Rango di Tensori
e
Varietà Secanti

Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

18 Aprile 2012

Candidato: Fulvio Gesmundo
Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

Definizione

La Varietà di Segre è l'insieme $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k} = \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$.

$$\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k \longrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$$
$$(v_1, \ldots, v_k) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

Spazio tangente alla Varietà di Segre

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e sia $p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in X$ Allora:

$$T_pX = V_1 v_2 \ldots v_k + \cdots + v_1 \ldots v_{k-1} V_k.$$
$$G_p^j X = v_1 \ldots v_{j-1} V_j v_{j+1} \ldots v_k \quad j = 1, \ldots, k.$$

Dati $p_1, \ldots, p_d$ punti generali di X:

$$T_dX = T_{p_1}X + \cdots + T_{p_d}X$$

$$G_d^j X = G_{p_1}^j X + \cdots + G_{p_d}^j X \quad j = 1, \ldots, k.$$

Definizione

La Varietà di Segre è l'insieme $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k} = \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$.

$$\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k \longrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$$
$$(v_1, \ldots, v_k) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

Spazio tangente alla Varietà di Segre

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e sia $p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in X$ Allora:

$$T_pX = V_1 v_2 \ldots v_k + \cdots + v_1 \ldots v_{k-1} V_k.$$
$$G_p^j X = v_1 \ldots v_{j-1} V_j v_{j+1} \ldots v_k \quad j = 1, \ldots, k.$$

Dati $p_1, \ldots, p_d$ punti generali di X:

$$T_dX = T_{p_1}X + \cdots + T_{p_d}X$$

$$G_d^j X = G_{p_1}^j X + \cdots + G_{p_d}^j X \quad j = 1, \ldots, k.$$

Definizione

La Varietà di Segre è l'insieme $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k} = \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$.

$$\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k \longrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$$
$$(v_1, \ldots, v_k) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

Spazio tangente alla Varietà di Segre

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e sia $p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in X$ Allora:

$$T_p X = V_1 v_2 \ldots v_k + \cdots + v_1 \ldots v_{k-1} V_k.$$

$$G_p^j X = v_1 \ldots v_{j-1} V_j v_{j+1} \ldots v_k \quad j = 1, \ldots, k.$$

Dati $p_1, \ldots, p_d$ punti generali di X:

$$T_d X = T_{p_1} X + \cdots + T_{p_d} X$$

$$G_d^j X = G_{p_1}^j X + \cdots + G_{p_d}^j X \quad j = 1, \ldots, k.$$

Definizione

La Varietà di Segre è l'insieme $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k} = \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$.

$$\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k \longrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$$
$$(v_1, \ldots, v_k) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

Spazio tangente alla Varietà di Segre

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e sia $p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in X$ Allora:

$$T_pX = V_1 v_2 \ldots v_k + \cdots + v_1 \ldots v_{k-1} V_k.$$
$$G_p^j X = v_1 \ldots v_{j-1} V_j v_{j+1} \ldots v_k \quad j = 1, \ldots, k.$$

Dati $p_1, \ldots, p_d$ punti generali di X:

$$T_d X = T_{p_1} X + \cdots + T_{p_d} X$$

$$G_d^j X = G_{p_1}^j X + \cdots + G_{p_d}^j X \quad j = 1, \ldots, k.$$

Definizione

La Varietà di Segre è l'insieme $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k} = \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$.

$$\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k \longrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$$
$$(v_1, \dots, v_k) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

Spazio tangente alla Varietà di Segre

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e sia $p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in X$ Allora:

$$T_p X = V_1 v_2 \dots v_k + \cdots + v_1 \dots v_{k-1} V_k.$$
$$G_p^j X = v_1 \dots v_{j-1} V_j v_{j+1} \dots v_k \quad j = 1, \dots, k.$$

Dati $p_1, \dots, p_d$ punti generali di X:

$$T_d X = T_{p_1} X + \cdots + T_{p_d} X$$

$$G_d^j X = G_{p_1}^j X + \cdots + G_{p_d}^j X \quad j = 1, \dots, k.$$

Varietà secante

Sia X una varietà algebrica. La d-esima varietà secante di X è:

$$\sigma_d(X) = \overline{\bigcup_{x_1,\ldots,x_d \in X} \mathbb{P}^{d-1}_{x_1,\ldots,x_d}}.$$

Dimensione aspettata della varietà secante

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$. Il valore

$$\min\left\{\prod_{i=1}^{k}(n_i+1), d\left(1+\sum_{i=1}^{k} n_i\right)\right\}$$

si chiama dimensione aspettata della d-secante di X.

Varietà secante

Sia X una varietà algebrica. La d-esima varietà secante di X è:

$$\sigma_d(X) = \overline{\bigcup_{x_1,\dots,x_d \in X} \mathbb{P}^{d-1}_{x_1,\dots,x_d}}.$$

Dimensione aspettata della varietà secante

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$. Il valore

$$\min\left\{\prod_{i=1}^{k}(n_i+1), d\left(1+\sum_{i=1}^{k} n_i\right)\right\}$$

si chiama dimensione aspettata della d-secante di X.

Fonti

- 1982 (1985) - T. Lickteig

  Non difettività delle varietà cubiche $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ per $n \neq 2$.
- 2009 - H. Abo, G. Ottaviani, C. Peterson

  Metodo induttivo: lo studio di Segre di dimensione alta viene ridotto a quello di Segre di dimensione più bassa.

L'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$

Definizione

Data una varietà di Segre $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ *e* $s, a_1, \ldots, a_k$ *interi positivi, si dice che vale l'affermazione* $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *se*

$$\dim L = D,$$

dove:

$$L = T_s X + G^1_{a_1} X + \cdots + G^k_{a_k} X,$$
$$D = \min \left\{ \prod_{i=1}^k (n_i + 1), s\left(1 + \sum_{i=1}^k n_i\right) + \sum_{i=1}^k a_i(n_i + 1) \right\}.$$

Teorema di Subabbondanza e Superabbondanza

Teorema

Consideriamo $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *e supponiamo che:*

$$\begin{aligned} n_k + 1 &= (n'_k + 1) + (n''_k + 1), \\ s &= s' + s'', \\ a_j &= a'_j + a''_j \quad {}_{per\ j=1,\ldots,k-1}. \end{aligned}$$

Supponiamo che:

1. $T(n_1, \ldots, n_{k-1}, n'_k; s'; a'_1, , \ldots, a'_{k-1}, a_k + s'')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante);*
2. $T(n_1, \ldots, n_{k-1}, n''_k; s''; a''_1, \ldots, a''_{k-1}, a_k + s')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Allora $T(n_1, \ldots, n_k; s; a_1, , \ldots, a_k)$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Teorema di Sububbondanza e Superabbondanza

Teorema

Consideriamo $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *e supponiamo che:*

$$n_k + 1 = (n'_k + 1) + (n''_k + 1),$$
$$s = s' + s'',$$
$$a_j = a'_j + a''_j \quad {}_{per\ j=1,\ldots,k-1}.$$

Supponiamo che:

1. $T(n_1, \ldots, n_{k-1}, n'_k; s'; a'_1, , \ldots, a'_{k-1}, a_k + s'')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante);*
2. $T(n_1, \ldots, n_{k-1}, n''_k; s''; a''_1, \ldots, a''_{k-1}, a_k + s')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Allora $T(n_1, \ldots, n_k; s; a_1, , \ldots, a_k)$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Teorema di Sububbondanza e Superabbondanza

Teorema

Consideriamo $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *e supponiamo che:*

$$\begin{aligned} n_k + 1 &= (n'_k + 1) + (n''_k + 1), \\ s &= s' + s'', \\ a_j &= a'_j + a''_j \qquad {}_{per\ j=1,\ldots,k-1}. \end{aligned}$$

Supponiamo che:

1. $T(n_1, \ldots, n_{k-1}, n'_k; s'; a'_1, , \ldots, a'_{k-1}, a_k + s'')$ *è vera e sububbondante (risp. superabbondante);*
2. $T(n_1, \ldots, n_{k-1}, n''_k; s''; a''_1, \ldots, a''_{k-1}, a_k + s')$ *è vera e sububbondante (risp. superabbondante).*

Allora $T(n_1, \ldots, n_k; s; a_1, , \ldots, a_k)$ *è vera e sububbondante (risp. superabbondante).*

Il valore di room

Definizione

Si dice room di un'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *il valore:*

$$\mathscr{R} = \prod_{i=1}^{k}(n_k + 1) - s\left(1 + \sum_{i=1}^{k} n_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i(n_i + 1).$$

Regione di sicurezza

Definizione

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$.

Siano:

$$\mathscr{R}_+ = \max\left\{\mathscr{R} \text{ room di un'affermazione subabbondante falsa}\right\}$$

$$\mathscr{R}_- = \min\left\{\mathscr{R} \text{ room di un'affermazione superabbondante falsa}\right\}$$

I valori $\mathscr{O}_+ = \mathscr{R}_+ + 1$ *e* $\mathscr{O}_- = \mathscr{R}_- - 1$, *sono detti gli estremi di sicurezza della varietà* X.
L'insieme

$$\left(-\infty, \mathscr{O}_-\right] \cup \left[\mathscr{O}_+, +\infty\right)$$

si chiama regione di sicurezza di X.

Caso $n_j + 1 = 2^{d_j} c$

Proposizione

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$ *una varietà di Segre con* $n_j + 1 = 2^{d_j} c$ *per certi interi* c, d_1, d_2, d_3 *e sia* $Y = \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$. *Siano* $\mathscr{O}_+, \mathscr{O}_-$ *gli estremi di sicurezza di* Y *e* $\mathscr{O}_+^*, \mathscr{O}_-^*$ *quelli di* X. *Allora:*

$$\mathscr{O}_+^* \leq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathscr{O}_+ + C),$$
$$\mathscr{O}_-^* \geq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathscr{O}_- - C).$$

dove $C = \left(2^{-2d_2} + 2^{-d_1-d_2} + 2^{-2d_1+1} + 2^{d_2-3d_1-1} + 3\right) c$

Riduzione dei fattori

Proposizione

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ una varietà di Segre e sia $Y = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_m}$ con $m \leq k$. Siano $\mathscr{O}_+$ e $\mathscr{O}_+^*$ gli estremi di sicurezza positivi di Y e X rispettivamente. Sia

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\left[1+\log\left(\frac{1+n_{k-\ell}}{2}\right)\right]\left(\sum_{i=1}^{k-\ell} n_i\right)}{\prod_{j=\ell}^{m-1}(1+n_{k-j})}.$$

Allora:

$$\mathscr{O}_+^* \leq (\mathscr{O}_+ + \Delta)\prod_{j=0}^{m-1}(n_{k-j}+1).$$

Riduzione dei fattori

Proposizione

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ *una varietà di Segre e sia* $Y = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_m}$ *con* $m \leq k$*. Siano* $\mathscr{O}_+$ *e* $\mathscr{O}_+^*$ *gli estremi di sicurezza positivi di* Y *e* X *rispettivamente. Sia*

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\left[1+\log\left(\frac{1+n_{k-\ell}}{2}\right)\right]\left(\sum_{i=1}^{k-\ell} n_i\right)}{\prod_{j=\ell}^{m-1}(1+n_{k-j})}.$$

Allora:

$$\mathscr{O}_+^* \leq (\mathscr{O}_+ + \Delta)\prod_{j=0}^{m-1}(n_{k-j}+1).$$

Varietà della forma $(\mathbb{P}^n)^4$

Analizzate le varietà di Segre della forma $(\mathbb{P}^n)^4$ per $n \leq 10$.

- $\sigma_3 \left(\mathbb{P}^1\right)^4$ è difettiva.

Tutte le altre secanti per $n \leq 10$ sono non difettive, eccetto al più:

- $\sigma_{199} \left(\mathbb{P}^8\right)^4$ (room $\mathscr{R} = -6$);
- $\sigma_{357} \left(\mathbb{P}^{10}\right)^4$ (room $\mathscr{R} = 4$);

che non possono essere trattate con il metodo induttivo.

Regione di sicurezza in dimensione bassa

Varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$ con $n_i \leq 5$, con $n_1 \leq n_2 \leq n_3$:

$$\mathscr{O}_+ = -\mathscr{O}_- = (n_1 + n_2 - 1)\, n_3.$$

Varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3} \times \mathbb{P}^{n_4}$ per $n_i \leq 3$, con $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$:

$$\mathscr{O}_+ = -\mathscr{O}_- = (n_1 + n_2 + n_3 - 1)\, n_4.$$