Algoritmo di Kiepert per la risoluzione dell'equazione quintica

Ilaria Nesi

21 novembre 2008

Nel primo seminario:

equazioni di secondo e terzo grado

- costruzione di un metodo geometrico per risolvere equazioni di secondo e terzo grado
- approfondimento degli aspetti didattici del metodo
- sviluppo di varie tipologie di esercizi per comprendere e applicare il metodo

In questo seminario:

equazioni di quinto grado

- trasformazioni di Tschirnhaus
- solidi platonici regolari e loro simmetrie
- funzioni ellittiche di Weierstrass e di Jacobi
- funzioni theta (di genere 1)

$\rightsquigarrow$ algoritmo di Kiepert per la risoluzione della generale equazione di quinto grado (1878)

In questo seminario:

equazioni di quinto grado

- trasformazioni di Tschirnhaus
- solidi platonici regolari e loro simmetrie
- funzioni ellittiche di Weierstrass e di Jacobi
- funzioni theta (di genere 1)

$\rightsquigarrow$ algoritmo di Kiepert per la risoluzione della generale equazione di quinto grado (1878)

Trasformazioni di Tschirnhaus

- Generica equazione monica di grado n con radici $x_1, \ldots, x_n$:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \, ,$$

definiamo, per $k = 1, \ldots, n$:

$$y_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \ldots + \alpha_{n-1} x_k^{n-1} \quad ,$$

nuova equazione monica di grado n con radici $y_1, \ldots, y_n$:

$$y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \, .$$

- Relazioni di Newton per l'equazione in y:

$$\sum y_k + A_1 = 0$$

$$\sum y_k^2 + A_1 \sum y_k + 2A_2 = 0$$

$$\sum y_k^3 + A_1 \sum y_k^2 + A_2 \sum y_k + 3A_3 = 0 \quad \ldots$$

se deve sparire il termine $A_1 y^{n-1} \longrightarrow$ dovrà essere $\sum y_k = 0$.

se deve sparire anche $A_2 y^{n-2} \longrightarrow$ dovrà essere anche $\sum y_k^2 = 0$.

- Relazioni di Newton per l'equazione in y:

$$\sum y_k + A_1 = 0$$

$$\sum y_k^2 + A_1 \sum y_k + 2A_2 = 0$$

$$\sum y_k^3 + A_1 \sum y_k^2 + A_2 \sum y_k + 3A_3 = 0 \quad \dots$$

se deve sparire il termine $A_1 y^{n-1} \longrightarrow$ dovrà essere $\sum y_k = 0$,

se deve sparire anche $A_2 y^{n-2} \longrightarrow$ dovrà essere anche $\sum y_k^2 = 0$.

Solidi platonici e polinomi poliedrali

TETRAEDRO, OTTAEDRO, CUBO, ICOSAEDRO, DODECAEDRO

- Possiamo rappresentare questi poliedri come punti sulla superficie della sfera di Riemann.
- Possiamo rappresentare i numeri complessi $z = a + ib$ come punti nel piano di Argand.

$\ast$ Facciamo coincidere il piano di Argand con il piano equatoriale della sfera di Riemann $\rightsquigarrow$ corrispondenza biunivoca tra i punti della sfera e i punti del piano equatoriale (proiezione stereografica da $N = (0, 0, 1) \leftrightarrow \infty$).

Solidi platonici e polinomi poliedrali

TETRAEDRO, OTTAEDRO, CUBO, ICOSAEDRO, DODECAEDRO

- Possiamo rappresentare questi poliedri come punti sulla superficie della sfera di Riemann.
- Possiamo rappresentare i numeri complessi $z = a + ib$ come punti nel piano di Argand.

$\ast$ Facciamo coincidere il piano di Argand con il piano equatoriale della sfera di Riemann $\rightsquigarrow$ corrispondenza biunivoca tra i punti della sfera e i punti del piano equatoriale (proiezione stereografica da $N = (0, 0, 1) \leftrightarrow \infty$).

Polinomi poliedrali:

Sono polinomi in u, v ($z = u/v$) le cui radici corrispondono alla posizione, sulla superficie della sfera di Riemann:

- dei vertici del poliedro,
- dei punti medi dei lati del poliedro,
- o dei baricentri delle facce del poliedro.

Tetraedro (simmetria $T_d \cong S_4$):

vertici: $\Phi = u^4 - 2\sqrt{3}iu^2v^2 + v^4$
lati: $t = uv(u^4 - v^4)$
facce: $\Psi = u^4 + 2\sqrt{3}iu^2v^2 + v^4$

Ottaedro (simmetria $O_h \cong S_4 \times \mathbb{Z}_2$):

vertici: $\tau = uv(u^4 - v^4)$
lati: $X = u^{12} - 33(u^8v^4 + u^4v^8) + v^{12}$
facce: $W = u^8 + 14u^4v^4 + v^8$

Icosaedro (simmetria $I_h \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2$):

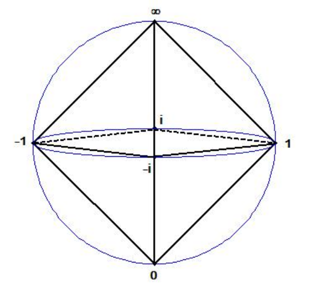
vertici: $f = uv(u^{10} + 11u^5v^5 - v^{10})$
lati: $T = u^{30} - 10005(u^{20}v^{10} + u^{10}v^{20}) + 522(u^{25}v^5 - u^5v^{25} + v^{30})$
facce: $H = -u^{20} + 228(u^{15}v^5 - u^5v^{25}) - 494u^{10}v^{10} - v^{20}$

Ad esempio, polinomio dei vertici dell'ottaedro in figura:

- i vertici sono 6 punti sulla sfera di Riemann, che corrispondono ai valori:

$$z = 0,\ \infty,\ 1,\ -1,\ i,\ -i \quad \Rightarrow$$

- in coordinate affini: $z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = z(z^4-1)$
- in coordinate omogenee ($z = u/v$): $\tau = uv(u^4 - v^4)$ **!** (il fattore v permette che si annulli anche per $z = \infty$)

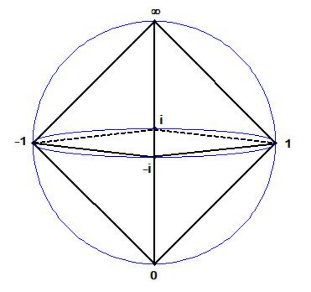


Ad esempio, polinomio dei vertici dell'ottaedro in figura:

- i vertici sono 6 punti sulla sfera di Riemann, che corrispondono ai valori:

$$z = 0,\ \infty,\ 1,\ -1,\ i,\ -i \quad \Rightarrow$$

- in coordinate affini: $z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = z(z^4-1)$
- in coordinate omogenee ($z = u/v$): $\tau = uv(u^4 - v^4)$! (il fattore v permette che si annulli anche per $z = \infty$)

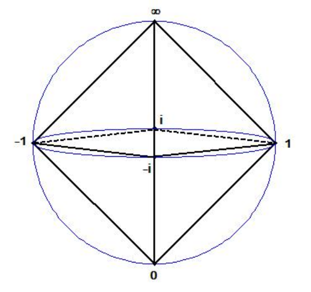


Ad esempio, polinomio dei vertici dell'ottaedro in figura:

- i vertici sono 6 punti sulla sfera di Riemann, che corrispondono ai valori:

$$z = 0,\ \infty,\ 1,\ -1,\ i,\ -i \quad \Rightarrow$$

- in coordinate affini: $z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = z(z^4-1)$
- in coordinate omogenee ($z = u/v$): $\tau = uv(u^4 - v^4)$! (il fattore v permette che si annulli anche per $z = \infty$)

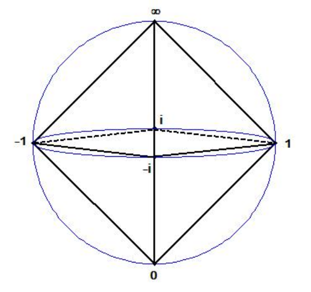


Ad esempio, polinomio dei vertici dell'ottaedro in figura:

- i vertici sono 6 punti sulla sfera di Riemann, che corrispondono ai valori:

$$z = 0,\ \infty,\ 1,\ -1,\ i,\ -i \quad \Rightarrow$$

- in coordinate affini: $z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = z(z^4-1)$
- in coordinate omogenee ($z = u/v$): $\tau = uv(u^4 - v^4)$ **!** (il fattore v permette che si annulli anche per $z = \infty$)



Da tener presente:

$\ast$ I polinomi f, H, T dell'icosaedro sono invarianti assoluti del gruppo icosaedrale I_h. Inoltre:

Teorema:

Ogni polinomio omogeneo in u, v che sia invariante per I_h è un invariante assoluto ed è un polinomio in f, H, T.

Identità dell'icosaedro:

$$1728f^5 - H^3 - T^2 \equiv 0$$

Da tener presente:

$\ast$ I polinomi f, H, T dell'icosaedro sono invarianti assoluti del gruppo icosaedrale I_h. Inoltre:

Teorema:

Ogni polinomio omogeneo in u, v che sia invariante per I_h è un invariante assoluto ed è un polinomio in f, H, T.

Identità dell'icosaedro:

$$1728f^5 - H^3 - T^2 \equiv 0$$

Da tener presente:
$\ast$ I polinomi f, H, T dell'icosaedro sono invarianti assoluti del gruppo icosaedrale I_h. Inoltre:

Teorema:

Ogni polinomio omogeneo in u, v che sia invariante per I_h è un invariante assoluto ed è un polinomio in f, H, T.

Identità dell'icosaedro:

$$1728f^5 - H^3 - T^2 \equiv 0$$

Funzioni ellittiche generali

- Sia Ω l'insieme dei periodi di f nel piano di Argand; f è una funzione doppiamente periodica se Ω è un reticolo di punti formato dalle intersezioni di due famiglie di rette parallele equidistanti.

FUNZIONE ELLITTICA: funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e doppiamente periodica.

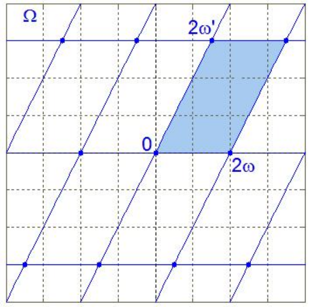
Funzioni ellittiche generali

- Sia Ω l'insieme dei periodi di f nel piano di Argand; f è una funzione doppiamente periodica se Ω è un reticolo di punti formato dalle intersezioni di due famiglie di rette parallele equidistanti.

FUNZIONE ELLITTICA: funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e doppiamente periodica.

- Ogni parallelogramma è detto maglia (quello celeste è il parallelogramma fondamentale).
  Cella: maglia senza poli o zeri sul bordo.

$\rightarrow$ Basta descrivere il comportamento di una funzione ellittica in una maglia!



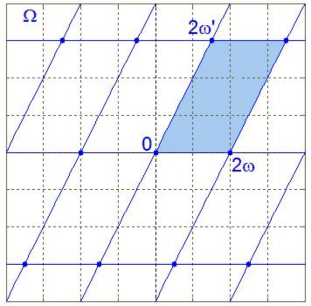
- $2\omega, 2\omega'$: periodi primitivi; tutti i periodi di f hanno la forma:

$$w = 2m\omega + 2n\omega'.$$

(convenzione: ω, ω' scelti in modo che $Im(\omega'/\omega) > 0$)

- Ogni parallelogramma è detto maglia (quello celeste è il parallelogramma fondamentale).
  Cella: maglia senza poli o zeri sul bordo.

$\rightarrow$ Basta descrivere il comportamento di una funzione ellittica in una maglia!



- $2\omega, 2\omega'$: periodi primitivi; tutti i periodi di f hanno la forma:

$$w = 2m\omega + 2n\omega'.$$

(convenzione: ω, ω' scelti in modo che $Im(\omega'/\omega) > 0$)

Proprietà:

1. Ogni funzione ellittica non costante ha poli.
2. Data f ellittica, il numero (finito) di poli in una cella, contati con la molteplicità, è detto ordine della funzione ellittica.
3. Se f è ellittica di ordine r, f assume ciascun $c \in \mathbb{C}$ esattamente r volte (contando la molteplicità) in ogni maglia.
4. La somma dei residui di una funzione ellittica nei poli di una qualsiasi cella è zero.
   Quindi non esistono funzioni ellittiche di ordine 1.

Proprietà:

1. Ogni funzione ellittica non costante ha poli.
2. Data f ellittica, il numero (finito) di poli in una cella, contati con la molteplicità, è detto ordine della funzione ellittica.
3. Se f è ellittica di ordine r, f assume ciascun $c \in \mathbb{C}$ esattamente r volte (contando la molteplicità) in ogni maglia.
4. La somma dei residui di una funzione ellittica nei poli di una qualsiasi cella è zero.
   Quindi non esistono funzioni ellittiche di ordine 1.

Proprietà:

1. Ogni funzione ellittica non costante ha poli.
2. Data f ellittica, il numero (finito) di poli in una cella, contati con la molteplicità, è detto ordine della funzione ellittica.
3. Se f è ellittica di ordine r, f assume ciascun $c \in \mathbb{C}$ esattamente r volte (contando la molteplicità) in ogni maglia.
4. La somma dei residui di una funzione ellittica nei poli di una qualsiasi cella è zero.
   Quindi non esistono funzioni ellittiche di ordine 1.

Proprietà:

1. Ogni funzione ellittica non costante ha poli.
2. Data f ellittica, il numero (finito) di poli in una cella, contati con la molteplicità, è detto ordine della funzione ellittica.
3. Se f è ellittica di ordine r, f assume ciascun $c \in \mathbb{C}$ esattamente r volte (contando la molteplicità) in ogni maglia.
4. La somma dei residui di una funzione ellittica nei poli di una qualsiasi cella è zero.
   Quindi non esistono funzioni ellittiche di ordine 1.

Funzioni ellittiche di ordine 2:

1. 2 poli semplici con residui uguali in modulo ma di segno opposto in ogni cella $\longrightarrow$ funzioni ellittiche di Jacobi
2. 1 polo doppio con residuo zero in ogni cella $\longrightarrow$ funzioni ellittiche di Weierstrass

Funzioni ellittiche di Weierstrass

La funzione $\wp$ di Weierstrass:

$$\wp(z) = \wp(z|\omega,\omega') = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right]$$

- È una funzione ellittica (pari) con periodi primitivi 2ω, $2\omega'$ e con poli doppi nei punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$.

Funzioni ellittiche di Weierstrass

La funzione $\wp$ di Weierstrass:

$$\wp(z) = \wp(z|\omega,\omega') = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right]$$

- È una funzione ellittica (pari) con periodi primitivi $2\omega, 2\omega'$ e con poli doppi nei punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$.

La derivata della $\wp$ di Weierstrass

$$\wp'(z) = -2 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(z-w)^3}$$

- È una funzione ellittica (dispari) di ordine 3; ha poli tripli nei punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$ e i suoi 3 zeri nel parallelogramma fondamentale sono:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega + \omega', \quad \omega_3 = \omega'.$$

La derivata della $\wp$ di Weierstrass

$$\wp'(z) = -2 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(z-w)^3}$$

- È una funzione ellittica (dispari) di ordine 3; ha poli tripli nei punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$ e i suoi 3 zeri nel parallelogramma fondamentale sono:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega + \omega', \quad \omega_3 = \omega' .$$

- Se chiamiamo: $e_1 = \wp(\omega_1), \quad e_2 = \wp(\omega_2), \quad e_3 = \wp(\omega_3)$, otteniamo, usando una proprietà delle funzioni ellittiche:

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

- Ponendo $\wp(z) = u$ e integrando:

$$z = \int_{\infty}^{u} \frac{d\theta}{\sqrt{4(\theta - e_1)(\theta - e_2)(\theta - e_3)}}$$

($\wp(z)$ come funzione inversa di un integrale ellittico).

- Se chiamiamo: $e_1 = \wp(\omega_1), \quad e_2 = \wp(\omega_2), \quad e_3 = \wp(\omega_3)$, otteniamo, usando una proprietà delle funzioni ellittiche:

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

- Ponendo $\wp(z) = u$ e integrando:

$$z = \int_{\infty}^{u} \frac{d\theta}{\sqrt{4(\theta - e_1)(\theta - e_2)(\theta - e_3)}}$$

($\wp(z)$ come funzione inversa di un integrale ellittico).

- Con ragionamenti diversi...

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

dove:

$$g_2 = 60 \cdot \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^4}$$

$$g_3 = 140 \cdot \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^6}$$

$\Longrightarrow$ e_1, e_2, e_3 sono le soluzioni dell'equazione:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0 \, .$$

- Con ragionamenti diversi...

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

dove:

$$g_2 = 60 \cdot \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^4}$$

$$g_3 = 140 \cdot \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^6}$$

$\Longrightarrow$ $e_1,\ e_2,\ e_3$ sono le soluzioni dell'equazione:

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 0 \; .$$

- Il discriminante dell'equazione di terzo grado è:

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

e $g_2,\ g_3,\ \Delta$ sono detti invarianti della funzione $\wp(z)$.

- Le tre soluzioni $e_1,\ e_2,\ e_3$ dell'equazione sono invece dette invarianti irrazionali di $\wp(z)$.

La funzione ζ di Weierstrass

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left[\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right]$$

- È l'integrale della $\wp$ di Weierstrass, cambiato di segno: $\wp(z) = -\zeta'(z)$.
- È una funzione dispari, meromorfa con poli semplici, ma non è ellittica.

(non è doppiamente periodica: se $\eta = \zeta(\omega)$ e $\eta' = \zeta(\omega') \rightarrow$
$$\zeta(z+2\omega) = \zeta(z) + 2\eta \ , \ \zeta(z+2\omega') = \zeta(z) + 2\eta' \ )$$

La funzione ζ di Weierstrass

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left[\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right]$$

- È l'integrale della $\wp$ di Weierstrass, cambiato di segno: $\wp(z) = -\zeta'(z)$.
- È una funzione dispari, meromorfa con poli semplici, ma non è ellittica.

  (non è doppiamente periodica: se $\eta = \zeta(\omega)$ e $\eta' = \zeta(\omega') \rightarrow$
  $\zeta(z + 2\omega) = \zeta(z) + 2\eta \;\; , \;\; \zeta(z + 2\omega') = \zeta(z) + 2\eta'$)

La funzione ζ di Weierstrass

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left[\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right]$$

- È l'integrale della $\wp$ di Weierstrass, cambiato di segno: $\wp(z) = -\zeta'(z)$.
- È una funzione dispari, meromorfa con poli semplici, ma non è ellittica.

(non è doppiamente periodica: se $\eta = \zeta(\omega)$ e $\eta' = \zeta(\omega') \rightarrow$

$$\zeta(z + 2\omega) = \zeta(z) + 2\eta \;\;,\;\; \zeta(z + 2\omega') = \zeta(z) + 2\eta' \;)$$

La funzione σ di Weierstrass

$$\sigma(z) = z \cdot \prod \left\{ (1 - \frac{z}{w}) \exp \left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2 \right] \right\}$$

- La ζ di Weierstrass è la sua derivata logaritmica: $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$.
- È una funzione intera (dispari) che ha come zeri i punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$.

- Definiamo anche altre 3 funzioni intere:

$$\sigma_a(z) = \frac{\sigma(\omega_a - z) e^{\eta_a z}}{\sigma(\omega_a)} \qquad (a = 1, 2, 3),$$

dove $\eta_a = \zeta(\omega_a)$.

La funzione σ di Weierstrass

$$\sigma(z) = z \cdot \prod \left\{ \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2 \right] \right\}$$

- La ζ di Weierstrass è la sua derivata logaritmica: $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$.
- È una funzione intera (dispari) che ha come zeri i punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$.

- Definiamo anche altre 3 funzioni intere:

$$\sigma_a(z) = \frac{\sigma(\omega_a - z)e^{\eta_a z}}{\sigma(\omega_a)} \qquad (a = 1, 2, 3),$$

dove $\eta_a = \zeta(\omega_a)$.

La funzione σ di Weierstrass

$$\sigma(z) = z \cdot \prod \left\{ \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2 \right] \right\}$$

- La ζ di Weierstrass è la sua derivata logaritmica: $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$.
- È una funzione intera (dispari) che ha come zeri i punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$.

- Definiamo anche altre 3 funzioni intere:

$$\sigma_a(z) = \frac{\sigma(\omega_a - z)e^{\eta_a z}}{\sigma(\omega_a)} \qquad (a = 1, 2, 3),$$

dove $\eta_a = \zeta(\omega_a)$.

La funzione σ di Weierstrass

$$\sigma(z) = z \cdot \prod \left\{ (1 - \frac{z}{w}) \exp\left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2 \right] \right\}$$

- La ζ di Weierstrass è la sua derivata logaritmica: $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$.
- È una funzione intera (dispari) che ha come zeri i punti $w = 2m\omega + 2n\omega'$.

- Definiamo anche altre 3 funzioni intere:

$$\sigma_a(z) = \frac{\sigma(\omega_a - z) e^{\eta_a z}}{\sigma(\omega_a)} \qquad (a = 1, 2, 3),$$

dove $\eta_a = \zeta(\omega_a)$.

Funzioni ellittiche di Jacobi

- Consideriamo funzioni f così definite:

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} ,$$

dove $P(x)$ è un polinomio.

- Ad esempio:

$$z = \int_0^{\sin(z)} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Funzioni ellittiche di Jacobi

- Consideriamo funzioni f così definite:

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} ,$$

dove $P(x)$ è un polinomio.

- Ad esempio:

$$z = \int_0^{\sin(z)} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Se $P(x)$ ha grado 3 o 4 $\longrightarrow$ integrali ellittici.

- Prendiamo:

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \, ,$$

- sostituendo $x = \sin\vartheta$:

$$z = \int_0^{\phi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$$

con $f(z) = \sin\phi$.

Se $P(x)$ ha grado 3 o 4 $\longrightarrow$ integrali ellittici.

- Prendiamo:

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \, ,$$

- sostituendo $x = \sin\vartheta$:

$$z = \int_0^{\phi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$$

con $f(z) = \sin\phi$.

Le funzioni ellittiche di Jacobi:

- $sn(z) = \sin\phi$
- $cn(z) = \cos\phi = \sqrt{1 - sn^2(z)}$
- $dn(z) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(z)}$

k: modulo

$k' = \sqrt{1-k^2}$: modulo complementare

Le funzioni ellittiche di Jacobi:

- $sn(z) = \sin\phi$
- $cn(z) = \cos\phi = \sqrt{1 - sn^2(z)}$
- $dn(z) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(z)}$

k: modulo

$k' = \sqrt{1-k^2}$: modulo complementare

- Le 3 funzioni *sn*, *cn*, *dn* sono ellittiche e si possono esprimere tramite la $\wp$:

$$sn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}}$$

$$cn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}}$$

$$dn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}} \, .$$

- gli invarianti irrazionali e_1, e_2, e_3 di $\wp$ sono legati al modulo delle funzioni di Jacobi così:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad , \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \, .$$

- Le 3 funzioni *sn*, *cn*, *dn* sono ellittiche e si possono esprimere tramite la $\wp$:

$$sn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}}$$

$$cn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}}$$

$$dn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}}\,.$$

- gli invarianti irrazionali $e_1,\ e_2,\ e_3$ di $\wp$ sono legati al modulo delle funzioni di Jacobi così:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad , \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}\,.$$

La funzione $\psi_n(z)$

- Soffermiamoci su una particolare funzione ellittica con periodi $2\omega, 2\omega'$:

$$\psi_n(z) = \frac{\sigma(nz)}{\sigma^{n^2}(z)}$$

$$\psi_1(z) = 1$$

$$\psi_2(z) = -\wp'(z)$$

$$\psi_3(z) = 3\wp^4(z) - \frac{3}{2}g_2\wp^2(z) - 3g_3\wp(z) - \frac{1}{16}g_2^2$$

$$\psi_4(z) = \wp'(z)(\wp'^4(z) - \psi_3(z)\wp''(z))$$

La funzione $\psi_n(z)$

- Soffermiamoci su una particolare funzione ellittica con periodi $2\omega, 2\omega'$:

$$\psi_n(z) = \frac{\sigma(nz)}{\sigma^{n^2}(z)}$$

$$\psi_1(z) = 1$$
$$\psi_2(z) = -\wp'(z)$$
$$\psi_3(z) = 3\wp^4(z) - \frac{3}{2}g_2\wp^2(z) - 3g_3\wp(z) - \frac{1}{16}g_2^2$$
$$\psi_4(z) = \wp'(z)\big(\wp'^4(z) - \psi_3(z)\wp''(z)\big)$$

definizione ricorsiva:

$$
\begin{aligned}
\psi_{2n+1} &= \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3 \\
\psi_{2n} &= \frac{\psi_n}{\wp'(z)}\left(\psi_{n-2}\psi_{n+1}^2 - \psi_{n+2}\psi_{n-1}^2\right)
\end{aligned}
$$

- Il caso $n = 5$ è importante per l'algoritmo:

$$\psi_5(z) = 0 \Leftrightarrow (\wp''^2 - 12\wp\wp'^2)^3 - 16\wp'^4\wp''(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2) - 64\wp'^8 = 0.$$

definizione ricorsiva:

$$\begin{aligned} \psi_{2n+1} &= \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3 \\ \psi_{2n} &= \frac{\psi_n}{\wp'(z)}(\psi_{n-2}\psi_{n+1}^2 - \psi_{n+2}\psi_{n-1}^2) \end{aligned}$$

- Il caso $n = 5$ è importante per l'algoritmo:

$$\psi_5(z) = 0 \Leftrightarrow (\wp''^2 - 12\wp\wp'^2)^3 - 16\wp'^4\wp''(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2) - 64\wp'^8 = 0.$$

Funzioni theta

Funzioni theta:

- Sono 4 funzioni intere e periodiche, rappresentabili tramite serie la cui convergenza è estremamente rapida.
- Si possono mettere in relazione con le funzioni viste finora e sono utili per la loro computazione numerica.
- Consideriamo una $\wp(z) = \wp(z|\omega, \omega')$ e definiamo:

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} \quad (Im\,\tau > 0) \quad , \qquad q = e^{i\pi\tau} \quad , \qquad \nu = \frac{z}{2\omega} .$$

Funzioni theta

Funzioni theta:

- Sono 4 funzioni intere e periodiche, rappresentabili tramite serie la cui convergenza è estremamente rapida.
- Si possono mettere in relazione con le funzioni viste finora e sono utili per la loro computazione numerica.
- Consideriamo una $\wp(z) = \wp(z|\omega, \omega')$ e definiamo:

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} \quad (Im\,\tau > 0) \quad , \qquad q = e^{i\pi\tau} \quad , \qquad \nu = \frac{z}{2\omega} .$$

Funzioni theta

Funzioni theta:

- Sono 4 funzioni intere e periodiche, rappresentabili tramite serie la cui convergenza è estremamente rapida.
- Si possono mettere in relazione con le funzioni viste finora e sono utili per la loro computazione numerica.
- Consideriamo una $\wp(z) = \wp(z|\omega, \omega')$ e definiamo:

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} \quad (Im\tau > 0) \quad , \qquad q = e^{i\pi\tau} \quad , \qquad \nu = \frac{z}{2\omega} \, .$$

$$\theta_1(\nu) = 2\sqrt[4]{q}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)} \sin[(2n+1)\pi\nu]$$

$$\theta_2(\nu) = 2\sqrt[4]{q}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos[(2n+1)\pi\nu]$$

$$\theta_3(\nu) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2n\pi\nu)$$

$$\theta_4(\nu) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} \cos(2n\pi\nu)$$

- le serie convergono $\forall \nu \in \mathbb{C}$ e $\forall q \in \mathbb{R}$ tale che: $|q| < 1$
- il fattore q^{n^2} porta a una convergenza molto rapida
- θ_1, θ_2 hanno periodo 2 e θ_3, θ_4 hanno periodo 1

- Se prendiamo $\nu = 0$ (per θ_1 prima deriviamo) otteniamo le cosiddette funzioni thetanulle:

$$\theta_1'(0) = 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots)$$
$$\theta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \dots)$$
$$\theta_3(0) = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + \dots)$$
$$\theta_4(0) = 1 - 2(q - q^4 + q^9 - \dots).$$

- le serie convergono $\forall \nu \in \mathbb{C}$ e $\forall q \in \mathbb{R}$ tale che: $|q| < 1$
- il fattore q^{n^2} porta a una convergenza molto rapida
- θ_1, θ_2 hanno periodo 2 e θ_3, θ_4 hanno periodo 1

- Se prendiamo $\nu = 0$ (per θ_1 prima deriviamo) otteniamo le cosiddette funzioni thetanulle:

$$
\begin{aligned}
\theta_1'(0) &= 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots) \\
\theta_2(0) &= 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \dots) \\
\theta_3(0) &= 1 + 2(q + q^4 + q^9 + \dots) \\
\theta_4(0) &= 1 - 2(q - q^4 + q^9 - \dots).
\end{aligned}
$$

Vediamo alcune delle relazioni tra le θ e le funzioni viste in precedenza. Se $\nu = z/2\omega$:

relazione tra $\wp$ e le θ:

$$\wp(z|\omega,\omega') = e_a + \frac{1}{4\omega^2}\left[\frac{\theta_1'(0)\cdot\theta_{a+1}(\nu)}{\theta_{a+1}(0)\cdot\theta_1(\nu)}\right]^2 \qquad (a = 1,2,3).$$

relazione tra le σ e le θ:

$$\sigma(z) = 2\omega e^{\frac{\eta}{2\omega}z^2}\cdot\frac{\theta_1(\nu)}{\theta_1'(0)} \qquad \sigma_1(z) = e^{\frac{\eta}{2\omega}z^2}\cdot\frac{\theta_2(\nu)}{\theta_2(0)}$$

$$\sigma_2(z) = e^{\frac{\eta}{2\omega}z^2}\cdot\frac{\theta_3(\nu)}{\theta_3(0)} \qquad \sigma_3(z) = e^{\frac{\eta}{2\omega}z^2}\cdot\frac{\theta_4(\nu)}{\theta_4(0)}.$$

Vediamo alcune delle relazioni tra le θ e le funzioni viste in precedenza. Se $\nu = z/2\omega$:

relazione tra $\wp$ e le θ:

$$\wp(z|\omega,\omega') = e_a + \frac{1}{4\omega^2}\left[\frac{\theta_1'(0)\cdot\theta_{a+1}(\nu)}{\theta_{a+1}(0)\cdot\theta_1(\nu)}\right]^2 \qquad (a = 1,2,3).$$

relazione tra le σ e le θ:

$$\sigma(z) = 2\omega e^{\frac{\eta}{2\omega}z^2}\cdot\frac{\theta_1(\nu)}{\theta_1'(0)} \qquad \sigma_1(z) = e^{\frac{\eta}{2\omega}z^2}\cdot\frac{\theta_2(\nu)}{\theta_2(0)}$$

$$\sigma_2(z) = e^{\frac{\eta}{2\omega}z^2}\cdot\frac{\theta_3(\nu)}{\theta_3(0)} \qquad \sigma_3(z) = e^{\frac{\eta}{2\omega}z^2}\cdot\frac{\theta_4(\nu)}{\theta_4(0)}\,.$$

relazioni tra le funzioni di Jacobi e le θ:

$$sn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = 2\omega\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\theta_4(0)\theta_1(\nu)}{\theta_4(\nu)\theta_1'(0)}$$

$$cn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \frac{\theta_4(0)\theta_2(\nu)}{\theta_2(0)\theta_4(\nu)} \qquad dn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \frac{\theta_4(0)\theta_3(\nu)}{\theta_3(0)\theta_4(\nu)}\,.$$

- Per il nostro algoritmo saranno utili le seguenti relazioni tra il modulo k delle funzioni di Jacobi e le funzioni thetanulle:

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} \qquad \sqrt{k'} = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}\,.$$

relazioni tra le funzioni di Jacobi e le θ:

$$sn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = 2\omega\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\theta_4(0)\theta_1(\nu)}{\theta_4(\nu)\theta_1'(0)}$$

$$cn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \frac{\theta_4(0)\theta_2(\nu)}{\theta_2(0)\theta_4(\nu)} \qquad dn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \frac{\theta_4(0)\theta_3(\nu)}{\theta_3(0)\theta_4(\nu)}\,.$$

* Per il nostro algoritmo saranno utili le seguenti relazioni tra il modulo k delle funzioni di Jacobi e le funzioni thetanulle:

$$\sqrt{k} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} \qquad \sqrt{k'} = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}\,.$$

Algoritmo di Kiepert

Equazione quintica generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$$\downarrow \qquad (1) \qquad \uparrow$$

Equazione quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$$

$$\downarrow \qquad (2) \qquad \uparrow$$

Equazione quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$$

Algoritmo di Kiepert

Equazione quintica generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$$\downarrow \qquad (1) \qquad \uparrow$$

Equazione quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$$

$$\downarrow \qquad (2) \qquad \uparrow$$

Equazione quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$$

Algoritmo di Kiepert

Equazione quintica generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$$\downarrow \qquad (1) \qquad \uparrow$$

Equazione quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$$

$$\downarrow \qquad (2) \qquad \uparrow$$

Equazione quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$$

Algoritmo di Kiepert

$\downarrow$ (3) $\uparrow$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta} s^3 - \frac{12 g_2}{\Delta^2} s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

$\ast$ per risolverla:

- si esprimono le soluzioni tramite la $\wp$ di Weierstrass (4)
- poi si esprimono tramite le funzioni theta (5)
- si calcola il valore del parametro q (problema dell'inversione) (6)
- si ripercorrono all'indietro tutte le trasformazioni (7)

Algoritmo di Kiepert

$$\downarrow \qquad (3) \qquad \uparrow$$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta} s^3 - \frac{12 g_2}{\Delta^2} s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

$\ast$ per risolverla:

- si esprimono le soluzioni tramite la $\wp$ di Weierstrass (4)
- poi si esprimono tramite le funzioni theta (5)
- si calcola il valore del parametro q (problema dell'inversione) (6)
- si ripercorrono all'indietro tutte le trasformazioni (7)

Algoritmo di Kiepert

$$\downarrow \qquad\qquad (3) \qquad\qquad \uparrow$$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta} s^3 - \frac{12 g_2}{\Delta^2} s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

$\ast$ per risolverla:

- si esprimono le soluzioni tramite la $\wp$ di Weierstrass (4)
- poi si esprimono tramite le funzioni theta (5)
- si calcola il valore del parametro q (problema dell'inversione) (6)
- si ripercorrono all'indietro tutte le trasformazioni (7)

Algoritmo di Kiepert

$\downarrow$ (3) $\uparrow$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta} s^3 - \frac{12 g_2}{\Delta^2} s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

$\ast$ per risolverla:

- si esprimono le soluzioni tramite la $\wp$ di Weierstrass (4)
- poi si esprimono tramite le funzioni theta (5)
- si calcola il valore del parametro q (problema dell'inversione) (6)
- si ripercorrono all'indietro tutte le trasformazioni (7)

Algoritmo di Kiepert

$\downarrow$ (3) $\uparrow$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta} s^3 - \frac{12 g_2}{\Delta^2} s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

$\ast$ per risolverla:

- si esprimono le soluzioni tramite la $\wp$ di Weierstrass (4)
- poi si esprimono tramite le funzioni theta (5)
- si calcola il valore del parametro q (problema dell'inversione) (6)
- si ripercorrono all'indietro tutte le trasformazioni (7)

Dalla quintica generale alla quintica principale

Si usa una trasformazione di Tschirnhaus della forma:

$$z_k = x_k^2 - u x_k + v$$

chi sono u e v?

- Nella quintica principale mancano i termini con z^4 e z^3 $\Longrightarrow$ va posto $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$;
- facendo i calcoli...

$$5v = -Au - A^2 + 2B$$

$$(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + (2A^4 - 8A^2B + 10AC + 3B^2 - 10D) = 0$$

dalla seconda troviamo u e dalla prima calcoliamo il corrispondente v.

Dalla quintica generale alla quintica principale

Si usa una trasformazione di Tschirnhaus della forma:

$$z_k = x_k^2 - u x_k + v$$

chi sono u e v?

- Nella quintica principale mancano i termini con z^4 e z^3 $\Longrightarrow$ va posto $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$;
- facendo i calcoli...

$$5v = -Au - A^2 + 2B$$

$$(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + (2A^4 - 8A^2B + \\ + 10AC + 3B^2 - 10D) = 0$$

dalla seconda troviamo u e dalla prima calcoliamo il corrispondente v.

Dalla quintica generale alla quintica principale

Si usa una trasformazione di Tschirnhaus della forma:

$$z_k = x_k^2 - ux_k + v$$

chi sono u e v?

- Nella quintica principale mancano i termini con z^4 e z^3 $\Longrightarrow$ va posto $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$;
- facendo i calcoli...

$$5v = -Au - A^2 + 2B$$

$$(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + (2A^4 - 8A^2B + \\ + 10AC + 3B^2 - 10D) = 0$$

dalla seconda troviamo u e dalla prima calcoliamo il corrispondente v.

Troviamo i coefficienti a, b, c della quintica principale:

- scriviamo: $v^5 + 5av^2 + 5bv + c = \prod(v - z_k)$ e sfruttiamo le identità di Newton...

$$c = -E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E) - v^5 - 5av^2 - 5bv$$

- ora deriviamo: $5v^4 + 10av + 5b + c = \sum_j \prod_{k \neq j}(v - z_k)$, e procedendo analogamente...

$$5b = D(u^4+Au^3+Bu^2+Cu+D)-E(5u^3+4Au^2+3Bu+C)-5v^4-10av$$

- derivando ancora una volta...

$$5a = -C(u^3+Au^2+Bu+C)+D(4u^2+3Au+2B)-E(5u+2A)-10v^3$$

$\ast$ abbiamo così trovato i coefficienti della quintica principale!

Troviamo i coefficienti a, b, c della quintica principale:

- scriviamo: $v^5 + 5av^2 + 5bv + c = \prod(v - z_k)$ e sfruttiamo le identità di Newton...

$$c = -E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E) - v^5 - 5av^2 - 5bv$$

- ora deriviamo: $5v^4 + 10av + 5b + c = \sum_j \prod_{k \neq j}(v - z_k)$, e procedendo analogamente...

$$5b = D(u^4+Au^3+Bu^2+Cu+D)-E(5u^3+4Au^2+3Bu+C)-5v^4-10av$$

- derivando ancora una volta...

$$5a = -C(u^3+Au^2+Bu+C)+D(4u^2+3Au+2B)-E(5u+2A)-10v^3$$

$\ast$ abbiamo così trovato i coefficienti della quintica principale!

Troviamo i coefficienti a, b, c della quintica principale:

- scriviamo: $v^5 + 5av^2 + 5bv + c = \prod(v - z_k)$ e sfruttiamo le identità di Newton...

$$c = -E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E) - v^5 - 5av^2 - 5bv$$

- ora deriviamo: $5v^4 + 10av + 5b + c = \sum_j \prod_{k \neq j}(v - z_k)$, e procedendo analogamente...

$$5b = D(u^4+Au^3+Bu^2+Cu+D)-E(5u^3+4Au^2+3Bu+C)-5v^4-10av$$

- derivando ancora una volta...

$$5a = -C(u^3+Au^2+Bu+C)+D(4u^2+3Au+2B)-E(5u+2A)-10v^3$$

$\ast$ abbiamo così trovato i coefficienti della quintica principale!

Troviamo i coefficienti a, b, c della quintica principale:

- scriviamo: $v^5 + 5av^2 + 5bv + c = \prod(v - z_k)$ e sfruttiamo le identità di Newton...

$$c = -E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E) - v^5 - 5av^2 - 5bv$$

- ora deriviamo: $5v^4 + 10av + 5b + c = \sum_j \prod_{k \neq j}(v - z_k)$, e procedendo analogamente...

$$5b = D(u^4+Au^3+Bu^2+Cu+D)-E(5u^3+4Au^2+3Bu+C)-5v^4-10av$$

- derivando ancora una volta...

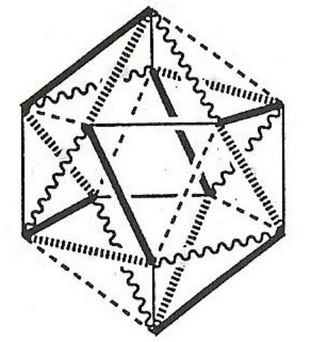
$$5a = -C(u^3+Au^2+Bu+C)+D(4u^2+3Au+2B)-E(5u+2A)-10v^3$$

$\ast$ abbiamo così trovato i coefficienti della quintica principale!

Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

In questo passaggio ci vengono in aiuto i poliedri e i loro polinomi!

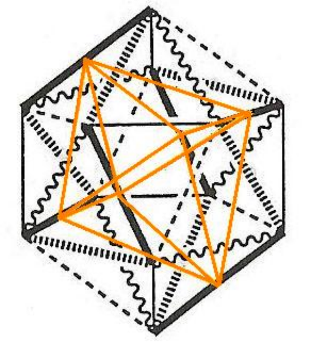
Si può partizionare un icosaedro regolare in 5 ottaedri regolari: dividiamo i 30 lati dell'icosaedro in 5 insiemi di 6 lati ciascuno (come in figura); per ogni insieme, i punti medi dei 6 lati sono i vertici di un ottaedro regolare.



Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

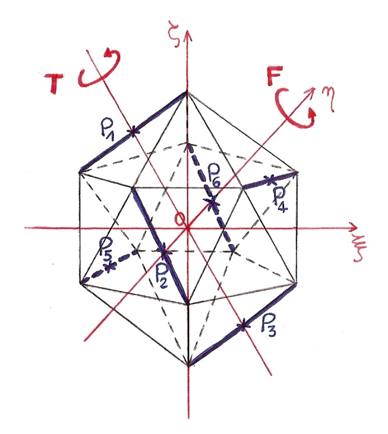
In questo passaggio ci vengono in aiuto i poliedri e i loro polinomi!

Si può partizionare un icosaedro regolare in 5 ottaedri regolari: dividiamo i 30 lati dell'icosaedro in 5 insiemi di 6 lati ciascuno (come in figura); per ogni insieme, i punti medi dei 6 lati sono i vertici di un ottaedro regolare.



Prendiamo l'ottaedro $P_1 P_2 \dots P_6$.

Consideriamo tre rotazioni: F di 180° attorno all'asse η, T di 180° attorno all'asse OP_1 e la composizione TF, di 180° attorno all'asse perpendicolare a entrambi gli assi η e OP_1.

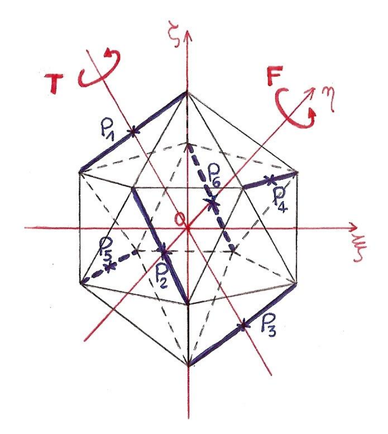


Esse sono, formalmente, le trasformazioni ($\varepsilon = \exp(2\pi i/5)$):

$$F: \quad z' = -\frac{1}{z}$$

$$T: \quad z' = \frac{(\varepsilon - \varepsilon^4)z + (\varepsilon^3 - \varepsilon^2)}{(\varepsilon^3 - \varepsilon^2)z - (\varepsilon - \varepsilon^4)}$$

$$TF: \quad z' = \frac{(\varepsilon^3 - \varepsilon^2)z - (\varepsilon - \varepsilon^4)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4)z - (\varepsilon^3 - \varepsilon^2)}\,.$$



- Quali sono i punti lasciati inalterati dalle tre rotazioni?
  Ponendo $z' = z$ e poi passando alle coordinate omogenee...

$$A_0 = u^2 + v^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } F$$

$$B_0 = u^2 - 2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)uv - v^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } T$$

$$C_0 = u^2 - 2(\varepsilon + \varepsilon^4)uv - v^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } TF.$$

- Ognuno dei P_i è un punto fisso per una di queste rotazioni $\Longrightarrow$

$$t_0 := A_0 B_0 C_0 = u^6 + 2u^5 v - 5u^4 v^2 - 5u^2 v^4 - 2uv^5 + v^6$$

è il polinomio dei vertici dell'ottaedro $P_1 P_2 \ldots P_6$.

- Quali sono i punti lasciati inalterati dalle tre rotazioni?
  Ponendo $z' = z$ e poi passando alle coordinate omogenee...

$$A_0 = u^2 + v^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } F$$

$$B_0 = u^2 - 2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)uv - v^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } T$$

$$C_0 = u^2 - 2(\varepsilon + \varepsilon^4)uv - v^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ (u, v) \text{ è lasciato inalterato da } TF.$$

- Ognuno dei P_i è un punto fisso per una di queste rotazioni $\Longrightarrow$

$$t_0 := A_0 B_0 C_0 = u^6 + 2u^5 v - 5u^4 v^2 - 5u^2 v^4 - 2uv^5 + v^6$$

è il polinomio dei vertici dell'ottaedro $P_1 P_2 \ldots P_6$.

- Gli altri 4 ottaedri si ottengono dal primo facendo rotazioni di $k \cdot \pi/5 \ \ (k = 1, 2, 3, 4)$.
  Come viene modificato t_0 dalla rotazione $S^k : \ z' = \varepsilon^k z$ (forma omogenea: $U = \varepsilon^{3k} u, \quad V = \varepsilon^{2k} v$)?

$$t_k = \varepsilon^{3k} u^6 + 2\varepsilon^{2k} u^5 v - 5\varepsilon^k u^4 v^2 - 5\varepsilon^{4k} u^2 v^4 - 2\varepsilon^{3k} u v^5 + \varepsilon^{2k} v^6$$

è il polinomio dei vertici dell'ottaedro regolare che si ottiene dal precedente facendo una rotazione di $\frac{k}{5}\pi$.

- Gli altri 4 ottaedri si ottengono dal primo facendo rotazioni di $k \cdot \pi/5$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.
  Come viene modificato t_0 dalla rotazione $S^k : \; z' = \varepsilon^k z$ (forma omogenea: $U = \varepsilon^{3k} u, \quad V = \varepsilon^{2k} v$)?

$$t_k = \varepsilon^{3k} u^6 + 2\varepsilon^{2k} u^5 v - 5\varepsilon^k u^4 v^2 - 5\varepsilon^{4k} u^2 v^4 - 2\varepsilon^{3k} u v^5 + \varepsilon^{2k} v^6$$

è il polinomio dei vertici dell'ottaedro regolare che si ottiene dal precedente facendo una rotazione di $\frac{k}{5}\pi$.

Ma i punti in cui $t_0, \ldots, t_4$ si annullano sono anche i punti medi dei lati dell'icosaedro $\Rightarrow$ sono le radici di $t^5 + c_1 t^4 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5 = 0$, dove c_k è polinomio di grado $6k$ in u, v invariante per I_h.
Ragionando sui gradi che può avere un invariante di I_h e sfruttando le identità di Newton...

i polinomi $t_0, \ldots, t_4$ degli ottaedri sono le radici dell'equazione di Brioschi:

$$t^5 - 10ft^3 + 45f^2t - T = 0$$

dove f e T sono i polinomi dei vertici e dei lati dell'icosaedro.

- $\ast$ La nostra equazione di Brioschi è un caso particolare in cui $Z = f$, $Z^2 = T \;\Rightarrow\; f^2 = T$.

Ma i punti in cui $t_0, \ldots, t_4$ si annullano sono anche i punti medi dei lati dell'icosaedro $\Rightarrow$ sono le radici di $t^5 + c_1 t^4 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5 = 0$, dove c_k è polinomio di grado $6k$ in u, v invariante per I_h.
Ragionando sui gradi che può avere un invariante di I_h e sfruttando le identità di Newton...

i polinomi $t_0, \ldots, t_4$ degli ottaedri sono le radici dell'equazione di Brioschi:

$$t^5 - 10ft^3 + 45f^2 t - T = 0$$

dove f e T sono i polinomi dei vertici e dei lati dell'icosaedro.

* La nostra equazione di Brioschi è un caso particolare in cui $Z = f$, $Z^2 = T \Rightarrow f^2 = T$.

Ma i punti in cui $t_0, \dots, t_4$ si annullano sono anche i punti medi dei lati dell'icosaedro $\Rightarrow$ sono le radici di $t^5 + c_1 t^4 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5 = 0$, dove c_k è polinomio di grado $6k$ in u, v invariante per I_h.
Ragionando sui gradi che può avere un invariante di I_h e sfruttando le identità di Newton...

i polinomi $t_0, \dots, t_4$ degli ottaedri sono le radici dell'equazione di Brioschi:

$$t^5 - 10ft^3 + 45f^2t - T = 0$$

dove f e T sono i polinomi dei vertici e dei lati dell'icosaedro.

∗ La nostra equazione di Brioschi è un caso particolare in cui $Z = f,\ Z^2 = T\ \Rightarrow\ f^2 = T$.

- Quali sono i polinomi W_k delle facce degli ottaedri?
  A meno di una costante, W_k è l'hessiano di t_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$...

$$W_k = -\varepsilon^{4k}u^8 + \varepsilon^{3k}u^7v - 7\varepsilon^{2k}u^6v^2 - 7\varepsilon^{k}u^5v^3 + 7\varepsilon^{4k}u^3v^5 - 7\varepsilon^{3k}u^2v^6 - \\ -\varepsilon^{2k}uv^7 - \varepsilon^{k}v^8 \ .$$

- Ragionando anche qui sul grado degli invarianti di I_h...

$$\sum W_k = 0, \quad \sum t_k W_k = 0, \quad \sum W_k^2 = 0,$$

$$\sum t_k W_k^2 = 0, \quad \sum t_k^2 W_k^2 = 0 \ .$$

- Quali sono i polinomi W_k delle facce degli ottaedri?
  A meno di una costante, W_k è l'hessiano di t_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)...

$$W_k = -\varepsilon^{4k} u^8 + \varepsilon^{3k} u^7 v - 7\varepsilon^{2k} u^6 v^2 - 7\varepsilon^{k} u^5 v^3 + 7\varepsilon^{4k} u^3 v^5 - 7\varepsilon^{3k} u^2 v^6 - \\ -\varepsilon^{2k} u v^7 - \varepsilon^{k} v^8 \ .$$

- Ragionando anche qui sul grado degli invarianti di I_h...

$$\sum W_k = 0, \quad \sum t_k W_k = 0, \quad \sum W_k^2 = 0,$$

$$\sum t_k W_k^2 = 0, \quad \sum t_k^2 W_k^2 = 0 \ .$$

- Se allora prendiamo, per certi σ, τ:

$$z_k = \sigma W_k + \tau t_k W_k$$

segue che $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$
$\Rightarrow$ tali z_k sono le radici di una quintica principale
$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$.

- Ricaviamo i coefficienti di questa quintica principale (anche qui tramite le identità di Newton e un'indagine sui gradi degli invarianti)...

$$a = 8f^2\sigma^3 + T\sigma^2\tau + 72f^3\sigma\tau^2 + fT\tau^3$$

$$b = -fH\sigma^4 + 18f^2H\sigma^2\tau^2 + HT\sigma\tau^3 + 27f^3H\tau^4$$

$$c = H^2(\sigma^5 - 10f\sigma^3\tau^2 + 45f^2\sigma\tau^4 + T\tau^5) .$$

- Se allora prendiamo, per certi σ, τ:

$$z_k = \sigma W_k + \tau t_k W_k$$

  segue che $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$
  $\Rightarrow$ tali z_k sono le radici di una quintica principale
  $z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$.

- Ricaviamo i coefficienti di questa quintica principale (anche qui tramite le identità di Newton e un'indagine sui gradi degli invarianti)...

$$a = 8f^2\sigma^3 + T\sigma^2\tau + 72f^3\sigma\tau^2 + fT\tau^3$$

$$b = -fH\sigma^4 + 18f^2H\sigma^2\tau^2 + HT\sigma\tau^3 + 27f^3H\tau^4$$

$$c = H^2(\sigma^5 - 10f\sigma^3\tau^2 + 45f^2\sigma\tau^4 + T\tau^5)\ .$$

- Ora diamo opportuni valori a σ, τ, in modo che le espressioni per a, b, c coinvolgano f, H, T esplicitamente solo nelle combinazioni:

$$Z = \frac{f^5}{T^2} \qquad \text{e} \qquad V = \frac{H^3}{f^5}$$

(legate dalla relazione: $\frac{1}{Z} + V = 1728$).

- Prendiamo:

$$\sigma = \frac{\lambda f}{H} \quad , \quad \tau = \frac{\mu f^3}{HT}$$

(λ, μ: parametri) e sostituendo...

$$Va = 8\lambda^3 + \lambda^2\mu + (72\lambda\mu^2 + \mu^3)Z$$
$$Vb = -\lambda^4 + 18\lambda^2\mu^2 Z + \lambda\mu^3 Z + 27\mu^4 Z^2$$
$$Vc = \lambda^5 - 10\lambda^3\mu^2 Z + 45\lambda\mu^4 Z^2 + \mu^5 Z^2 \ .$$

- Ora diamo opportuni valori a σ, τ, in modo che le espressioni per a, b, c coinvolgano f, H, T esplicitamente solo nelle combinazioni:

$$Z = \frac{f^5}{T^2} \quad \text{e} \quad V = \frac{H^3}{f^5}$$

(legate dalla relazione: $\frac{1}{Z} + V = 1728$).

- Prendiamo:

$$\sigma = \frac{\lambda f}{H} \quad , \quad \tau = \frac{\mu f^3}{HT}$$

(λ, μ: parametri) e sostituendo...

$$Va = 8\lambda^3 + \lambda^2\mu + (72\lambda\mu^2 + \mu^3)Z$$
$$Vb = -\lambda^4 + 18\lambda^2\mu^2 Z + \lambda\mu^3 Z + 27\mu^4 Z^2$$
$$Vc = \lambda^5 - 10\lambda^3\mu^2 Z + 45\lambda\mu^4 Z^2 + \mu^5 Z^2 \ .$$

- Invertiamo le equazioni in modo che i parametri λ, μ, Z e V siano calcolati a partire da a, b, c.
  Facendo vari calcoli...

$$\lambda^2(a^4 + abc - b^3) - \lambda(11a^3b - ac^2 + 2b^2c) + \\ + 64a^2b^2 - 27a^3c - bc^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda$$

$$V = \frac{(a\lambda^2 - 3\lambda b - 3c)^3}{a^2(\lambda ac - \lambda b^2 - bc)}$$

$$\mu = \frac{Va^2 - 8\lambda^3 a - 72\lambda^2 b - 72\lambda c}{\lambda^2 a + \lambda b + c}$$

$$\frac{1}{Z} + V = 1728 \quad \longrightarrow \quad Z$$

- Invertiamo le equazioni in modo che i parametri λ, μ, Z e V siano calcolati a partire da a, b, c.
  Facendo vari calcoli...

$$\lambda^2(a^4 + abc - b^3) - \lambda(11a^3b - ac^2 + 2b^2c) + \\ + 64a^2b^2 - 27a^3c - bc^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda$$

$$V = \frac{(a\lambda^2 - 3\lambda b - 3c)^3}{a^2(\lambda ac - \lambda b^2 - bc)}$$

$$\mu = \frac{Va^2 - 8\lambda^3 a - 72\lambda^2 b - 72\lambda c}{\lambda^2 a + \lambda b + c}$$

$$\frac{1}{Z} + V = 1728 \quad \longrightarrow \quad Z$$

- A questo punto possiamo esprimere le radici della quintica principale in termini di λ, μ, Z e V. Basta prendere la $z_k = \sigma W_k + \tau t_k W_k$ e sostituirci i valori dati a σ, τ...

$$z_k = \left(\frac{\lambda f}{H}\right) W_k + \left(\frac{\mu f^3}{HT}\right) t_k W_k \ .$$

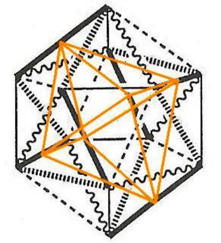
- Resta da scrivere la trasformazione che esprime le soluzioni z_k della quintica principale in funzione delle soluzioni y_k della quintica di Brioschi associata.
Ci vengono in aiuto ancora una volta i polinomi poliedrali $\rightsquigarrow$

- A questo punto possiamo esprimere le radici della quintica principale in termini di λ, μ, Z e V. Basta prendere la $z_k = \sigma W_k + \tau t_k W_k$ e sostituirci i valori dati a σ, τ...

$$z_k = \left(\frac{\lambda f}{H}\right) W_k + \left(\frac{\mu f^3}{HT}\right) t_k W_k \ .$$

- Resta da scrivere la trasformazione che esprime le soluzioni z_k della quintica principale in funzione delle soluzioni y_k della quintica di Brioschi associata.
  Ci vengono in aiuto ancora una volta i polinomi poliedrali $\rightsquigarrow$

Baricentri delle facce dei 5 ottaedri $\leftrightarrow$ baricentri delle facce dell'icosaedro
$\Rightarrow$ ogni W_k è un fattore di H.
Inoltre si verifica che $t_k^2 - 3f$ è un fattore di H (e non ce ne sono altri).



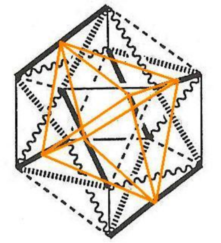
$\Longrightarrow \quad H = W_k(t_k^2 - 3f) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$

Sostituendo nell'espressione per z_k...

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}\,.$$

è la trasformazione che cercavamo!

Baricentri delle facce dei 5 ottaedri $\leftrightarrow$ baricentri delle facce dell'icosaedro
$\Rightarrow$ ogni W_k è un fattore di H.
Inoltre si verifica che $t_k^2 - 3f$ è un fattore di H (e non ce ne sono altri).



$\Longrightarrow$ $H = W_k(t_k^2 - 3f) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$

Sostituendo nell'espressione per z_k...

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}\ .$$

è la trasformazione che cercavamo!

Dalla quintica di Brioschi alla sestica di Jacobi

Teorema di Perron

Se abbiamo la quintica di Brioschi: $y^5 - 10fy^3 + 45f^2y - T = 0$, la quantità H della corrispondente sestica di Jacobi $s^6 - 10fs^3 + Hs + 5f^2 = 0$ deve soddisfare l'identità icosaedrale $1728f^5 - H^3 - T^2 = 0$.
Se le radici della sestica si indicano con s_∞, s_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$, allora le 5 radici della quintica di Brioschi soddisfano:

$$y_k^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})\ .$$

- quando si estrae la radice, come si decide quale y_k prendere? Si scrive la quintica di Brioschi così:

$$y = \frac{T}{y^4 - 10fy^2 + 45f^2}$$

in modo che a destra ci siano solo potenze pari di y e si controlla quale delle due y_k soddisfa l'equazione.

Adesso entrano in gioco le funzioni ellittiche.
Possiamo associare alla sestica di Jacobi una $\wp$ di Weierstrass con certi $\Delta,\ g_2,\ g_3$.

- Le relazioni che legano questi invarianti ai coefficienti della sestica sono:

$$\Delta = -\frac{1}{f}\,, \qquad g_2 = -\frac{H\Delta^2}{12}\,, \qquad g_3 = \frac{\Delta}{216}\,,$$

così la sestica diventa:

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0\,.$$

Adesso entrano in gioco le funzioni ellittiche.
Possiamo associare alla sestica di Jacobi una $\wp$ di Weierstrass con certi $\Delta,\ g_2,\ g_3$.

- Le relazioni che legano questi invarianti ai coefficienti della sestica sono:

$$\Delta = -\frac{1}{f}\,, \qquad g_2 = -\frac{H\Delta^2}{12}\,, \qquad g_3 = \frac{\Delta}{216}\,,$$

così la sestica diventa:

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0\,.$$

- Possiamo anche collegare gli invarianti direttamente al parametro Z della quintica di Brioschi:

$$\Delta = -\frac{1}{Z}\,, \qquad g_2 = \frac{1}{12}\sqrt[3]{\frac{1-1728Z}{Z^2}}\,, \qquad g_3 = -\frac{1}{216Z}\,,$$

così la quintica diventa:

$$y^5 + \frac{10}{\Delta}y^3 + \frac{45}{\Delta^2}y - \frac{216g_3}{\Delta^3} = 0\,.$$

Espressione delle soluzioni della sestica tramite $\wp$

A questo punto riusciamo a scrivere le soluzioni della sestica in termini di $\wp$.

- Avevamo visto che:

$$\frac{\sigma(5z)}{\sigma^{25}(z)} = 0 \iff$$

$$(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2)^3 - 16\wp'^4\wp''(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2) - 64\wp'^8 = 0$$

$\ast$ equazione sopra: gli zeri sono i 24 valori $z_{mn} = \frac{2m\omega+2n\omega'}{5}$ $(m, n \in \mathbb{Z}_5)$

$\ast$ equazione sotto: è di grado 12 in $\wp \Rightarrow$ gli zeri sono i 12 valori $\wp_{m,n} = \wp(z_{mn})$ $(\wp_{-m,-n} = \wp_{m,n})$

Espressione delle soluzioni della sestica tramite $\wp$

A questo punto riusciamo a scrivere le soluzioni della sestica in termini di $\wp$.

- Avevamo visto che:

$$\frac{\sigma(5z)}{\sigma^{25}(z)} = 0 \iff$$

$$(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2)^3 - 16\wp'^4\wp''(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2) - 64\wp'^8 = 0$$

$\ast$ equazione sopra: gli zeri sono i 24 valori $z_{mn} = \frac{2m\omega + 2n\omega'}{5}$ $(m, n \in \mathbb{Z}_5)$

$\ast$ equazione sotto: è di grado 12 in $\wp \Rightarrow$ gli zeri sono i 12 valori $\wp_{m,n} = \wp(z_{mn})$ $(\wp_{-m,-n} = \wp_{m,n})$

Espressione delle soluzioni della sestica tramite $\wp$

A questo punto riusciamo a scrivere le soluzioni della sestica in termini di $\wp$.

- Avevamo visto che:

$$\frac{\sigma(5z)}{\sigma^{25}(z)} = 0 \iff$$

$$(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2)^3 - 16\wp'^4\wp''(\wp''^2 - 12\wp\wp'^2) - 64\wp'^8 = 0$$

$\ast$ equazione sopra: gli zeri sono i 24 valori $z_{mn} = \frac{2m\omega+2n\omega'}{5}$ $(m, n \in \mathbb{Z}_5)$

$\ast$ equazione sotto: è di grado 12 in $\wp \Rightarrow$ gli zeri sono i 12 valori $\wp_{m,n} = \wp(z_{mn})$ $(\wp_{-m,-n} = \wp_{m,n})$

- Siano:

$$y_{mn} = \wp_{2m,2n} - \wp_{m,n} = \wp\left(\frac{4m\omega + 4n\omega'}{5}\right) - \wp\left(\frac{2m\omega + 2n\omega'}{5}\right)$$

- sfruttando una proprietà della $\wp$ di Weierstrass...

$$y_{mn} = \frac{(\wp''_{m,n})^2 - 12\wp_{m,n}(\wp'_{m,n})^2}{4(\wp'_{m,n})^2}$$

- omettendo i pedici e sostituendo, dopo vari calcoli $\rightsquigarrow$

- Siano:

$$y_{mn} = \wp_{2m,2n} - \wp_{m,n} = \wp\left(\frac{4m\omega + 4n\omega'}{5}\right) - \wp\left(\frac{2m\omega + 2n\omega'}{5}\right)$$

- sfruttando una proprietà della $\wp$ di Weierstrass...

$$y_{mn} = \frac{(\wp''_{m,n})^2 - 12\wp_{m,n}(\wp'_{m,n})^2}{4(\wp'_{m,n})^2}$$

- omettendo i pedici e sostituendo, dopo vari calcoli $\rightsquigarrow$

- Siano:

$$y_{mn} = \wp_{2m,2n} - \wp_{m,n} = \wp\left(\frac{4m\omega + 4n\omega'}{5}\right) - \wp\left(\frac{2m\omega + 2n\omega'}{5}\right)$$

- sfruttando una proprietà della $\wp$ di Weierstrass...

$$y_{mn} = \frac{(\wp''_{m,n})^2 - 12\wp_{m,n}(\wp'_{m,n})^2}{4(\wp'_{m,n})^2}$$

- omettendo i pedici e sostituendo, dopo vari calcoli $\rightsquigarrow$

$$5y^{12} - 12g_2 y^{10} + 10\Delta y^6 + \Delta^2 = 0 \,.$$

- Le soluzioni di questa sono le $y_{mn} = \wp_{2m,2n} - \wp_{m,n}$!
  Se si pone $y^2 = 1/s$ si ottiene proprio la sestica di Jacobi $\Longrightarrow$

$$\sqrt{s_{mn}} = \frac{1}{\wp\left(\frac{4m\omega+4n\omega'}{5}\right) - \wp\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{5}\right)} \,.$$

Abbiamo espresso le radici s_∞, s_k tramite la $\wp$ di Weierstrass; ora per valutare tali espressioni dobbiamo utilizzare le funzioni θ.

$$5y^{12} - 12g_2y^{10} + 10\Delta y^6 + \Delta^2 = 0 \,.$$

- Le soluzioni di questa sono le $y_{mn} = \wp_{2m,2n} - \wp_{m,n}$!
  Se si pone $y^2 = 1/s$ si ottiene proprio la sestica di Jacobi $\Longrightarrow$

$$\sqrt{s_{mn}} = \frac{1}{\wp\left(\frac{4m\omega+4n\omega'}{5}\right) - \wp\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{5}\right)} \,.$$

Abbiamo espresso le radici s_∞, s_k tramite la $\wp$ di Weierstrass; ora per valutare tali espressioni dobbiamo utilizzare le funzioni θ.

$$5y^{12} - 12g_2y^{10} + 10\Delta y^6 + \Delta^2 = 0 \, .$$

- Le soluzioni di questa sono le $y_{mn} = \wp_{2m,2n} - \wp_{m,n}$!
  Se si pone $y^2 = 1/s$ si ottiene proprio la sestica di Jacobi $\Longrightarrow$

$$\sqrt{s_{mn}} = \frac{1}{\wp\left(\frac{4m\omega+4n\omega'}{5}\right) - \wp\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{5}\right)} \, .$$

Abbiamo espresso le radici s_∞, s_k tramite la $\wp$ di Weierstrass; ora per valutare tali espressioni dobbiamo utilizzare le funzioni θ.

Espressione delle soluzioni della sestica tramite funzioni theta

- A causa della doppia periodicità di $\wp$, possiamo scrivere:

$$\sqrt{s_\infty} = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)}$$

$$\sqrt{s_k} = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega'-2k\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega'-4k\omega}{5}\right)} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Sfruttando varie proprietà delle funzioni viste, si ottiene...

$$\sqrt{S_\infty} = \frac{\sqrt{5}}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{5(6n+1)^2}{12}}$$

$$\sqrt{S_k} = \frac{1}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon^{k(6n+1)^2} q^{\frac{(6n+1)^2}{60}}$$

dove $q = \exp\left(\frac{\pi i \omega'}{\omega}\right)$, $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ e:

$$B = \sqrt[8]{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}}.$$

Sfruttando varie proprietà delle funzioni viste, si ottiene...

$$\sqrt{s_\infty} = \frac{\sqrt{5}}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{5(6n+1)^2}{12}}$$

$$\sqrt{s_k} = \frac{1}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon^{k(6n+1)^2} q^{\frac{(6n+1)^2}{60}}$$

dove $q = \exp\left(\frac{\pi i \omega'}{\omega}\right)$, $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ e:

$$B = \sqrt[6]{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}}.$$

Determinazione del parametro q

Dunque abbiamo espresso le radici $s_\infty, \; s_k$ della sestica di Jacobi tramite le funzioni theta.
Va però ancora determinato il valore del parametro q a partire dai parametri della sestica!

Problema dell'inversione

Date le radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$, cioè gli invarianti irrazionali della $\wp$ associata alla nostra sestica di Jacobi, calcolare il valore del parametro q.

Determinazione del parametro q

Dunque abbiamo espresso le radici $s_\infty, \ s_k$ della sestica di Jacobi tramite le funzioni theta.
Va però ancora determinato il valore del parametro q a partire dai parametri della sestica!

Problema dell'inversione

Date le radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$, cioè gli invarianti irrazionali della $\wp$ associata alla nostra sestica di Jacobi, calcolare il valore del parametro q.

- Calcoliamo il valore del parametro L definito dall'equazione:

$$L = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \, .$$

- Avevamo visto che $\sqrt{k'} = \theta_4(0)/\theta_3(0)$; tenendo presenti anche gli sviluppi delle funzioni thetanulle:

$$L = \frac{\theta_3(0) - \theta_4(0)}{\theta_3(0) + \theta_4(0)} = \frac{2(q + q^9 + q^{25} + \dots)}{(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots)}$$

- Calcoliamo il valore del parametro L definito dall'equazione:

$$L = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} .$$

- Avevamo visto che $\sqrt{k'} = \theta_4(0)/\theta_3(0)$; tenendo presenti anche gli sviluppi delle funzioni thetanulle:

$$L = \frac{\theta_3(0) - \theta_4(0)}{\theta_3(0) + \theta_4(0)} = \frac{2(q + q^9 + q^{25} + \dots)}{(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots)}$$

- Invertendo quest'ultima equazione, otteniamo un'espressione detta nomo di Jacobi:

$$q = \left(\frac{L}{2}\right) + 2\left(\frac{L}{2}\right)^5 + 12\left(\frac{L}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{L}{2}\right)^{13} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(\frac{L}{2}\right)^{4j+1}$$

in cui i coefficienti q_j formano la serie:

$$1,\ 2,\ 15,\ 150,\ 1707,\ 20910,\ 268616,\ 3567400,\ 48555069\ \ldots.$$

$\ast$ Così troviamo il valore di q! Possiamo sostituirlo nelle formule per $\sqrt{s_\infty}$ e per $\sqrt{s_k}$ e abbiamo finalmente i valori delle soluzioni della sestica di Jacobi!

- Invertendo quest'ultima equazione, otteniamo un'espressione detta nomo di Jacobi:

$$q = \left(\frac{L}{2}\right) + 2\left(\frac{L}{2}\right)^5 + 12\left(\frac{L}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{L}{2}\right)^{13} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(\frac{L}{2}\right)^{4j+1}$$

  in cui i coefficienti q_j formano la serie:

$$1,\ 2,\ 15,\ 150,\ 1707,\ 20910,\ 268616,\ 3567400,\ 48555069\ \ldots.$$

$\ast$ Così troviamo il valore di q! Possiamo sostituirlo nelle formule per $\sqrt{s_\infty}$ e per $\sqrt{s_k}$ e abbiamo finalmente i valori delle soluzioni della sestica di Jacobi!

Risalendo le varie trasformazioni fatte...

- Non resta che invertire le trasformazioni fatte per arrivare fin qui:

Sestica di Jacobi $\longrightarrow$ quintica di Brioschi:

Dal teorema di Perron abbiamo:

$$y_k = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})}$$

-per prendere quella giusta si verifica quale soddisfa:

$$y_k = \left(\frac{216 g_3}{\Delta^3}\right) \Big/ \left((y_k^2)^2 + \frac{10}{\Delta} y_k^2 + \frac{45}{\Delta^2}\right)$$

Risalendo le varie trasformazioni fatte...

* Non resta che invertire le trasformazioni fatte per arrivare fin qui:

Sestica di Jacobi $\longrightarrow$ quintica di Brioschi:

Dal teorema di Perron abbiamo:

$$y_k = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})}$$

-per prendere quella giusta si verifica quale soddisfa:

$$y_k = \left(\frac{216g_3}{\Delta^3}\right) \Big/ \left((y_k^2)^2 + \frac{10}{\Delta} y_k^2 + \frac{45}{\Delta^2}\right)$$

Quintica di Brioschi $\longrightarrow$ quintica principale:

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}$$

Quintica principale $\longrightarrow$ quintica generale:

Sappiamo che $z_k = x_k^2 - ux_k + v$, o equivalentemente:

$$(x_k - u)^2 = (z_k - v) - u(x_k - u)\ .$$

Anche per $m = 3, 4, 5$ troviamo formule analoghe:

$$(x_k - u)^m = P_m(u, z_k - v) + Q_m(u, z_k - v) \cdot (x_k - u)\ ,$$

dove P_m, Q_m sono opportuni polinomi che possiamo calcolare.

Quintica di Brioschi $\longrightarrow$ quintica principale:

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}$$

Quintica principale $\longrightarrow$ quintica generale:

Sappiamo che $z_k = x_k^2 - ux_k + v$, o equivalentemente:

$$(x_k - u)^2 = (z_k - v) - u(x_k - u)\ .$$

Anche per $m = 3, 4, 5$ troviamo formule analoghe:

$$(x_k - u)^m = P_m(u, z_k - v) + Q_m(u, z_k - v) \cdot (x_k - u)\ ,$$

dove P_m, Q_m sono opportuni polinomi che possiamo calcolare.

Definiamo A', B', C', D', E' come coefficienti della quintica modificata, le cui radici sono le radici della quintica generale meno u:

$$(x-u)^5 + A'(x-u)^4 + B'(x-u)^3 + C'(x-u)^2 + D'(x-u) + E' = 0 \,.$$

Se ci sostituiamo le espressioni per $(x_k - u)^m$, otteniamo un'equazione lineare in $(x_k - u)$, che semplificata diventa:

$$x_k = \frac{-[E + (z_k - v)(u^3 + Au^2 + Bu + C) + (z_k - v)^2(2u + A)]}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D + (z_k - v)(3u^2 + 2Au + B) + (z_k - v)^2} \,.$$

★ Queste x_k sono le soluzioni che cercavamo!!

Definiamo A', B', C', D', E' come coefficienti della quintica modificata, le cui radici sono le radici della quintica generale meno u:

$$(x-u)^5 + A'(x-u)^4 + B'(x-u)^3 + C'(x-u)^2 + D'(x-u) + E' = 0\ .$$

Se ci sostituiamo le espressioni per $(x_k - u)^m$, otteniamo un'equazione lineare in $(x_k - u)$, che semplificata diventa:

$$x_k = \frac{-[E + (z_k - v)(u^3 + Au^2 + Bu + C) + (z_k - v)^2(2u + A)]}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D + (z_k - v)(3u^2 + 2Au + B) + (z_k - v)^2}\,.$$

★ Queste x_k sono le soluzioni che cercavamo!!

Ci sono alcune ambiguità da risolvere! Ne citiamo una:

- Nella formula per L compaiono $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$. Abbiamo 4 possibili valori per ogni radice, che portano a 4 possibili valori di L; in più ci sono 6 permutazioni di $e_1, \ e_2, \ e_3$. In totale: $4 \cdot 6 = 24$ possibili valori di q per ogni equazione sestica data.
- La metà di questi sono tali che $|q| > 1$ e possono essere subito scartati. Per ognuno dei restanti 12 valori, possiamo far calcolare al computer le corrispondenti soluzioni $s_\infty, \ s_k$ e verificare se:

$$(s - s_\infty)\prod_{k=0}^{4}(s - s_k)$$

coincide con l'originale sestica di Jacobi.

Ci sono alcune ambiguità da risolvere! Ne citiamo una:

- Nella formula per L compaiono $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$. Abbiamo 4 possibili valori per ogni radice, che portano a 4 possibili valori di L; in più ci sono 6 permutazioni di $e_1,\ e_2,\ e_3$. In totale: $4 \cdot 6 = 24$ possibili valori di q per ogni equazione sestica data.
- La metà di questi sono tali che $|q| > 1$ e possono essere subito scartati. Per ognuno dei restanti 12 valori, possiamo far calcolare al computer le corrispondenti soluzioni s_∞, s_k e verificare se:

$$(s - s_\infty)\prod_{k=0}^{4}(s - s_k)$$

coincide con l'originale sestica di Jacobi.

Ci sono alcune ambiguità da risolvere! Ne citiamo una:

- Nella formula per L compaiono $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$. Abbiamo 4 possibili valori per ogni radice, che portano a 4 possibili valori di L; in più ci sono 6 permutazioni di $e_1,\ e_2,\ e_3$. In totale: $4 \cdot 6 = 24$ possibili valori di q per ogni equazione sestica data.
- La metà di questi sono tali che $|q| > 1$ e possono essere subito scartati. Per ognuno dei restanti 12 valori, possiamo far calcolare al computer le corrispondenti soluzioni $s_\infty,\ s_k$ e verificare se:

$$(s - s_\infty) \prod_{k=0}^{4} (s - s_k)$$

coincide con l'originale sestica di Jacobi.