Rango di Tensori e Varietà Secanti

Fulvio Gesmundo

Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

16 Marzo 2012

L'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$

Definizione

Data una varietà di Segre $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ *e* $s, a_1, \ldots, a_k$ *interi positivi, si dice che vale l'affermazione* $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *se*

$$\dim L = D,$$

dove:

$$L = T_s X + G^1_{a_1} X + \cdots + G^k_{a_k} X,$$
$$D = \min\left\{\prod_{i=1}^k (n_i + 1), s\left(1 + \sum_{i=1}^k n_i\right) + \sum_{i=1}^k a_i(n_i + 1)\right\}.$$

Teorema di Subabbondanza e Superabbondanza

Teorema

Consideriamo $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *e supponiamo che:*

$$\begin{aligned} n_k + 1 &= (n_k' + 1) + (n_k'' + 1), \\ s &= s' + s'', \\ a_j &= a_j' + a_j'' \quad {}_{per\ j=1,\dots,k-1}. \end{aligned}$$

Supponiamo che:

1. $T(n_1, , \dots, n_{k-1}, n_k'; s'; a_1', , \dots, a_{k-1}', a_k + s'')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante);*
2. $T(n_1, , \dots, n_{k-1}, n_k''; s''; a_1'', \dots, a_{k-1}'', a_k + s')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Allora $T(n_1, , \dots, n_k; s; a_1, , \dots, a_k)$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Teorema di Subabbondanza e Superabbondanza

Teorema

Consideriamo $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *e supponiamo che:*

$$n_k + 1 = (n'_k + 1) + (n''_k + 1),$$
$$s = s' + s'',$$
$$a_j = a'_j + a''_j \qquad {\scriptstyle \textit{per } j=1,\ldots,k-1}.$$

Supponiamo che:

1. $T(n_1, , \ldots, n_{k-1}, n'_k; s'; a'_1, , \ldots, a'_{k-1}, a_k + s'')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante);*
2. $T(n_1, , \ldots, n_{k-1}, n''_k; s''; a''_1, \ldots, a''_{k-1}, a_k + s')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Allora $T(n_1, , \ldots, n_k; s; a_1, , \ldots, a_k)$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Teorema di Subabbondanza e Superabbondanza

Teorema

Consideriamo $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *e supponiamo che:*

$$n_k + 1 = (n'_k + 1) + (n''_k + 1),$$
$$s = s' + s'',$$
$$a_j = a'_j + a''_j \qquad {\scriptstyle per\ j=1,\dots,k-1}.$$

Supponiamo che:

1. $T(n_1, , \dots, n_{k-1}, n'_k; s'; a'_1, , \dots, a'_{k-1}, a_k + s'')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante);*
2. $T(n_1, , \dots, n_{k-1}, n''_k; s''; a''_1, \dots, a''_{k-1}, a_k + s')$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Allora $T(n_1, , \dots, n_k; s; a_1, , \dots, a_k)$ *è vera e subabbondante (risp. superabbondante).*

Il valore di room

Definizione

Si dice room di un'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *il valore:*

$$\mathscr{R} = \prod_{i=1}^{k}(n_k+1) - s\left(1+\sum_{i=1}^{k} n_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i(n_i+1).$$

Scrittura della room con il k-esimo fattore in evidenza

$$\mathscr{R} = (n_k+1)\left[\prod_{i=1}^{k-1}(n_i+1) - (s+a_k)\right] + \\ - s\left(\sum_{i=1}^{k-1}(n_i+1)\right) - \sum_{i=1}^{k-1} a_i(n_i+1)$$

Il valore di room

Definizione

Si dice room di un'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *il valore:*

$$\mathscr{R} = \prod_{i=1}^{k} (n_k + 1) - s\left(1 + \sum_{i=1}^{k} n_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i(n_i + 1).$$

Scrittura della room con il k-esimo fattore in evidenza

$$\mathscr{R} = (n_k + 1)\left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - (s + a_k)\right] + \\ - s\left(\sum_{i=1}^{k-1} (n_i + 1)\right) - \sum_{i=1}^{k-1} a_i(n_i + 1)$$

Risultato sulle riduzioni proporzionate

Teorema

Consideriamo un'affermazione $\mathcal{T} = T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *relativa a una varietà di Segre* X *di almeno tre fattori. Fissiamo* n'_k *e siano* $\gamma' = \frac{n'_k+1}{n_k+1}$ *e* $\gamma'' = \frac{n''_k+1}{n_k+1}$. *Allora è possibile determinare una riduzione di* $\mathcal{T}$ *in due affermazioni* $\mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{T}''$ *tali che:*

$$|\mathscr{R}' - \gamma'\mathscr{R}| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} n_i,$$

$$|\mathscr{R}'' - \gamma''\mathscr{R}| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} n_i.$$

Se inoltre

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} n_i \leq \min\{\gamma', \gamma''\}|\mathscr{R}|,$$

allora la riduzione è ammissibile.

Risultato sulle riduzioni proporzionate

Teorema

Consideriamo un'affermazione $\mathcal{T} = T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *relativa a una varietà di Segre* X *di almeno tre fattori. Fissiamo* n'_k *e siano* $\gamma' = \frac{n'_k+1}{n_k+1}$ *e* $\gamma'' = \frac{n''_k+1}{n_k+1}$*. Allora è possibile determinare una riduzione di* $\mathcal{T}$ *in due affermazioni* $\mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{T}''$ *tali che:*

$$|\mathscr{R}' - \gamma'\mathscr{R}| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} n_i,$$
$$|\mathscr{R}'' - \gamma''\mathscr{R}| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} n_i.$$

Se inoltre

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} n_i \leq \min\{\gamma', \gamma''\}|\mathscr{R}|,$$

allora la riduzione è ammissibile.

Risultato sulle riduzioni proporzionate

Teorema

Consideriamo un'affermazione $\mathcal{T} = T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *relativa a una varietà di Segre* X *di almeno tre fattori. Fissiamo* n'_k *e siano* $\gamma' = \frac{n'_k+1}{n_k+1}$ *e* $\gamma'' = \frac{n''_k+1}{n_k+1}$*. Allora è possibile determinare una riduzione di* $\mathcal{T}$ *in due affermazioni* $\mathcal{T}'$ *e* $\mathcal{T}''$ *tali che:*

$$|\mathscr{R}' - \gamma' \mathscr{R}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n_i,$$
$$|\mathscr{R}'' - \gamma'' \mathscr{R}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n_i.$$

Se inoltre

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n_i \leq \min\{\gamma', \gamma''\} |\mathscr{R}|,$$

allora la riduzione è ammissibile.

Dimostrazione

Supponiamo $s \neq 0$*. Sia* $\underline{a}' = (a'_1, \ldots, a'_{k-1})$*. Indichiamo con* $\mathscr{R}^{\underline{a}'}_{s'}$ *la room di*

$$T(n_1, \ldots, n_{k-1}, n'_k; s'; \underline{a}', a_k + s - s'),$$

$$\mathscr{R}^{\underline{a}'}_{s'} = (n'_k + 1)\rho - s' \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i \right) - \sum_{i=1}^{k-1} a'_i (n_k - 1).$$

Dimostrazione

Supponiamo $s \neq 0$. *Sia* $\underline{a}' = (a'_1, \dots, a'_{k-1})$. *Indichiamo con* $\mathscr{R}^{\underline{a}'}_{s'}$ *la room di*

$$T(n_1, \dots, n_{k-1}, n'_k; s'; \underline{a}', a_k + s - s'),$$

$$\mathscr{R}^{\underline{a}'}_{s'} = (n'_k + 1)\rho - s' \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i \right) - \sum_{i=1}^{k-1} a'_i (n_k - 1).$$

Regione di sicurezza

Definizione

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$.

Sia $\mathcal{T}^+$ *un'affermazione subabbondante falsa che abbia room massima tra tutte le affermazioni subabbondanti false. Sia* $\mathscr{R}_+$ *la sua room.*

Sia $\mathcal{T}^-$ *un'affermazione superabbondante falsa che abbia room minima tra tutte le affermazioni superabbondanti false. Sia* $\mathscr{R}_-$ *la sua room.*

I valori $\mathscr{O}_+ = \mathscr{R}_+ + 1$ *e* $\mathscr{O}_- = \mathscr{R}_- - 1$*, sono detti gli estremi di sicurezza della varietà* X*.*
L'insieme

$$(-\infty, \mathscr{O}_-] \cup [\mathscr{O}_+, +\infty)$$

si chiama regione di sicurezza di X*.*

Stima di $\mathscr{O}_+$

Teorema

Sia $\mathscr{O}_+$ l'estremo di sicurezza positivo della varietà $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$, con $n_1 \leq \cdots \leq n_k$. Allora

$$\mathscr{O}_+ \geq \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1 \right) n_k.$$

Dimostrazione

Consideriamo l'affermazione

$$\mathcal{T} = T(n_1, \ldots, n_k; 1; 0, \ldots, 0, a_k)$$

con

$$a_k = \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i.$$

Stima di $\mathscr{O}_+$

Teorema

Sia $\mathscr{O}_+$ l'estremo di sicurezza positivo della varietà $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$, con $n_1 \leq \cdots \leq n_k$. Allora

$$\mathscr{O}_+ \geq \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1 \right) n_k.$$

Dimostrazione

Consideriamo l'affermazione

$$\mathcal{T} = T(n_1, \ldots, n_k; 1; 0, \ldots, 0, a_k)$$

con

$$a_k = \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i.$$

Caso cubico

Lemma

Sia $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, *con* $n+1$ *pari. Sia* $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *di room* $\mathscr{R}$. *Allora è possibile determinare tre riduzioni che diano luogo a otto affermazioni* $\mathcal{T}_1$ *di room genericamente indicata con* $\mathscr{R}_1$, *tali che:*

$$\left| \mathscr{R}_1 - \frac{1}{8}\mathscr{R} \right| \leq \frac{9}{8} n.$$

Proposizione

Sia $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, *con* $n+1 = 2^d c$. *Sia* $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *di room* $\mathscr{R}$. *È possibile determinare un albero di riduzione le cui foglie sono* 8^d *affermazioni relative a* $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$ *di room genericamente indicata con* $\mathscr{R}_d$, *tali che:*

$$\left| \mathscr{R}_d - \frac{1}{8^d}\mathscr{R} \right| \leq 3c.$$

Caso cubico

Lemma

Sia $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, *con* $n+1$ *pari. Sia* $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *di room* $\mathscr{R}$. *Allora è possibile determinare tre riduzioni che diano luogo a otto affermazioni* $\mathcal{T}_1$ *di room genericamente indicata con* $\mathscr{R}_1$, *tali che:*

$$\left| \mathscr{R}_1 - \frac{1}{8}\mathscr{R} \right| \leq \frac{9}{8}n.$$

Proposizione

Sia $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, *con* $n+1 = 2^d c$. *Sia* $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *di room* $\mathscr{R}$. *È possibile determinare un albero di riduzione le cui foglie sono* 8^d *affermazioni relative a* $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$ *di room genericamente indicata con* $\mathscr{R}_d$, *tali che:*

$$\left| \mathscr{R}_d - \frac{1}{8^d}\mathscr{R} \right| \leq 3c.$$

Proposizione

Sia $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ *una varietà di Segre con* $n+1 = 2^d c$ *per qualche valore intero* d, c *e sia* $Y = \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$. *Siano* $\mathscr{O}_-$, $\mathscr{O}_+$ *gli estremi della regione di sicurezza di* Y *e* $\mathscr{O}^*_-$, $\mathscr{O}^*_+$ *quelli della regione di sicurezza di* X. *Allora vale:*

$$\mathscr{O}^*_+ \leq 8^d \left(\mathscr{O}_+ + 3c\right),$$
$$\mathscr{O}^*_- \geq 8^d \left(\mathscr{O}_- - 3c\right).$$

Caso $n_j + 1 = 2^{d_j} c$

Proposizione

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$ *con* $n_j + 1 = 2^{d_j} c$, *con* $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. *Sia* $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ *di room* $\mathscr{R}$. *Allora è possibile costruire un albero di riduzione le cui foglie corrispondono ad affermazioni relative a* $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$, *con room indicata genericamente con* $\mathscr{R}_{fin}$, *per cui vale:*

$$\left| \mathscr{R}_{fin} - \frac{1}{2^{d_1+d_2+d_3}} \mathscr{R} \right| \leq C,$$

dove $C = \left(2^{-2d_2} + 2^{-d_1-d_2} + 2^{-2d_1+1} + 2^{d_2-3d_1-1} + 3\right) c$

Proposizione

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$ *una varietà di Segre con* $n_j + 1 = 2^{d_j} c$ *per certi interi* c, d_1, d_2, d_3 *e sia* $Y = \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$. *Siano* $\mathscr{O}_+, \mathscr{O}_-$ *gli estremi di sicurezza di* Y *e* $\mathscr{O}_+^*, \mathscr{O}_-^*$ *quelli di* X. *Allora:*

$$\mathscr{O}_+^* \leq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathscr{O}_+ + C),$$
$$\mathscr{O}_-^* \geq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathscr{O}_- - C).$$

Risultati ottenuti con il calcolo esplicito

Casi della forma $\left(\mathbb{P}^n\right)^4$ in dimensione bassa

Analizzate le varietà di Segre della forma $\left(\mathbb{P}^n\right)^4$ per $n \leq 10$.

- $\sigma_3\left(\mathbb{P}^1\right)^4$ è difettiva.

Tutte le altre secanti per $n \leq 10$ sono non difettive, eccetto al più:

- $\sigma_{199}\left(\mathbb{P}^8\right)^4$ non può essere trattata con il metodo induttivo;
- $\sigma_{357}\left(\mathbb{P}^{10}\right)^4$ non può essere trattata con il metodo induttivo.

Risultati ottenuti con il calcolo esplicito

Casi della forma $(\mathbb{P}^n)^4$ in dimensione bassa

Analizzate le varietà di Segre della forma $(\mathbb{P}^n)^4$ per $n \leq 10$.

- $\sigma_3 \left(\mathbb{P}^1\right)^4$ è difettiva.

Tutte le altre secanti per $n \leq 10$ sono non difettive, eccetto al più:

- $\sigma_{199} \left(\mathbb{P}^8\right)^4$ non può essere trattata con il metodo induttivo;
- $\sigma_{357} \left(\mathbb{P}^{10}\right)^4$ non può essere trattata con il metodo induttivo.

Risultati ottenuti con il calcolo esplicito

Casi della forma $\left(\mathbb{P}^n\right)^4$ in dimensione bassa

Analizzate le varietà di Segre della forma $\left(\mathbb{P}^n\right)^4$ per $n \leq 10$.

- $\sigma_3 \left(\mathbb{P}^1\right)^4$ è difettiva.

Tutte le altre secanti per $n \leq 10$ sono non difettive, eccetto al più:

- $\sigma_{199} \left(\mathbb{P}^8\right)^4$ non può essere trattata con il metodo induttivo;
- $\sigma_{357} \left(\mathbb{P}^{10}\right)^4$ non può essere trattata con il metodo induttivo.

Risultati sulla regione di sicurezza

Varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$ con $n_i \leq 5$, con $n_1 \leq n_2 \leq n_3$:

$$\mathscr{O}_+ = -\mathscr{O}_- = (n_1 + n_2 - 1)\, n_3.$$

Varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3} \times \mathbb{P}^{n_4}$ per $n_i \leq 3$, con $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$:

$$\mathscr{O}_+ = -\mathscr{O}_- = (n_1 + n_2 + n_3 - 1)\, n_4.$$

Risultati sulla regione di sicurezza

Varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$ con $n_i \leq 5$, con $n_1 \leq n_2 \leq n_3$:

$$\mathscr{O}_+ = -\mathscr{O}_- = (n_1 + n_2 - 1)\, n_3.$$

Varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3} \times \mathbb{P}^{n_4}$ per $n_i \leq 3$, con $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$:

$$\mathscr{O}_+ = -\mathscr{O}_- = (n_1 + n_2 + n_3 - 1)\, n_4.$$