Dalla didattica delle equazioni di 2° e 3° grado all'equazione di 5° grado

Ilaria Nesi

Relatore: *Prof. Giorgio Ottaviani*

16 Dicembre 2008

Struttura della tesi

Prima parte: didattica delle equazioni di secondo e terzo grado

- costruzione di un metodo geometrico per risolvere equazioni di secondo e terzo grado
- approfondimento degli aspetti didattici
- sviluppo di varie tipologie di esercizi per comprendere e applicare il metodo

Gli argomenti di questa parte sono stati presentati al *25° Convegno sulla didattica della matematica* (Viareggio, 11-12 settembre 2008).

Struttura della tesi

Prima parte: didattica delle equazioni di secondo e terzo grado

- costruzione di un metodo geometrico per risolvere equazioni di secondo e terzo grado
- approfondimento degli aspetti didattici
- sviluppo di varie tipologie di esercizi per comprendere e applicare il metodo

Gli argomenti di questa parte sono stati presentati al *25° Convegno sulla didattica della matematica* (Viareggio, 11-12 settembre 2008).

Struttura della tesi

Prima parte: didattica delle equazioni di secondo e terzo grado

- costruzione di un metodo geometrico per risolvere equazioni di secondo e terzo grado
- approfondimento degli aspetti didattici
- sviluppo di varie tipologie di esercizi per comprendere e applicare il metodo

Gli argomenti di questa parte sono stati presentati al *25° Convegno sulla didattica della matematica* (Viareggio, 11-12 settembre 2008).

Struttura della tesi

Prima parte: didattica delle equazioni di secondo e terzo grado

- costruzione di un metodo geometrico per risolvere equazioni di secondo e terzo grado
- approfondimento degli aspetti didattici
- sviluppo di varie tipologie di esercizi per comprendere e applicare il metodo

Gli argomenti di questa parte sono stati presentati al *25° Convegno sulla didattica della matematica* (Viareggio, 11-12 settembre 2008).

Struttura della tesi

Seconda parte: risoluzione dell'equazione di quinto grado tramite l'icosaedro e le funzioni theta

- studio degli argomenti indispensabili per la realizzazione dell'algoritmo (simmetrie dei poliedri, funzioni ellittiche, funzioni theta...)
- descrizione dettagliata dell'algoritmo
- idee per l'implementazione dell'algoritmo

$\rightsquigarrow$ algoritmo per la risoluzione della generale equazione quintica, basato sulle idee di Kiepert (1878)

Struttura della tesi

Seconda parte: risoluzione dell'equazione di quinto grado tramite l'icosaedro e le funzioni theta

- studio degli argomenti indispensabili per la realizzazione dell'algoritmo (simmetrie dei poliedri, funzioni ellittiche, funzioni theta...)
- descrizione dettagliata dell'algoritmo
- idee per l'implementazione dell'algoritmo

$\rightsquigarrow$ algoritmo per la risoluzione della generale equazione quintica, basato sulle idee di Kiepert (1878)

Struttura della tesi

Seconda parte: risoluzione dell'equazione di quinto grado tramite l'icosaedro e le funzioni theta

- studio degli argomenti indispensabili per la realizzazione dell'algoritmo (simmetrie dei poliedri, funzioni ellittiche, funzioni theta...)
- descrizione dettagliata dell'algoritmo
- idee per l'implementazione dell'algoritmo

$\rightsquigarrow$ algoritmo per la risoluzione della generale equazione quintica, basato sulle idee di Kiepert (1878)

Struttura della tesi

Seconda parte: risoluzione dell'equazione di quinto grado tramite l'icosaedro e le funzioni theta

- studio degli argomenti indispensabili per la realizzazione dell'algoritmo (simmetrie dei poliedri, funzioni ellittiche, funzioni theta...)
- descrizione dettagliata dell'algoritmo
- idee per l'implementazione dell'algoritmo

$\rightsquigarrow$ algoritmo per la risoluzione della generale equazione quintica, basato sulle idee di Kiepert (1878)

Algoritmo per l'equazione di 5° grado

Equazione quintica generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$\downarrow \qquad \uparrow$

Equazione quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$$

$\downarrow \qquad \uparrow$

Equazione quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$$

$\downarrow \qquad \uparrow$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

Algoritmo per l'equazione di 5° grado

Equazione quintica generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

Algoritmo per l'equazione di 5° grado

Equazione quintica generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

Algoritmo per l'equazione di 5° grado

Equazione quintica generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

Equazione quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

Equazione quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

Dalla quintica generale alla quintica principale

Si usa una trasformazione (detta di Tschirnhaus) della forma:

$$z_k = x_k^2 - ux_k + v \ ,$$

dove x_k sono le radici della quintica generale e z_k quelle della quintica principale $(k = 1, \ldots, 5)$.

- Nella quintica principale mancano z^4 e z^3; questo equivale a porre: $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$.
- Facendo i calcoli:

$$(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + (2A^4 - 8A^2B + {}$$
$$+ 10AC + 3B^2 - 10D) = 0 \ \rightarrow u$$
$$5v = -Au - A^2 + 2B \ \rightarrow v \ .$$

Dalla quintica generale alla quintica principale

Si usa una trasformazione (detta di Tschirnhaus) della forma:

$$z_k = x_k^2 - u x_k + v \ ,$$

dove x_k sono le radici della quintica generale e z_k quelle della quintica principale $(k = 1, \dots, 5)$.

- Nella quintica principale mancano z^4 e z^3; questo equivale a porre: $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$.

- Facendo i calcoli:

$$(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + (2A^4 - 8A^2B + \\ + 10AC + 3B^2 - 10D) = 0 \ \rightarrow u$$

$$5v = -Au - A^2 + 2B \ \rightarrow v \ .$$

Dalla quintica generale alla quintica principale

Si usa una trasformazione (detta di Tschirnhaus) della forma:

$$z_k = x_k^2 - ux_k + v \ ,$$

dove x_k sono le radici della quintica generale e z_k quelle della quintica principale $(k = 1, \ldots, 5)$.

- Nella quintica principale mancano z^4 e z^3; questo equivale a porre: $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0$.

- Facendo i calcoli:

$$(2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + (2A^4 - 8A^2B + \\ + 10AC + 3B^2 - 10D) = 0 \ \rightarrow u$$

$$5v = -Au - A^2 + 2B \ \rightarrow v \ .$$

Dalla quintica generale alla quintica principale

- Si trovano anche i coefficienti a, b, c della quintica principale ottenuta con tale trasformazione:

$$5a = -C(u^3+Au^2+Bu+C)+D(4u^2+3Au+2B)-E(5u+2A)-10v^3,$$

$$5b = D(u^4+Au^3+Bu^2+Cu+D)-E(5u^3+4Au^2+3Bu+C)-5v^4-10av,$$

$$c = -E(u^5+Au^4+Bu^3+Cu^2+Du+E)-v^5-5av^2-5bv.$$

■

Solidi platonici e polinomi poliedrali

TETRAEDRO, OTTAEDRO, CUBO, ICOSAEDRO, DODECAEDRO

- possiamo rappresentare questi poliedri come punti sulla superficie della sfera di Riemann.

Polinomi poliedrali

Dato un poliedro, abbiamo 3 polinomi in coordinate omogenee u, v le cui radici corrispondono alla posizione, sulla superficie della sfera di Riemann, di questi 3 insiemi di punti:

- i vertici del poliedro,
- i punti medi dei lati del poliedro,
- i baricentri delle facce del poliedro.

Solidi platonici e polinomi poliedrali

TETRAEDRO, OTTAEDRO, CUBO, ICOSAEDRO, DODECAEDRO

- possiamo rappresentare questi poliedri come punti sulla superficie della sfera di Riemann.

Polinomi poliedrali

Dato un poliedro, abbiamo 3 polinomi in coordinate omogenee u, v le cui radici corrispondono alla posizione, sulla superficie della sfera di Riemann, di questi 3 insiemi di punti:

- i vertici del poliedro,
- i punti medi dei lati del poliedro,
- i baricentri delle facce del poliedro.

Solidi platonici e polinomi poliedrali

Ottaedro (simmetria $O_h \cong S_4 \times \mathbb{Z}_2$):

vertici: $\tau = uv(u^4 - v^4)$
lati: $X = u^{12} - 33(u^8v^4 + u^4v^8) + v^{12}$
facce: $W = u^8 + 14u^4v^4 + v^8$

Icosaedro (simmetria $I_h \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2$):

vertici: $f = uv(u^{10} + 11u^5v^5 - v^{10})$
lati: $T = u^{30} - 10005(u^{20}v^{10} + u^{10}v^{20}) + 522(u^{25}v^5 - u^5v^{25} + v^{30})$
facce: $H = -u^{20} + 228(u^{15}v^5 - u^5v^{25}) - 494u^{10}v^{10} - v^{20}$

(posizionati in modo che un vertice sia al polo nord)

Identità icosaedrale:

$$1728f^5 - H^3 - T^2 \equiv 0$$

Solidi platonici e polinomi poliedrali

Ottaedro (simmetria $O_h \cong S_4 \times \mathbb{Z}_2$):

vertici: $\tau = uv(u^4 - v^4)$
lati: $X = u^{12} - 33(u^8 v^4 + u^4 v^8) + v^{12}$
facce: $W = u^8 + 14u^4 v^4 + v^8$

Icosaedro (simmetria $I_h \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2$):

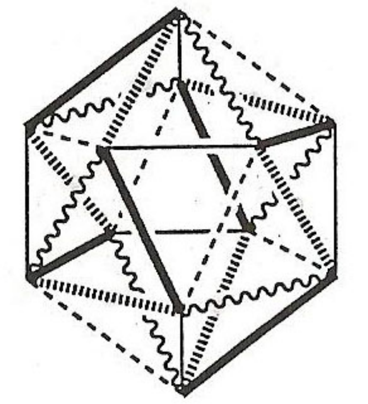
vertici: $f = uv(u^{10} + 11u^5 v^5 - v^{10})$
lati: $T = u^{30} - 10005(u^{20} v^{10} + u^{10} v^{20}) + 522(u^{25} v^5 - u^5 v^{25} + v^{30})$
facce: $H = -u^{20} + 228(u^{15} v^5 - u^5 v^{25}) - 494u^{10} v^{10} - v^{20}$

(posizionati in modo che un vertice sia al polo nord)

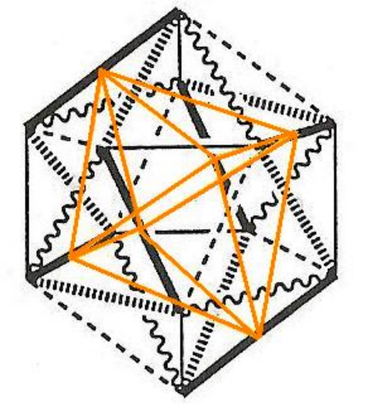
Identità icosaedrale:

$$1728f^5 - H^3 - T^2 \equiv 0$$

Si può partizionare un icosaedro regolare in 5 ottaedri regolari: dividiamo i 30 lati dell'icosaedro in 5 insiemi di 6 lati ciascuno (come in figura); per ogni insieme, i punti medi dei 6 lati sono i vertici di un ottaedro regolare.



Si può partizionare un icosaedro regolare in 5 ottaedri regolari: dividiamo i 30 lati dell'icosaedro in 5 insiemi di 6 lati ciascuno (come in figura); per ogni insieme, i punti medi dei 6 lati sono i vertici di un ottaedro regolare.



- Studiando 3 opportune rotazioni dello spazio, riusciamo a trovare il polinomio t_0 dei vertici dell'ottaedro nella figura precedente:

$$t_0 = u^6 + 2u^5 v - 5u^4 v^2 - 5u^2 v^4 - 2uv^5 + v^6 \ .$$

- Gli altri 4 ottaedri si ottengono facendo rotazioni di $k \cdot \pi/5$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Come viene modificato t_0?

dove $\varepsilon = \exp(2\pi i/5)$, è il polinomio dei vertici dell'ottaedro regolare che si ottiene dal precedente facendo una rotazione di $\frac{k}{5}\pi$.

Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

- Studiando 3 opportune rotazioni dello spazio, riusciamo a trovare il polinomio t_0 dei vertici dell'ottaedro nella figura precedente:

$$t_0 = u^6 + 2u^5 v - 5u^4 v^2 - 5u^2 v^4 - 2uv^5 + v^6 \ .$$

- Gli altri 4 ottaedri si ottengono facendo rotazioni di $k \cdot \pi/5$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Come viene modificato t_0?

$$t_k = \varepsilon^{3k} u^6 + 2\varepsilon^{2k} u^5 v - 5\varepsilon^{k} u^4 v^2 - 5\varepsilon^{4k} u^2 v^4 - 2\varepsilon^{3k} uv^5 + \varepsilon^{2k} v^6$$

dove $\varepsilon = \exp(2\pi i/5)$, è il polinomio dei vertici dell'ottaedro regolare che si ottiene dal precedente facendo una rotazione di $\frac{k}{5}\pi$.

Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

- Tenendo conto che i punti in cui $t_0, \dots, t_4$ si annullano sono anche i punti medi dei lati dell'icosaedro (e quindi le radici del polinomio T dei lati dell'icosaedro), si trova che:

i polinomi $t_0, \dots, t_4$ degli ottaedri sono le radici dell'equazione di Brioschi:
$$t^5 - 10ft^3 + 45f^2t - T = 0 \,,$$

dove f e T sono i polinomi dei vertici e dei lati dell'icosaedro.

- La nostra equazione di Brioschi: $y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$ è un caso particolare in cui $Z = f$ e $Z^2 = T$.

Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

- Tenendo conto che i punti in cui $t_0, \ldots, t_4$ si annullano sono anche i punti medi dei lati dell'icosaedro (e quindi le radici del polinomio T dei lati dell'icosaedro), si trova che:

i polinomi $t_0, \ldots, t_4$ degli ottaedri sono le radici dell'equazione di Brioschi:

$$t^5 - 10ft^3 + 45f^2t - T = 0 ,$$

dove f e T sono i polinomi dei vertici e dei lati dell'icosaedro.

- La nostra equazione di Brioschi: $y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$ è un caso particolare in cui $Z = f$ e $Z^2 = T$.

Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

- Se chiamiamo W_k i polinomi delle facce dei 5 ottaedri ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) e prendiamo:

$$z_k = \frac{\lambda f}{H} \cdot W_k + \frac{\mu f^3}{HT} \cdot t_k W_k \qquad (\lambda, \mu \text{ parametri}),$$

troviamo $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0 \Rightarrow$ tali z_k sono le radici di una quintica principale $z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$.

Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

- Se chiamiamo W_k i polinomi delle facce dei 5 ottaedri ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) e prendiamo:

$$z_k = \frac{\lambda f}{H} \cdot W_k + \frac{\mu f^3}{HT} \cdot t_k W_k \qquad (\lambda, \mu \text{ parametri}),$$

troviamo $\sum z_k = 0$ e $\sum z_k^2 = 0 \Rightarrow$ tali z_k sono le radici di una quintica principale $z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$.

Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

- Ricaviamo i coefficienti di questa quintica principale:

$$Va = 8\lambda^3 + \lambda^2\mu + (72\lambda\mu^2 + \mu^3)Z$$
$$Vb = -\lambda^4 + 18\lambda^2\mu^2 Z + \lambda\mu^3 Z + 27\mu^4 Z^2$$
$$Vc = \lambda^5 - 10\lambda^3\mu^2 Z + 45\lambda\mu^4 Z^2 + \mu^5 Z^2$$

- dove:

$$Z = \frac{f^5}{T^2} \qquad \text{e} \qquad V = \frac{H^3}{f^5}$$

(legate dalla relazione $\frac{1}{Z} + V = 1728$).

- Invertiamo le equazioni in modo che i parametri λ, μ, Z e V siano calcolati a partire da a, b, c. Facendo vari calcoli:

$$\lambda^2(a^4 + abc - b^3) - \lambda(11a^3 b - ac^2 + 2b^2 c) + \\ + 64a^2 b^2 - 27a^3 c - bc^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda$$

$$V = \frac{(a\lambda^2 - 3\lambda b - 3c)^3}{a^2(\lambda ac - \lambda b^2 - bc)}$$

$$\mu = \frac{Va^2 - 8\lambda^3 a - 72\lambda^2 b - 72\lambda c}{\lambda^2 a + \lambda b + c}$$

$$\frac{1}{Z} + V = 1728 \quad \longrightarrow \quad Z$$

Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

- Invertiamo le equazioni in modo che i parametri λ, μ, Z e V siano calcolati a partire da a, b, c. Facendo vari calcoli:

$$\lambda^2(a^4 + abc - b^3) - \lambda(11a^3b - ac^2 + 2b^2c) + \\ + 64a^2b^2 - 27a^3c - bc^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda$$

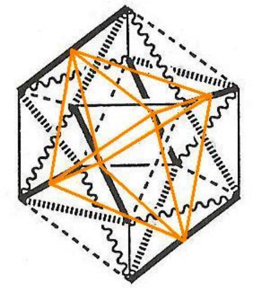
$$V = \frac{(a\lambda^2 - 3\lambda b - 3c)^3}{a^2(\lambda ac - \lambda b^2 - bc)}$$

$$\mu = \frac{Va^2 - 8\lambda^3 a - 72\lambda^2 b - 72\lambda c}{\lambda^2 a + \lambda b + c}$$

$$\frac{1}{Z} + V = 1728 \quad \longrightarrow \quad Z$$

- Per scrivere la trasformazione che esprime le soluzioni z_k della quintica principale in funzione delle soluzioni y_k della quintica di Brioschi associata:

ci vengono in aiuto ancora una volta i poliedri, in particolare il fatto che i baricentri delle facce dei 5 ottaedri corrispondono ai baricentri delle facce dell'icosaedro...



$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}.$$

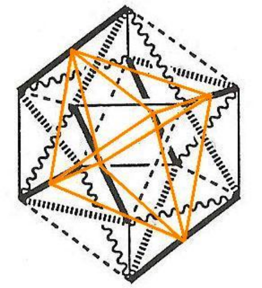
Dalla quintica principale alla quintica di Brioschi

- Per scrivere la trasformazione che esprime le soluzioni z_k della quintica principale in funzione delle soluzioni y_k della quintica di Brioschi associata:

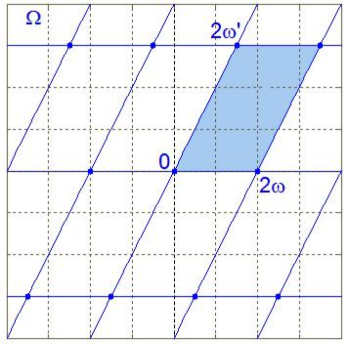
ci vengono in aiuto ancora una volta i poliedri, in particolare il fatto che i baricentri delle facce dei 5 ottaedri corrispondono ai baricentri delle facce dell'icosaedro...

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3} \ .$$

■



FUNZIONE ELLITTICA: funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e doppiamente periodica (l'insieme dei periodi Ω è un reticolo di punti).



$2\omega, 2\omega'$: periodi primitivi $\rightarrow$

tutti i periodi hanno la forma: $\underline{2m\omega + 2n\omega'}$ $\quad (m, n \in \mathbb{Z})$.

La funzione $\wp$ di Weierstrass:

$$\wp(z|\omega,\omega') = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right]$$

È una funzione ellittica con periodi primitivi $2\omega, 2\omega'$.

Altra funzione ellittica:

La derivata della $\wp$ di Weierstrass:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^3}$$

Funzioni ellittiche di Weierstrass

La funzione $\wp$ di Weierstrass:

$$\wp(z|\omega,\omega') = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2} \right]$$

È una funzione ellittica con periodi primitivi $2\omega, 2\omega'$.

Altra funzione ellittica:

La derivata della $\wp$ di Weierstrass:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^3}$$

Funzioni ellittiche di Weierstrass

- Se chiamiamo: $e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \quad e_3 = \wp(\omega')$...

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)\ .$$

- Con ragionamenti diversi troviamo...

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

dove:

$$g_2 = 60 \cdot \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^4}$$

$$g_3 = 140 \cdot \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^6}\ .$$

- Se chiamiamo: $e_1 = \wp(\omega)$, $e_2 = \wp(\omega + \omega')$, $e_3 = \wp(\omega')$...

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)\ .$$

- Con ragionamenti diversi troviamo...

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

dove:

$$g_2 = 60 \cdot \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^4}$$

$$g_3 = 140 \cdot \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^6}\ .$$

- Dunque $e_1,\ e_2,\ e_3$ sono le soluzioni dell'equazione:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

- Il discriminante dell'equazione di terzo grado è:

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

e $g_2,\ g_3,\ \Delta$ sono detti invarianti della funzione $\wp(z)$.

- Le tre soluzioni $e_1,\ e_2,\ e_3$ dell'equazione sono invece dette invarianti irrazionali di $\wp(z)$.

Funzioni ellittiche di Weierstrass

- Dunque $e_1,\ e_2,\ e_3$ sono le soluzioni dell'equazione:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

- Il discriminante dell'equazione di terzo grado è:

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

e $g_2,\ g_3,\ \Delta$ sono detti invarianti della funzione $\wp(z)$.

- Le tre soluzioni $e_1,\ e_2,\ e_3$ dell'equazione sono invece dette invarianti irrazionali di $\wp(z)$.

Funzioni ellittiche di Weierstrass

- Dunque $e_1,\ e_2,\ e_3$ sono le soluzioni dell'equazione:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

- Il discriminante dell'equazione di terzo grado è:

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

  e $g_2,\ g_3,\ \Delta$ sono detti invarianti della funzione $\wp(z)$.

- Le tre soluzioni $e_1,\ e_2,\ e_3$ dell'equazione sono invece dette invarianti irrazionali di $\wp(z)$.

Funzioni ellittiche di Weierstrass

Indichiamo con w i punti $2m\omega + 2n\omega'$ al variare di $(m, n) \neq (0, 0)$.
Altre funzioni non ellittiche ma strettamente legate alla $\wp$:

La funzione ζ di Weierstrass:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left[\frac{1}{z - w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right]$$

La funzione σ di Weierstrass:

$$\sigma(z) = z \cdot \prod \left\{ \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp \left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2 \right] \right\}$$

Indichiamo con w i punti $2m\omega + 2n\omega'$ al variare di $(m, n) \neq (0, 0)$.
Altre funzioni non ellittiche ma strettamente legate alla $\wp$:

La funzione ζ di Weierstrass:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left[\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right]$$

La funzione σ di Weierstrass:

$$\sigma(z) = z \cdot \prod \left\{ \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2 \right] \right\}$$

Funzioni ellittiche di Weierstrass

Indichiamo con w i punti $2m\omega + 2n\omega'$ al variare di $(m, n) \neq (0, 0)$.
Altre funzioni non ellittiche ma strettamente legate alla $\wp$:

La funzione ζ di Weierstrass:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left[\frac{1}{z - w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right]$$

La funzione σ di Weierstrass:

$$\sigma(z) = z \cdot \prod \left\{ (1 - \frac{z}{w}) \exp \left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w} \right)^2 \right] \right\}$$

Funzioni ellittiche di Jacobi

Ora consideriamo una funzione f così definita:

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\ .$$

Le funzioni ellittiche di Jacobi

- $sn(z) = f(z)$
- $cn(z) = \sqrt{1 - sn^2(z)}$
- $dn(z) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(z)}$

- k: modulo

Ora consideriamo una funzione f così definita:

$$z = \int_0^{f(z)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \ .$$

Le funzioni ellittiche di Jacobi

- $sn(z) = f(z)$
- $cn(z) = \sqrt{1 - sn^2(z)}$
- $dn(z) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(z)}$

- k: modulo

Funzioni ellittiche di Jacobi

- Le 3 funzioni *sn*, *cn*, *dn* sono ellittiche e si possono esprimere tramite la $\wp$:

$$sn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}}$$

$$cn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}}$$

$$dn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}}\ .$$

Teorema di Perron

- Se abbiamo la quintica di Brioschi: $y^5 - 10fy^3 + 45f^2y - T = 0$, la quantità H della corrispondente sestica di Jacobi $s^6 - 10fs^3 + Hs + 5f^2 = 0$ deve soddisfare l'identità icosaedrale $1728f^5 - H^3 - T^2 = 0$.
- Se le radici della sestica si indicano con s_∞, s_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$, allora le 5 radici della quintica di Brioschi soddisfano:

$$y_k^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1}) .$$

Teorema di Perron

- Se abbiamo la quintica di Brioschi: $y^5 - 10fy^3 + 45f^2y - T = 0$, la quantità H della corrispondente sestica di Jacobi $s^6 - 10fs^3 + Hs + 5f^2 = 0$ deve soddisfare l'identità icosaedrale $1728f^5 - H^3 - T^2 = 0$.
- Se le radici della sestica si indicano con s_∞, s_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$, allora le 5 radici della quintica di Brioschi soddisfano:

$$y_k^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1}) \ .$$

Adesso entrano in gioco le funzioni ellittiche. Possiamo associare alla sestica di Jacobi una $\wp$ di Weierstrass con certi $\Delta,\ g_2,\ g_3$.

- Le relazioni che legano questi invarianti ai coefficienti della sestica sono:

$$\Delta = -\frac{1}{f}\,, \qquad g_2 = -\frac{H\Delta^2}{12}\,, \qquad g_3 = \frac{\Delta}{216}\,,$$

così la sestica diventa:

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0\,.$$

Dalla quintica di Brioschi alla sestica di Jacobi

Adesso entrano in gioco le funzioni ellittiche. Possiamo associare alla sestica di Jacobi una $\wp$ di Weierstrass con certi $\Delta,\ g_2,\ g_3$.

- Le relazioni che legano questi invarianti ai coefficienti della sestica sono:

$$\Delta = -\frac{1}{f}\,, \qquad g_2 = -\frac{H\Delta^2}{12}\,, \qquad g_3 = \frac{\Delta}{216}\,,$$

così la sestica diventa:

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0\,.$$

■

Espressione delle soluzioni della sestica tramite $\wp$

A questo punto riusciamo a scrivere le radici s_∞, s_k in termini di $\wp$.

- Grazie allo studio di una particolare funzione ellittica $\psi_5(z) = \sigma(5z)/\sigma^{25}(z)$, possiamo dimostrare le seguenti formule:

$$\sqrt{s_\infty} = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)}$$

$$\sqrt{s_k} = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega'-2k\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega'-4k\omega}{5}\right)} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

A questo punto riusciamo a scrivere le radici s_∞, s_k in termini di $\wp$.

- Grazie allo studio di una particolare funzione ellittica $\psi_5(z) = \sigma(5z)/\sigma^{25}(z)$, possiamo dimostrare le seguenti formule:

$$\sqrt{s_\infty} = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)}$$

$$\sqrt{s_k} = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega' - 2k\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega' - 4k\omega}{5}\right)} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

$\blacksquare$

Funzioni theta

Consideriamo $\wp(z|\omega,\omega')$ e definiamo:

$$q = \exp\left(i\pi\,\frac{\omega'}{\omega}\right) \quad , \quad \nu = \frac{z}{2\omega} \quad \rightarrow$$

$$\theta_1(\nu) = 2\sqrt[4]{q}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n+1)}\sin[(2n+1)\pi\nu]$$

$$\theta_2(\nu) = 2\sqrt[4]{q}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)}\cos[(2n+1)\pi\nu]$$

$$\theta_3(\nu) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos(2n\pi\nu)$$

$$\theta_4(\nu) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi\nu)$$

Funzioni theta

- Le serie convergono $\forall \nu \in \mathbb{C}$ e $\forall q \in \mathbb{R}$ tale che: $|q| < 1$.
- Le serie convergono molto rapidamente, grazie al fattore q^{n^2} $\rightarrow$ sono utili per la computazione numerica delle funzioni viste finora.
- Sono 4 funzioni periodiche: θ_1, θ_2 hanno periodo 2 e θ_3, θ_4 hanno periodo 1.

- Se prendiamo $\nu = 0$ (per θ_1 prima deriviamo) otteniamo le cosiddette funzioni thetanulle:

$$\theta_1'(0) = 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + 5q^6 - \ldots)$$
$$\theta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \ldots)$$
$$\theta_3(0) = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + \ldots)$$
$$\theta_4(0) = 1 - 2(q - q^4 + q^9 - \ldots).$$

Funzioni theta

- Le serie convergono $\forall \nu \in \mathbb{C}$ e $\forall q \in \mathbb{R}$ tale che: $|q| < 1$.
- Le serie convergono molto rapidamente, grazie al fattore q^{n^2} $\rightarrow$ sono utili per la computazione numerica delle funzioni viste finora.
- Sono 4 funzioni periodiche: θ_1, θ_2 hanno periodo 2 e θ_3, θ_4 hanno periodo 1.

- Se prendiamo $\nu = 0$ (per θ_1 prima deriviamo) otteniamo le cosiddette funzioni thetanulle:

$$\theta_1'(0) = 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots)$$

$$\theta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \dots)$$

$$\theta_3(0) = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + \dots)$$

$$\theta_4(0) = 1 - 2(q - q^4 + q^9 - \dots).$$

Funzioni theta

- Le serie convergono $\forall \nu \in \mathbb{C}$ e $\forall q \in \mathbb{R}$ tale che: $|q| < 1$.
- Le serie convergono molto rapidamente, grazie al fattore q^{n^2} $\rightarrow$ sono utili per la computazione numerica delle funzioni viste finora.
- Sono 4 funzioni periodiche: θ_1, θ_2 hanno periodo 2 e θ_3, θ_4 hanno periodo 1.

- Se prendiamo $\nu = 0$ (per θ_1 prima deriviamo) otteniamo le cosiddette funzioni thetanulle:

$$\theta_1'(0) = 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots)$$
$$\theta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \dots)$$
$$\theta_3(0) = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + \dots)$$
$$\theta_4(0) = 1 - 2(q - q^4 + q^9 - \dots).$$

- Le serie convergono $\forall \nu \in \mathbb{C}$ e $\forall q \in \mathbb{R}$ tale che: $|q| < 1$.
- Le serie convergono molto rapidamente, grazie al fattore q^{n^2} $\rightarrow$ sono utili per la computazione numerica delle funzioni viste finora.
- Sono 4 funzioni periodiche: θ_1, θ_2 hanno periodo 2 e θ_3, θ_4 hanno periodo 1.

- Se prendiamo $\nu = 0$ (per θ_1 prima deriviamo) otteniamo le cosiddette funzioni thetanulle:

$$\theta_1'(0) = 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + 5q^6 - \ldots)$$
$$\theta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \ldots)$$
$$\theta_3(0) = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + \ldots)$$
$$\theta_4(0) = 1 - 2(q - q^4 + q^9 - \ldots).$$

Funzioni theta

Ricordiamo che $\underline{\nu = z/2\omega}$.

Relazione tra $\wp$ e le θ:

$$\wp(z|\omega,\omega') = e_a + \frac{1}{4\omega^2}\left[\frac{\theta_1'(0)\cdot\theta_{a+1}(\nu)}{\theta_{a+1}(0)\cdot\theta_1(\nu)}\right]^2 \qquad (a = 1,2,3).$$

Relazioni tra le funzioni di Jacobi e le θ:

$$sn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = 2\omega\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\theta_4(0)\theta_1(\nu)}{\theta_4(\nu)\theta_1'(0)}$$

$$cn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \frac{\theta_4(0)\theta_2(\nu)}{\theta_2(0)\theta_4(\nu)} \qquad dn(\sqrt{e_1 - e_3}\, z) = \frac{\theta_4(0)\theta_3(\nu)}{\theta_3(0)\theta_4(\nu)}.$$

Funzioni theta

Ricordiamo che $\underline{\nu = z/2\omega}$.

Relazione tra $\wp$ e le θ:

$$\wp(z|\omega,\omega') = e_a + \frac{1}{4\omega^2}\left[\frac{\theta_1'(0)\cdot\theta_{a+1}(\nu)}{\theta_{a+1}(0)\cdot\theta_1(\nu)}\right]^2 \qquad (a=1,2,3).$$

Relazioni tra le funzioni di Jacobi e le θ:

$$sn(\sqrt{e_1-e_3}\,z) = 2\omega\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\theta_4(0)\theta_1(\nu)}{\theta_4(\nu)\theta_1'(0)}$$

$$cn(\sqrt{e_1-e_3}\,z) = \frac{\theta_4(0)\theta_2(\nu)}{\theta_2(0)\theta_4(\nu)} \qquad dn(\sqrt{e_1-e_3}\,z) = \frac{\theta_4(0)\theta_3(\nu)}{\theta_3(0)\theta_4(\nu)}\,.$$

Sfruttando varie proprietà delle funzioni viste, si ottiene...

$$\sqrt{s_\infty} = \frac{\sqrt{5}}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{5(6n+1)^2}{12}}$$

$$\sqrt{s_k} = \frac{1}{B} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon^{k(6n+1)^2} q^{\frac{(6n+1)^2}{60}}$$

dove $q = \exp\left(\frac{\pi i \omega'}{\omega}\right)$, $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ e:

$$B = \sqrt[6]{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}} .$$

■

Determinazione del parametro q

Dunque abbiamo espresso le radici $s_\infty, \; s_k$ della sestica di Jacobi tramite le funzioni theta.
Va determinato il valore del parametro q a partire dai parametri della sestica!

Problema dell'inversione:

Date le radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$, cioè gli invarianti irrazionali della $\wp$ associata alla nostra sestica di Jacobi, calcolare il valore del parametro q.

Determinazione del parametro q

Dunque abbiamo espresso le radici $s_\infty, \; s_k$ della sestica di Jacobi tramite le funzioni theta.
Va determinato il valore del parametro q a partire dai parametri della sestica!

Problema dell'inversione:

Date le radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$, cioè gli invarianti irrazionali della $\wp$ associata alla nostra sestica di Jacobi, calcolare il valore del parametro q.

- Calcoliamo il valore del parametro L definito così:

$$L = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} \, .$$

- Tenendo presenti le relazioni tra invarianti irrazionali e funzioni thetanulle, abbiamo:

$$L = \frac{\vartheta_3(0) - \vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0) + \vartheta_4(0)} = \frac{2(q + q^9 + q^{25} + \dots)}{(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots)} \, .$$

Determinazione del parametro q

- Calcoliamo il valore del parametro L definito così:

$$L = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} .$$

- Tenendo presenti le relazioni tra invarianti irrazionali e funzioni thetanulle, abbiamo:

$$L = \frac{\theta_3(0) - \theta_4(0)}{\theta_3(0) + \theta_4(0)} = \frac{2(q + q^9 + q^{25} + \dots)}{(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots)} .$$

Determinazione del parametro q

- Invertendo quest'ultima equazione, otteniamo un'espressione detta nomo di Jacobi:

$$q = \left(\frac{L}{2}\right) + 2\left(\frac{L}{2}\right)^5 + 12\left(\frac{L}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{L}{2}\right)^{13} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(\frac{L}{2}\right)^{4j+1}$$

in cui i coefficienti q_j formano la serie:

$$1,\ 2,\ 15,\ 150,\ 1707,\ 20910,\ 268616,\ 3567400,\ 48555069\ \ldots.$$

- Così troviamo il valore di q! Possiamo sostituirlo nelle formule per $\sqrt{s_\infty}$ e per $\sqrt{s_k}$ e abbiamo finalmente i valori delle soluzioni della sestica di Jacobi!

Determinazione del parametro q

- Invertendo quest'ultima equazione, otteniamo un'espressione detta nomo di Jacobi:

$$q = \left(\frac{L}{2}\right) + 2\left(\frac{L}{2}\right)^5 + 12\left(\frac{L}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{L}{2}\right)^{13} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(\frac{L}{2}\right)^{4j+1}$$

in cui i coefficienti q_j formano la serie:

$$1,\ 2,\ 15,\ 150,\ 1707,\ 20910,\ 268616,\ 3567400,\ 48555069\ \ldots .$$

$\ast$ Così troviamo il valore di q! Possiamo sostituirlo nelle formule per $\sqrt{s_\infty}$ e per $\sqrt{s_k}$ e abbiamo finalmente i valori delle soluzioni della sestica di Jacobi!

■

Risalendo le trasformazioni fatte...

Non resta che invertire le trasformazioni fatte per arrivare fin qui:

Sestica di Jacobi $\longrightarrow$ quintica di Brioschi

Usiamo il teorema di Perron:

$$y_k^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1}) \,.$$

Quintica di Brioschi $\longrightarrow$ quintica principale

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}$$

Risalendo le trasformazioni fatte...

Non resta che invertire le trasformazioni fatte per arrivare fin qui:

Sestica di Jacobi $\longrightarrow$ quintica di Brioschi

Usiamo il teorema di Perron:

$$y_k^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1}) \ .$$

Quintica di Brioschi $\longrightarrow$ quintica principale

$$z_k = \frac{\lambda + \mu y_k}{(y_k^2/Z) - 3}$$

Risalendo le trasformazioni fatte...

Quintica principale $\longrightarrow$ quintica generale

Sappiamo che $z_k = x_k^2 - ux_k + v$; dopo vari calcoli...

$$x_k = \frac{-[E + (z_k - v)(u^3 + Au^2 + Bu + C) + (z_k - v)^2(2u + A)]}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D + (z_k - v)(3u^2 + 2Au + B) + (z_k - v)^2}.$$

■

Riassunto

Equazione quintica generale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione quintica principale

$$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione quintica di Brioschi

$$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$$

$\downarrow$ $\uparrow$

Equazione sestica di Jacobi

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$