UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE

FACOLTA' DI S.M.F.N.

Anno accademico 2007/2008

Tesina per la laurea triennale in Matematica
di Gaia Frasconi

Integrazione di Funzioni Algebriche e Curve Razionali

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

Introduzione

Nei corsi di analisi vengono studiati i vari metodi di risoluzione per gli integrali, in questa tesi ci poniamo la domanda: "L'integrale è risolubile o no?"
In questo lavoro approfondiremo proprio tale aspetto; ci sono integrali che non sono risolubili tramite funzioni elementari, ma come facciamo a riconoscerli?
Studieremo le curve algebriche piane in relazione agli integrali.
Tramite il teorema dei fratti semplici sappiamo che le funzioni razionali sono integrabili, ma ci chiediamo se sia possibile riportare altri integrali, tramite opportune sostituzioni, ad avere tale forma.
A volte è possibile, ma ci sono condizioni che la funzione deve soddisfare.

1 Appunti preliminari

Cominciamo col definire le nozioni basilari per poter svolgere questo studio.

Teorema 1.1. ***"Teorema dei fratti semplici"*** *(Integrazione delle funzioni razionali)*
Data una funzione razionale arbitraria $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, dove m è il grado di $N(x)$ e n quello di $D(x)$, si può calcolare $\int f(x)\mathrm{d}x$ in termini di funzioni razionali stesse, di funzioni trigonometriche inverse e di logaritmi.

Dimostrazione Se $m \geq n$ possiamo eseguire la divisione di $N(x)$ per $D(x)$ e trovare $Q(x)$ e $R(x)$, quoziente e resto di tale divisione, si ha:

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Quindi vediamo che ci riconduciamo sempre al caso di una funzione razionale fratta in cui il grado del polinomio a numeratore è minore di quello del polinomio a denominatore.
Studiamo il caso in cui $D(x)$ ha radici multiple; siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ le radici reali di molteplicità $h_1, h_2, \ldots, h_r$ e $\beta_1 \pm i\gamma_1, \beta_2 \pm i\gamma_2, \ldots, \beta_s \pm i\gamma_s$ le radici complesse di molteplicità $k_1, k_2, \ldots, k_s$ in modo che

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r + 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_s) = n.$$

Supposto uguale 1 il coefficiente di x^n in $D(x)$ si ha:

$$D(x) = (x - \alpha_1)^{h_1} \ldots (x - \alpha_r)^{h_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{k_s}$$

dove

$$x^2 + p_1 x + q_1 = (x - \beta_1 - i\gamma_1)(x - \beta_1 + i\gamma_1)$$

È possibile decomporre la funzione $\frac{R(x)}{D(x)}$ nella somma di fratti più semplici, infatti: detta α una radice reale di $D(x)$ con molteplicità j,$D(x) = (x-\alpha)^j D_1(x)$ con $D_1(\alpha) \neq 0$.
Detta A_1 una costante reale scriviamo:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha)^j} + \frac{R(x) - A_1 D_1(x)}{(x - \alpha)^j D_1(x)}$$

$R(x) - A_1 D_1(x)$ è divisibile per $(x-\alpha) \Leftrightarrow A_1 = \frac{R(\alpha)}{D_1(\alpha)}$, con tale scelta di A_1 otteniamo:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^j} + \frac{R_1(x)}{(x-\alpha)^{j-1} D_1(x)}$$

Osserviamo che il denominatore della 2^o frazione a 2^o membro ammette α come radice con molteplicità $j-1 < j$.
Considerando tale frazione e applicando lo stesso ragionamento troviamo una costante A_2 tale che

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^j} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{j-1}} + \frac{R_2(x)}{(x-\alpha)^{j-2} D_1(x)}$$

Iterando il ragionamento otteniamo:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^j} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{j-1}} + \ldots + \frac{A_j}{(x-\alpha)} + \frac{P(x)}{D_1(x)}$$

dove $D_1(x)$ è un polinomio che non ammette α come radice, ma ammette come radici le rimanenti radici di $D(x)$ con la loro molteplicità ed il grado di $P(x)$ è minore di quello di $D_1(x)$.
Applicando il ragionamento per ogni altra radice di $D(x)$ otteniamo la decomposizione di $\frac{R(x)}{D(x)}$ nella somma di fratti semplici del tipo $\frac{A_t}{(x-\alpha)^r}$.
Ovviamente le α_i possono essere numeri reali o complessi; se sono tutti reali la decomposizione è acquisita. Se $D(x)$ ammette radici complesse applichiamo il procedimento precedente a tutte le radici reali ottenendo:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum \frac{A_j}{(x-\alpha)^j} + \frac{M(x)}{N(x)}$$

dove $N(x)$ non ammette radici reali, ma solo radici complesse coniugate.
Se $\beta \pm i\gamma$ sono radici complesse di $N(x)$ e quindi di $D(x)$ con molteplicità k, posto $x^2 + px + q = (x - \beta + i\gamma)(x - \beta - i\gamma)$:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{C_1 x + E_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M(x) - (C_1 x + E_1) N_1(x)}{(x^2+px+q)^k N_1(x)}$$

dove $N(x) = (x^2+px+q)^k N_1(x)$ e C_1, E_1 sono costanti reali.
Vogliamo che $\beta \pm i\gamma$ siano radici del numeratore della 2^o frazione a 2^o membro, questo avviene $\Leftrightarrow M(\beta \pm i\gamma) - [C_1(\beta \pm i\gamma) + E_1] N_1(\beta \pm i\gamma) = 0$.
Posto $\frac{M(\beta \pm i\gamma)}{N_1(\beta \pm i\gamma)} = \theta \pm i\eta$ otteniamo:

$$C_1 = \frac{\eta}{\gamma} \quad con \quad \gamma \neq 0,$$

$$E_1 = \theta - \beta C_1 = \theta - \frac{\beta}{\gamma}\eta$$

Con tali scelte otteniamo:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{C_1 x + E_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} N_1(x)}$$

Applicando il procedimento alla 2^o frazione a 2^o membro e iterando otteniamo:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_{i=1}^{h_1} \frac{A_i}{(x-\alpha_1)^i} + \sum_{i=1}^{h_2} \frac{B_i}{(x-\alpha_2)^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{h_r} \frac{L_i}{(x-\alpha_r)^i} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k_1} \frac{a_j x + b_j}{(x^2+p_1x+q_1)^j} + \ldots\ldots + \sum_{j=1}^{k_s} \frac{n_s x + t_s}{(x^2+p_sx+q_s)^j}.$$

Le costanti a 2^o membro si determinano riducendo allo stesso denominatore $(D(x))$ ed identificando i numeratori dei due membri utilizzando il Teorema di identità dei polinomi. Otteniamo così un sistema di n equazioni lineari in n incognite (le costanti) che è sempre determinato.
Quindi

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} \mathrm{d}x = \int (\sum_{i=1}^{h_1} \frac{A_i}{(x-\alpha_1)^i} + \sum_{i=1}^{h_2} \frac{B_i}{(x-\alpha_2)^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{h_r} \frac{L_i}{(x-\alpha_r)^i} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k_1} \frac{a_j x + b_j}{(x^2+p_1x+q_1)^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{k_s} \frac{n_s x + t_s}{(x^2+p_sx+q_s)^j}) \mathrm{d}x.$$

Applicando la proprietà dell'integrale della somma otteniamo:

$$\int \frac{R(x)}{D(x)} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{h_1} \int \frac{A_i}{(x-\alpha_1)^i} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{h_2} \int \frac{B_i}{(x-\alpha_2)^i} \mathrm{d}x + \ldots$$
$$+ \sum_{i=1}^{h_r} \int \frac{L_i}{(x-\alpha_r)^i} \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{k_1} \int \frac{a_j x + b_j}{(x^2+p_1x+q_1)^j} \mathrm{d}x + \ldots$$
$$+ \sum_{j=1}^{k_s} \int \frac{n_s x + t_s}{(x^2+p_sx+q_s)^j} \mathrm{d}x$$

La tesi è dimostrata poichè tali integrali sono facilmente calcolabili.

Definizione 1.1. *Una funzione $y = y(x)$ è algebricamente dipendente da x se esiste un polinomio $f(x_1, x_2)$ in due variabili tale che $f(x, y(x))$ è identicamente zero.*

In generale le funzioni razionali $y = \frac{R(x)}{D(x)}$ sono algebricamente dipendenti da x $(f(x_1, x_2) = D(x_1)x_2 - R(x_1))$; esistono funzioni non razionali che sono algebricamente dipendenti.

Esempio

$$y = \sqrt{x} \quad (f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2)$$

2 Integrazione delle funzioni algebriche

Definizione 2.1. *Una curva algebrica piana C è il luogo dei punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tali che $f(x, y) = 0$, dove f è un polinomio in x e y.*

Possiamo notare che se $y = y(x)$ è algebricamente dipendente da x l'equazione $f(x_1, x_2) = 0$ è una curva algebrica nel piano (x_1, x_2) e $(x, y(x))$ appartiene alla curva.
Vediamo alcune proprietà di questa curva importanti per lo studio di $y(x)$.

Definizione 2.2. *Dato $f(x_1, x_2)$ un polinomio in due variabili, la curva*

$$C = \{(x_1, x_2)|f(x_1, x_2) = 0\}$$

è parametrizzata razionalmente, in breve è razionale, se ci sono $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ funzioni razionali tali che

$$f(x_1(t), x_2(t)) \equiv 0$$

come funzione di t.

Esempio

Lemniscata di Bernoulli

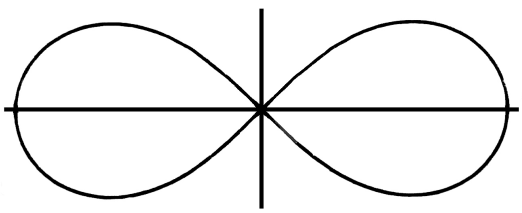

Figura 1: Lemniscata di Bernoulli: prende il nome dal latino *lemniscus* che nell'antica Roma designava un nastro annodato pendente in segno d'onore dalle corone trionfali.

Mostriamo che la curva $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ è razionale
Risolviamo il sistema per sostituzione

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ x^2 + y^2 = t(x - y) \end{cases}$$

otteniamo:

$$(t(x - y))^2 = a^2(x - y)(x + y)$$

Raccogliamo $(x - y)$ e semplifichiamo:

$$t^2(x - y) = a^2(x + y)$$

Isoliamo la x ottenendo:

$$x = y\frac{(t^2 + a^2)}{(t^2 - a^2)} \tag{1}$$

Sostituiamo (1) nella 2^o equazione del sistema:

$$y^2(\frac{(t^2 + a^2)^2}{(t^2 - a^2)^2} + 1) = ty(\frac{t^2 + a^2}{t^2 - a^2} - 1)$$

Oltre al punto $(0, 0)$ otteniamo:

$$y = \frac{a^2t(t^2 - a^2)}{t^4 + a^4} \tag{2}$$

Sostituiamo (2) in (1):

$$x = \frac{a^2t(t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}$$

Teorema 2.1. *Siano $R(x_1, x_2)$ una funzione razionale in due variabili e $y = y(x)$ algebricamente dipendente da x, con $f(x, y(x)) \equiv 0$. Se la curva*

$$C = \{(x_1, x_2)|f(x_1, x_2) = 0\}$$

può essere parametrizzata razionalmente allora

$$\int R(x, y(x))\mathrm{d}x$$

può essere trovato in termini di funzioni razionali, di funzioni trigonometriche inverse e di logaritmi.

Dimostrazione Sia $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t)$ la parametrizzazione di C. Poniamo $x = x_1(t),\ y = x_2(t)$ e sostituiamo all'interno dell'integrale ottenendo:

$$\int R(x_1(t), x_2(t))(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t$$

Poichè l'integranda è una funzione razionale possiamo applicare il *Teorema 1.1* e quindi il teorema è dimostrato.

Abbiamo scoperto che l'unica difficoltà è parametrizzare la curva C,quindi ci chiediamo quali curve possono essere parametrizzate razionalmente e come. Nel caso in cui $f(x_1, x_2)$ è di grado 1 , C risulta una retta che è sempre parametrizzabile razionalmente. Fortunatamente c'è un'altra classe di curve che possono essere parametrizzate: le coniche.

Proposizione 2.1. *Ogni conica C,definita da $f(x_1, x_2) = 0$ dove $f(x_1, x_2)$ è di grado 2, può essere parametrizzata razionalmente.*

Dimostrazione Ci sono due tipi di dimostrazione: una algebrica ed una geometrica. La dimostrazione algebrica consiste nel cambiare le coordinate (x_1, x_2) in (x, y), così $f(x_1, x_2)$ diventa: $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1$,forma standard per scrivere una conica. Se è possibile parametrizzare $g(x, y) = 0$ con funzioni razionali, possiamo utilizzare tale parametrizzazione in $f(x_1, x_2)$. Esplicitiamo la parametrizzazione di $g(x, y) = 0$:

$$x = a\frac{b^2 \mp a^2t^2}{b^2 \pm a^2t^2}, \quad y = \frac{2ab^2t}{b^2 \pm a^2t^2}$$

La dimostrazione geometrica consiste nel prendere un punto P appartenente alla conica C e parametrizzare le rette passanti da P: se $P = (x_0, y_0)$, sia r la retta $y - y_0 = t(x - x_0)$. Intersechiamo r con la conica C, troviamo due punti: P e $P_t = (x(t), y(t))$. Infine verichiamo che $x(t)$ e $y(t)$ sono una parametrizzazione razionale della conica C.

Corollario 2.1. *L'integrale* $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x$ *,dove* $R(x_1, x_2)$ *è un'espressione razionale in due variabili, può essere trovato* $\forall a,b,c$.

Dimostrazione Sia $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, y è algebricamente dipendente da x, infatti $f(x, y) = y^2 - ax^2 - bx - c$ è identicamente zero. Poichè $f(x, y)$ è di grado 2, la curva $f(x_1, x_2) = 0$ definisce una conica che, grazie alla proposizione precedente, può essere parametrizzata razionalmente. Quindi, per il teorema 2.1, il corollario è dimostrato.

E' possibile procedere con curve di grado superiore? Ci sono curve che non sono coniche, ma possono essere parametrizzate razionalmente.

Esempio $y = x^{\frac{p}{q}}$ soddisfa $f(x, y) = y^q - x^p \equiv 0$. Tale curva è parametrizzata da : $x = t^q$, $y = t^p$.

Corollario 2.2. $\int R(x, x^{\frac{p}{q}})\mathrm{d}x$ *può essere trovato, dove* $R(x_1, x_2)$ *è un'espressione razionale in due variabili.*

Esempio $y^2 - x^3 - 1 = 0$, che definisce la funzione algebrica $y = \sqrt{1 + x^3}$ non può essere parametrizzata razionalmente.

In generale gli integrali di una radice quadrata di un polinomio di grado 3 in x, ($\int \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\mathrm{d}x$), sono chiamati ellittici e non possono essere risolti usando funzioni elementari. Sappiamo il motivo: dietro il problema c'è una curva non parametrizzabile.

Proposizione 2.2. *La curva di equazione* $y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ *è razionale* $\Longleftrightarrow$ *il polinomio* $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ *ha radici multiple.*

Dimostrazione $\Longleftarrow$ Con una traslazione $x' = x + \alpha$ ci riconduciamo al caso $A = 0$, quindi l'equazione diventa: $y^2 = x^3 + Bx + C$.
La somma delle radici é zero, pertanto l'equazione assume la forma:

$$y^2 = (x - x_1)^2(x + 2x_1)$$

Risolviamo il sistema per sostituzione:

$$\begin{cases} y^2 = (x - x_1)^2(x + 2x_1) \\ y = t(x - x_1) \end{cases}$$

otteniamo:

$$t^2(x - x_1)^2 = (x - x_1)^2(x + 2x_1)$$

Ricaviamo x:

$$x = t^2 - 2x_1 \tag{3}$$

Sostituiamo (3) nella 2^o equazione del sistema:

$$y = t^3 - 3tx_1$$

$\Longrightarrow$ Per ipotesi abbiamo la parametrizzazione:

$$y = \frac{q(t)}{r(t)}, \quad x = \frac{p(t)}{r(t)} \tag{4}$$

Supponiamo che tutte le radici siano distinte:

$$y^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \tag{5}$$

Sostituiamo (4) in (5):

$$\frac{q^2(t)}{r^2(t)} = (\frac{p(t)}{r(t)} - x_1)(\frac{p(t)}{r(t)} - x_2)(\frac{p(t)}{r(t)} - x_3)$$

Semplifichiamo:

$$q^2(t)r(t) = (p(t) - r(t)x_1)(p(t) - r(t)x_2)(p(t) - r(t)x_3)$$

Sia r_0 un fattore irriducibile di r ($r = r_0r_1, (r_0, r_1) = 1$), se consideriamo il fattore $p - rx_i$ vediamo che $r_0|p \Longrightarrow p = r_0p_0$.
Allora $q^2r_0r_1 = r_0^3(p_0 - r_1x_1)(p_0 - r_1x_2)(p_0 - r_1x_3) \Longrightarrow r_0|q^2r_1 \Longrightarrow r_0|q \Longrightarrow r = 1$. Quindi $q^2(t) = p^3(t) + Bp(t) + C$.
Posto $p_i(t) = p(t) - x_i$, ciascuno dei $p_i(t)$ ha radici doppie:

$$\Longrightarrow p - x_1 = \prod(t - \alpha_i')^{2k_i}, \quad p - x_2 = \prod(t - \alpha_i'')^{2k_i}, \quad p - x_3 = \prod(t - \alpha_i''')^{2k_i}$$

Il segno di $p(t) - x_i$, vicino ad ogni radice, è sempre lo stesso per tutte le radici. Questa è una contraddizione perchè il grafico di $y = p(t)$ deve attraversare almeno una tra le rette : $y = x_1, \quad y = x_2, \quad y = x_3$.
Allora il segno di $p(t) - x_i$ deve cambiare per $i = 1$, oppure per $i = 2$ oppure per $i = 3$

Osservazione Se $p(x)$ è un polinomio di grado 3 senza radici multiple,$\int \sqrt{p(x)}\mathrm{d}x$ non può essere risolto usando funzioni elementari.

Proposizione 2.3. *La curva $y^2 = p(x)$,dove $p(x)$ è un polinomio con almeno due radici semplici e $degp(x) \geq 3$, non è razionale.*

Dimostrazione Consideriamo la generica scomposizione:

$$p(x) = \prod(x - x_i)^{m_i}Q \tag{6}$$

dove Q è un polinomio che non ammette zeri.
Supponiamo per assurdo che la curva sia razionale, abbiamo la parametrizzazione:

$$y = \frac{q(t)}{r(t)}, \quad x = \frac{s(t)}{r(t)} \tag{7}$$

Sostituiamo (7) nell'equazione della curva:

$$\frac{q^2(t)}{r^2(t)} = \prod(\frac{s(t)}{r(t)} - x_i)^{m_i} Q$$

Semplifichiamo:

$$q^2(t) r^{\sum m_i - 2}(t) = \prod(s(t) - r(t)x_i)^{m_i} Q \tag{8}$$

Sia r_0 un fattore irriducibile di r ($r = r_0 r_1, (r_0, r_1) = 1$), se consideriamo il fattore $s - rx_i$ vediamo che $r_0 | s \Longrightarrow s = r_0 s_0$ ed $r_0 \nmid Q$.
Infatti se

$$Q(x) = Q_0 + Q_1 x + \ldots + Q_h x^h \tag{9}$$

sostituendo (7) in (9) otteniamo:

$$Q(\frac{s(t)}{r(t)}) = Q_0 + Q_1 \frac{s(t)}{r(t)} + \ldots + Q_h (\frac{s(t)}{r(t)})^h \tag{10}$$

Sostituendo (10) in (8):

$$q^2 r^{\sum m_i - 2} = \prod(s - rx_i)^{m_i} [r^h + r^{h-1} Q_1 s + \ldots + Q_h s^h]$$

Allora $q^2 r_0^{\sum m_i - 2} r_1^{\sum m_i - 2} = r_0^{\sum m_i} \prod(s_0 - r_1 x_i)^{m_i} Q \Longrightarrow r_0 | q \Longrightarrow r = 1$.
Quindi $q^2(t) = \prod(s(t) - x_i)^{m_i} Q = p(s(t))$.
$q^2(t)$ e $p(s(t))$ hanno le stesse radici e la stessa scomposizione, ma $q^2(t)$ ha tutte radici doppie perchè è un quadrato $\Longrightarrow p(s(t))$ ha tutte radici pari.
Abbiamo uno zero di $p(s(t))$ quando $s(t) = x_i$. Consideriamo la scomposizione:

$$s(t) - x_i = \prod(t - t_{ji})^{m_{ji}} Q_i \tag{11}$$

dove Q_i è un polinomio che non ammette zeri.
Sostituiamo (11) in (6):

$$p(s(t)) = \prod(\prod(t - t_{ji})^{m_{ji}} Q_i)^{m_i} Q = \prod(t - t_{ji})^{m_{ji} m_i} Q_2$$

dove $Q_2 = Q \prod Q_i^{m_i}$.
Sappiamo che i t_{ji} sono tutti distinti e $m_i m_{ji}$ è pari $\forall i, j$
Per ipotesi abbiamo due radici con $m_i = 1$; per queste radici, che chiamiamo x_1 e x_2, abbiamo:

$$s(t) - x_1 = \prod(t - t_{j1})^{m_{j1}} Q_1, \quad s(t) - x_2 = \prod(t - t_{j2})^{m_{j2}} Q_2$$

Poichè m_{ji} è pari $\forall i, j$ il segno di $s(t) - x_i$, per $i = 1, 2$ vicino ad x_1 o x_2 è sempre lo stesso per tutte le radici.
Questa è una contraddizione, infatti il grafico di $y = s(t)$ deve attraversare almeno una delle due rette $y = x_1, y = x_2$ e quindi il segno di $s(t) - x_i$ deve cambiare per $i = 1$ oppure per $i = 2$.

Riferimenti bibliografici

[1] R. Miranda, *'Integration: why you can and you can't'*, (Pi Mu Epsilon Journal vol.7 n°9), 1983

[2] Cecconi, Stampacchia, *'Lezioni di analisi matematica vol.1'*, Liguori editore, Napoli 1966

[3] Marcellini, Sbordone, *'Analisi matematica uno'*, Liguori editore, 1996

[4] Shafarevich, *'Basic algebraic geometry'*, Springer, 1974