \gamma_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \gamma_3 \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \gamma_4 \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \gamma_5 \left(\frac{L}{2}\right)^5 + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2} + \gamma_1^4 \frac{L^5}{16} + 4\gamma_1^3 \gamma_2 \frac{L^6}{32} + \dots = \gamma_1 \frac{L}{2} + \gamma_2 \frac{L^2}{4} + \gamma_3 \frac{L^3}{8} + \gamma_4 \frac{L^4}{16} + \gamma_5 \frac{L^5}{32} + \dots ;$$

confrontando i termini dello stesso grado si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 && \longleftarrow q_1 \\ \gamma_2 &= \gamma_3 = \gamma_4 = 0 \\ \gamma_5/2 &= \gamma_1^4 \Rightarrow \gamma_5 = 2 && \longleftarrow q_2 . \end{aligned}$$

Dunque riusciamo a trovare il valore di q corrispondente a una certa sestica di Jacobi, e quindi a una certa quintica di Brioschi con parametro Z , con questa sequenza di passi:

1. ricaviamo gli invarianti Δ , g_2 , g_3 dal valore di Z , grazie alle formule (4.29), (4.30) e risolviamo l'equazione cubica $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$, trovando le tre soluzioni e_1 , e_2 , e_3 ,
2. sostituiamo i valori di e_1 , e_2 , e_3 nella formula (4.45), ottenendo L ,
3. mettiamo il valore di L appena trovato nella serie (4.47) e così otteniamo q .

Ci sono alcune ambiguità da risolvere.

Guardiamo la formula (4.45) per L : supponendo di aver fissato un ordine per le tre radici e_1 , e_2 , e_3 , abbiamo 4 possibili valori per la radice quarta $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$ e 4 per la radice quarta $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$. Ci sono 16 possibili combinazioni di queste due radici quarte, che però, quando si fa il quoziente, si riducono a 4 possibili valori di L .

In più ci sono 6 permutazioni delle radici e_1 , e_2 , e_3 , quindi in totale abbiamo: $4 \cdot 6 = 24$ possibili valori di q per ogni equazione sestica data.

La metà di questi possibili valori di q sono tali che $|q| > 1$ e possono essere subito scartati, dato che per $|q| > 1$ la serie theta non converge. Per quanto riguarda i restanti 12 valori, possiamo farli controllare al computer, il quale calcolerà per ogni caso le corrispondenti soluzioni s_∞ , s_k e verificherà se il prodotto:

$$(s - s_\infty) \prod_{k=0}^4 (s - s_k) \tag{4.48}$$

coincide con l'originale sestica di Jacobi.

Quando andiamo a sostituire q nelle formule per $\sqrt{s_\infty}$ e per $\sqrt{s_k}$ nascono altre ambiguità:

1. Nella formula per B , e quindi in quelle per $\sqrt{s_\infty}$ e $\sqrt{s_k}$, compare la radice sesta $\sqrt[6]{\Delta}$, che ha 6 possibili valori. Poiché a noi interessano s_∞ e s_k , dobbiamo elevare tutto al quadrato e quel che resta da controllare sono i 3 valori di $(\sqrt[6]{\Delta})^2$.

2. Sempre nella formula per B compare $q^{(6n+1)^2/12} = (\sqrt[12]{q})^{(6n+1)^2}$, e il fattore $q^{(6n+1)^2/60} = (\sqrt[60]{q})^{(6n+1)^2}$ nell'espressione per $\sqrt{s_k}$ è ottenuto facendo la radice quinta ($12 \cdot 5 = 60$) del fattore di B . Le 5 radici quinte di q vanno quindi controllate.

Ognuna di queste $3 \cdot 5 = 15$ possibili scelte per $(\sqrt[6]{\Delta})^2$ e $\sqrt[5]{q}$ porta a 6 radici della sestica di Jacobi, che il computer può controllare verificando se (4.48) è in accordo con la nostra sestica.

4.7 Passo 7: inversione delle trasformazioni fatte

Dopo molto lavoro siamo riusciti a calcolare le radici s_∞, s_k della sestica di Jacobi. Adesso dobbiamo ricavare da esse le soluzioni dell'equazione quintica da cui eravamo partiti; dobbiamo perciò invertire le trasformazioni fatte per arrivare fino alla sestica.

(a) Sestica di Jacobi \longrightarrow quintica di Brioschi: Come ottenere le 5 y_k dalle 6 s_∞, s_k ce lo dice il teorema di Perron:

$$y_k = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})};$$

Come è stato detto anche nell'enunciato del teorema, il segno della radice è scelto prendendo

$$y_k^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})$$

e vedendo quale delle due y_k (quella col + o quella col -) soddisfa l'equazione di Brioschi scritta così:

$$y_k = \left(\frac{216g_3}{\Delta^3} \right) / \left((y_k^2)^2 + \frac{10}{\Delta} y_k^2 + \frac{45}{\Delta^2} \right).$$

(b) Quintica di Brioschi \longrightarrow quintica principale:

Una volta trovate le y_k , calcoliamo le z_k grazie alla (4.23):

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}.$$

(c) Quintica principale \longrightarrow quintica generale:

Prendiamo la trasformazione di Tschirnhaus che avevamo usato per passare dalla quintica di partenza alla quintica principale:

$$z_k = x_k^2 - ux_k + v ,$$

e scriviamola in questo modo equivalente:

$$(x_k - u)^2 = (z_k - v) - u(x_k - u) .$$

Procedendo iterativamente, possiamo trovare equazioni della forma:

$$(x_k - u)^m = P_m(u, z_k - v) + Q_m(u, z_k - v) \cdot (x_k - u)$$

anche per $m = 3, 4, 5$. Ad esempio (per comodità evito di scrivere il pedice k):

$$(x-u)^3 = (x-u) \cdot (x-u)^2 = (x-u)[(z-v) - u(x-u)] = (x-u)(z-v) - u(x-u)^2 = (x-u)(z-v) - u[(z-v) - u(x-u)] = \underbrace{-u(z-v)}_{P_3} + \underbrace{[(z-v) + u^2]}_{Q_3}(x-u)$$

Ora teniamo presente la (4.7): se le 5 x_k devono essere le soluzioni della nostra equazione generale di partenza, varrà:

$$(x_k - u)^5 + A'(x_k - u)^4 + B'(x_k - u)^3 + C'(x_k - u)^2 + D'(x_k - u) + E' = 0 ;$$

se in quest'ultima equazione ci sostituiamo le espressioni per $(x_k - u)^m$ trovate, quello che otteniamo è un'equazione lineare in $(x_k - u)$ che semplificata diventa:

$$x_k = - \frac{E + (z_k - v)(u^3 + Au^2 + Bu + C) + (z_k - v)^2(2u + A)}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D + (z_k - v)(3u^2 + 2Au + B) + (z_k - v)^2} .$$

Queste 5 x_k sono le soluzioni cercate!

4.8 Computazione dell'algoritmo

Ora che abbiamo visto tutto l'algoritmo nei dettagli, può essere utile estrapolare da esso le operazioni che vanno effettivamente eseguite, o che vanno fatte eseguire al computer, quando dobbiamo risolvere un'equazione di quinto grado.

- $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \longrightarrow \mathbf{A, B, C, D, E}$
- $(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + (2A^4 - 8A^2B + 10AC + 3B^2 - 10D) = 0 \longrightarrow \mathbf{u}$ (scegliere uno dei due valori)
- $5v = -Au - A^2 + 2B \longrightarrow \mathbf{v}$

- $5a = -C(u^3 + Au^2 + Bu + C) + D(4u^2 + 3Au + 2B) - E(5u + 2A) - 10v^3$
 $\longrightarrow \mathbf{a}$
- $5b = D(u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D) - E(5u^3 + 4Au^2 + 3Bu + C) - 5v^4 - 10av$
 $\longrightarrow \mathbf{b}$
- $c = -E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E) - v^5 - 5av^2 - 5bv \longrightarrow \mathbf{c}$
- ★ $z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$
- $\lambda^2(a^4 + abc - b^3) - \lambda(11a^3b - ac^2 + 2b^2c) + 64a^2b^2 - 27a^3c - bc^2 = 0 \longrightarrow \lambda$
(scegliere uno dei due valori)
- $V = \frac{(a\lambda^2 - 3\lambda b - 3c)^3}{a^2(\lambda ac - \lambda b^2 - bc)} \longrightarrow \mathbf{V}$
- $\mu = \frac{Va^2 - 8\lambda^3 a - 72\lambda^2 b - 72\lambda c}{\lambda^2 a + \lambda b + c} \longrightarrow \mu$
- $\frac{1}{Z} + V = 1728$ oppure $\mu^2 Z = \frac{\lambda b + c}{a} \longrightarrow \mathbf{Z}$
- ★ $y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$
- $\Delta = -\frac{1}{Z} \longrightarrow \mathbf{\Delta}$
- $g_2 = \frac{\sqrt[3]{V\Delta}}{12} = \frac{1}{12} \sqrt[3]{\frac{1-1728Z}{Z^2}} \longrightarrow \mathbf{g_2}$
- $g_3 = \frac{\Delta}{216} \longrightarrow \mathbf{g_3}$
- ★ $s^6 + \frac{10}{\Delta} s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2} s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$
- $4x^3 - g_2x - g_3 = 0 \longrightarrow \mathbf{e_1, e_2, e_3}$
- $L = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} \longrightarrow \mathbf{L}$ (sono possibili un numero finito di scelte,
che producono un numero finito di soluzioni da verificare)
- $q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(\frac{L}{2}\right)^{4j+1} \quad (q_j = 1, 2, 15, 150, 1707, 20910, \dots) \longrightarrow \mathbf{q}$
- $B = \sqrt[6]{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}} \longrightarrow \mathbf{B}$
- $\sqrt{s_{\infty}} = \frac{\sqrt{5}}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{5\frac{(6n+1)^2}{12}} \longrightarrow \mathbf{s_{\infty}}$
- $\sqrt{s_k} = \frac{1}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon^{k(6n+1)^2} q^{\frac{(6n+1)^2}{60}} \longrightarrow \mathbf{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4}$
- $y_k = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}(s_{\infty} - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})} \longrightarrow \mathbf{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4}$
- $z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z)^{-3}} \longrightarrow \mathbf{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4}$
- $x_k = -\frac{E + (z_k - v)(u^3 + Au^2 + Bu + C) + (z_k - v)^2(2u + A)}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D + (z_k - v)(3u^2 + 2Au + B) + (z_k - v)^2}$
 $\longrightarrow \mathbf{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4}$

4.9 Esempi

Passaggio dalla quintica generale alla quintica principale:

Consideriamo l'equazione

$$x^5 + x^3 + 2 = 0.$$

Notiamo subito che, anche se mancano i termini di secondo e quarto grado, questa non è un'equazione di Brioschi, perché non esiste Z tale che $-10Z = 1$ e contemporaneamente $45Z^2 = 0$. Quindi abbiamo un'equazione del tipo (4.1) con $A = C = D = 0$, $B = 1$, $E = 2$. Seguiamo i passaggi indicati nella sezione precedente. In questo caso l'equazione quadratica per u diventa:

$$-5u^2 + 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

(sarebbe $u = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$, ma scegliamo quella col $+$). Troviamo v : $5v = 2 \Rightarrow$

$$v = \frac{2}{5}$$

e ora possiamo passare a calcolare i coefficienti della quintica principale:

$$5a = -2 \cdot 5u - 10v^3 \Rightarrow a = -2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} - 2 \cdot \frac{8}{125} = \frac{-50\sqrt{15} - 16}{125}$$

$$5b = -2(5u^3 + 3u) - 5v^4 - 10av = -6\sqrt{\frac{3}{5}} - 6\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{16}{125} - 4\left(\frac{-50\sqrt{15} - 16}{125}\right)$$

$$\Rightarrow b = -\frac{12\sqrt{15}}{25} - \frac{16}{625} + \frac{200\sqrt{15}}{125} + \frac{64}{125} = \frac{700\sqrt{15} + 304}{625}$$

$$c = -2(u^5 + u^3 + 2) - v^5 - 5av^2 - 5bv = -\frac{18}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} - 4 - \frac{32}{3125} +$$

$$+ \frac{4}{5}\left(\frac{50\sqrt{15} + 16}{125}\right) - 2\left(\frac{700\sqrt{15} + 304}{625}\right) = \dots = -\frac{7200\sqrt{15} + 15252}{3125}$$

e quindi l'equazione principale corrispondente a quella generale di partenza è:

$$z^5 - \frac{50\sqrt{15}}{25} z^2 + \frac{700\sqrt{15} + 304}{125} z - \frac{7200\sqrt{15} + 15252}{3125} = 0.$$

Passaggio dalla quintica principale alla quintica di Brioschi:

Consideriamo l'equazione

$$x^5 + 5x^2 + 1 = 0.$$

Possiamo saltare il primo passo dell'algoritmo, perché questa equazione è già una quintica principale, in cui $a = 1, b = 0, c = 1$. Vediamo invece come funziona il secondo passo, cioè come riusciamo a ricondurci a un'equazione di Brioschi.

Ripercorrendo l'algoritmo, si estraggono da esso le operazioni da eseguire:

$$\lambda^2 + \lambda - 27 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{109}}{2}$$

prendo ad esempio quella col +: $\lambda = \frac{-1 + \sqrt{109}}{2}$

$$V = \frac{\left[\left(\frac{-1 + \sqrt{109}}{2}\right)^2 - 3\right]^3}{\left(\frac{-1 + \sqrt{109}}{2}\right)} = \frac{(\sqrt{109} + 1) \left[\left(\frac{-1 + \sqrt{109}}{2}\right)^2 - 3\right]^3}{54}$$

$$\mu = \frac{\frac{(\sqrt{109} + 1)}{54} \left[\left(\frac{-1 + \sqrt{109}}{2}\right)^2 - 3\right]^3 - (-1 + \sqrt{109})^3 - 36(-1 + \sqrt{109})}{\frac{(-1 + \sqrt{109})^2}{4} + 1}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{1728 - V} = \frac{1}{1728 - \frac{(\sqrt{109} + 1) \left[\left(\frac{-1 + \sqrt{109}}{2}\right)^2 - 3\right]^3}{54}} = \dots \\ &= \frac{\sqrt{109} - 1}{3556\sqrt{109} - 35146}. \end{aligned}$$

Dunque la nostra equazione di Brioschi è:

$$y^5 - \frac{10(\sqrt{109} - 1)}{3556\sqrt{109} - 35146} y^3 + \frac{45(\sqrt{109} - 1)^2}{(3556\sqrt{109} - 35146)^2} y - \frac{(\sqrt{109} - 1)^2}{(3556\sqrt{109} - 35146)^2} = 0.$$

Passaggio dalla quintica di Brioschi alla sestica di Jacobi:

Consideriamo la quintica

$$y^5 + 2y^3 + \frac{9}{5}y - \frac{1}{25} = 0.$$

È un'equazione di Brioschi con $Z = -\frac{1}{5}$ e quindi $f = Z = -\frac{1}{5}$, $T = Z^2 = \frac{1}{25}$. Si sostituiscono questi valori nell'identità icosaedrale e si trova: $1728 \left(-\frac{1}{5}\right)^5 - H^3 - \left(\frac{1}{25}\right)^2$, cioè $H^3 = -\frac{1728}{3125} - \frac{1}{625} = -\frac{1733}{3125}$. Allora si prende $H = -\frac{1}{5} \sqrt[3]{\frac{1733}{25}}$ e la sestica corrispondente è:

$$s^6 + 2s^3 - \sqrt[3]{\frac{1733}{3125}} s + \frac{1}{5} = 0.$$

Troviamo anche gli invarianti ellittici associati a questa sestica. Abbiamo visto che possiamo esprimerli del parametro Z della quintica di Brioschi e del parametro $V = 1728 - \frac{1}{Z}$. In questo caso:

$$\begin{aligned}\Delta &= -\frac{1}{Z} = 5 \\ g_2 &= \sqrt[3]{\frac{V\Delta}{1728}} = \sqrt[3]{\frac{1733 \cdot 5}{1728}} = \frac{1}{12} \sqrt[3]{8665} \\ g_3 &= \frac{\Delta}{216} = \frac{5}{216}.\end{aligned}$$

Determinazione del parametro q :

Partendo da una generica equazione di quinto grado, coi primi 3 passaggi dell'algoritmo troviamo una sestica di Jacobi e una \wp di Weierstrass ad essa associata, con invarianti g_2, g_3 . Supponiamo di aver trovato $g_2 = 15$ e $g_3 = 2$. L'equazione cubica da risolvere per trovare gli invarianti irrazionali e_1, e_2, e_3 è:

$$4x^3 - 15x - 2 = 0 .$$

Si ottiene $e_1 = 2$, $e_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $e_3 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (è una delle 6 permutazioni possibili). Ora calcoliamo il parametro L :

$$L = \frac{\sqrt[4]{2 - (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} - \sqrt[4]{2 - (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2})}}{\sqrt[4]{2 - (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} + \sqrt[4]{2 - (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2})}} = \frac{\sqrt[4]{6 + \sqrt{3}} - \sqrt[4]{6 - \sqrt{3}}}{\sqrt[4]{6 + \sqrt{3}} + \sqrt[4]{6 - \sqrt{3}}} .$$

Troviamo, grazie al nome di Jacobi, un valore approssimato per q ; prendiamo ad esempio i primi 3 termini della serie:

$$q = 1 \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^5 + 2 \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^9 + 15 \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^{13} + \dots \approx 7.002 \cdot 10^{-8} .$$

Questo valore di q ci permette di trovare le soluzioni della sestica di Jacobi, che in questo caso è:

$$s^6 + \frac{10}{3267}s^3 - \frac{12 \cdot 15}{3267^2} + \frac{5}{3267^2} = 0 ,$$

dato che $\Delta = 15^3 - 27 \cdot 4 = 3267$. Le soluzioni si ottengono così:

$$\begin{aligned}B &= \sqrt[6]{3267} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (7.002 \cdot 10^{-8})^{\frac{(6n+1)^2}{12}} \\ \sqrt{s_\infty} &= \frac{\sqrt{5}}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n (7.002 \cdot 10^{-8})^{5 \frac{(6n+1)^2}{12}} \\ \sqrt{s_k} &= \frac{1}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon^{k(6n+1)^2} (7.002 \cdot 10^{-8})^{\frac{(6n+1)^2}{60}} .\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] L. Bianchi: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, Spoerri (1916)
- [2] L. Dickson: *Algebraic theories*, Dover (1959)
- [3] D. Fuchs, S. Tabachnikov: *Mathematical Omnibus*, American Mathematical Society (2007)
- [4] R. B. King: *Beyond the quartic equation*, Birkhauser (1996)
- [5] F. Klein: *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree. Translated by George Gavin Morrice. Second and revised edition.*, Dover Publications (1956)
- [6] S. Lang: *Elliptic functions*, Addison-Wesley (1973)
- [7] A. N. Lowan, G. Blanch, W. Horenstein: *On the inversion of the q -series associated with Jacobian elliptic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. ,48 (1942)
- [8] G. Ottaviani: *La geometria delle equazioni di secondo e terzo grado* (appunti per una conferenza) (2008)
- [9] C. L. Siegel: *Topics in complex function theory*, Wiley (1988)
- [10] I. Stewart: *Galois Theory*, Chapman and Hall (1973)
- [11] F. Tricomi: *Funzioni ellittiche*, Zanichelli (1937)