UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corrispondenza tra geometria sintetica e geometria analitica.

Correspondence between Synthetic Geometry and Analytic Geometry.

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:
Prof. Giorgio Maria Ottaviani

Candidato:
Teresa Carli

29 Aprile 2015

Anno Accademico 2013/2014

Indice

In questa tesi tratteremo di geometria elementare; sarà quindi imprescindibile iniziare parlando degli Elementi di Euclide. L'esposizione della Geometria fornita negli Elementi è risultata così perfetta che, per oltre 2000 anni, i geometri si sono essenzialmente limitati a esplorare tale opera senza apportare sostanziali modifiche (l'unica ragione di insoddisfazione era rappresentata dal Quinto Postulato). Quanto trattato negli Elementi risulta infatti ancora oggi presente, pressoché inalterato, nell'insegnamento della geometria a livello scolastico.
Intorno al 1630 si ha una grande rivoluzione: l'invenzione delle coordinate cartesiane (dovuta a Fermat e Cartesio indipendentemente). Attraverso l'uso delle coordinate ogni relazione geometrica tra i punti del piano (o dello spazio, ma non tratteremo di questo) può essere vista come una relazione tra le coordinate di quei punti. I problemi geometrici possono così essere tradotti in problemi algebrici ed analitici.
Il nostro lavoro sarà quello di formalizzare tale passaggio.

In questo contesto diventa necessario ricordare una tappa fondamentale per lo sviluppo della Geometria avvenuta nel secolo XIX: si smette di credere nell'esistenza di una realtà oggettiva che impone con la sua evidenza i contenuti di postulati e proposizioni. Euclide aveva raccolto conoscenze accumulatesi prima di lui, le aveva integrate con propri contributi, presentando tale materiale in modo organico ed omogeneo proponendo, con gli Elementi, un primo rigoroso sistema assiomatico ma, a fine Ottocento, inizia a farsi strada l'idea di un sistema formale in cui i concetti primitivi non sono più "evidenti", nel quale non si può dare una definizione di punto e retta, nè si può parlare di *Nozioni Comuni* [1], ma dove ogni dimostrazione è guidata da passaggi logici che non fanno mai ricorso a concetti provenienti dall'intuito o da percezioni sensoriali. L'aspetto logico ha la precedenza sul contenuto esperenziale:

> Il contenuto ideale delle parole o dei segni, che denotano un qualche soggetto primitivo, è determinato soltanto dalle proposizioni primitive che versano intorno al medesimo: e il Lettore ha la facoltà di annettere a quelle parole e a quei segni un significato *ad libitum*, purchè questo sia compatibile con gli attributi generici imposti a quell'ente dalle proposizioni primitive.
>
> *Pieri M., Torino, 1897-98.*[2]

In questa direzione si muove a Torino, all'interno di un fiorente contesto matematico, Mario Pieri, che crea un rigoroso sistema assiomatico indipendente dall'intuizione.

[1] Il termine Nozione Comune compare nel Primo Libro degli Elementi di Euclide, fanno parte di queste ad esempio: "Cose uguali ad una stessa, sono uguali tra loro"; "Il tutto è maggiore della parte",...

[2] Pieri M., *Sugli enti primitivi della geometria proiettiva astratta.*, Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, 1897-98.

Sarà tuttavia David Hilbert, nel 1899, a spingersi oltre, mostrando la compatibilità e l'indipendenza degli assiomi che propone, esibendo modelli che ne possano soddisfare taluni e non altri. Inoltre il sistema di assiomi di Hilbert, benchè di stampo moderno e quindi non imposto dall'evidenza, è in qualche modo suggerito dall'esperienza, rimane cioè il più vicino possibile alla trattazione classica, risultando così più semplice da accettare.

La prima parte della tesi sarà dedicata proprio all'introduzione degli assiomi di Hilbert [3]. Con questi riusciremo a fondare le basi della geometria sintetica nel piano; recupereremo gran parte dei risultati mostrati negli Elementi[4] da Euclide che nelle sue dimostrazioni, anche se rigorose, lascia sempre spazio al *buon senso* e all'*ovvietà*. Vedremo in particolare come Hilbert deduce dai concetti primitivi importanti proposizioni geometriche mettendo in luce il significato dei diversi assiomi, ovvero, evidenziando le conseguenze da trarre da ciascuno di essi.

Nella seconda parte andremo a fondare le basi della geometria nel piano dal punto di vista della geometria analitica. Partiremo infatti dalla struttura algebrica di campo e su questa baseremo poi la nostra geometria, che verificherà tutti gli assiomi di Hilbert precedentemente illustrati.

Sarà poi nella terza ed ultima parte che completeremo i collegamenti trovati tra la geometria sintetica (Capitolo 1) e quella costruita a partire da un campo (Capitolo 2). Grazie al Teorema 10 che introduce un sistema di coordinate in un piano di Hilbert, proveremo che i due approcci convergono. Passo fondamentale sarà la costruzione del campo ordinato dei segmenti aritmetici.

Guida in tutto il percorso della tesi è il libro: *"Geometry: Euclid and Beyond"* [9], del quale speriamo di aver mantenuto la minuziosa precisione, necessaria e mai ridondante.

[3]Nell'Appendice A si trova l'elenco riassuntivo di tutti gli assiomi di Hilbert.

[4]Nell'Appendice B sono inserite tutte le Proposizioni degli Elementi di Euclide citate nel testo. Per rendere la lettura più scorrevole infatti è stato necessario etichettarle con una precisa numerazione; elencarle alla fine del testo pensiamo semplifichi il ritrovamento del riferimento opportuno.

Capitolo 1

Fondamenti della geometria sintetica nel piano

Questo primo Capitolo sarà interamente dedicato all'esposizione degli assiomi di Hilbert. Poichè quest'ultimi possono essere divisi in diverse categorie, le prime quattro Sezioni saranno divise proprio in base alla categoria di assiomi introdotta: assiomi di Incidenza e assioma delle Parallele; assiomi di Collocamento (la trattazione del collocamento è assente negli Elementi di Euclide); assiomi di Congruenza per segmenti ed infine per angoli. Si giungerà quindi nella Sezione 1.5 alla definizione del Piano di Hilbert, dove vedremo poter recuperare gran parte dei risultati presenti negli Elementi di Euclide (in particolare del Primo e del Terzo Libro). Concluderemo poi con l'assioma per le intersezioni, l'assioma di Archimede e quello di Dedekind. Poichè gli Assiomi di Hilbert giocheranno un ruolo fondamentale all'interno di tutta la tesi, abbiamo inserito a questo livello una serie di esercizi svolti, che ci sono serviti per approfondire alcuni passaggi della trattazione senza appesantirla e che pensiamo possano essere utili per rendere più stabili quelle che saranno le fondamenta anche dei capitoli successivi. [1]

1.1 Assiomi di incidenza e assioma delle parallele

Gli assiomi di incidenza coinvolgono *punti* e *rette*. Come accennato nell'Introduzione i punti e le rette sono concetti primitivi dei quali viene postulata l'esistenza, definiti implicitamente dalle relazioni formali espresse nei seguenti assiomi:

(I1) Per ogni coppia di punti distinti A e B, esiste un'unica retta r che contiene sia A che B.

[1] Tali esercizi sono una selezione tra quelli proposti da Robin Hartshorne nel libro *"Geometry: Euclid and Beyond"*. [9] Oltre alla numerazione che segue il percorso della tesi, ogni esercizio sarà etichettato con quella originale, così da poter essere più facilmente rintracciabile.

(**I2**) Ogni retta contiene almeno due punti.

(**I3**) Ci sono tre punti non allineati.

Definizione 1. Un insieme i cui elementi sono detti punti con sottoinsiemi detti rette che soddisfano gli assiomi (I1), (I2), (I3), è detto *geometria di incidenza*.

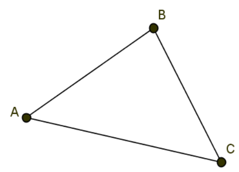
Se un punto P appartiene alla retta r si dice che P *giace* su r o che r *passa per* P. Con questi pochi elementi siamo già in grado di dimostrare che:

Proposizione 1. Due rette distinte hanno al più un punto in comune.

Dimostrazione. Siano r e m due rette e supponiamo che contengano entrambe i punti A e B (con $A \neq B$). In accordo con l'assioma (I1) esiste un'unica retta contenente i due punti distinti A e B, quindi necessariamente r ed m devono coincidere. □

Per *modello* di questo sistema di assiomi si intende un esempio di geometria di incidenza; ovvero un contesto in cui si realizzano gli oggetti indefiniti e dove gli assiomi sono soddisfatti.

Esempio 1. Possiamo considerare un insieme di tre elementi $\{A, B, C\}$. I punti sono gli elementi dell'insieme e le rette i suoi sottoinsiemi $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ e $\{A, C\}$. É immediato verificare che punti e rette soddisfano gli assiomi di Incidenza. Una rappresentazione di questo modello è data dal seguente diagramma (sottolineiamo che tale diagramma è puramente simbolico e a questo livello non ha nulla a che vedere con un triangolo del piano cartesiano).



Definizione 2. Due modelli si dicono *isomorfi* se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi di punti che li definiscono e tale corrispondenza "manda rette in rette", ovvero un sottoinsieme del primo modello è una retta se e solo se il corrispondente sottoinsieme nel secondo modello è una retta.

Osserviamo che ogni modello di geometria di incidenza con tre punti è isomorfo al modello visto. Sia infatti $\{1, 2, 3\}$ una geometria con tre punti; per l'assioma $(I3)$ non potrà esistere una retta che contiene tutti e tre i punti e per $(I1)$ ogni coppia di punti dovrà appartenere ad una retta, allora necessariamente $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ e $\{1, 3\}$ sono rette e poichè ogni retta contiene

almeno due punti, per l'assioma ($I2$), queste sono le uniche rette possibili. Le rette quindi sono tutti i sottoinsiemi di due elementi, come nell'esempio; allora una qualsiasi corrispondenza biunivoca tra $\{A, B, C\}$ e $\{1, 2, 3\}$ darà un isomorfismo (si noti che ci sono sei diverse possibilità di definire un isomorfismo tra questi due modelli).
Per *automorfismo* si intende un isomorfismo di una geometria di incidenza in se stessa, cioè una mappa biunivoca tra l'insieme dei punti e se stesso che preserva le rette. É immediato notare che l'insieme degli automorfismi forma un gruppo, infatti la composizione di due automorfismi è ancora un automorfismo e la mappa inversa di un automorfismo è ancora un automorfismo. Ad esempio S_3 è il gruppo degli automorfismi su una geometria di incidenza con tre punti.

Definizione 3. Due rette distinte si definiscono *parallele* se non hanno punti in comune. Inoltre diciamo che ogni retta è parallela a se stessa.

Enunciamo ora l'assioma delle Parallele:

(P) (assioma delle Parallele - Playfair -) Per ogni punto A e ogni retta r esiste al più una retta contenente A e parallela a r.

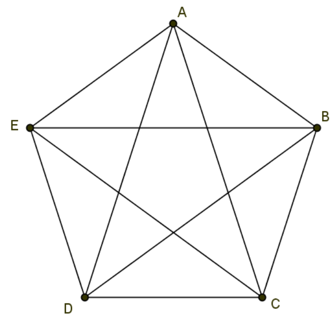
Osservazione 1. *L'assioma (P) chiede l'unicità della parallela a r passante per P; l'esistenza della parallela r non necessita di un ulteriore assioma (si veda il Teorema 4 a pagina 66).*

L'esempio precedente soddisfa anche quest'ultimo assioma non presentando rette distinte e parallele.

Merito di Hilbert è quello non solo di esser riuscito a recuperare rigorosamente tutta la geometria euclidea, come vedremo, ma anche nell'aver posto accuratamente attenzione sulla validità del suo sistema assiomatico. In una buona assiomatizzazione ogni assioma non deve essere deducibile dagli altri (se così fosse non sarebbe necessario includerlo come assioma !), mostriamo quindi la seguente Proposizione:

Proposizione 2. Gli assiomi (I1), (I2), (I3) e (P) sono indipendenti tra loro.

Dimostrazione. Per dimostrare che un assioma non è conseguenza degli altri ci basterà trovare un modello che soddisfa tutti tranne quello.
(P) è indipendente dagli assiomi di Incidenza: Consideriamo un insieme di cinque punti $\{A, B, C, D, E\}$ le cui rette sono tutti i suoi sottoinsiemi con esattamente due punti. Questo è un ulteriore esempio di geometria di incidenza, cioè un nuovo modello per il sistema di assiomi di Incidenza. Notiamo però che ad esempio $\{A, B\}$ e $\{A, C\}$ sono due rette distinte, entrambe passanti per il punto A e parallele a $\{D, E\}$. L'assioma di Playfair non è quindi soddisfatto. Questo mostra che (P) non è conseguenza degli assiomi di Incidenza, ma è indipendente da essi.

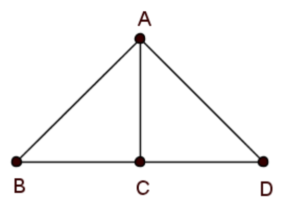


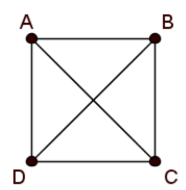
(I3) è indipendente da (I1),(I2) e (P): Consideriamo un insieme con due soli punti e una retta che li contiene entrambi.
(I2) è indipendente da (I1),(I3) e (P): Consideriamo un insieme con tre punti $\{A, B, C\}$ le cui rette sono i sottoinsiemi $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$ e $\{A\}$. Osserviamo che (P) è verificato in quanto l'unica coppia di rette parallele distinte è data da $\{A\}$ e $\{B, C\}$. L'esistenza di una retta contenente un solo punto fa sì che non sia verificato l'assioma $(I2)$.
(I1) è indipendente da (I2),(I3) e (P): In questo caso prendiamo un modello formato da un insieme di tre punti, privo di rette. $\square$

1.1.1 Esercizi

Esercizio 1 (Esercizio 6.1). ⋆ *Descrivere, a meno di isomorfismi, tutte le possibili geometrie di incidenza su un insieme di quattro punti.* ⋆

Abbiamo un insieme $\{A, B, C, D\}$, sicuramente non possiamo costruire un modello con una retta contenente tutti e quattro i punti, altrimenti non sarebbe soddisfatto l'assioma $(I3)$, nè ci saranno rette con un solo punto (in accordo con $(I2)$).
Abbiamo visto come diretta conseguenza degli assiomi di Incidenza che due rette distinte possono avere al più un punto in comune, questo ci dice che ci può essere al più una retta con tre punti: se ce ne fossero due, avendo a disposizione quattro punti, almeno due di questi sarebbero contenuti in entrambe; allora o le due rette non esistono o coincidono, ricadendo nel caso già discusso in cui abbiamo una sola retta con quattro punti.
Consideriamo quindi il caso in cui ci sia una retta con tre punti, per quanto appena visto e affinchè venga soddisfatto l'assioma $(I2)$, il modello dovrà avere come rette anche i sottoinsiemi da esattamente due punti che contengono l'ultimo punto e uno degli altri tre. Troviamo quindi un modello con una retta da tre punti e tre rette da due punti. L'assioma $(I1)$ ci dice che non ce ne sono altre. Notiamo che questo modello soddisfa anche (P), infatti due qualsiasi rette distinte hanno esattamente un punto in comune: non ci sono rette tra loro distinte e parallele.
Consideriamo ora il caso in cui non ci siano rette con tre punti, necessariamente ogni retta contiene esattamente due punti e affinchè venga soddisfatto $(I2)$ saranno rette tutti e soli (per l'assioma $(I1)$) i sottoinsiemi di due elementi: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$. Anche in questo modello l'assioma (P) è verificato. Si noti ad esempio che l'unica retta distinta e parallela ad $\{A, B\}$ è $\{C, D\}$.
A meno di isomorfismi i due modelli rappresentati sono gli unici esempi di geometria di incidenza con quattro punti.





Esercizio 2 (Esercizio 6.3). ⋆ *Si dice* piano proiettivo *un insieme di punti, con sottoinsiemi detti rette, che soddisfa i seguenti assiomi:*

$(P1)$ *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*

$(P2)$ *Due rette qualsiasi hanno almeno un punto in comune.*

($P3$) *Ogni retta contiene almeno tre punti.*

($P4$) *Esistono tre punti non allineati.*

Mostrare che un piano proiettivo ha almeno sette punti ed esiste un unico piano proiettivo con esattamente sette punti (a meno di isomorfismi). $\star$

Prima di tutto notiamo che gli assiomi ($P1$)*,* ($P3$) *e* ($P4$) *implicano gli assiomi di Incidenza, quindi* "ogni piano proiettivo è anche una geometria di incidenza"*. In una geometria di incidenza in cui vale* ($P2$) *possiamo dire che: ogni coppia di rette ha esattamente un punto in comune.*
Osserviamo ora che gli assiomi dati sono indipendenti tra loro:
($P1$) indipendente da $(P2), (P3), (P4)$*: Basta considerare un insieme con tre punti, senza rette.*
($P2$) indipendente da $(P1), (P3), (P4)$*: Consideriamo un modello con nove punti* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *e le rette siano i suoi sottoinsiemi* $\{1, 2, 3\}$*,* $\{4, 5, 6\}$*,* $\{7, 8, 9\}$*,* $\{1, 4, 7\}$*,* $\{2, 5, 8\}$*,* $\{3, 6, 9\}$*,* $\{3, 5, 7\}$*,* $\{1, 5, 9\}$*,* $\{1, 6, 8\}$*,* $\{2, 4, 9\}$*,* $\{2, 6, 7\}$*,* $\{3, 4, 8\}$*. Tutti gli assiomi sono verificati, tranne* ($P2$)*: le rette* $\{1, 4, 7\}$ *e* $\{3, 6, 9\}$*, ad esempio, non hanno alcun punto in comune.*
($P3$) indipendente da $(P1), (P2), (P4)$*: Consideriamo un insieme con tre punti* $\{A, B, C\}$ *e come rette i sottoinsiemi* $\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}$*.*
($P4$) indipendente da $(P1), (P2), (P3)$*: Consideriamo un insieme con tre punti ed un'unica retta che li contiene tutti e tre.*
Iniziamo quindi a mostrare quanto richiesto dall'esercizio. Poichè devono esserci almeno tre punti non allineati e al contempo ogni retta deve contenere almeno tre punti, necessariamente il numero minimo di punti da considerare sarà quattro $\{A, B, C, D\}$*, uno non allineato con gli altri (assumiamo sia* D*). Affinchè valga* ($P1$) *ci saranno altre tre rette che collegano il punto* D *rispettivamente con ognuno degli altri tre; ma ancora poichè ogni retta deve avere almeno tre punti e due rette distinte non possono avere due punti in comune, sarà necessario ampliare il nostro insieme con altri tre punti (un piano proiettivo è costituito quindi da almeno sette punti). In questo momento abbiamo un insieme* $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ *con rette* $\{A, B, C\}$*,* $\{D, A, G\}$*,* $\{D, B, F\}$ *e* $\{D, C, E\}$*, non abbiamo però una retta che unisca ogni coppia di punti, ad esempio manca una retta che passa per* A *ed* E*. Per avere un buon modello per questo sistema di assiomi si dovranno aggiungere le rette (composte da esattamente tre punti)* $\{A, F, E\}$*,* $\{C, G, F\}$ e $\{B, G, E\}$*.*
Osserviamo ora che con sette punti, a meno di isomorfismi, questo è l'unico esempio di piano proiettivo possibile. Dagli assiomi segue che non ci possono essere rette composte da due punti; vediamo ora che è impossibile avere anche solo una retta composta da quattro punti: se esistesse, poichè almeno un punto non le appartiene per ($P4$)*, ragionando analogamente a prima, si dovranno determinare quattro nuove rette che collegano quest'ultimo ad ognuno dei quattro punti allineati e ancora, dovendo avere ogni retta almeno tre punti, possiamo sfruttare due dei nostri sette, ma per avere un*

buon modello ce ne mancherebbero ancora due. Analogamente se ci fosse una retta contenente cinque o sei punti. Quindi le rette del sistema saranno tutte da tre elementi e, come abbiamo visto dalla costruzione, saranno necessariamente sette.
Il Piano di Fano rappresentato nel seguente diagramma, a meno di isomorfismi, è l'unico piano proiettivo con sette punti (anche le rette sono sette ed ognuna contiene esattamente tre punti).

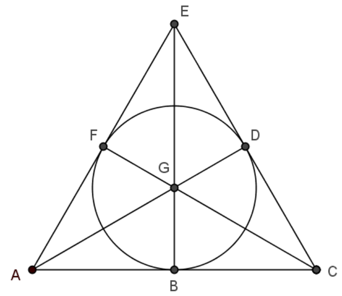


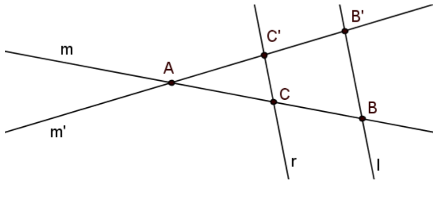
Figura 1.1: Piano di Fano

Esercizio 3 (Esercizio 6.5). ⋆ *Si dice* piano affine *un insieme di punti, con sottoinsiemi detti rette, che oltre agli assiomi di Incidenza verifica:*

($\bar{P}$) *Per ogni retta r e per ogni punto A esiste ed è unica la retta m passante per A e parallela a r.*

Mostrare che tutte le rette di un piano affine hanno lo stesso numero di punti; e che se in un piano affine una retta contiene esattamente n punti allora i punti del piano sono n^2. ⋆

Per gli assiomi di Incidenza sappiamo che due rette distinte o sono parallele o si incontrano esattamente in un punto. Partiamo con il considerare due rette m e m' che hanno in comune il punto A. Per mostrare che le due rette hanno lo stesso numero di punti esibiamo una corrispondenza biunivoca tra i loro punti. Sicuramente esistono $B \in m$ e $B' \in m'$ tali che $B, B' \neq A$, ed esiste una retta l che li contiene entrambi. Per ogni punto $C \in m$ tale che $C \neq A, B$ possiamo considerare la retta r, definita come la retta parallela a l passante per C. Le rette r e m' sono distinte ($C \in r$ ma $C \notin m'$), osservia-

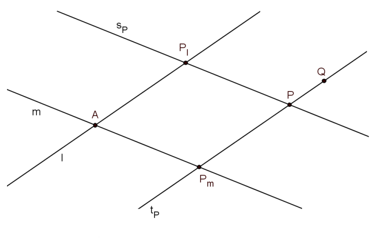


mo che r e m' si intersecano esattamente in un punto: se così non fosse m' risulterebbe parallela a r con $B' \in m'$, ma anche l per costruzione è parallela a r e passa per B', quindi esisterebbero due rette distinte (in quanto $B \in l$ ma $B \notin m'$) parallele ad r passanti per lo stesso punto, contro l'assioma $\bar{P}$.
Chiamiamo C' il punto di intersezione tra r e m'.
Definiamo quindi $\varphi\colon m \to m'$ tale che $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B'$ e per ogni altro punto $C \in m$ sia $\varphi(C) = C'$ costruito come detto. Per provare che φ è una biezione mostriamo l'esistenza dell'inversa, che si costruisce esattamente allo stesso modo: il punto A viene mandato in se stesso, B' in B ed ogni altro punto $C' \in m'$ verrà mandato in C definito come il punto di intersezione tra la parallela a l passante per C' ed m.
Dobbiamo ora analizzare il caso in cui le rette sono parallele; per farlo ci basta considerare una retta s incidente ad entrambe e applicare due volte il passo precedente. Abbiamo così mostrato che tutte le rette di un piano affine hanno lo stesso numero di punti.
Per la seconda parte consideriamo due rette l ed m incidenti in un punto A. Per un qualsiasi punto P del piano affine possiamo considerare:

$s_p :=$ *la retta parallela a m passante per P*

$t_p :=$ *la retta parallela a l passante per P*

L'assioma $\bar{P}$ ci garantisce l'esistenza di queste due rette e dei punti P_m e P_l rispettivamente definiti dall'intersezione tra t_p con m e s_p con l.
Consideriamo ora la mappa φ che associa ai punti P del piano la coppia ordinata (P_m, P_l) di punti appartenenti a m e l.
Osserviamo prima di tutto che se $P \neq Q$ allora $(P_m, P_l) \neq (Q_m, Q_l)$: se $P_m \neq Q_m$ abbiamo finito, altrimenti se P_m coincide con Q_m i punti P, Q e P_m risultano allineati su t_p, da questo segue che necessariamente $P_l \neq Q_l$ infatti, se così non fosse, anche P, Q e P_l risulterebbero allineati lungo s_p e questo è assurdo (le rette distinte s_p ed t_p avrebbero due punti in comune).

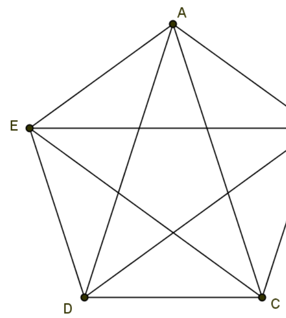


Sia ora P_m un punto qualsiasi di m, per l'assioma $\bar{P}$ sappiamo che esiste ed è unica la retta r parallela a l passante per quel punto; analogamente, preso un punto qualsiasi P_l su l possiamo considerare la retta s, ovvero la parallela a m passante per il punto P_l. Per ogni coppia (P_m, P_l) possiamo individuare un punto P del piano dato dall'intersezione di r con s (tale punto

sicuramente esiste altrimenti ad esempio sia l che s risulterebbero parallele a m passanti per P_l).
L'applicazione che si viene così a definire è una biezione e poichè ogni retta ha n punti, le combinazioni di coppie ordinate possibili sono n^2, di conseguenza anche i punti del piano.
Il modello con quattro punti e tutte rette da due punti, proposto dell'Esercizio 1, è un esempio di piano affine.

Esercizio 4 (Esercizio6.6)**.** $\star$ *In una geometria di incidenza si consideri sull'insieme delle rette la relazione di parallelismo: "l è parallela a m ". Trovare un modello in cui questa relazione non è una relazione di equivalenza. Provare che la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza se e solo se vale l'assioma delle parallele* (P). $\star$

Il modello con cinque punti $\{A, B, C, D, E\}$ e rette $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{A, E\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, D\}$, $\{C, E\}$, $\{D, E\}$, mostrato in figura, è un esempio di geometria di incidenza in cui la relazione di parallelismo non è una relazione di equivalenza.



Si noti ad esempio che non viene soddisfatta la transitività: la retta $\{A, E\}$ è parallela a $\{B, C\}$, la retta $\{B, C\}$ è parallela a $\{D, E\}$ ma $\{A, E\}$ non è parallela a $\{D, E\}$.
Mostriamo ora che se una geometria di incidenza soddisfa anche l'assioma (P) la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza. Infatti: per definizione sappiamo che ogni retta è parallela a se stessa, quindi la relazione è riflessiva; è simmetrica, perchè se la retta l è parallela ad m, le due rette non hanno alcun punto in comune oppure coincidono e, in ogni caso, vale anche che m è parallela a l. Infine siano: l parallela a m e m parallela a s. Nel caso in cui anche una sola coppia di rette parallele identifichi rette coincidenti la transitività è banalmente verificata, assumiamo quindi che l ed s siano entrambe distinte da m. Per definizione l e m non hanno alcun punto in comune e analogamente anche m ed s. Assumiamo quindi per assurdo che l ed s passino entrambe per uno stesso punto A. Allora risulterebbe: s parallela a m passante per A, ma anche l parallela a m passante per A contro l'assioma (P). La relazione di parallelismo quindi è anche transitiva. In par-

ticolare abbiamo visto che se l'assioma (P) *è soddisfatto, allora la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza.*
Proviamo ora che: se in una geometria di incidenza la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza, allora l'assioma (P) *è verificato. Supponiamo per assurdo che* (P) *non venga soddisfatto. Data una retta* l *ed un punto* A *supponiamo esistano due rette distinte* r *ed* s *entrambe passanti per* A *e parallele a* l*. Sappiamo quindi che la retta* r *è parallela a* l *e per simmetria che* l *è parallela a* s*, dalla transitività allora* r *risulta parallela alla retta* s*. Per costruzione avevamo scelto le rette* r *ed* s *distinte, essendo parallele possiamo concludere che* r *e* s *non hanno alcun punto in comune. Questo è assurdo in quanto il punto* A *appartiene ad entrambe.*

1.2 Assiomi di collocamento (betweenness)

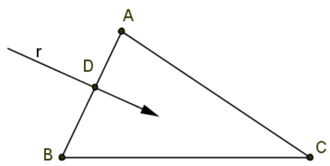
In questa Sezione presupponiano gli assiomi di Incidenza e andiamo a presentare quelli di *collocamento*. La definizione inglese: *axioms of betweenness* meglio esplicita il loro contenuto in quanto riguardano condizioni su un punto quando "è tra" altri due.
Anche in questo caso partiamo da una relazione indefinita, secondo la quale la scrittura $A * B * C$ ci dice che B è collocato tra i punti A e C, soggetta ai seguenti assiomi:

(**B1**) Se il punto B è tra A e C (possiamo scrivere $A * B * C$) allora A, B e C sono tre punti allineati e distinti. Vale inoltre $C * B * A$.

(**B2**) Per ogni coppia di punti distinti A e B esiste un punto C tale che $A * B * C$.

(**B3**) Dati tre punti distinti su una retta, uno ed uno solo di questi è tra gli altri due.

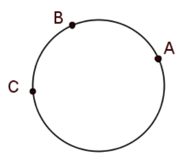
(**B4**) *(**Pasch**)* Siano A, B e C tre punti non allineati ed r una retta non contenente nessuno dei tre punti. Se r contiene un punto D collocato tra A e B, allora dovrà contenere anche un punto che sta tra A e C o tra B e C, ma non entrambi.



Osservazione 2. *L'assioma* $(B3)$ *si può equivalentemente enunciare dicendo che:*
dati tre punti allineati A, B *e* C *una ed una sola delle seguenti situazioni è possibile:*

$$A * B * C, \quad A * C * B \quad o \quad B * A * C.$$

Quindi un modello per gli assiomi di Incidenza e Collocamento non potrà presentare una retta come quella rappresentata in figura:



Definizione 4. Siano A e B due punti distinti, definiamo *segmento* $\overline{AB}$ l'insieme dei punti che contiene A, B e tutti i punti collocati tra A e B. (*Nota:* I segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ per l'assioma $(B1)$ coincidono).

Definizione 5. Definiamo *triangolo* l'unione di tre segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ con A, B e C non allineati.

Osservazione 3. *Possiamo rienunciare l'assioma $(B4)$ sfruttando questa nuova terminologia: se una retta non contenente alcun vertice di un triangolo incontra un lato, allora dovrà intersecare anche uno degli altri due ma non entrambi.*

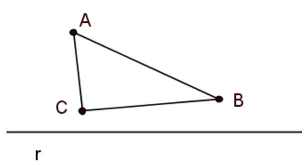
Proposizione 3 (Separazione del piano)**.** Sia r una retta. Allora l'insieme dei punti che non appartengono a r può essere diviso in due sottoinsiemi non vuoti S_1 e S_2 con le seguenti proprietà:

(a) Due punti A e B, con $A, B \notin r$ appartengono allo stesso insieme (S_1 o S_2) se e solo se il segmento $\overline{AB}$ non interseca r.

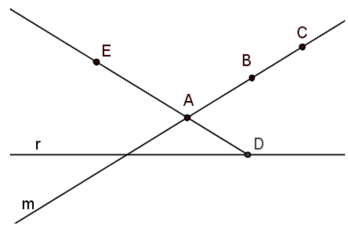
(b) Due punti A e C con $A, C \notin r$ appartengono a due insiemi diversi (uno a S_1 e l'altro a S_2) se e solo se il segmento $\overline{AC}$ interseca r in un punto.

Parleremo degli insiemi S_1 e S_2 come di due zone individuate da r e diremo che "A e B stanno dalla stessa parte rispetto a r " o che "A e C sono da parti opposte rispetto a r ".

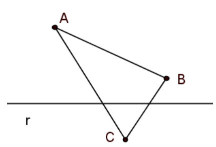
Dimostrazione. Definiamo una relazione $\sim$ sui punti che non appartengono alla retta r. Diremo che $A \sim B$ se $A = B$ o se il segmento $\overline{AB}$ non interseca la retta r. Mostriamo che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
Preso un qualsiasi punto A, dalla definizione segue che $A \sim A$, perciò la relazione è *riflessiva*. É anche *simmetrica*, in quanto se $A \sim B$, poichè l'insieme $\overline{AB}$ non dipende dall'ordine in cui scriviamo A e B, possiamo dire anche che $B \sim A$. Resta da vedere che è *transitiva*, cioè dobbiamo mostrare che se $A \sim B$ e $B \sim C$ allora $A \sim C$. Per far questo distinguiamo due casi:
PRIMO CASO - Supponiamo che A, B e C non siano allineati, allora possiamo considerare il triangolo ABC. Assumiamo per assurdo che $A \nsim C$, cioè che il segmento $\overline{AC}$ intercetti la retta r in un punto D. Per l'assioma $(B4)$ la retta r dovrebbe intersecare anche uno degli altri due lati del triangolo, contraddicendo l'ipotesi.



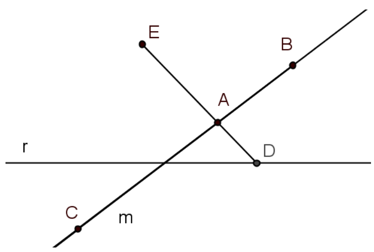
SECONDO CASO - Supponiamo che A, B e C appartengano tutti ad una stessa retta m, allora possiamo osservare che r e m sono due rette distinte in quanto A, B e C non appartengono a r. Le rette r ed m potranno incontrarsi al più in un punto. Per $(I2)$ ogni retta ha almeno due punti, allora esiste un punto $D \in r$ tale che $D \notin m$.
Per l'assioma $(B2)$ sia E un punto che soddisfa $D * A * E$. Chiamiamo t la retta che contiene i punti D, A ed E, che sono allineati per $(B1)$. Il punto D, per come è stato scelto, appartiene alla retta r, allora: l'unico punto di intersezione tra la retta t ed r è D, i punti E ed A non appartengono ad r e possiamo inoltre osservare che il segmento $\overline{AE}$ non interseca la retta r (infatti l'unico punto in cui potrebbero intersecarsi sarebbe D, ma per $(B3)$ non può verificarsi $A * D * E$). Risultando $\overline{AE} \cap r = \emptyset$ si ha che $A \sim E$. Si noti inoltre che $E \notin m$, infatti in tal caso le rette t ed m, avendo due punti in comune, coinciderebbero mentre abbiamo scelto $D \notin m$. Quindi i punti A, B ed E (analogamente A, C, E e B, C, E) non sono allineati. Possiamo quindi sfruttare il passo precedente unitamente alla proprietà simmetrica e affermare che: essendo $E \sim A$ e $A \sim B$, allora anche $E \sim B$. Unendo questo risultato con $B \sim C$ si deduce che $E \sim C$. Infine, da $C \sim E$ e $E \sim A$ si può concludere che $C \sim A$ o equivalentemente che $A \sim C$, come richiesto.



Abbiamo così provato che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Possiamo perciò vedere l'insieme su cui è definita come l'unione disgiunta di classi di equivalenza. Ci rimane da mostrare che tali classi sono esattamente due: S_1 ed S_2. Per l'assioma $(I3)$ deve esistere almeno un punto che non appartiene ad r, quindi almeno una classe di equivalenza, S_1, esiste. Dato $A \in S_1$ e D un punto di r, per l'assioma $(B2)$, sia C un punto tale che $A * D * C$. Allora A e C non soddisfano $\sim$, dovrà quindi esserci almeno un'altra classe di equivalenza, S_2. Dobbiamo vedere che non ce ne sono altre. Per far questo proviamo che: se $A \nsim C$ e $B \nsim C$ allora $A \sim B$. Distinguiamo due casi:
PRIMO CASO - Siano A, B e C non allineati, così da poter considerare il triangolo ABC.



L' ipotesi $A \nsim C$ ci dice che $\overline{AC}$ interseca la retta r. Analogamente anche $\overline{BC}$ sappiamo che interseca r. L'assioma di Pasch ci garantisce che r non può intersecare anche $\overline{AB}$. Quindi $A \sim B$.
SECONDO CASO - Sia m una retta che passa per A, B e C. Analogamente al secondo caso studiato per dimostrare la transitività, individuiamo un punto $D \in r$, ma non appartenente a m. Ancora sfruttando l'assioma $(B2)$ prendiamo un punto E, tale che $D * A * E$. Abbiamo già visto che $A \sim E$. Per ipotesi ora sappiamo che $A \nsim C$ e poichè $\sim$ è una relazione di equivalenza queste due ultime relazioni ci sono sufficienti per concludere che $C \nsim E$ (se $C \sim E$ sapendo che $A \sim E$ per transitività si avrebbe $A \sim C$, in contraddizione con le ipotesi). Consideriamo ora i tre punti non allineati B, C ed E: da $E \nsim C$ e $B \nsim C$ sfruttando il caso precedente deduciamo che $B \sim E$. Per transitività da $A \sim E$ e $B \sim E$ si prova, come richiesto, che $A \sim B$.



Quindi l'insieme dei punti non appartenenti a r è stato diviso in esattamente due sottoinsiemi S_1 e S_2 che, per come si è definita $\sim$, verificano le proprietà richieste. □

Proposizione 4 (Separazione della retta)**.** Sia A un punto su una retta r. Allora l'insieme dei punti di r diversi da A può essere diviso in due sottoinsiemi non vuoti S_1 e S_2 con le seguenti proprietà:

(a) Due punti B e C sono dalla stessa parte rispetto ad A se e solo se A non appartiene al segmento $\overline{BC}$.

(b) Due punti B e D sono da parti opposte rispetto ad A se e solo se A appartiene al segmento $\overline{BD}$.

Dimostrazione. Dall'assioma $(I3)$ sappiamo che esiste un punto E non appartenente ad r. Indichiamo con m la retta contenente i punti A ed E. Per la Proposizione 3, la retta m ci permette di individuare i due insiemi $S_1{}'$ e $S_2{}'$. Chiamiamo le intersezioni di quest'ultimi con la retta r rispettivamente S_1 ed S_2. Allora i punti (a) e (b) seguono dalla Proposizione 3.
Mostriamo più in dettaglio che S_1 e S_2 non sono vuoti. Per l'assioma $(I2)$ sulla retta r esiste un punto B diverso da A, quindi almeno uno tra i due insiemi è non vuoto. L'assioma $(B2)$ poi ci garantisce l'esistenza di un punto D tale che $B * A * D$. Allora D risulta dalla parte opposta di A rispetto a B e appartiene a r, così anche il secondo insieme risulta non vuoto. □

Osservazione 4. *Si noti che questo risultato non ci parla di un punto zero, di numeri negativi o positivi. Stiamo lavorando solo sui concetti indefiniti di punto, retta e collocamento.*

Definizione 6. Dati due punti distinti A e B si definisce *semiretta* $\overrightarrow{AB}$ l'insieme dei punti contenente A e tutti i punti della retta AB che stanno dalla stessa parte di B rispetto ad A. Il punto A è l' *origine* della semiretta.

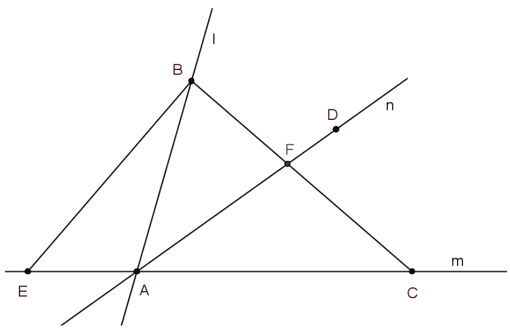
Definizione 7. Un *angolo* è l'unione di due semirette $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ con la stessa origine ma che non appartengono alla stessa retta. Diremo *vertice* dell'angolo l'origine comune delle due semirette.
Si dice *parte interna* di un angolo $\angle BAC$ l'insieme di tutti i punti D tali che: D e C sono dalla stessa parte rispetto alla retta AB, e D e B sono dalla stessa parte rispetto ad AC.

Se ABC è un triangolo, la sua parte interna è l'intersezione delle parti interne degli angoli $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$.

Osservazione 5. *Secondo questa definizione di angolo non esiste un angolo nullo, nè un angolo piatto. In particolare tale definizione corrisponde alla comune idea di angolo convesso: essendo ottenuto come intersezione di semipiani sarà sempre minore di un angolo piatto.*

Proposizione 5. Sia $\angle BAC$ un angolo e D un suo punto interno. Allora la semiretta $\overrightarrow{AD}$ interseca il segmento $\overline{BC}$.

Dimostrazione. Indichiamo rispettivamente con l, m ed n le rette AB, AC e AD. Sfruttando l'assioma $(B2)$ prendiamo un punto $E \in m$ tale che $E * A * C$. Congiunto E con B possiamo considerare l'assioma di Pasch sul triangolo BEC: per costruzione sappiamo che n interseca il segmento $\overline{EC}$ in A, allora n dovrà contenere anche un punto di $\overline{BE}$ o di $\overline{BC}$. Il nostro obiettivo diventa mostrare che n non contiene nessun punto di $\overline{BE}$.



Prima di tutto possiamo osservare che $B \notin n$, altrimenti coinciderebbero le rette n ed l. Il segmento $\overline{BE}$ e la retta l si intersecano esattamente nel punto B, allora tutti i punti del segmento, fatta eccezione per B, stanno dalla stessa parte rispetto a l. Per come è stato preso il punto E, essendo $A \in l$, sappiamo che E e C sono da parti opposte rispetto a l, allora tutti i punti di $\overline{BE}$, eccetto B, sono dalla parte opposta di C rispetto a l. D'altra parte, essendo D interno all'angolo $\angle BAC$, tutti i punti della semiretta $\overrightarrow{AD}$, fatta eccezione per A, saranno dalla stessa parte di C rispetto a l. Questo ci dice che il segmento $\overline{BE}$ non interseca $\overrightarrow{AD}$. Allora n interseca $\overline{BC}$ in un punto F. Dobbiamo vedere che $F \in \overrightarrow{AD}$ e per far questo osserviamo che: $C \in m$ e vale $B * F * C$, allora F e B sono dalla stessa parte rispetto a m. Per ipotesi anche B e D sono dalla stessa parte rispetto ad m. Quindi D ed F risultano dalla stessa parte rispetto ad m. Essendo $A \in m$, il segmento $\overline{FD}$ non può contenere A, questo sulla retta n ci dice che F e D sono dalla stessa parte rispetto ad A o, equivalentemente, che $F \in \overrightarrow{AD}$, come volevamo. $\square$

1.2.1 Esercizi

Spesso negli esercizi sfrutteremo questi risultati:

- *Siano i punti delle seguenti coppie A, B e A, C dalla stessa parte rispetto alla retta r, allora anche i punti B e C si trovano dalla stessa parte rispetto a tale retta.* INFATTI: *nella dimostrazione della Proposizione 3 (Separazione del piano), abbiamo visto che la relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza. Per ipotesi ora abbiamo che $A \sim B$ e $A \sim C$, allora per simmetria possiamo anche dire che $B \sim A$ e per transitività concludere che $B \sim C$, provando quanto richiesto.*

- *Siano i punti A e B dalla stessa parte rispetto alla retta r mentre i punti A e C siano da parti opposte rispetto a r, allora B e C sono da parti opposte rispetto a r.* INFATTI: *riferendoci ancora alla relazione di equivalenza $\sim$, se assumiamo per assurdo che B e C siano dalla stessa parte rispetto a r, per transitività anche A e C si troverebbero dalla stessa parte rispetto a r, contro l'ipotesi.*

- *Dati quattro punti su una retta, se A e B sono dalla stessa parte rispetto a D e se A e C sono dalla stessa parte rispetto a D allora anche B e C sono dalla stessa parte rispetto a D.*

- *Siano i punti A, B, C e D allineati. Siano A e B dalla stessa parte rispetto a D mentre A e C da parti opposte rispetto a D allora anche B e C sono da parti opposte rispetto a D.*
  Questi ultimi risultati si mostrano analogamente ai precedenti.

Esercizio 5 (Esercizio 7.1). $\star$ *Usando gli assiomi di Incidenza e di Collocamento mostrare che quattro punti $\{A, B, C, D\}$ su una retta si comportano come ci aspettiamo, ovvero:*

(a) $A * B * C$ e $B * C * D$ *implicano:* $A * B * D$ e $A * C * D$

(b) $A * B * D$ e $B * C * D$ *implicano:* $A * B * C$ e $A * C * D$ $\star$

Per comodità indicheremo con:

$$(1): A * B * C \qquad (2): B * C * D \qquad (3): A * B * D \qquad (4): B * C * D$$

La (1) *ci dice che il punto B appartiene al segmento $\overline{AC}$, e di conseguenza che i punti A e C sono da parti opposte rispetto a B; dalla* (2) *deduciamo che C e D sono dalla stessa parte rispetto a B (se così non fosse il punto B dovrebbe appartenere al segmento $\overline{CD}$ e, per definizione di punto appartenente ad un segmento, risulterebbe $C * B * D$, in contraddizione con l'assioma $(B3)$). Possiamo quindi concludere che A e D sono da parti opposte rispetto a B, cioè i punti sono così collocati: $A * B * D$.*
Dalla (1) *possiamo anche dedurre che A e B sono dalla stessa parte rispetto*

a C, mentre dalla (2) che B e D sono da parti opposte rispetto a C, quindi possiamo concludere che A e D sono da parti opposte rispetto a C, ovvero C sta tra A e D (cioè $A * C * D$).
Per la seconda parte procediamo in modo analogo per dedurre che i punti A, B, C sono così collocati: $A * B * C$. Questo risultato ci dice che A e B sono dalla stessa parte rispetto a C, mentre B e D sono da parti opposte rispetto a C, per la (4). Quindi A e D sono da parti opposte rispetto a C, cioè vale: $A * C * D$.

Esercizio 6 (Esercizio 7.2). $\star$ *Mostrare che gli estremi di un segmento sono univocamente determinati dal segmento, cioè: dato un segmento $\overline{AB}$ non esistono i punti C e $D \in \overline{AB}$ tali che: $C * A * D$.* $\star$

La scrittura $C \in \overline{AB}$ ci dice che i punti devono essere così collocati: $A*C*B$. Allora C e B sono dalla stessa parte rispetto ad A. Supponendo per assurdo che valga $C * A * D$, abbiamo che C e D sono da parti opposte rispetto ad A, e quindi mettendo insieme questi risultati possiamo dedurre che B e D sono da parti opposte rispetto ad A. Abbiamo trovato quindi che A si trova tra D e B e questo, per l'assioma ($B3$), contraddice l'ipotesi per cui $D \in \overline{AB}$, cioè $A * D * B$.

Dimostrazione alternativa: *Supponiamo per assurdo che valga $C * A * D$. Dall'ipotesi $D \in \overline{AB}$ abbiamo tre possibilità:*

$$D = A, \quad D = B, \quad A * D * B.$$

Nel caso in cui $D = A$ la contraddizione viene immediatamente dall'assioma ($B1$) per cui se vale $C * A * D$ i tre punti sono allineati e distinti.
Per ipotesi $C \in \overline{AB}$, cioè $A * C * B$. Nel caso in cui $D = B$, possiamo dunque scrivere $A * C * D$ in contraddizione con l'ipotesi di assurdo per l'assioma ($B3$). (I casi $C = A$ e $C = B$ sono da escludere perchè portano a contraddizioni da discutere in modo analogo.)
Infine, nel caso in cui il punto D sia collocato tra A e B, arriviamo ad una contraddizione ancora per l'assioma ($B3$), infatti sfruttando l'Esercizio 5: $A * D * B$ e $C * A * D$ implicano $C * A * B$.
In ogni situazione siamo arrivati ad una contraddizione, e l'assurdo è giunto dall'aver supposto $C * A * D$.

Esercizio 7 (Esercizio 7.4). $\star$ *Usando ($I1$) − ($I3$), ($B1$) − ($B4$) e le loro conseguenze, mostrare che ogni retta ha infiniti punti distinti.* $\star$

Per l'assioma ($I2$) sappiamo che una qualsiasi retta contiene almeno due punti distinti A_0, A_1. Applicando l'assioma ($B2$) troviamo A_2 tale che $A_0 * A_1 * A_2$ e l'assioma ($B1$) ci garantisce che i tre punti sono distinti.
Supponiamo di aver individuato:

$$A_0, \ldots, A_n \text{ punti distinti tali che } A_k * A_{k+1} * A_{k+2}$$

per ogni k che varia tra 0 e $n-2$. Proviamo che esiste un ulteriore punto A_{n+1}, diverso dai precedenti.
Consideriamo A_{n-1} e A_n, per l'assioma $(B2)$ sappiamo che esiste A_{n+1} che verifica $A_{n-1} * A_n * A_{n+1}$ e, come prima, abbiamo garantito che questi tre punti sono distinti. Resta da verificare però che A_{n+1} non coincide con nessuno dei precedenti $A_0, \ldots, A_{n-2}$.
Per far questo sfrutteremo il risultato ottenuto nell'Esercizio 5, iniziamo con:

$$A_k * A_{k+1} * A_{k+2}$$

$$A_{k+1} * A_{k+2} * A_{k+3}$$

che implicano

$$A_k * A_{k+2} * A_{k+3}.$$

Da quest'ultima relazione con

$$A_{k+2} * A_{k+3} * A_{k+4}$$

si ottiene

$$A_k * A_{k+3} * A_{k+4}.$$

Procedendo in modo analogo troviamo infine:

$$A_k * A_n * A_{n+1},$$

tale relazione, per l'assioma $(B1)$, ci garantisce che i tre punti coinvolti sono distinti. Potendo ripetere il ragionamente per ogni k, abbiamo dimostrato che A_{n+1} è diverso da tutti i precedenti punti.
Quanto detto vale per qualsiasi n, allora una retta ha infiniti punti distinti.

Esercizio 8 (Esercizio 7.5)**.** $\star$ *Mostrare che la proprietà di Separazione delle rette (Proposizione 4) non segue dagli assiomi $(B1)$, $(B2)$ e $(B3)$.* $\star$

Costruiamo un modello in cui i tre assiomi sono verificati ma la Proposizione 4 fallisce. Prendiamo in particolare l'anello $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ degli interi (mod 5) *dove si dice che " b sta tra a e c " se $b = \frac{1}{2}(a+c)$.*
L'assioma $(B1)$ è soddisfatto, infatti: $\frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(c+a)$ allora, per come è definita la relazione di collocamento, se b è tra a e c possiamo dire anche che b è tra c ed a.
Osserviamo ora che nell'anello valgono tutte e sole le seguenti relazioni:

$$\begin{gathered} 0*1*2 \\ 0*2*4 \\ 0*3*1 \\ 0*4*3 \\ 1*0*4 \\ 1*2*3 \end{gathered}$$

$$1 * 4 * 2$$
$$2 * 0 * 3$$
$$2 * 3 * 4$$
$$3 * 1 * 4$$

NOTA: *per ogni relazione $a * b * c$ non è scritta l'equivalente $c * b * a$.*

Da qui possiamo controllare che sia l'assioma $(B2)$ che l'assioma $(B3)$ sono soddisfatti. Vediamo che: presi due punti distinti qualsiasi, ad esempio 4 ed 1, esiste il punto 3 che verifica $4 * 1 * 3$; considerati tre punti qualsiasi, ad esempio 0, 1 e 2 è verificata solo la relazione $0 * 1 * 2$ (o equivalentemente $2 * 1 * 0$) ma non troviamo nessuna relazione che ci dice che 0 è tra 1 e 2 o che 2 è tra 0 e 1.
Consideriamo ora $0 * 2 * 4$, questo ci dice che 2 appartiene al segmento di estremi 0 e 4. D'altra parte da $0 * 1 * 2$ e $1 * 4 * 2$ segue che 0 e 4 sono dalla stessa parte rispetto a 2. Questo mostra che non vale la proprietà di separazione delle rette, secondo la quale due punti sono dalla stessa parte rispetto ad un terzo se e solo se quest'ultimo non appartiene al segmento individuato dai due.

Esercizio 9 (Esercizio 7.6)**.** $\star$ *A partire dagli assiomi $(I1)-(I3)$, $(B1)-(B4)$ mostrare che per ogni coppia di punti distinti A e B esiste un punto C collocato tra A e B, cioè per cui vale $A * C * B$.* $\star$

Sia D un punto non allineato con A e B (per l'assioma $(I3)$ sicuramente esiste). Sfruttando l'assioma $(B2)$ riusciamo ad individuare i punti:

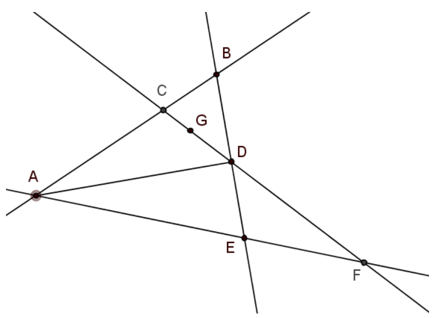
$$E \quad \textit{che verifica} \quad B * D * E,$$

$$F \quad \textit{che verifica} \quad A * E * F,$$

e

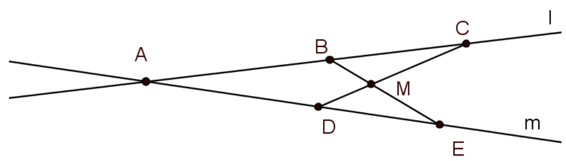
$$G \quad \textit{che verifica} \quad F * D * G.$$

Il nostro primo obiettivo è provare che il punto G è interno all'angolo $\angle ADB$. Vediamo che A e G sono dalla stessa parte rispetto alla retta BD: i punti



B, D ed E sono allineati e sappiamo che il punto E sta tra A e F, allora A e F sono da parti opposte rispetto a BD; da $F * D * G$ abbiamo che F e G sono da parti opposte rispetto a BD, e questo ci permette di concludere che A e G sono dalla stessa parte rispetto a tale retta. Vediamo che B e G sono dalla stessa parte rispetto alla retta AD: da $B * D * E$ si deduce che B ed E non sono dalla stessa parte rispetto a AD; da $A * E * F$ che E e F sono dalla stessa parte rispetto ad AD e da $F * D * G$ che F e G sono da parti opposte rispetto ad AD; si conclude quindi che B e G sono dalla stessa parte rispetto ad AD.
Il punto G è interno all'angolo $\angle ADB$. Allora, ricordando la Proposizione 5, la semiretta $\overrightarrow{DG}$ interseca il segmento $\overline{AB}$. Detto C tale punto di intersezione, che si trova tra A e B, si ha la tesi.

Esercizio 10 (Esercizio 7.8)**.** $\star$ *Siano $A * B * C$ punti allineati sulla retta l e $A * D * E$ allineati su un'altra retta m. Mostrare che i segmenti $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ si intersecano in un punto M.* $\star$

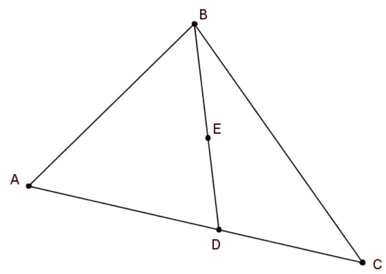


Osserviamo che essendo le rette l ed m distinte per ipotesi i punti A, B ed E risultano non allineati e, detta s la retta CD, sicuramente s non passa per questi tre punti. Consideriamo allora il triangolo di vertici A, B ed E, poichè da $A * D * E$ segue che $D \in \overline{AE}$ per l'assioma ($B4$) sappiamo che s interseca anche $\overline{AB}$ o $\overline{BE}$.
Se $s \cap \overline{AB} = C'$ possiamo dire che $C \neq C'$, infatti $C' \in \overline{AB}$ e da $A * B * C$ sappiamo che $C \notin \overline{AB}$; in tal caso le rette s ed l avrebbero due punti distinti (C e C'), in comune e questo è assurdo (infatti in tal caso le due rette andrebbero a coincidere, portando poi alla coincidenza anche di l ed m, contro l'ipotesi).
Allora necessariamente s interseca $\overline{BE}$ in un punto M. Al momento sappiamo che $M \in \overline{BE}$ e che M, C e D sono allineati; dobbiamo ancora provare che $M \in \overline{CD}$, cioè che i tre punti sono collocati con M tra C e D. Per fare questo andiamo a vedere che non è accettabile nessuna delle altre due combinazioni: $D * C * M$ e $C * D * M$.
Supponiamo valga $D * C * M$. Sia t la retta su cui sono allineati B, M ed E. Per quanto stiamo supponendo possiamo dire che D e C sono dalla stessa parte rispetto a t. Da $A * B * C$ deduciamo che A e C sono da parti opposte rispetto a t e da $A * D * E$, che A e D sono dalla stessa parte rispetto a t. Possiamo così concludere che D e C sono da parti opposte rispetto a t, trovando una contraddizione.
Procediamo analogamente se supponiamo che valga $C * D * M$.

Allora i punti M, C e D sono collocati con M tra C e D. In conclusione $M \in \overline{BE}$, $M \in \overline{CD}$ e i due segmenti non possono avere altri punti in comune, quindi: $M = \overline{BE} \cap \overline{CD}$.

Esercizio 11 (Esercizio 7.9). $\star$ *Mostrare che la parte interna di un triangolo non è vuota.* $\star$

Consideriamo un triangolo ABC. Abbiamo visto (Esercizio 9), che presi due punti distinti A e C esiste un punto D che verifica $A * D * C$. Congiungiamo B con D e, ragionando in modo analogo, possiamo dire che esiste un punto E che verifica $B * E * D$. Resta da provare che E è un punto interno al triangolo ABC, cioè i tre seguenti fatti: 1) *il punto E è dalla stessa parte di B rispetto alla retta AC;* 2) *il punto E è dalla stessa parte di A rispetto alla retta BC;* 3) *il punto E è dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB.*
FATTO 1)*: Sappiamo che i punti A, D e C appartengono alla retta AC e che vale $B * E * D$. Allora D non appartiene al segmento $\overline{BE}$, e poichè due rette si incontrano al più in un punto, questo ci garantisce che il segmento $\overline{BE}$ non interseca la retta AC. I punti B ed E sono quindi dalla stessa parte rispetto alla retta AC.*
FATTO 2)*: Analogamente a prima, dalle relazioni: $B * E * D$ e $A * D * C$, segue rispettivamente che E e D sono dalla stessa parte rispetto alla retta BC, come lo sono i punti A e D rispetto alla retta BC. Quindi A ed E risultano dalla stessa pare rispetto a BC.*
FATTO 3)*: Si prova in modo analogo ai casi precedenti.*
Possiamo così concludere che il punto E è interno al triangolo, quindi l'interno di un qualsiasi triangolo è non vuoto.

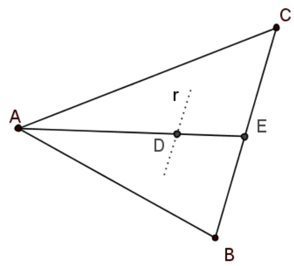


Esercizio 12 (Esercizio 7.10). $\star$ *Supponiamo che r sia una retta contenente un punto D interno ad un triangolo ABC. Mostrare che la retta r deve intersecare un lato (almeno) del triangolo.* $\star$

Osserviamo che:

$$\text{se vale} \quad A * B * C \quad \text{allora} \quad \overline{AB} \subseteq \overline{AC}.$$

Sia Q un qualsiasi punto appartenente ad $\overline{AB}$, mostriamo che allora $Q \in \overline{AC}$.
Nel caso in cui Q coincide con l'estremo A, per definizione di segmento, possiamo dire che $Q = A \in \overline{AC}$.
Nel caso in cui $Q = B$, sapendo per ipotesi che B sta tra A e C, ancora dalla definizione di segmento, $Q = B \in \overline{AC}$.
Analizziamo infine il caso in cui Q sia collocato tra A e B. Abbiamo quindi $A * Q * B$ e da questa relazione deduciamo che A e Q sono dalla stessa parte rispetto a B; dall'ipotesi sappiamo che A e C sono da parti opposte rispetto a B, allora Q e C sono da parti opposte rispetto a B, cioè risulta $Q * B * C$. Unendo quest'ultima con $A * Q * B$, (ricordando l'Esercizio 5) si può concludere che Q sta tra A e C, quindi $Q \in \overline{AC}$, come volevamo. Abbiamo ora gli strumenti per mostrare quanto richiesto: essendo D interno



al triangolo, in particolare sarà interno all'angolo $\angle BAC$; allora la semiretta $\overrightarrow{AD}$ interseca in un punto E il lato $\overline{BC}$ (Proposizione 5). Consideriamo ora il triangolo AEB; la retta r contiene il punto D che sta tra il vertice A e il vertice E, quindi per l'assioma $(B4)$ dovrà intersecare anche uno degli altri due lati del triangolo. Se la retta r interseca AB, abbiamo finito; altrimenti r deve intersecare il lato $\overline{BE}$. Per l'osservazione precedente, poichè vale $B * E * C$ si ha: $\overline{BE} \subseteq \overline{BC}$.
Quindi abbiamo mostrato che r contiene almeno un punto di $\overline{AB}$ o di $\overline{BC}$.

1.3 Assiomi di congruenza per i segmenti

In questa Sezione procediamo con l'esposizione di altri tre assiomi legati ad un nuovo concetto indefinito, che corrisponde all'uguaglianza tra segmenti di Euclide: la *congruenza* tra segmenti, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (per snellire la notazione scriveremo $AB \cong CD$).

(**C1**) Dato un segmento AB e una semiretta r con origine in C, esiste un unico punto D, appartenente ad r, che verifica $AB \cong CD$.

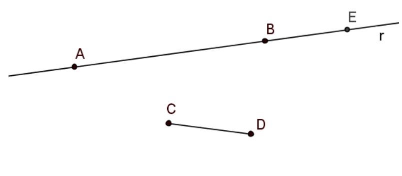
(**C2**) Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, allora $CD \cong EF$. Inoltre ogni segmento è congruente a se stesso.

(**C3**) Siano dati i punti A, B e C tali che $A * B * C$ ed i punti D, E ed F tali che $D * E * F$. Se $AB \cong DE$ e $BC \cong EF$, allora $AC \cong DF$.

Proposizione 6. La congruenza è una relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti.

Dimostrazione. Mostriamo che la congruenza soddisfa le tre proprietà (riflessiva, simmetrica e transitiva), che definiscono un'equivalenza.
Nell'assioma $(C2)$ è esplicitamente dichiarato che ogni segmento è congruente a se stesso (abbiamo così la riflessività). Per dimostrare la simmetria consideriamo i segmenti AB e CD tali che $AB \cong CD$; sfruttando l'assioma $(C2)$ con $AB \cong CD$ e $AB \cong AB$ (per la proprietà riflessiva) possiamo concludere che vale anche $CD \cong AB$. Infine consideriamo tre segmenti tali che $AB \cong CD$ e $CD \cong EF$. Ancora una volta sfruttando l'assioma $(C2)$ con $CD \cong AB$ (per simmetria) e $CD \cong EF$ possiamo dire che $AB \cong EF$, mostrando così la transitività. □

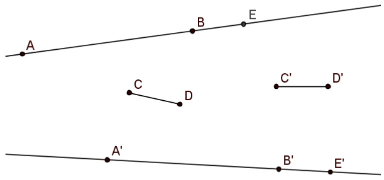
Definizione 8. Siano dati i segmenti AB e CD. Sulla retta passante per i punti A e B si consideri la semiretta r uscente da B costituita da tutti i punti che stanno dalla parte opposta di A rispetto a B. Sia E il punto di r che verifica $BE \cong CD$. Si definisce *somma dei segmenti* AB *e* CD il segmento AE. Scriveremo quindi $AE = AB + CD$.



NOTA: L'assioma $(C1)$ ci garantisce l'esistenza e l'unicità del punto E.

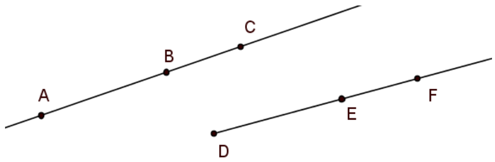
Proposizione 7 (Congruenza della somma)**.** Supponiamo siano dati i segmenti $AB \cong A'B'$ e $CD \cong C'D'$. Allora $AB + CD \cong A'B' + C'D'$.

Dimostrazione. Siano E ed E' i punti tali che $AE = AB + CD$ e $A'E' = A'B' + C'D'$. Per definizione di somma si ha il seguente collocamento dei punti: $A*B*E$ e $A'*B'*E'$. Inoltre $CD \cong BE$ e $C'D' \cong B'E'$. Essendo per



ipotesi $CD \cong C'D'$ ed avendo dimostrato che la congruenza è una relazione di equivalenza possiamo dedurre che $BE \cong B'E'$. Per ipotesi sappiamo anche che $AB \cong A'B'$, allora per l'assioma $(C3)$ possiamo concludere che $AE \cong A'E'$, ovvero la tesi. □

Proposizione 8. Siano dati tre punti A, B e C tali che $A*B*C$, e siano E ed F due punti su una semiretta con origine D. Se $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$ risulta: E collocato tra D ed F e $BC \cong EF$. (Possiamo pensare BC come la differenza tra AC e AB.)



Dimostrazione. Indichiamo con t la retta contenente il punto E ed il punto D e chiamiamo r la semiretta uscente da E formata da tutti i punti di t che stanno dalla parte opposta di D rispetto ad E. Sia F' l'unico punto di r tale che $BC \cong EF'$. Allora, poichè $AB \cong DE$ e $BC \cong EF'$ possiamo concludere per l'assioma $(C3)$ che $AC \cong DF'$. Per ipotesi (ricordando la definizione di semiretta) i punti E ed F della retta t sono dalla stessa parte rispetto a D e, per costruzione, vale $D * E * F'$, cioè E ed F' sono dalla stessa parte rispetto a D. Allora anche F ed F' risultano dalla stessa parte rispetto a D e questo ci permette di concludere che $F = F'$ sfruttando l'assioma $(C2)$ e l'unicità data dall'assioma $(C1)$. Abbiamo quindi la tesi:

$$D * E * F \quad \text{e} \quad BC \cong EF.$$

□

Anche il concetto, non definito da Euclide, di disuguaglianza può essere rivisto e definito a partire dagli assiomi di Hilbert.

Definizione 9. Siano dati due segmenti AB e CD. Diremo che AB è *minore* di CD (scrivendo $AB < CD$) se esiste un punto E tra C e D tale che $AB \cong CE$. In questo caso possiamo anche dire che CD è maggiore di AB, scrivendo $CD > AB$.

Cogliamo qui l'occasione per evidenziare l'importanza dell'assioma $(C1)$. Oltre a giocare un ruolo fondamentale in molte dimostrazioni (si pensi ad esempio alla Proposizione 8), tale assioma ci dà la possibilità di giustificare la Nona Nozione Comune presente nel Primo Libro degli Elementi di Euclide, secondo la quale "il tutto è maggiore della parte". Osserviamo che se vale $A * B * C$ allora AB non può essere congruente ad AC: se B e C sono sulla stessa semiretta uscente da A e risultasse $AB \cong AC$ allora B dovrebbe necessariamente coincidere con C, in contraddizione con l'assioma $(B1)$. Se poi risultasse $AB > AC$, dovrebbe esistere un punto $E \in AB$ che verifica $AE \cong AC$, per l'assioma $(C1)$ avremmo E coincidente con C e questo porterebbe ad una contraddizione sul collocamento dei punti.
Vediamo ora che la definizione di maggiore e minore è compatibile con la congruenza ed in particolare introduce una relazione di ordine tra le classi di equivalenza dei segmenti.

Proposizione 9. Valgono i seguenti risultati:

- se $AB \cong A'B'$ e $CD \cong C'D'$ allora $AB < CD \Leftrightarrow A'B' < C'D'$,

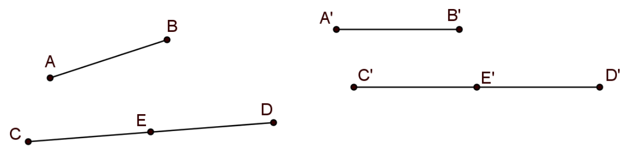
- se $AB < CD$ e $CD < EF$ allora $AB < EF$,

- data una qualsiasi coppia di segmenti AB e CD una ed una sola delle seguenti relazioni è vera: $AB < CD$, $AB > CD$ o $AB \cong CD$.

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che $AB \cong A'B'$, $CD \cong C'D'$ e assumiamo $AB < CD$. Allora, per definizione, esiste un punto E che verifica:

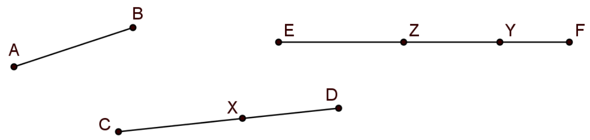
$$C * E * D \quad \text{e} \quad AB \cong CE.$$

Sia E' l'unico punto della semiretta $\overrightarrow{C'D'}$ per il quale $CE \cong C'E'$. Dalla



Proposizione 8 segue che E' è collocato tra C' e D'. Per la transitività, inoltre, possiamo dire che $A'B' \cong C'E'$ e quindi che $A'B' < C'D'$, come richiesto nel primo punto. La dimostrazione del "se e solo se" si conclude ragionando in modo analogo partendo dall'assumere $A'B' < C'D'$.
Procediamo ora con la dimostrazione della seconda parte. Sfruttando la

definizione di *minore* possiamo dire che: esiste un punto $X \in CD$ tale che $AB \cong CX$ ed un punto $Y \in EF$ tale che $CD \cong EY$. Indichiamo con Z il punto appartenente alla semiretta $\overrightarrow{EF}$ tale che $CX \cong EZ$. Dalla Proposizione 8 segue $E * Z * Y$, l' Esercizio 5 ci permette di dire che vale anche $E * Z * F$ e la transitività che $AB \cong EZ$, ovvero $AB < EF$.



Per l'ultima parte consideriamo il punto $E \in \overrightarrow{CD}$ tale che $AB \cong CE$. Poichè D ed E appartengono alla stessa semiretta uscente da C, sono cioè dalla stessa parte rispetto a C, non potrà verificarsi $D * C * E$; ma sarà verificata una ed una sola delle seguenti relazioni:

$$D = E \quad \text{o} \quad C * E * D \quad \text{o} \quad C * D * E.$$

Dalle quali deduciamo rispettivamente:

$$AB \cong CD, \quad AB < CD \quad \text{o} \quad AB > CD.$$

$\square$

1.3.1 Esercizi

Il contesto dei seguenti esercizi (se non sono presenti diverse indicazioni) è una geometria in cui valgono gli assiomi $(I1)-(I3)$, $(B1)-(B4)$, $(C1)-(C3)$.

Esercizio 13 (Esercizio 8.1)**.** ⋆ *Mostrare che l'addizione di segmenti è:*

(a) *Associativa: dati i segmenti AB, CD, EF:*

$$(AB + CD) + EF = AB + (CD + EF).$$

(b) *Commutativa a meno di congruenza: dati i segmenti AB, CD allora:*

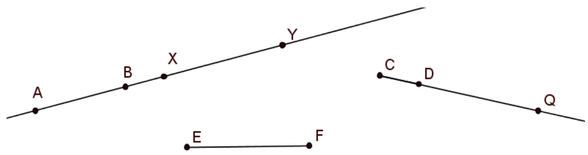
$$AB + CD \cong CD + AB. \quad \star$$

Per l'assioma $(C1)$ sappiamo che sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$ esiste un unico punto X che verifica $A*B*X$ e $BX \cong CD$. Il segmento AX è per definizione uguale ad $AB + CD$. Ancora sulla stessa semiretta sappiamo che esiste un punto Y che verifica $A * X * Y$ e $XY \cong EF$. Il segmento AY sarà per definizione uguale ad $(AB + CD) + EF$.
Sulla semiretta $\overrightarrow{CD}$ consideriamo il punto Q che verifica $C * D * Q$ e $DQ \cong EF$. Il segmento CQ sarà per definizione uguale a $CD+EF$. Confrontiamo ora il segmento CQ con il segmento BY costruito prima, abbiamo:

$$B * X * Y \quad e \quad C * D * Q$$

$$BX \cong CD \quad e \quad XY \cong EF \cong DQ.$$

Allora per l'assioma $(C3)$ risulta $BY \cong CQ$.

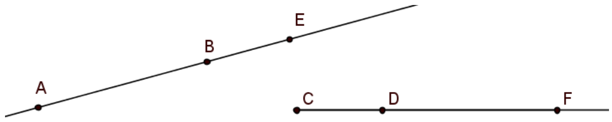


Consideriamo i tre punti allineati A, B e Y, abbiamo: $A * B * Y$ e $BY \cong CQ = CD+EF$. Per definizione di somma il segmento AY è proprio uguale ad $AB + (CD + EF)$. Abbiamo così trovato che:

$$(AB + CD) + EF = AY = AB + (CD + EF).$$

Per quanto riguarda la seconda parte, sfruttando l'assioma $(C1)$ prendiamo un punto E sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$ che verifica $A * B * E$ e $BE \cong CD$. Analogamente prendiamo un punto F su $\overrightarrow{CD}$ che verifica $C * D * F$ e $DF \cong AB$. Per definizione di somma abbiamo:

$$AE = AB + CD \quad e \quad CF = CD + AB.$$



Per l'assioma $(B1)$ *la relazione* $C * D * F$ *è equivalente a* $F * D * C$ *inoltre, poichè per un qualsiasi segmento* $AB = BA$*, si ha che* $AB \cong BA$*. Abbiamo quindi:*

$$A * B * E \quad e \quad F * D * C$$

con

$$AB \cong FD \quad e \quad BE \cong DC.$$

Per l'assioma $(C3)$ *possiamo concludere che:*

$$AB + CD = AE \cong FC \cong CF = CD + AD,$$

quindi in particolare,

$$AB + CD \cong CD + AB.$$

Esercizio 14 (Esercizio 8.2)**.** $\star$ *Si definisce* punto medio *di un segmento* AB *il punto* M *che è collocato tra* A e B*, tale che* $AM \cong MB$*.*
Siano AB e CD *due segmenti congruenti, con punti medi rispettivamente* E ed F*. Mostrare che:*

(a) $AE \cong CF$*,*

(b) *se il punto medio di un segmento esiste, allora è unico.* $\star$

Per ipotesi abbiamo:

$$AB \cong CD,$$

$$A * E * B, \quad AE \cong EB$$

$$C * F * D, \quad CF \cong FD.$$

Assumiamo per assurdo che $AE \ncong CF$*, allora necessariamente* $AE < CF$ *o* $AE > CF$*. Senza perdere di generalità assumiamo* $AE < CF$*; allora possiamo prendere il punto* F' *tra* C *ed* F *per il quale risulta* $AE \cong CF'$*. Dalle relazioni* $C * F * D$ *e* $C * F' * F$ *si deduce* $C * F' * D$ *e* $F' * F * D$*. Da quest'ultima segue* $FD < F'D$*.*
Consideriamo ora AB *e* CD*, osserviamo che:*

$$A * E * B \quad e \quad C * F' * D,$$

$$AB \cong CD,$$

$$AE \cong CF',$$

allora per la Proposizione 8 possiamo dire che $EB \cong F'D$.
Per definizione di punto medio:

$$CF \cong FD$$

inoltre:

$$AE \cong EB \cong F'D$$

e

$$FD < F'D.$$

Per il primo punto della Proposizione 9 possiamo concludere che $CF < AE$. *Ma questo contraddice la nostra assunzione iniziale: necessariamente* $AE = CF$.
Resta da vedere che se il punto medio di un segmento esiste, allora è unico. Assumiamo che esistano M_1 *ed* M_2 *due distinti punti medi del segmento* AB:

$$A * M_1 * B, \qquad AM_1 \cong M_1B,$$

$$A * M_2 * B, \qquad AM_2 \cong M_2B.$$

Siamo nelle ipotesi della prima parte dell'Esercizio (quella appena vista), con $C = A$ *e* $B = D$. *Allora* $AM_1 \cong AM_2$, *e per l'assioma* ($C1$) *possiamo concludere che* $M_1 = M_2$.

Esercizio 15 (Esercizio 8.3)**.** ⋆ *Mostrare che l'addizione preserva le disuguaglianze. Siano dati i segmenti* AB, CD *ed* EF:

$$AB < CD \quad \Longrightarrow \quad AB + EF < CD + EF. \qquad \star$$

Siano G *ed* H *due punti tali che:*

$$A * B * G \quad e \quad BG \cong EF$$

$$C * D * H \quad e \quad DH \cong EF,$$

quindi:

$$AG = AB + EF \quad e \quad CH = CD + EF.$$

Per ipotesi sappiamo che $AB < CD$, *allora esiste un punto* A' *tra* C *e* D ($C * A' * D$) *che verifica* $DA' \cong AB$. *Per l'Esercizio 5 sappiamo che da* $C*A'*D$ *e* $C*D*H$ *segue* $A'*D*H$. *Consideriamo* $A'H$ *e* AG, *osserviamo che vale:*

$$A' * D * H \quad e \quad A * B * G,$$

$$A'D \cong AB \quad e \quad DH \cong BG.$$

Per l'assioma $(C3)$ *possiamo dire che* $A'H \cong AG$. *Abbiamo trovato quindi un punto* A' *che soddisfa* $C * A' * H$ *e* $A'H \cong AG$; *allora* $AG < CH$ *per definizione. Ricordando che* $AG = AB + EF$ *e* $CH = CD + EF$ *si ha la tesi.*

Esercizio 16 (Esercizio 8.4)**.** ⋆ *Siano* r *ed* s *due semirette con origine rispettivamente in* A *e in* B. *Mostrare che esiste una corrispondenza biunivoca* $\varphi \colon r \to s$ *che preserva la relazione di collocamento e di congruenza, cioè per ogni* $X, Y, Z \in r$ *vale:*

$$X * Y * Z \iff \varphi(X) * \varphi(Y) * \varphi(Z),$$

e

$$XY \cong \varphi(X)\varphi(Y). \quad \star$$

Sia $X \in r$, *definiamo* φ *come l'applicazione che ad ogni* X *associa il punto* X' *che verifica* $AX \cong BX'$ *e* $\varphi(A) = B$. *L'assioma* $(C1)$ *ci garantisce che* X' *è ben definito. Consideriamo poi un'altra applicazione che fa corrispondere ad ogni* $X' \in s$ *l'unico punto* $X \in r$ *tale che* $AX \cong BX'$ *e a* B *fa corrispondere* A. *Questa è l'inversa di* φ, *allora la nostra applicazione è biunivoca.*
Consideriamo ora due punti X *e* Y *su* r *così collocati:* $A * X * Y$. *Questo ci dice che* $AX < AY$. *Per come abbiamo definito la corrispondenza:* $BX' \cong AX$ *e* $BY' \cong AY$. *Poichè* $AX < AY$ *per la Proposizione 9 possiamo dire anche che* $BX' < BY'$ *e di conseguenza che i punti sono collocati con* X' *tra* B *e* Y'. *Abbiamo quindi:*

$$A * X * Y \quad e \quad B * X' * Y',$$

$$AX \cong BX'$$

e

$$AY \cong BY',$$

siamo quindi nelle ipotesi della Proposizione 8, dalla quale segue:

$$XY \cong X'Y'.$$

Con questo abbiamo dimostrato la parte riguardante la congruenza ed un caso particolare della relazione di collocamento. Per il caso generale consideriamo tre punti X, Y *e* Z *su* r *tali che* $X * Y * Z$. *Allora i punti* X *e* Z *sono da parti opposte rispetto a* Y, *inoltre, senza perdere di generalità, possiamo assumere che* A *sia dalla stessa parte di* X *rispetto a* Y. *Allora i punti sono così collocati:* $A * Y * Z$ *e* $A * X * Y$. *Possiamo applicare quanto visto appena sopra e dire che su* s *valgono:* $B * Y' * Z'$ *e* $B * X' * Y'$. *Da queste concludiamo che* Y' *è collocato tra* X' *e* Z', *come richiesto.*

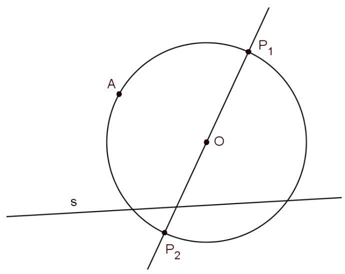
Esercizio 17 (Esercizio 8.5)**.** $\star$ *Dati due punti distinti O, A si definisce* circonferenza *di centro O e* raggio *OA, l'insieme Γ dei punti B tali che $OA \cong OB$.*

(*a*) *Mostrare che ogni retta passante per O interseca la circonferenza esattamente in due punti.*

(*b*) *Mostrare che ogni circonferenza contiene infiniti punti.*

(Si noti che dalla sola definizione non sappiamo se il centro della circonferenza è univocamente determinato dai punti che la formano.) $\star$

Indichiamo con r una retta passante per O e consideriamo una delle due semirette con origine in O, per l'assioma $(C1)$ esisterà un punto P_1 che verifica $OP_1 \cong OA$. Analogamente sulla semiretta con origine in O, formata dai punti che stanno dalla parte opposta di O rispetto a P_1, possiamo individuare un punto P_2 che verifica $OP_2 \cong OA$. Per definizione i due punti P_1 e P_2 appartengono a Γ. (É sufficiente il solo assioma $(C1)$ a garantire che non ci sono altri punti di intersezione tra r e Γ.)
Osserviamo che due rette distinte passanti per O intersecano la circonferenza in punti distinti (due rette distinte hanno al più un punto in comune). Il nostro obiettivo diventa quello di dimostrare che ci sono infinite rette distinte passanti per O. Dall'assioma $(I3)$ sappiamo che esiste una retta s non passante per O. Tale retta ha infiniti punti, come visto nell'Esercizio 7.



Consideriamo le rette OP_i definite come le rette passanti per O e per ogni punto P_i di s. Tali rette passanti per O e distinte tra loro, essendo infiniti i punti di s, saranno infinite.

1.4 Assiomi di congruenza per gli angoli

In questa Sezione introduciamo la *congruenza* tra angoli. Tale relazione indefinita (che possiamo dimostrare essere anch'essa una relazione di equivalenza) è caratterizzata dai seguenti assiomi:

(**C4**) Dato un angolo $\angle BAC$ e una semiretta $\overrightarrow{DF}$, esiste un'unica semiretta $\overrightarrow{DE}$, giacente su uno dei due semipiani individuati dalla retta contenente D ed F, tale che $\angle BAC \cong \angle EDF$.

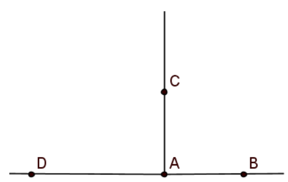
(**C5**) Siano α, β e γ tre angoli; se $\alpha \cong \beta$ e $\alpha \cong \gamma$, allora $\beta \cong \gamma$. Inoltre ogni angolo è congruente a se stesso.

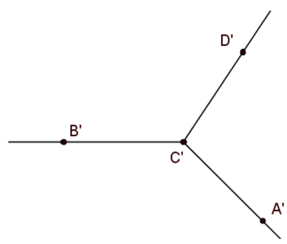
(**C6**) Siano dati due triangoli ABC e DEF tali che $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$. Allora i due triangoli sono congruenti, in particolare $BC \cong EF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$.

Si osservino in particolare gli assiomi ($C1$) e ($C4$). A differenza di Euclide, che parla di *costruzione* con riga e compasso di segmenti ed angoli congruenti a quelli dati su una semiretta assegnata, in questo caso, i due assiomi ci dicono che: dato un segmento (o un angolo) ne *esiste* un altro ad esso congruente su una semiretta data. Questi due assiomi ci danno quindi la possibilità di lavorare con due strumenti in grado rispettivamente di *trasportare* segmenti ed angoli.

Definizione 10. Sia $\angle BAC$ un angolo e $\overrightarrow{AD}$ una semiretta interna all'angolo $\angle BAC$, allora diremo che l'angolo $\angle BAC$ è la *somma* degli angoli $\angle BAD$ e $\angle DAC$.

Osservazione 6. *Dobbiamo fare attenzione a questa definizione, a tale proposito si osservino le due seguenti figure: nella prima la "somma" degli angoli $\angle BAC$ e $\angle CAD$ non è un angolo; nella seconda dati gli angoli $\angle A'C'D'$ e $\angle D'C'B'$ la semiretta $\overrightarrow{C'D'}$ non è interna all'angolo $\angle A'C'B'$.*





Definizione 11. Sia $\angle BAC$ un angolo e D un punto sulla retta AB dalla parte opposta di A rispetto a B, allora gli angoli $\angle BAC$ e $\angle CAD$ si dicono *supplementari*.

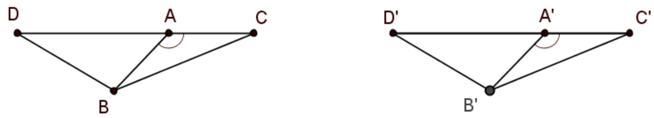
Proposizione 10. Siano:

- $\angle BAC$ e $\angle BAD$ angoli supplementari,

- $\angle B'A'C'$ e $\angle B'A'D'$ angoli supplementari,

- $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$,

allora anche $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$.



Dimostrazione. Possiamo assumere che i punti B', C' e D' siano tali che $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $AD \cong A'D'$. Tracciati i segmenti BC, BD, $B'C'$ e $B'D'$ consideriamo i triangoli ABC e $A'B'C'$. Sappiamo che:

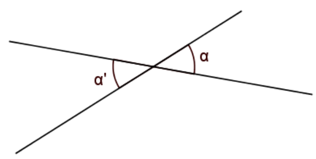
$$AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C' \quad \text{e} \quad \angle BAC \cong \angle B'A'C',$$

allora per l'assioma ($C6$) possiamo concludere che i due triangoli sono congruenti, ed in particolare $BC \cong B'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$.
Poichè:

$$AC \cong A'C', \quad AD \cong A'D', \quad C * A * D \quad \text{e} \quad C' * A' * D',$$

per l'assioma ($C3$) possiamo dire che $CD \cong C'D'$. Ora, consideriamo i triangoli BCD e $B'C'D'$, avendo mostrato che $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$ e sapendo che $BC \cong B'C'$, ancora sfruttando l'assioma ($C6$) concludiamo che i due triangoli sono congruenti. Infine consideriamo i triangoli BDA e $B'D'A'$: per ipotesi $DA \cong D'A'$ e dal passo precedente sappiamo che $BD \cong B'D'$ e $\angle BDA \cong \angle B'D'A'$. Per un'ultima volta l'assioma ($C6$) ci garantisce che i due triangoli sono congruenti ed in particolare saranno congruenti gli angoli $\angle BAD$ e $\angle B'A'D'$, come volevamo. □

Definizione 12. Due angoli si dicono *opposti al vertice* se sono definiti da semirette opposte giacenti sulle stesse due rette.



Dalla Proposizione 10 possiamo dedurre il seguente Corollario.

Corollario 1. Angoli opposti al vertice sono congruenti.

Proposizione 11 (Somma di angoli)**.** Sia dato un angolo $\angle BAC$ e siano:

- $\overrightarrow{AD}$ una semiretta interna all'angolo,

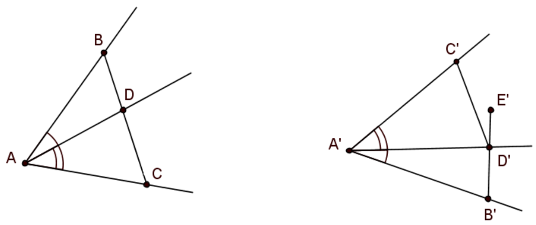
- $\angle D'A'C'$ e $\angle DAC$ angoli congruenti,

- $\angle B'A'D'$ e $\angle BAD$ angoli congruenti,

- le semirette $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ su semipiani opposti rispetto alla retta $A'D'$.

Allora le semirette $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ formano un angolo congruente all'angolo $\angle BAC$ e la semiretta $\overrightarrow{A'D'}$ è interna all'angolo $\angle B'A'C'$.

Dimostrazione. Essendo la semiretta $\overrightarrow{AD}$ interna all'angolo $\angle BAC$ sappiamo che esiste il punto di intersezione di tale semiretta con BC (Proposizione 5). Possiamo sostituire il punto dato D con tale punto di intersezione, in modo da avere $B * D * C$. Possiamo inoltre sostituire B', C' e D' con altri punti che giacciono sulle stesse semirette e tali che $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $AD \cong A'D'$.



Sapendo per ipotesi che $\angle D'A'C' \cong \angle DAC$ e $\angle B'A'D' \cong \angle BAD$, grazie all'assioma $(C6)$ possiamo concludere che il triangolo BAD è congruente a $B'A'D'$ e il triangolo DAC è congruente a $D'A'C'$. In particolare allora:

$$BD \cong B'D', \quad DC \cong D'C', \quad \angle BDA \cong \angle B'D'A' \quad \text{e} \quad \angle ADC \cong \angle A'D'C'.$$

Prendiamo ora un punto E' sulla semiretta $\overrightarrow{B'D'}$ che verifica $B' * D' * E'$. Per definizione $\angle A'D'E'$ è un angolo supplementare a $\angle A'D'B'$, che abbiamo mostrato essere congruente a $\angle ADB$. Allora sfruttando la transitività della congruenza tra angoli e la Proposizione 10 deduciamo che $\angle A'D'E' \cong \angle A'D'C'$. Osserviamo che per costruzione questi sono dalla stessa parte rispetto alla retta contenente A' e D', allora per l'assioma $(C4)$ coincideranno e possiamo concludere che $\angle A'D'C'$ e $\angle A'D'B'$ sono supplementari. Essendo quindi B', D' e C' allineati e $\angle D'A'C'$ un angolo, allora A', B' e C' non sono allineati e formano un angolo. Grazie all'ipotesi, all'assioma $(C3)$ e alla congruenza dei triangoli BAD e $B'A'D'$ abbiamo rispettivamente che: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ e $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$. L'assioma $(C6)$ ci dice che i triangoli

ABC e $A'B'C'$ sono congruenti ed in particolare $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, come richiesto.
Infine, essendo B' e C' da parti opposte rispetto alla retta $A'D'$ risulta $B' * D' * C'$ e quindi la semiretta $\overrightarrow{A'D'}$ è interna all'angolo $\angle B'A'C'$. $\square$

Definizione 13. Supponiamo di avere due angoli $\angle BAC$ e $\angle EDF$. Diremo che $\angle BAC$ è *minore* ($<$) di $\angle EDF$, se esiste una semiretta $\overrightarrow{DG}$ interna all'angolo $\angle EDF$ tale che $\angle BAC \cong \angle GDF$. In questo caso possiamo anche dire che $\angle EDF$ è *maggiore* ($>$) di $\angle BAC$.

Proposizione 12. Valgono i seguenti risultati:

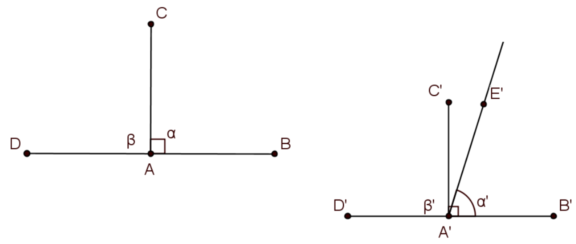
- se $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$ allora $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha' < \beta'$,
- se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ allora $\alpha < \gamma$,
- data una qualsiasi coppia di angoli α e β vale una ed una sola delle seguenti relazioni: $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ o $\alpha \cong \beta$.

Definizione 14. Un angolo si dice *retto* se è congruente al suo supplementare.

Definizione 15. Due rette si dicono *ortogonali* se sono incidenti in un punto e formano due angoli retti adiacenti.

Proposizione 13. Due qualsiasi angoli retti sono congruenti tra loro.

Dimostrazione. Siano $\alpha = \angle CAB$ e $\alpha' = \angle C'A'B'$ angoli retti. Per definizione sono entrambi congruenti ai rispettivi supplementari $\angle CAD$ e $\angle C'A'D'$, che chiameremo β e β'.
Supponiamo che α non sia congruente ad α', allora $\alpha < \alpha'$ o $\alpha > \alpha'$. Assumiamo $\alpha < \alpha'$. Per definizione esisterà una semiretta $\overrightarrow{A'E'}$ all'interno dell'angolo α' tale che $\alpha \cong \angle E'A'B'$. Allora possiamo dimostrare che la



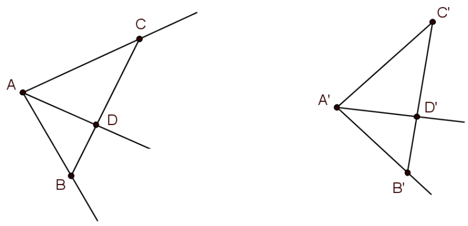
semiretta $\overrightarrow{A'C'}$ è interna all'angolo $\angle E'A'D'$. Infatti, per costruzione E' e B' sono dalla stessa parte rispetto alla retta, che chiameremo t, contenente i punti A' e C'; essendo poi A' collocato tra B' e D' quest'ultimi saranno da parti opposte rispetto a tale retta. Possiamo quindi concludere che D' ed E' sono da parti opposte rispetto a t, cioè esiste un punto di intersezione tra il segmento $D'E'$ e la retta t. Possiamo chiamare C' proprio tale punto ed osservare che vale $D' * C' * E'$. Da questo deduciamo che: C' ed E' sono dalla stessa parte rispetto alla retta contenente i punti A' e D', mentre i punti C' e D' sono dalla stessa parte rispetto alla retta contenente A' e E'. Questo ci dice che $\overrightarrow{A'C'}$ è interna all'angolo $\angle E'A'D'$ e dunque $\beta' < \angle E'A'D'$. D'altra parte $\angle E'A'D'$ è supplementare di $\angle E'A'B'$, che è congruente ad α, quindi $\angle E'A'D' \cong \beta$. Risulta allora: $\beta' < \beta$. Infine, essendo per definizione $\alpha \cong \beta$ e $\alpha' \cong \beta'$ possiamo concludere che $\alpha' < \alpha$, in contraddizione con quanto supposto. $\square$

Osservazione 7. *Euclide aveva assunto come postulato che gli angoli retti fossero tutti congruenti tra loro.*

Osservazione 8. *Due angoli retti con una semiretta in comune coincidono o sono supplementari. Infatti: siano $\angle BAC$ e $\angle B'AC$ i due angoli retti. Se B e B' sono dalla stessa parte rispetto alla retta AC, per l'assioma $(C4)$, i due angoli coincidono; d'altra parte se B e B' sono da parti opposte rispetto alla retta AC, per la Proposizione 13 sappiamo che sono congruenti tra loro, e $\angle BAC$ sarà congruente, per definizione, al suo supplementare β. Allora, per transitività, $\angle B'AC \cong \beta$ e ancora per l'assioma $(C4)$ i due angoli coincideranno. L'angolo $\angle B'AC$ risulta quindi supplementare di $\angle BAC$.*

1.4.1 Esercizi

Esercizio 18 (Esercizio 9.1)**.** $\star$ *Siano dati gli angoli congruenti* $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ *e la semiretta* $\overrightarrow{AD}$ *interna a* $\angle BAC$. *Mostrare che esiste una semiretta* $\overrightarrow{A'D'}$ *interna a* $\angle B'A'C'$ *tale che* $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ *e* $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$. $\star$



Senza perdere di generalità possiamo assumere che B' *sia il punto sulla semiretta* $\overrightarrow{A'B'}$ *che verifica* $AB \cong A'B'$, *analogamente* $AC \cong A'C'$ *e che* D *sia il punto, che sappiamo esistere, in cui la semiretta* $\overrightarrow{AD}$ *interseca* BC *(si noti che questo ci dice anche che vale* $B * D * C$*).*
Per l'assioma $(C4)$ *si consideri la semiretta* $\overrightarrow{A'D'}$ *con origine in* A' *e* D' *dalla stessa parte di* B' *rispetto ad* $A'C'$, *tale che* $\angle CAD \cong \angle C'A'D'$. *Anche in questo caso possiamo chiamare* D' *il punto della semiretta che verifica* $AD \cong A'D'$. *Per costruzione la semiretta* $\overrightarrow{A'D'}$ *è interna all'angolo* $\angle B'A'C'$, *infatti abbiamo dimostrato (Proposizione 12), che dati:*

$$\angle BAC \cong \angle B'A'C' \quad e \quad \angle DAC \cong \angle D'A'C',$$

allora

$$\angle DAC < \angle BAC \iff \angle D'A'C' < \angle B'A'C'.$$

Resta da dimostrare che anche $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$. *Consideriamo i triangoli* ABC *e* $A'B'C'$, *abbiamo:*

$$\angle BAC \cong \angle B'A'C', \quad AB \cong A'B', \quad AC \cong A'C',$$

allora per l'assioma $(C6)$ *possiamo concludere che il triangolo* ABC *è congruente al triangolo* $A'B'C'$, *ed in particolare:*

$$\angle BCA \cong \angle B'C'A' \quad e \quad BC \cong B'C'.$$

Analogamente considerando i triangoli ADC *e* $A'D'C'$, *da:*

$$\angle DAC \cong \angle D'A'C', \quad AD \cong A'D', \quad AC \cong A'C',$$

possiamo dedurre che:

$$\angle DCA \cong \angle D'C'A' \quad e \quad DC \cong D'C'.$$

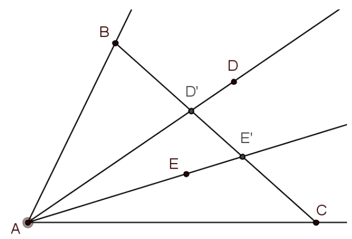
Osserviamo ora che i punti B', D' e C' sono allineati. Essendo B, D e C allineati, gli angoli $\angle BCA$ e $\angle DCA$ coincidono, allora:

$$\angle B'C'A' \cong \angle BCA = \angle DCA \cong \angle D'C'A'.$$

Per l'assioma (C4) essendo B' e D' dalla stessa parte rispetto ad $A'C'$ possiamo concludere che la semiretta $\overrightarrow{C'B'}$ coincide con la semiretta $\overrightarrow{C'D'}$, quindi si ha $C' * D' * B'$.
Possiamo quindi affermare che $\angle BDA \cong \angle B'D'A'$, essendo angoli supplementari di angoli congruenti e $BD \cong B'D'$, essendo "differenza" di segmenti congruenti. Allora sfruttando l'assioma (C6), i triangoli BDA e $B'D'A'$ risultano congruenti, ed in particolare gli angoli $\angle BAD$ e $\angle B'A'D'$, come volevamo.

Esercizio 19 (Esercizio 9.2)**.** ⋆ *Supponiamo che la semiretta $\overrightarrow{AD}$ sia interna all'angolo $\angle BAC$, e che la semiretta $\overrightarrow{AE}$ sia interna all'angolo $\angle DAC$. Mostrare che la semiretta $\overrightarrow{AE}$ è interna anche all'angolo $\angle BAC$.* ⋆

Essendo $\overrightarrow{AD}$ interna all'angolo $\angle BAC$ possiamo dire che esiste un punto



$D' = \overrightarrow{AD} \cap BC$ e risulta $B * D' * C$ (Proposizione 5). Analogamente essendo la semiretta $\overrightarrow{AE}$ interna all'angolo $\angle DAC$, che coincide con $\angle D'AC$, esisterà un punto E' su $\overrightarrow{AE}$ tale che $D' * E' * C$. Per l'Esercizio 5 sappiamo che:

$$B * D' * C \quad \text{e} \quad D' * E' * C \quad \text{implicano} \quad B * E' * C.$$

Allora risultano:

B e E' dalla stessa parte rispetto alla semiretta $\overrightarrow{AC}$,

C e E' dalla stessa parte rispetto alla semiretta $\overrightarrow{AB}$,

e quindi per definizione la semiretta $\overrightarrow{AE}$, che coincide con la semiretta $\overrightarrow{AE'}$, è interna all'angolo $\angle BAC$.

1.5 Il piano di Hilbert

Iniziamo questa Sezione dando la definizione di quello che ne sarà il soggetto principale.

Definizione 16. Un *piano di Hilbert* è un insieme costituito da *punti*, da sottoinsiemi detti *rette*, munito delle nozioni primitive di *collocamento, congruenza tra segmenti* e *congruenza tra angoli*, che verifica gli assiomi $(I1)$-$(I3)$, $(B1)$-$(B4)$ e $(C1)$-$(C6)$.

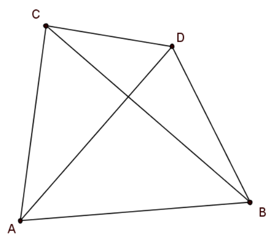
Poichè l'assioma delle Parallele non viene affermato nè negato, tutto quello che verrà dimostrato in un piano di Hilbert sarà da vedere come teorema di una *geometria neutrale*.
Ma quanti e quali risultati presenti nel Primo Libro degli Elementi di Euclide valgono nella struttura che abbiamo appena definito, cioè, possono essere provati senza l'assioma delle Parallele? Con il seguente Teorema rispondiamo a questa domanda ed il seguito della Sezione sarà dedicato a verificare alcuni passaggi della sua dimostrazione.

Teorema 1. Tutte le Proposizioni da $(I.1)$ a $(I.28)$ del Primo Libro degli Elementi di Euclide, fatta eccezione per $(I.1)$ e $(I.22)$, possono essere dimostrate in un qualsiasi piano di Hilbert.

Questo ci dice che non è possibile dimostrare, con i soli assiomi coinvolti nella precedente definizione (Definizione 16), l'esistenza di un triangolo equilatero a partire da un segmento dato (nella Sezione successiva vedremo, con il Teorema 2, che introducendo un ulteriore assioma sarà possibile recuperare anche le Proposizioni $(I.1)$ e $(I.22)$). Le Proposizioni $(I.2)$ e $(I.3)$ risultano conseguenze immediate dell'assioma $(C1)$ e la Proposizione $(I.4)$ coincide con l'assioma $(C6)$.
Molte delle dimostrazioni proposte da Euclide possono essere giustificate e seguite passo per passo anche lavorando in un piano di Hilbert; tuttavia alcuni passaggi dovranno essere approfonditi e andranno colmate rigorosamente alcune lacune che vengono a presentarsi in questo contesto. Per chiarire quanto appena detto si rimanda, per la dimostrazione della Proposizione $(I.5)$, al libro di Robin Hartshorne [9, pag.97] e proponiamo qui quella della Proposizione $(I.7)$.

Proposizione $(I.7)$. Dati i punti A e B, siano C e D dalla stessa parte rispetto alla retta AB tali che $AC \cong AD$ e $BC \cong BD$; dobbiamo mostrare che C e D necessariamente coincidono.
Assumiamo $C \neq D$, allora per l'assioma $(C1)$ il punto D non appartiene alla retta AC nè alla retta BC e senza perdere di generalità possiamo considerare la semiretta $\overrightarrow{AD}$ interna all'angolo $\angle CAB$. Volendo ripercorrere la dimostrazione di Euclide prendiamo D esterno al triangolo ABC.

Ora per affermare che $\angle ACD > \angle BCD$ dobbiamo approfondire la dimostrazione ed assicurarci che la semiretta $\overrightarrow{CB}$ sia interna all'angolo $\angle ACD$. Prima di tutto mostriamo che A e B sono dalla stessa parte rispetto alla retta CD. Se così non fosse dovrebbe esistere un punto E di intersezione tra il segmento AB e la retta CD che verifica le seguenti relazioni: $A * E * B$ e $C * D * E$ (per giungere a quest'ultima conclusione abbiamo sfruttato anche le ipotesi e l'assioma $(B4)$). Da queste relazioni segue rispettivamente che le coppie di punti A, E e D, E sono dalla stessa parte rispetto alla retta CB. Allora i punti A e D risultano dalla stessa parte rispetto a tale retta, contro l'ipotesi di avere D esterno al triangolo ABC (infatti tale richiesta, per essere in accordo con le altre ipotesi, ci dice che necessariamente D deve stare dalla parte opposta di A rispetto a BC).



Per ipotesi poi il punto D è interno all'angolo $\angle CAB$, allora D e B sono dalla stessa parte rispetto alla retta AC. Riassumendo abbiamo: A e B dalla stessa parte rispetto a CD, e B e D dalla stessa parte rispetto ad AC, dunque la semiretta $\overrightarrow{CB}$ è interna all'angolo $\angle ACD$. Analogamente si può mostrare che la semiretta $\overrightarrow{DA}$ è interna all'angolo $\angle CDB$ e di conseguenza $\angle CDB > \angle CDA$.
Per la Proposizione $(I.5)$, da $AC \cong AD$ segue $\angle CDA \cong \angle ACD$ e da $BC \cong BD$ segue $\angle CDB \cong \angle DCB$. Concludendo si ha:

$$\angle CDA \cong \angle ACD, \quad \angle ACD > \angle DCB,$$

quindi

$$\angle CDA > \angle DCB.$$

Ma essendo:

$$\angle CDB > \angle CDA, \quad \text{si ha} \quad \angle CDB > \angle DCB,$$

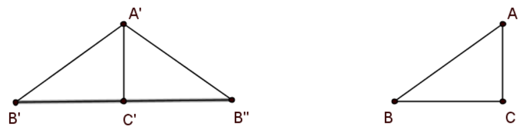
in contraddizione con $\angle CDB \cong \angle DCB$. □

La Proposizione $(I.8)$ continua a valere in un piano di Hilbert, ma in questo caso la dimostrazione proposta da Euclide non può essere seguita.

Proposizione (I.8). Siano dati due triangoli ABC e $A'B'C'$ tali che:

$$AB \cong A'B', \quad BC \cong B'C' \quad \text{e} \quad AC \cong A'C'.$$

Vogliamo dimostrare che i due triangoli sono congruenti.
Sfruttando gli assiomi $(C4)$ e $(C1)$ possiamo determinare un punto B'', dalla parte opposta di B' rispetto alla retta $A'C'$ tale che $\angle C'A'B'' \cong \angle CAB$ e $AB \cong A'B''$. Avendo per ipotesi $AC \cong A'C'$, possiamo concludere per l'assioma $(C6)$ che i triangoli ABC e $A'B''C'$ sono congruenti. Da questo segue in particolare che i segmenti BC e $B''C'$ sono congruenti. Il libro di Hartshorne [9] conclude la dimostrazione nel caso in cui A' e C' sono da parti opposte rispetto alla retta passante per i punti B' e B''; nel caso in cui A' e C' sono dalla stessa parte rispetto alla retta $B'B''$ si dovrà lavorare con attenzione sulle relazioni di collocamento per la differenza di angoli congruenti (come visto nell'Esercizio 18), ma si discute in modo analogo a quello proposto; consideriamo quindi il caso in cui uno tra i punti A' e C' giace proprio sulla retta $B'B''$. Per la transitività della congruenza abbiamo

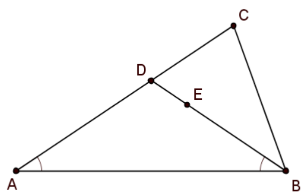


$A'B' \cong A'B''$ e $B''C' \cong B'C'$. Per la Proposizione $(I.5)$, vista sul triangolo $B'A'B''$, possiamo dire che $\angle A'B'B'' \cong \angle A'B''B'$ o equivalentemente $\angle A'B'C' \cong \angle A'B''C'$. Allora, per l'assioma $(C6)$, il triangolo $A'B'C'$ è congruente al triangolo $A'B''C'$. (Si può osservare che per definizione gli angoli $\angle B''C'A'$ e $\angle B'C'A'$ sono angoli retti.) Avendo già dimostrato la congruenza tra i triangoli ABC e $A'B''C'$ sappiamo che $\angle A'B''C' \cong \angle ABC$. Ancora grazie alla transitività e all'assioma $(C6)$ possiamo concludere che i due triangoli di partenza, ABC e $A'B'C'$, sono congruenti. □

Dalla Proposizione $(I.9)$ si incontrano una serie di costruzioni con riga e compasso che in un piano di Hilbert vedremo come Teoremi di esistenza. Il seguente risultato, che farà da "sostituto" alla Proposizione $(I.1)$ in alcune dimostrazioni successive (come nella Proposizione $(I.10)$ che proponiamo di seguito), è un esempio di Teorema di esistenza.

Proposizione 14. Dato un segmento AB esiste un triangolo isoscele di base AB.

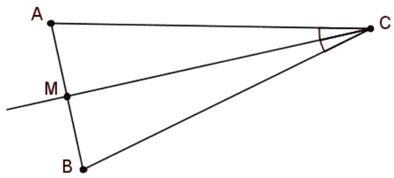
Dimostrazione. Per l'assioma $(I3)$ esiste un punto C non allineato con A e B; individuiamo così il triangolo ABC. Se $\angle CAB$ e $\angle CBA$ sono congruenti, per la Proposizione $(I.6)$, possiamo concludere che il triangolo è iscoscele. Altrimenti, possiamo assumere senza perdere di generalità $\angle CAB < \angle CBA$. Per definizione esisterà una semiretta $\overrightarrow{BE}$, interna a $\angle ABC$ in modo che risulti $\angle CAB \cong \angle ABE$.
Sappiamo che tale semiretta dovrà intersecare il segmento AC, e chiamiamo D tale punto di intersezione (Proposizione 5). Ora gli angoli alla base del



triangolo BAD sono congruenti, quindi tale triangolo di base AB (ancora per la Proposizione $(I.6)$) è isoscele. $\square$

Si osservi che non sarebbe stato sufficiente sfruttare l'assioma $(C4)$ e costruire due semirette $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{BF}$ con E e F dalla stessa parte rispetto alla retta AB tali che $\angle EAB \cong \angle FBA$: l'intersezione delle due semirette e di conseguenza l'esistenza del triangolo, non sarebbe stata garantita.

Proposizione $(I.10)$. Sia dato il segmento AB, vogliamo dimostrare l'esistenza di un punto $M \in AB$ tale che $AM \cong MB$. Per far questo sfruttiamo la Proposizione 14 e individuiamo il triangolo isoscele ABC, di base AB. Ora, per la Proposizione $(I.9)$ (che sfrutta ancora la Proposizione 14, vedi [9, pag.100]) consideriamo la semiretta $\overrightarrow{CM}$ tale che $\angle ACM \cong \angle MCB$; possiamo assumere $M \in AB$.



Osserviamo che per costruzione:

$$\angle ACM \cong \angle MCB,$$

$$AC \cong BC,$$

e CM è comune ai triangoli ACM e BCM che quindi risultano congruenti per l'assioma $(C6)$. In particolare saranno congruenti i lati AM e MB, come richiesto. $\square$

Nel libro di Hartshorne [9, pag.101] si può trovare la dimostrazione della Proposizione $(I.16)$ e tra gli esercizi proponiamo la dimostrazione della $(I.12)$, $(I.18)$ e $(I.20)$. Per altre Proposizioni, come ad esempio $(I.24)$, $(I.25)$, $(I.27)$, $(I.28)$ le dimostrazioni di Euclide possono essere rilette senza particolari accorgimenti anche in un piano di Hilbert. Aggiungiamo infine solo un'osservazione per la Proposizione $(I.17)$ che necessita di una riformulazione dell'enunciato. La frase: "la somma di due angoli di un triangolo è sempre minore di due angoli retti" perde di significato in un piano di Hilbert, in questo contesto infatti due angoli retti non formano un angolo. Sarà perciò più opportuno dire "se α e β sono due angoli di un triangolo, allora α è minore del supplementare di β".

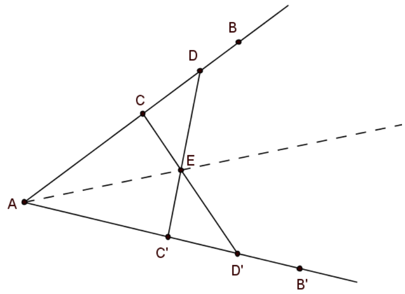
Osservazione 9. *L'assioma* $(I1)$, *che ci garantisce l'esistenza di una retta per due punti, si può far corrispondere ad una riga; l'assioma* $(C1)$ *si può far corrispondere ad uno strumento che trasporta segmenti (come un compasso con due puntine, che si può spostare una volta fissata l'apertura) e l'assioma* $(C4)$ *ad uno strumento che trasporta angoli. Questi sono definiti come i tre* strumenti di Hilbert*, che ci permettono di costruire oggetti in una geometria neutrale in modo analogo ad Euclide che utilizzava riga e compasso. Nel libro di Hartshorne [9] troviamo ad esempio i passi per la costruzione di un triangolo isoscele dato il segmento di base. Mostriamo qui che: "con gli strumenti di Hilbert è sempre possibile costruire la bisettrice di un angolo dato", ovvero dimostrare la Proposizione* $(I.9)$.

Proposizione $(I.9)$. Sia dato l'angolo $\angle BAB'$,

- Preso un punto $C \neq A$ tale che $C \in \overrightarrow{AB}$ si trasporti il segmento AC sulla semiretta $\overrightarrow{AB'}$ determinando il punto C', che quindi verifica $AC \cong AC'$.
- Sia D un punto che soddisfa $A * C * D$; sulla retta AB' si consideri la semiretta di origine C', non contenente A e, con il trasporto dei segmenti, si determini il punto D' che verifica $AD \cong AD'$.
- Con la riga si uniscano C con D' e C' con D. Si determini così il punto E di intersezione tra i segmenti CD' e $C'D$ (per costruzione C e D' sono da parti opposte rispetto alla retta $C'D$, quindi il segmento CD' dovrà intersecare tale retta; analogamente C' e D sono da parti opposte rispetto alla retta CD' quindi il segmento $C'D$ dovrà intersecare la retta CD', questo ci dice che necessariamente il punto E appartenente ad entrambi i segmenti esiste).
- Unendo A con E si determina la bisettrice dell'angolo di partenza.

Infatti i triangoli ADC' e ACD' sono congruenti per l'assioma $(C6)$ e quindi in particolare: $\angle DC'A \cong \angle ACD'$ e $\angle ADC' \cong \angle CD'A$. Allora anche i triangoli CED e $C'ED'$ risultano congruenti (sfruttando la differenza di segmenti congruenti, che angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti e la Proposizione $(I.26)$). Avremo di conseguenza $ED \cong ED'$ e quindi per la $(I.8)$ il triangolo ADE sarà congruente al triangolo $AD'E$ ed in particolare:

$$\angle DAE \cong \angle EAD'.$$


B
D
C
E
A
C'
D'
B'

□

1.5.1 Esercizi

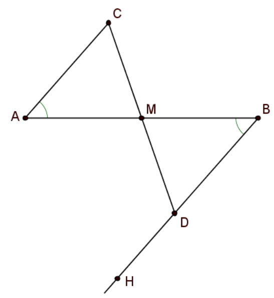
Esercizio 20 (Esercizio 10.2). $\star$ *Costruire con gli strumenti di Hilbert (Osservazione 9) il punto medio di un segmento dato AB.* $\star$

Sia C un punto non allineato con A e B,

- *Trasportiamo l'angolo $\angle CAB$ nell'angolo $\angle ABH$, con H dalla parte opposta di C rispetto alla retta AB.*

- *Sfruttando il trasporto dei segmenti chiamiamo D il punto della semiretta $\overrightarrow{BH}$ che verifica $CA \cong BD$.*

- *Con la riga uniamo C con D, determinando così il punto M di intersezione tra il segmento AB e il segmento CD (che esiste per costruzione).*



Per la Proposizione (I.26), ricordando che angoli opposti al vertice sono congruenti, i triangoli AMC e MBD risultano congruenti. In particolare si avrà: $AM \cong MB$.

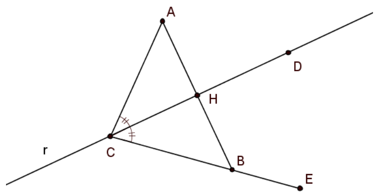
Esercizio 21 (Esercizio 10.4). $\star$ Data una retta r ed un punto A non appartenente ad essa, costruire con gli strumenti di Hilbert la retta perpendicolare a r passante per A. $\star$

- *Consideriamo due punti C, $D \in r$ e con la riga congiungiamo C con il punto A.*

- *Dalla parte opposta di A rispetto a r trasportiamo l'angolo $\angle ACD$ nell'angolo $\angle DCE$.*

- *Con il trasporto di segmenti determiniamo $B \in \overrightarrow{CE}$ tale che $AC \cong CB$.*

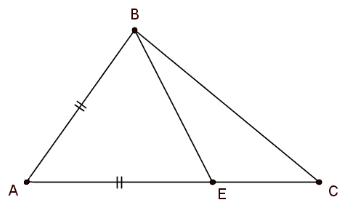
- *Con la riga congiungiamo A e B, determinando la retta s che risulta la perpendicolare a r passante per A.*



Per costruzione, infatti, la retta r e il segmento AB si intersecano; indichiamo con H tale punto di intersezione. Poichè $CA \cong CB$ il triangolo ABC è isoscele sulla base AB, allora per la Proposizione (I.5) sappiamo che $\angle CAH = \angle CAB \cong \angle ABC = \angle HBC$. I triangoli AHC e BHC risultano quindi congruenti per la Proposizione (I.26), ed avranno in particolare congruenti gli angoli $\angle AHC$ e $\angle CHB$ che risultano retti per definizione essendo A, H e B allineati.

Esercizio 22 (Esercizio 10.6)**.** $\star$ *Scrivere la dimostrazione della Proposizione (I.18) in un piano di Hilbert.* $\star$

Dobbiamo verificare che "in ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore". Consideriamo un triangolo qualsiasi ABC e sia $AC > AB$, il nostro obiettivo è provare che: $\angle ABC > \angle BCA$. Per definizione, essendo



$AB > AC$, esiste un punto E che verifica $A * E * C$ e $AE \cong AB$. L'assioma ($I1$) ci dice che possiamo congiungere tale punto con B. La semiretta $\overrightarrow{BE}$ è interna all'angolo $\angle ABC$, infatti da $A * E * C$ segue che A ed E sono dalla stessa parte rispetto a BC come E e C sono dalla stessa parte rispetto ad AB; allora $\angle ABE < \angle ABC$. (Si noti che in questo contesto è necessario introdurre le precisazioni sul collocamento, mancanti in Euclide, che arriva allo stesso risultato sfruttando una delle Nozioni Comuni, secondo la quale: "il totale ($\angle ABC$) è più grande della parte ($\angle ABE$)".)
Possiamo sfruttare ora la Proposizione (I.16), ovvero il Teorema dell'angolo esterno, che vale anche in un piano di Hilbert (Teorema 1), per dire che:

$$\angle BEA > \angle BCE = \angle BCA.$$

Per costruzione il triangolo ABE è isoscele sulla base BE, allora $\angle ABE \cong \angle BEA$, per la Proposizione $(I.5)$. Concludendo:

$$\angle ABC > \angle ABE; \quad \angle ABE \cong \angle BEA \quad e \quad \angle BEA > \angle BCA,$$

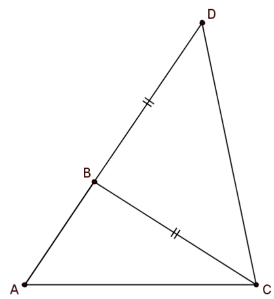
allora $\angle ABC > \angle BCA$, come volevamo.

Esercizio 23 (Esercizio 10.8)**.** $\star$ *Scrivere la dimostrazione della Proposizione $(I.20)$ in un piano di Hilbert.* $\star$

Dobbiamo verificare che in un triangolo qualsiasi ABC la somma di due lati è maggiore del terzo; proviamo quindi che $AB + BC > AC$. Per gli assiomi di Hilbert esiste, ed è unico, il punto D appartenente alla retta AB, dalla parte opposta di A rispetto a B, che verifica $BD \cong BC$. Per definizione:

$$AD = AB + BC.$$

Possiamo considerare ora il triangolo BCD, isoscele per costruzione. Sapendo che la Proposizione $(I.5)$ vale in un piano di Hilbert (Teorema 1), possiamo dire che $\angle BDC \cong \angle BCD$. Sempre per costruzione sappiamo che

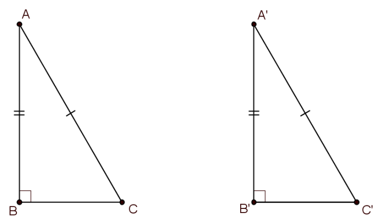


il punto B è collocato tra A e D, allora: B e D sono dalla stessa parte rispetto alla retta AC; B e A sono dalla stessa parte rispetto alla retta CD e da questo possiamo dedurre che la semiretta $\overrightarrow{CB}$ è interna all'angolo $\angle ACD$. Allora:

$$\angle CDA = \angle CDB \cong \angle DCB; \quad \angle DCB < \angle DCA,$$

ovvero $\angle CDA < \angle DCA$.
Sfruttando la Proposizione $(I.19)$ che assumiamo di aver precedentemente dimostrato in un piano di Hilbert (Teorema 1), considerando il triangolo DCA possiamo concludere che $AD > AC$, quindi: $AB + BC > AC$.

Esercizio 24 (Esercizio 10.9)**.** $\star$ *Siano dati due triangoli ABC e $A'B'C'$ tali che: $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$* sono angoli retti, *$AB \cong A'B'$ e $AC \cong A'C'$. Mostrare che i due triangoli sono congruenti in un piano di Hilbert.* $\star$



Determiniamo il punto D che soddisfa $A*B*D$ e $AB \cong BD$. Per costruzione gli angoli $\angle ABC$ e $\angle CBD$ sono supplementari, ma allora sono congruenti, essendo per ipotesi $\angle ABC$ un angolo retto. Considerando i triangoli ABC e DBC osserviamo che:

$$\angle ABC \cong \angle CBD,$$

$$AB \cong BD,$$

e

$$BC \cong BC,$$

per l'assioma $(C6)$ i due triangoli risultano congruenti ed in particolare:

$$AC \cong CD.$$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento sul triangolo $A'B'C'$ mostrando la congruenza dei triangoli $A'B'C'$ e $D'B'C'$ con conseguente congruenza tra i segmenti $A'C'$ e $C'D'$. Allora abbiamo:

$$CD \cong AC \cong A'C' \cong C'D'.$$

Anche $AD \cong A'D'$, essendo somma di segmenti congruenti (Proposizione 7):

$$AB \cong A'B' \quad \textit{per ipotesi},$$

$$BD \cong B'D' \quad \textit{per costruzione e transitività}.$$

La Proposizione $(I.8)$ ci garantisce ora che i triangoli ADC e $A'D'C'$ sono congruenti. In particolare: $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$, che equivale a dire $\angle BAC \cong \angle B'A'C$. Possiamo ora sfruttare l'assioma $(C6)$ sui triangoli di partenza per concludere che sono congruenti.

Osservazione 10. *Abbiamo mostrato con i soli strumenti disponibili in un piano di Hilbert i passi fondamentali per dimostrare la Proposizione $(III.14)$ degli Elementi di Euclide (quest'ultimo raggiunge tale risultato utilizzando la Proposizione $(I.47)$, di cui per ora non abbiamo garantita la validità in una geometria neutrale).*

Esercizio 25 (Esercizio 10.11)**.** $\star$ *In un piano di Hilbert sia dato un insieme finito di punti $A_1, \ldots A_n$. Mostrare che esiste una retta r in modo che i punti dati si trovino tutti da una stessa parte rispetto ad essa. (Siano indicati con R_1 e R_2 i due semipiani individuati da r.)* $\star$

FATTO 1: *"Siano r e m rette parallele, allora m è interamente contenuta in uno dei due semipiani individuati da r".*
Supponiamo che esistano due punti A, B di m tali che $A \in R_1$ e $B \in R_2$, cioè che i punti A e B siano da parti opposte rispetto alla retta r: il segmento AB interseca la retta in un punto E, cioè $E \in m \cap r$, contraddicendo l'ipotesi di parallelismo tra le due rette. L'assurdo è nato dall'aver supposto che m non fosse interamente contenuta in uno dei due semipiani individuati da r.
FATTO 2: *" Se la retta m è interamente contenuta in R_1, allora r e R_2 sono interamente contenuti in uno dei due semipiani individuati da m."*
Supponiamo che esistano due punti A e B, da parti opposte rispetto a m, tali che A, $B \in R_2 \cup r$. Dalle relazioni di collocamento si osserva che allora tutto il segmento AB è contenuto in $R_2 \cup r$, inoltre, per come sono stati presi A e B sappiamo che esiste il punto $C = AB \cap m$. Abbiamo quindi:

$$C = AB \cap m,$$

$$AB \subset R_2 \cup r,$$

e

$$m \subset R_1,$$

ovvero

$$C \in (R_2 \cup r) \cap R_1,$$

trovando un assurdo, essendo R_1, r e R_2 insiemi disgiunti.
Per la dimostrazione dell'esercizio procediamo ora per induzione sulla cardinalità dell'insieme di punti.
PASSO BASE: *Se $n = 1$ abbiamo solo il punto A_1. Per l'assioma $(I3)$ esisteranno due punti B e C non allineati con A_1. Prendiamo quindi come retta r la retta passante per B e C, allora A_1 necessariamente si troverà in uno dei due semipiani individuati da essa.*
PASSO INDUTTIVO: *Supponiamo che dato $A_1, \ldots A_{n-1}$, un insieme finito di punti, esista una retta r_{n-1} rispetto alla quale i punti sono tutti da una stessa parte, che chiameremo H_1. Proviamo lo stesso risultato per un insieme di n punti. Abbiamo tre possibilità mutualmente esclusive:*

- *se $A_n \in H_1$ abbiamo finito,*

- *se $A_n \in H_2$ possiamo considerare la retta m parallela a r_{n-1} passante per A_n (per dimostrare che m esiste basterà sfruttare l'assioma $(C4)$, a partire da una semiretta di origine A_n e passante per un qualsiasi punto di r_{n-1}, e la Proposizione $(I.27)$. Questo risultato di esistenza* *equivale alla Proposizione* $(I.31)$ *di Euclide, che quindi osserviamo non necessita dell'assioma delle Parallele, ma vale in un qualsiasi piano di Hilbert). Chiameremo* M_1 *e* M_2 *i due semipiani individuati da* m*. Per il Fatto 1 la retta* m *sarà interamente contenuta in uno dei due semipiani individuati da* r_{n-1}*, e poichè il suo punto* A_n *appartiene ad* H_2 *avremo* $m \subset H_2$*. Il Fatto 2 allora ci dice che:*

$$(H_1 \cup r_{n-1}) \subset M_1.$$

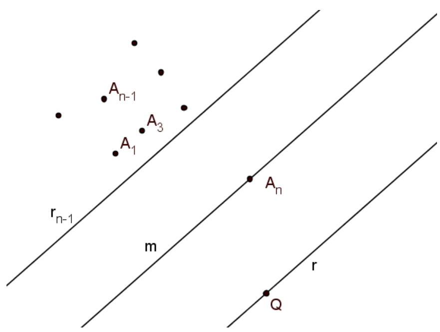
Prendiamo quindi un punto $Q \in M_2$ *(che sappiamo esistere dalla Proposizione 3) e chiamiamo* r *la retta passante per* Q *parallela a* m*. Ancora sfruttando i fatti precedentemente dimostrati avremo che* $r \subset M_2$ *e* $M_1 \cup m$ *sarà interamente contenuta in uno dei due semipiani individuati da* r*, supponiamo in* R_1*. Quindi:*

$$\{A_1, \dots A_{n-1}\} \subset H_1 \subset (M_1 \cup m) \subset R_1,$$

e

$$A_n \in m \subset (M_1 \cup m) \subset R_1,$$

quindi abbiamo individuato la retta r *per la quale* $\{A_1, \dots, A_n\} \subset R_1$*.*



- *se infine* $A_n \in r_{n-1}$ *ripetiamo il ragionamento del caso precedente con* $m = r_{n-1}$ *e* $H_1 = M_1$*.*

Abbiamo così dimostrato che dato un insieme finito di punti esiste una retta r *rispetto alla quale l'insieme di punti dato si trova interamente in uno dei due semipiani da essa individuati.*

1.6 Assioma per le intersezioni, assioma di Archimede e assioma di Dedekind

In questa Sezione assumeremo di lavorare in un Piano di Hilbert. Inizieremo parlando delle intersezioni tra circonferenze e tra rette e circonferenze per poi enunciare tre nuovi assiomi ed osservare quali altri risultati presenti negli Elementi di Euclide ci permettono di recuperare.

Definizione 17. Dati due punti distinti A e O, la *circonferenza* Γ di centro O e raggio OA è l'insieme di tutti i punti B che verificano $OA \cong OB$. Il punto O è detto *centro* della circonferenza e il segmento OA è detto *raggio*.

Si noti che l'insieme dei punti appartenenti ad una circonferenza è non vuoto: il punto A sicuramente vi appartiene. Inoltre, presa una qualsiasi retta r passante per il centro O, l'assioma $(C1)$ ci garantisce l'esistenza di esattamente due punti su tale retta, giacenti da parti opposte rispetto al centro, che verificano la condizione di appartenenza alla circonferenza (Esercizio 17).
Un'ultima osservazione, a partire dalla definizione, riguarda il centro: non è detto che questo sia univocamente determinato, possiamo tuttavia provarlo con la seguente Proposizione.

Proposizione 15. Siano Γ e Γ' due circonferenze rispettivamente di centro O, O' e raggio OA, $O'A'$. Se come insieme di punti $\Gamma = \Gamma'$, allora $O = O'$. Cioè, il centro di una circonferenza è univocamente determinato.

Dimostrazione. Supponiamo che O sia distinto da O'. Possiamo considerare la retta r passante per questi due punti. Poichè r passa per O, cioè per il centro di Γ, per quanto osservato sopra, dovrà incontrare la circonferenza in due punti C e D tali che:

$$C * O * D\,, \quad OC \cong OA \quad \text{e} \quad OD \cong OA.$$

Possiamo anche dire $OC \cong OD$. Con un ragionamento del tutto analogo, considerando che r passa per O', individuiamo i punti C' e D' su Γ'. Dall'ipotesi $\Gamma = \Gamma'$ segue che i punti C e D appartengono anche a Γ', allora sfruttando l'assioma $(C1)$ possiamo dire che C' e D' devono coincidere con C e D (sia ad esempio $C = C'$ e $D = D'$). Risulta perciò: $C * O' * D$ e $O'C \cong O'D$. Senza perdere di generalità sia O collocato tra C e O', ovvero $C * O * O'$; allora avremo anche $O * O' * D$. Da queste relazioni segue:

$$OC < O'C \cong O'D < OD,$$

in contraddizione con $OC \cong OD$. L'assurdo è emerso dall'aver supposto O diverso da O': i due centri devono coincidere. □

Definizione 18. Sia Γ una circonferenza di centro O e raggio OA. Un punto B si dice *interno* a Γ se $B = O$ oppure $OB < OA$. Un punto C si dice *esterno* a Γ se $OA < OC$.

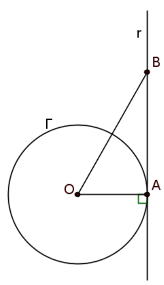
Definizione 19. Diremo che una retta r è *tangente* alla circonferenza Γ se la retta e la circonferenza hanno esattamente un punto in comune.
Diremo che una circonferenza Γ' è *tangente* alla circonferenza Γ se le due circonferenze hanno esattamente un punto in comune.

Proposizione 16. Sia Γ una circonferenza di centro O e raggio OA.

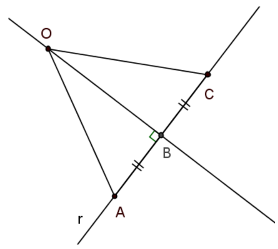
- Sia r la retta perpendicolare al raggio OA nel punto A, allora r è tangente alla circonferenza e, ad eccezione del punto A, tutti i suoi punti giacciono esternamente alla circonferenza.

- Sia r una retta tangente a Γ nel punto A, allora r è perpendicolare al raggio OA. In particolare per ogni punto A appartenente alla circonferenza esiste un'unica retta tangente alla circonferenza passante per tale punto.

Dimostrazione. Assumiamo inizialmente che r sia la retta perpendicolare al raggio OA in A. Prendiamo un qualsiasi punto $B \in r$, diverso da A, individuando il triangolo BOA. Per definizione di perpendicolare l'angolo esterno a $\angle BAO$ è anch'esso un angolo retto, inoltre poichè stiamo lavorando in un Piano di Hilbert, sappiamo che:
- vale il Teorema dell'angolo esterno (Proposizione $(I.16)$ degli Elementi di Euclide che recuperiamo grazie al Teorema 1), quindi $\angle BOA$ e $\angle OBA$ sono minori di un angolo retto; in particolare sono minori dell'angolo $\angle BAO$;
- nel triangolo AOB, da $\angle BAO > \angle OBA$ segue $OB > OA$ (Proposizione $(I.19)$).
Per definizione possiamo dire che B è esterno alla circonferenza e dalla sua arbitrarietà segue la tesi della prima parte della Proposizione: A è l'unico punto comune a r e Γ, tutti gli altri punti di r sono esterni a Γ.



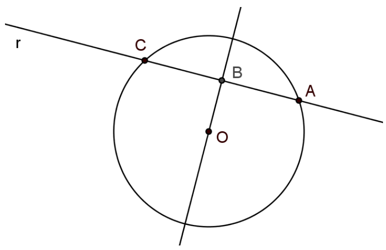
Assumiamo ora che r sia la retta tangente in A alla circonferenza Γ. Dobbiamo provare che r è perpendicolare al raggio OA. Osserviamo che sicuramente OA non può giacere su r, altrimenti tale retta passerebbe per il centro O della circonferenza e quindi avrebbe due punti in comune con essa, contro la definizione di tangente. Consideriamo allora la retta s passante per O e perpendicolare a r.



Chiamiamo B il punto in cui r ed s si incontrano. Se $B \neq A$, consideriamo il punto C dalla parte opposta di B rispetto ad A, tale che $AB \cong BC$ (tale punto esiste per l'assioma $(C1)$). L'assioma $(C6)$ ci garantisce che i triangoli OBA e OBC sono congruenti ed in particolare: $OA \cong OC$. Il punto C appartiene dunque a Γ, ed essendo diverso da A porta a contraddire l'ipotesi di tangenza. Allora necessariamente $B = A$, e di conseguenza avremo r perpendicolare ad OA. $\square$

Corollario 2. Sia data una circonferenza Γ ed un suo punto A. Sia r una retta contenente A e non tangente a Γ, allora r e Γ si intersecano esattamente in due punti distinti.

Dimostrazione. Poichè per ipotesi r non è tangente a Γ dovrà esiste un punto C, diverso da A, appartenente sia alla retta che alla circonferenza. Dobbiamo mostrare che A e C sono gli unici punti comuni a r e Γ.
Per la Proposizione 16 il raggio OA (analogamente il raggio OC) e la retta r non sono perpendicolari; consideriamo quindi la perpendicolare a r passante per il centro O di Γ e chiamiamo B il punto di intersezione tra le due rette (risulterà quindi $B \neq A$ e $B \neq C$).



Ricordando l'Esercizio 24 possiamo dire che i triangoli rettangoli OCB e OAB sono congruenti, ed essendo $C \neq A$ avremo: $A * B * C$ e $AB \cong BC$. Sia ora D un ulteriore punto di r appartenente anche a Γ, cioè tale che $OD \cong OA$. Per la congruenza dei triangoli rettangoli, considerando ora ABO e DBO, possiamo concludere che $AB \cong DB$. L'assioma $(C1)$ ci garantisce allora che D deve coincidere con A o con C, mostrando così che questi sono gli unici due punti di intersezione tra la retta e la circonferenza. $\square$

Proposizione 17. Siano O, O' ed A tre punti allineati e distinti, allora la circonferenza Γ di centro O e raggio OA è tangente alla circonferenza Γ' di centro O' e raggio $O'A$.
D'altra parte, siano Γ e Γ' due circonferenze tangenti in un punto A, allora i loro centri O ed O' sono allineati con il punto A.

Dimostrazione. Assumiamo che i punti O, O' ed A siano allineati. Per come sono state definite le due circonferenze sappiamo che A appartiene ad entrambe; dobbiamo provare che Γ e Γ' non hanno altri punti in comune. Assumiamo che B sia un punto appartenente ad entrambe le circonferenze, diverso da A. Ragionando in modo analogo a quanto visto nella dimostrazione della Proposizione 15 osserviamo che sulla retta OO' non possono giacere altri punti, oltre ad A, appartenenti sia a Γ che a Γ'; quindi B non appartiene a tale retta. Procediamo con la dimostrazione distinguendo due casi a seconda del collocamento dei tre punti O, O' ed A.
CASO1: Sia O' collocato tra O ed A (o analogamente $O' * O * A$), allora poichè $OA \cong OB$ risulta $\angle OAB \cong \angle OBA$ e similmente da $O'A \cong O'B$ segue $\angle O'AB \cong \angle O'BA$ (sfruttando il fatto che angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti, Proposizione (I.5)-Teorema 1). Abbiamo quindi:

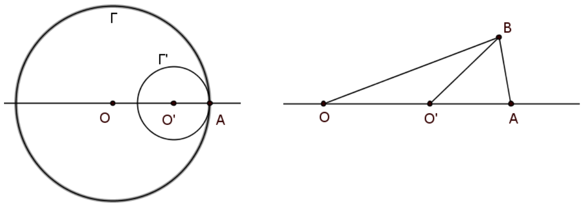
$$\angle OAB \cong \angle OBA,$$

$$\angle OAB = \angle O'AB \cong \angle O'BA,$$

e di conseguenza

$$\angle OBA \cong \angle O'BA,$$

in contraddizione con l'assioma ($C4$).



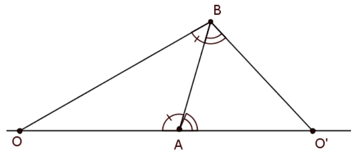
CASO2: Assumiamo $O * A * O'$ e ragioniamo in modo analogo al caso precedente:

$$\text{da} \quad OA \cong OB \quad \text{segue} \quad \angle OAB \cong \angle OBA,$$

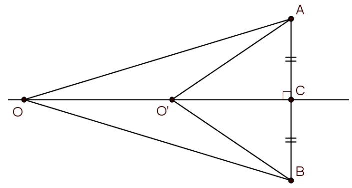
e

$$\text{da} \quad O'A \cong O'B \quad \text{segue} \quad \angle O'AB \cong \angle O'BA.$$

Ora gli angoli $\angle OAB$ e $\angle O'AB$ sono supplementari, ma allora anche $\angle OBA$ e $\angle O'BA$ sono supplementari. Questo ci dice che O, O' e B sono allineati, in contraddizione con la scelta di B.
Siamo giunti in ogni caso ad un assurdo, allora il punto B non esiste e



l'insieme dei punti di intersezione tra Γ e Γ' risulta composto dal solo punto A; per definizione le due circonferenze sono tangenti.
Nella seconda parte della Proposizione abbiamo come ipotesi che Γ e Γ' sono tangenti nel punto A. Assumiamo che O, O' ed A non siano allineati. Prendiamo la retta perpendicolare a quella passante per i due centri delle circonferenze ed indichiamo con C il loro punto di intersezione e con B il punto che verifica: $A * C * B$ e $AC \cong CB$. Dalla congruenza dei triangoli segue che $OA \cong OB$ e $O'A \cong O'B$. In altre parole B appartiene a Γ e a Γ', in contraddizione con l'ipotesi di tangenza. Allora necessariamente O, O' ed A sono allineati.



□

Corollario 3. Due circonferenze (Γ e Γ') che si intersecano in un punto, o sono tangenti, o hanno in comune esattamente due punti.

Dimostrazione. Indichiamo con A il punto comune alle due circonferenze; se è l'unico, per definizione Γ e Γ' sono tangenti. Mostriamo ora che se C è un punto appartenente sia a Γ che a Γ', diverso da A, allora non ce ne possono essere altri. Le due circonferenze avendo in comune i punti A e C non sono tangenti allora, per la Proposizione 17, i punti O, O' ed A non sono allineati. Se B fosse un terzo punto comune alle due circonferenze, cioè tale che $OB \cong OA$ e $O'B \cong O'A$ (ed anche $OB \cong OC$ e $O'B \cong O'C$), per la Proposizione ($I.7$), che sappiamo valere in un piano di Hilbert (Teorema 1), dovrebbe coincidere con A o con C. □

Enunciamo ora l'assioma che regola le intersezioni tra circonferenze. Finora infatti non è emersa una proprietà in grado di garantire quando l'insieme dei punti di intersezione tra due circonferenze è non vuoto.

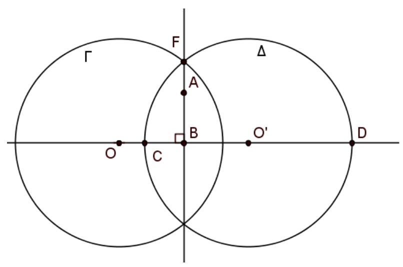
(**E**) Date due circonferenze Γ e Δ, se esistono almeno due punti in Δ, che chiamiamo A e B, tali che A è interno a Γ e B è esterno a Γ, allora Γ e Δ si intersecano.

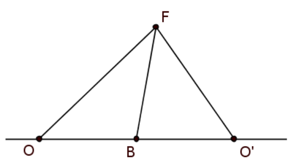
Proposizione 18. [*RCI*] In un piano di Hilbert in cui è soddisfatto anche l'assioma (E) se una retta t contiene un punto A interno alla circonferenza Γ, allora la retta e la circonferenza si intersecano.

Dimostrazione. Supponiamo sia dato un punto A interno alla circonferenza Γ, ed una retta t contenente A. Se il centro O della circonferenza appartiene a t sappiamo che i punti di intersezione tra t e Γ sono esattamente due; considereremo quindi il caso in cui O non appartiene a t. Costruiremo una nuova circonferenza Δ e con l'assioma (E) mostreremo che le due circonferenze si incontrano; tali punti di intersezione saranno anche punti della retta t.
Presa la perpendicolare a t passante per O, sia B il loro punto di incontro (per quanto appena detto B ed O sono punti distinti). Sia O' il punto che verifica:

$$O * B * O' \quad \text{e} \quad O'B \cong OB.$$

Chiamiamo Δ la circonferenza di centro O' e raggio congruente al raggio di Γ. Per semplificare la notazione indicheremo con r la classe di equivalenza dei segmenti congruenti al raggio di Γ. La retta passante per i centri delle circonferenze interseca Δ esattamente in due punti; chiamiamo C il punto dalla stessa parte di O rispetto ad O' e D il punto dalla parte opposta di O rispetto ad O'. Per ipotesi A è interno a Γ, cioè $OA < r$. Allora, considerando il triangolo OAB, possiamo dire che $OB < OA$ e di conseguenza $OB < r$. Allora varrà anche $O'B < r = O'C$, cioè O' e C sono da parti opposte rispetto alla retta t, e di conseguenza O e C sono dalla stessa parte rispetto a t. Vogliamo provare che C è interno a Γ. Distinguiamo due casi:
PRIMO CASO: Se il punto C è collocato tra O e B, allora $OC < OB < r$, quindi C è interno a Γ.
SECONDO CASO: Se il punto O è collocato tra C e B, allora vale anche $C * O * O'$, da cui $OC < O'C = r$ e ancora si osserva che C è interno a Γ.

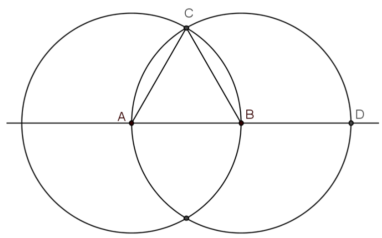




D'altra parte il punto D soddisfa $O * O' * D$, quindi $OD > O'D = r$, quindi D è esterno a Γ. Possiamo ora sfruttare l'assioma (E) per concludere che Γ e Δ si intersecano in un punto F. Ci rimane da mostrare che $F \in t$. Sappiamo che $OF \cong r \cong O'F$ e $OB \cong O'B$ per costruzione, allora possiamo dedurre che i triangoli OFB e $O'FB$ sono congruenti; in particolare $\angle FBO \cong \angle FBO'$. I due angoli sono perciò angoli retti e questo ci permette di dedurre che BF giace su t, in particolare $F \in t$ come volevamo. $\square$

Grazie all'aggiunta dell'assioma (E) possiamo giustificare alcune costruzioni di Euclide. Avevamo ad esempio in sospeso le Proposizioni $(I.1)$ e $(I.22)$; riportiamo qui di seguito la dimostrazione della prima e si rimanda agli Esercizi per la dimostrazione della Proposizione $(I.22)$.

Proposizione $(I.1)$. Mostriamo che è possibile costruire il triangolo equilatero che ha per lato un segmento dato AB.
Consideriamo Γ la circonferenza di centro A e raggio AB e Δ la circonferenza di centro B e raggio BA. La retta AB interseca la circonferenza Δ in due punti, passando per il suo centro B; sappiamo che $A \in \Delta$ e chiamiamo D l'altro punto di intersezione che si trova dalla parte opposte di A rispetto a B. Abbiamo B collocato tra A e D, ovvero $A * B * D$ e quindi $AD > AB$.



Quest'ultima relazione ci dice che D è esterno alla circonferenza Γ, mentre il punto A è interno, essendone il centro. Poichè A e D sono punti di Δ, l'assioma (E) ci garantisce che le due circonferenze si intersecano, e chiamiamo C uno dei punti di intersezione. Allora risulterà:

$$AC \cong AB \cong BA \cong BC,$$

e quindi il triangolo ABC è equilatero. $\square$

Possiamo quindi enunciare il seguente Teorema:

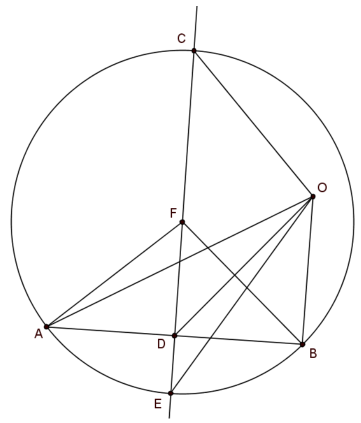
Teorema 2. Tutte le Proposizione del Primo Libro di Euclide da $(I.1)$ a $(I.28)$ possono essere dimostrate in un piano di Hilbert in cui vale anche l'assioma (E).

É possibile enunciare un Teorema analogo per le Proposizioni del Terzo Libro, infatti:

Teorema 3. Tutte le Proposizioni da $(III.1)$ a $(III.19)$ del Terzo Libro degli Elementi di Euclide possono essere dimostrate in un piano di Hilbert in cui vale anche l'assioma (E).

Della sua dimostrazione riporteremo solo alcuni passaggi e note, come abbiamo fatto per il Teorema 1. Iniziamo affrontando più in dettaglio la Proposizione $(III.1)$.

Proposizione $(III.1)$. Mostriamo che in un piano di Hilbert, utilizzando anche l'assioma (E), è possibile determinare il centro di una circonferenza data. Consideriamo il segmento che unisce due punti A e B della circonferenza, che chiameremo Γ. Per la Proposizione $(I.10)$ sappiamo che esiste il punto $D \in AB$ tale che $AD \cong DB$. Nell'Esercizio 26 vedremo che l'interno di una circonferenza è un insieme convesso e quindi che il punto D è interno a Γ. Chiamata r la perpendicolare alla retta AB passante per il suo punto D, la Proposizione 18 (che ricordiamo, abbiamo potuto dimostrare solo grazie all'assioma (E)), ci dice che esistono i punti C, $E \in \Gamma \cap r$.
Detto F il punto medio del segmento CE possiamo concludere che F è il centro di Γ. Supponiamo infatti che il punto O sia il centro di Γ, allora:



$$OA \cong OB \cong OC \cong OE.$$

Congiungiamo O con D e individuiamo i triangoli ADO e ODB, che risultano congruenti per la Proposizione $(I.8)$ essendo:

$$OD \cong OD, \quad OA \cong OB, \quad \text{e} \quad AD \cong DB.$$

In particolare allora $\angle ADO \cong \angle ODB$ e poichè vale $A*D*B$, per definizione, i due angoli sono retti. Il punto O quindi giace necessariamente sulla retta r. Inoltre, poichè $OC \cong OE$ e ricordando l'Esercizio 14 (per il quale se il punto medio di un segmento esiste, allora è unico) il punto O deve coincidere con il punto F. $\square$

Per la Proposizione $(III.2)$ si guardi l'Esercizio 26 (utilizzato anche nella dimostrazione della Proposizione $(III.1)$), che non fa ricorso all'assioma (E). Altre Proposizioni successive non necessitano dell'aggiunta dell'assioma (E), riportiamo ad esempio la Proposizione $(III.5)$.

Proposizione $(III.5)$. Dobbiamo dimostrare che se due circonferenze si secano tra loro, allora non possono avere lo stesso centro.

Chiamiamo C e D i punti di intersezione tra le due circonferenze Γ e Γ'. Supponiamo che esista il punto O, centro delle due circonferenze, e sia r una retta qualsiasi passante per O. Per quanto visto all'inizio di questa Sezione sappiamo che allora esistono i punti A, $B \in r \cap \Gamma$ e A', $B' \in r \cap \Gamma'$. Per il Corollario 3 non potranno esserci altri punti in comune alle due circonferenze, e quindi senza perdere di generalità, possiamo assumere che valga $O * A * A'$, ovvero $OA < OA'$. D'altra parte però abbiamo:

$$OA \cong OC \quad \text{poichè} \quad A, C \in \Gamma,$$

$$OA' \cong OC \quad \text{poichè} \quad A', C \in \Gamma',$$

e quindi per transitività $OA \cong OA'$ in contraddizione con $OA < OA'$. Allora il punto O, centro comune alle due circonferenze, non esiste. □

Per le Proposizioni $(III.11)$ e $(III.12)$ si veda la Proposizione 17; la maggior parte delle restanti Proposizioni necessita solo di alcune note aggiuntive ai passi che si trovano nelle dimostrazioni di Euclide. Una diversa dimostrazione, valida in un qualsiasi piano di Hilbert, va proposta per la Proposizione $(III.14)$ (a riguardo si ripensi all'Esercizio 24).

Procediamo ora definendo una struttura in cui sia verificato anche l'assioma delle Parallele.

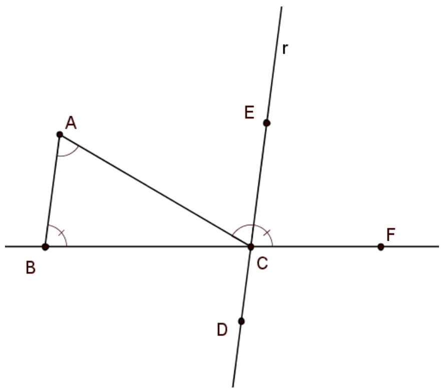
Definizione 20. Un *piano Euclideo* è un insieme costituito da *punti*, da sottoinsiemi detti *rette*, munito delle nozioni primitive di *collocamento, congruenza tra segmenti* e *congruenza tra angoli*, che verifica gli assiomi $(I1)$-$(I3)$, $(B1)$-$(B4)$, $(C1)$-$(C6)$, (E) e (P).

In un piano di Hilbert ci siamo fermati alla dimostrazione della Proposizione $(I.28)$ del Primo Libro degli Elementi. Ora possiamo andare avanti enunciado il seguente Teorema.

Teorema 4. Le Proposizioni da $(I.29)$ a $(I.34)$ si possono dimostrare in un qualsiasi piano di Hilbert in cui vale anche l'assioma (P), quindi in ogni piano Euclideo.

Per la dimostrazione della Proposizione $(I.29)$ si rimanda a [9, pag.113]. La Proposizione $(I.30)$ è conseguenza diretta dell'assioma (P): abbiamo visto nell'Esercizio 4 che in una geometria di incidenza in cui vale anche l'assioma (P) la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza, in particolare quindi varrà la proprietà transitiva. La Proposizione $(I.31)$, già sfruttata nell'Esercizio 25 dove abbiamo inserito un accenno della dimostrazione, non necessita dell'assioma di Playfair. Andiamo quindi a provare la Proposizione $(I.32)$ che, come le rimanenti, segue il profilo della dimostrazione di Euclide, ma a differenza delle altre necessita di una nuova riformulazione dell'enunciato.

Proposizione ($I.32$). Proviamo che "in un piano Euclideo la somma di due angoli interni di un triangolo è supplementare del terzo".
Si noti che in questo contesto non possiamo dire che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti, non essendo quest'ultimo un angolo. Iniziamo la dimostrazione chiamando il nostro triangolo di



partenza ABC e tracciamo la retta r parallela alla retta AB passante per il punto C (tale retta esiste per la Proposizione ($I.31$)). Sia E un punto di r dalla stessa parte di A rispetto alla retta BC e sia F un punto che verifica $B * C * F$. Questa costruzione ci permette di dire che la semiretta $\overrightarrow{CE}$ è interna all'angolo $\angle ACF$. Inoltre, per le Proposizioni ($I.28$) e ($I.29$), si ha:

$$\angle BAC \cong \angle ACE, \quad \text{e} \quad \angle ABC \cong \angle ECF.$$

Allora:

$$\angle ACF = \angle ACE + \angle ECF \cong \angle BAC + \angle ABC,$$

ed essendo $\angle ACF$ il supplementare di $\angle ACB$ abbiamo la tesi. $\square$

Ai fini di fondare i risultati dei libri I e III degli Elementi di Euclide non sono necessari ma, per completezza, enunciamo gli assiomi di Archimede e Dedekind:

(A) **(Assioma di Archimede)** Dati i segmenti AB e CD, esiste un numero naturale n tale che la somma di n copie di AB è maggiore di CD. *In altre parole possiamo dire che:* preso un segmento AB e due punti distinti C e D, esiste un numero naturale n tale che se da C si fanno susseguire n copie del segmento AB, sulla retta CD, si riesce a determinare un punto E tale che: $E = D$ oppure $C * D * E$.

(D) **(Assioma di Dedekind)** Supponiamo che i punti di una retta r siano divisi in due insiemi non vuoti S e T in modo che nessun punto di S sia compreso tra due punti di T e nessun punto di T sia compreso tra due punti di S. Allora esiste un unico punto P tale che per ogni $A \in S$ e per ogni $B \in T$:

$$A = P \quad \text{o} \quad B = P \quad \text{o} \quad A * P * B.$$

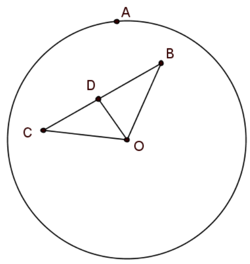
Il punto P viene detto *punto di separazione*.

Aggiungendo (D) agli assiomi che definiscono un piano Euclideo si trova un sistema di assiomi categorico, ovvero: tale sistema di assiomi caratterizza per via sintetica il piano cartesiano Reale.

1.6.1 Esercizi

Esercizio 26 (Esercizio 11.1). $\star$ *Mostrare che l'interno di una circonferenza è un* insieme convesso: *se B e C sono punti interni alla circonferenza e D verifica $B * D * C$, allora anche D è interno alla circonferenza. (Tale enunciato equivale a quello della Proposizione ($III.2$))* $\star$

Sia O il centro della circonferenza e A un punto su di essa. Per ipotesi: $OB < OA \quad e \ OC < OA$.
Se $OB \cong OC$, consideriamo il triangolo OBC, che risulta in questo caso



isoscele. Allora $\angle OBC \cong \angle OCB$. Poichè per ipotesi D è allineato con B e C ed è collocato tra B e C possiamo considerare il Teorema dell'angolo esterno (Proposizione ($I.16$)) ed osservare che:

$$\angle ODB > \angle OCD = \angle OCB,$$

ma

$$\angle OCB \cong \angle OBC = \angle OBD,$$

allora

$$\angle ODB > \angle OBD,$$

da cui

$$OB > OD.$$

Quindi possiamo concludere, come volevamo, che:

$$OA > OD,$$

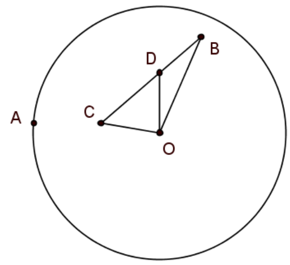
essendo $OA > OB$ e $OB > OD$.
Se $OB > OC$ (si procede analogamente per $OB < OC$), nel triangolo OBC avremo $\angle OBC < \angle OCB$. Ancora sfruttando il Teorema dell'angolo esterno (Proposizione ($I.16$)):

$$\angle ODB > \angle OCD,$$

$$\angle OCD = \angle OCB > \angle OBC,$$

da cui

$$\angle ODB > \angle OBC = \angle OBD,$$



e quindi

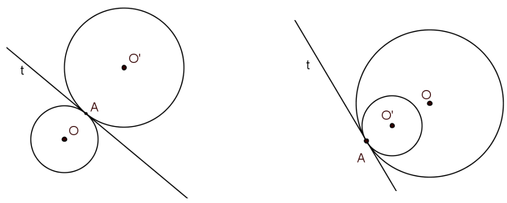
$$OB > OD.$$

Possiamo concludere come nel caso precedente che D è interno alla circonferenza poichè $OA > OD$.
NOTA: *Se i punti B e C appartengono alla circonferenza la dimostrazione continua a valere. Possiamo quindi dire che per ogni punto $D \in BC$:*

$$\text{se} \quad OB \leq OA \quad \text{e} \quad OC \leq OA \quad \text{allora} \quad OD < OA.$$

Esercizio 27 (Esercizio 11.2)**.** $\star$ *Siano date due circonferenze Γ e Γ' di centro rispettivamente O ed O'. Se le due circonferenze si incontrano in un punto A, mostrare che sono tangenti se e solo se la retta tangente a Γ in A coincide con la retta tangente a Γ' in A.* $\star$

Sarà importante tenere presente in tutta la dimostrazione la Proposizione 16. Iniziamo mostrando che se Γ e Γ' sono tangenti e t è la retta tangente a Γ in A, allora t è tangente anche a Γ' in A.
Osserviamo che se Γ è tangente a Γ' e si incontrano in A, necessariamente A è il punto di tangenza tra le due circonferenze. Allora i punti O, A e O' sono allineati (Proposizione 17) e possiamo distinguere due casi (come mostrato in figura):



- assumiamo che A sia compreso tra O ed O', allora preso $P \in t$, gli angoli $\angle OAP$ e $\angle PAO'$ sono supplementari ed essendo, come conseguenza della tangenza di t a Γ, l'angolo $\angle OAP$ un angolo retto, anche $\angle PAO'$ sarà retto. Equivalentemente possiamo dire che t è perpendicolare a AO' e quindi

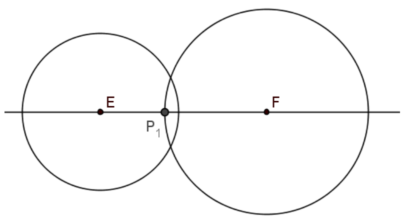
che t è tangente in A a Γ'.
- Nel caso invece in cui valga $O * O' * A$ (o analogamente $O' * O * A$), prendiamo ancora $P \in t$. Essendo t tangente in A a Γ, l'angolo $\angle OAP$ è retto. Ma ora $\angle OAP = \angle O'AP$, quindi anche quest'ultimo è retto e di conseguenza t risulta tangente in A anche alla circonferenza Γ'.
Resta da provare che se Γ e Γ' si incontrano in un punto A e una retta t è tangente in A a Γ se e solo se t è tangente in A a Γ', allora le circonferenze Γ e Γ' sono tangenti tra loro.
Sia P un punto della retta t che è tangente in A alle due circonferenze. Abbiamo quindi come conseguenza delle ipotesi che gli angoli $\angle OAP$ e $\angle O'AP$ sono retti. Se O e O' sono da parti opposte rispetto a t, i due angoli risultano supplementari, quindi O, A e O' sono allineati. Se invece O ed O' sono dalla stessa parte rispetto a t, per l'assioma $(C4)$ i due angoli coincidono e quindi anche in questo caso O, O' e A sono allineati. In ogni caso possiamo concludere che le circonferenze Γ e Γ' sono tangenti (ancora per la Proposizione 17).

Esercizio 28 (Esercizio 11.5). $\star$ *Siano dati tre segmenti qualsiasi tali che la somma di due risulti sempre maggiore del terzo. Usare l'assioma (E) per giustificare la costruzione di Euclide di un triangolo con i lati congruenti ai tre segmenti dati. (Proposizione $(I.22)$)* $\star$

Per ipotesi abbiamo AB, CD e EF tali che:

$$AB < CD + EF, \quad CD < EF + AB \quad e \quad EF < AB + CD.$$

Possiamo assumere $AB < CD < EF$.
Sia $\mathcal{C}_1$ l'insieme dei punti P (del piano di Hilbert) tali che $EP \cong AB$ e $\mathcal{C}_2$ l'insieme dei punti Q tali che $FQ \cong CD$. Le due circonferenze appena determinate (che hanno centro in E ed F e raggio rispettamente EP ed FQ), dovendo rispettare le relazioni: $AB < CD < EF$ e $EF < AB+CD$, saranno necessariamente poste come in figura (e non una interna all'altra o esterne).



Per l'assioma $(C1)$ possiamo considerare sulla semiretta $\overrightarrow{FE}$ un punto P_1 tale che $P_1F \cong CD$, allora $P_1 \in \mathcal{C}_2$. Possiamo inoltre osservare, come conseguenza dell'ipotesi $CD < EF$ che vale $E * P_1 * F$. Allora:

$$EP_1 + P_1F = EF < AB + CD \cong AB + P_1F,$$

da cui $EP_1 < AB$, cioè P_1 è interno alla circonferenza $\mathcal{C}_1$.
D'altra parte esisterà un punto P_2 sulla semiretta uscente da F opposta a $\overrightarrow{FE}$ tale che $P_2F \cong CD$. Allora $P_2 \in \mathcal{C}_2$ e risulta $E * F * P_2$. Ora:

$$EP_2 = EF + FP_2 \cong EF + CD > AB,$$

da cui si deduce che P_2 è esterno alla circonferenza $\mathcal{C}_1$.
Abbiamo quindi un punto di $\mathcal{C}_2$ interno, ed uno esterno, a $\mathcal{C}_1$. Per l'assioma (E) le due circonferenze si intersecano. Detto G uno dei punti di intersezione, il triangolo EFG è un triangolo con i lati congruenti ai segmenti dati, infatti:

$$EG \cong AB, \quad GF \cong CD \quad e \quad EF = EF.$$

Esercizio 29 (Esercizio 12.2). ⋆ *Mostrare che in un piano di Hilbert l'assioma di Dedekind implica l'assioma di Archimede.* ⋆

Consideriamo un segmento AB e siano C e D due punti distinti. Detta r la semiretta con origine C e passante per D, definiamo T come l'insieme dei punti $E \in r$ per i quali non esiste un intero n tale che $nAB > CE$. Sia S l'insieme dei punti di r complementare a T. Vogliamo dimostrare che se vale l'assioma (D) allora l'insieme T è vuoto.
Assumiamo che T non sia vuoto. L'assioma $(C1)$ ci garantisce che l'insieme S è non vuoto. Osserviamo ora che nessun punto di T è compreso tra due punti di S e che nessun punto di S è compreso tra due punti di T. Infatti, se esistesse $T_1 \in T$ tale che $S_1 * T_1 * S_2$ con S_1, $S_2 \in S$, a seconda della posizione di C rispetto ad S_1 e S_2, abbiamo due possibilità:

$$CT_1 < CS_1 \quad \textit{oppure} \quad CT_1 < CS_2,$$

ed essendo S_1, $S_2 \in S$ abbiamo:

$$CT_1 < CS_1 < n_1AB \quad \textit{oppure} \quad CT_1 < CS_2 < n_2AB,$$

quindi in ogni caso esiste un intero tale che $CT_1 < n_iAB$ (con $i = 1$ o 2) in contraddizione con l'aver preso $T_1 \in T$. Analogamente se esistesse $S_1 \in S$ tale che $T_1 * S_1 * T_2$ con T_1, $T_2 \in T$, a seconda della posizione di C rispetto a T_1 e T_2, abbiamo due possibilità:

$$CT_1 < CS_1 \quad \textit{oppure} \quad CT_2 < CS_1,$$

ed essendo $S_1 \in S$ abbiamo:

$$CT_1 < CS_1 < nAB \quad \textit{oppure} \quad CT_2 < CS_1 < nAB,$$

trovando in ogni caso una contraddizione con l'avere T_1 e $T_2 \in T$.
Allora per l'assioma di Dedekind possiamo dire che esiste un punto $O \in r$

tale che per ogni $P \in S$ e per ogni $Q \in T$ verifica $P = O$, $Q = O$ oppure $P * O * Q$.
Essendo r l'unione disgiunta degli insiemi S e T, ed essendo $O \in r$, si presentano due possibilità: $O \in S$ oppure $O \in T$. Nel caso in cui $O \in S$ abbiamo che $nAB > CO$ e possiamo prendere un punto Q che verifica $C * O * Q$ e $OQ \cong AB$. Allora:

$$CQ = CO + OQ < (n+1)AB,$$

ma per come è definito O, necessiaramente il punto $Q \in T$, in contraddizione con quanto appena trovato. Se invece $O \in T$ possiamo considerare un punto P, dalla stessa parte di C rispetto al punto O, tale che $OP \cong AB$. Il punto P apparterrà all'insieme S, allora esisterà n per cui:

$$nAB > CP,$$

e di conseguenza

$$(n+1)AB > CO,$$

in contraddizione con l'avere $O \in T$. Abbiamo perciò trovato in ogni caso un assurdo, che viene dall'aver posto l'insieme T diverso dal vuoto. I punti di r appartengono tutti ad S, quindi l'assioma di Archimede è verificato.

Capitolo 2

Fondamenti della geometria analitica nel piano. Verifica degli assiomi della geometria sintetica.

In questo Capitolo andremo a costruire la geometria a partire da un campo. Se finora abbiamo visto come fondare le basi dei nostri studi su assiomi geometrici, vediamo ora come farlo sfruttando la definizione di campo, quindi un concetto algebrico.
Mostreremo che affinchè gli assiomi di Incidenza siano soddisfatti ci basterà partire da un campo qualsiasi, per gli altri sono necessarie ulteriori proprietà, ad esempio per quelli di Collocamento è necessario che il campo sia ordinato e affinchè sia soddisfatto l'assioma $(C1)$ il campo dovrà essere Pitagorico. Particolare attenzione sarà da rivolgere alla Sezione 2.3 in cui discuteremo dei Movimenti Rigidi. Riusciremo infatti qui a giustificare il metodo della sovrapposizione utilizzato da Euclide per mostrare la congruenza tra figure, sovrapponendole. Nessuno dei suoi assiomi o postulati però giustificava questo procedimento, che invece ora renderemo rigoroso.
L'ultima Sezione presenta esempi di piani cartesiani definiti a partire da particolari campi, come il campo dei numeri costruibili.

2.1 Il piano cartesiano su un campo F. Verifica degli assiomi di incidenza e collocamento nel modello cartesiano

Per ottenere il modello di una geometria a partire da un campo si dovrà: *interpretare* i concetti indefiniti che la caratterizzano (punti, rette, collocamento e congruenza) e poi dimostrare che con tale interpretazione gli assiomi che ci interessano sono soddisfatti. Iniziamo quindi questa Sezione parlando di punti e rette, definendoli a partire da un generico campo F.

Definizione 21. Il piano Π (o Π_F), detto *piano Cartesiano sul campo* F, è l'insieme F^2 di coppie ordinate di elementi di F. Chiamiamo tali coppie *punti* di Π, e *rette* i sottoinsiemi definiti da un'equazione lineare:

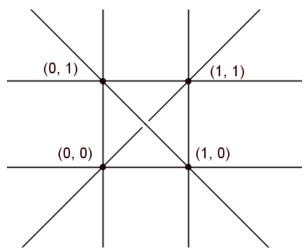
$$ax + by + c = 0,$$

con a, b e $c \in F$ e a, b non entrambi nulli.
Ogni retta può anche essere scritta in una delle due seguenti forme:

$$y = mx + q \quad \text{o} \quad x = c.$$

Nel primo caso diciamo che la retta ha coefficiente angolare m, nel secondo caso la retta si dice *verticale* e il coefficiente angolare è ∞ (quest'ultimo non è un elemento del campo F, ma solo un simbolo).

Per esibire un esempio di piano Cartesiano ci basta considerare il campo composto dall'insieme con due soli elementi $F = \{0, 1\}$, con addizione e moltiplicazione. In questo caso il piano Π_F è composto da quattro punti e le rette del piano sono sei, come si vede dalla figura che lo schematizza. Notiamo che le due "diagonali" non si intersecano in questa geometria ed



inoltre tutti e tre gli assiomi di Incidenza sono verificati. Possiamo più in generale dimostrare che:

Proposizione 19. Dato F un campo qualsiasi, il piano cartesiano Π_F soddisfa gli assiomi di Incidenza $(I1)$, $(I2)$, $(I3)$ e l'assioma delle Parallele (P). In particolare il piano Π_F è un piano affine. [1]

Dimostrazione. Siano $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ due punti del piano Π_F, allora l'equazione lineare:

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_A y_B - x_B y_A) = 0$$

ha tutti i coefficienti in F e rappresenta la retta passante per A e B provando che l'assioma $(I1)$ è verificato.

[1] Per la definizione di piano affine si rimanda all'Esercizio 3, nella Sezione 1.1.

Per trattare l'assioma $(I2)$ ricordiamo che il campo F ha almeno due elementi: 0 e 1. Dobbiamo mostrare che ogni retta ha almeno due punti e possiamo farlo ponendo $x = 0,\ 1$ nell'equazione $ax + by + c = 0$ nel caso in cui $b \neq 0$, altrimenti (e ora necessariamente avremo $a \neq 0$), troviamo le coordinate di due punti della retta ponendo $y = 0,\ 1$.
I punti $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ appartengono al piano Π_F e non esiste nessuna retta che li contenga tutti e tre, infatti il seguente sistema nelle incognite a, b e c ha come unica soluzione $(0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c = 0 \end{cases}$$

Questo prova che anche l'assioma $(I3)$ è verificato.
Infine, per quanto riguarda l'assioma delle Parallele, data una retta $ax + by + c = 0$ ed un punto $P = (x_0, y_0)$, l'equazione $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ ci fornisce la retta parallela a quella data, passante per P. $\square$

Ricordando che due rette sono parallele se non hanno punti in comune e che ogni retta è parallela a se stessa, osserviamo che: una retta della forma $y = mx + q$ non è mai parallela ad una retta verticale. Infatti sia data la retta $x = t$ sostituendo in $y = mx + q$ si determina un valore di y e quindi le coordinate di un punto che sarà il punto di intersezione delle due rette. Si noti che queste due rette hanno rispettivamente coefficiente angolare uguale ad m e ∞. Possiamo più in generale dire che: "due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare". Assumiamo che le due rette abbiano lo stesso coefficiente angolare. Se il coefficiente angolare è ∞ le due rette sono verticali e hanno quindi equazione $x = c$ e $x = c'$; in particolare se $c = c'$ le due rette coincidono, altrimenti non hanno alcun punto in comune. Se le due rette hanno coefficiente angolare uguale a m, saranno entrambe della forma $y = mx + q$ e il seguente sistema, che ci permette di determinare se le rette hanno punti in comune:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q', \end{cases}$$

essendo $m = m'$, sarà impossibile o indeterminato. Se $q \neq q'$ le rette non avranno punti in comune e se invece anche $q = q'$ le due rette risulteranno coincidenti. In ogni caso abbiamo provato che se il coefficiente angolare è lo stesso, le rette sono parallele. Viceversa, se prendiamo due rette parallele, per quanto detto sopra dovranno essere o entrambe verticali, e allora è immediato notare che il coefficiente angolare è lo stesso ed è uguale a ∞, o saranno entrambe della forma $y = mx + q$. Allora se le rette sono parallele e distinte il sistema dovrà risultare impossibile e indeterminato se le due rette sono coincidenti; in ogni caso avremo $m = m'$.

Proposizione 20. Nel piano Cartesiano Π_F sul campo F è possibile introdurre un cambiamento di variabili del tipo:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f, \end{cases}$$

in modo che i nuovi assi coordinati siano due qualsiasi rette incidenti e i punti unitari due qualsiasi punti su di esse, diversi dal loro punto di intersezione.

Dimostrazione. Per iniziare consideriamo alcuni particolari cambiamenti di variabili:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b, \end{cases}$$

permette di spostare l'origine $(0,0)$ nel punto $E = (a,b)$;

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by, \end{cases}$$

muove i punti unitari in altri punti sugli stessi assi;

$$\begin{cases} x' = x - ay \\ y' = y, \end{cases}$$

è il cambiamento di varibili che lascia fisso l'asse x e sposta l'asse y in un'altra retta passante per l'origine. Analogamente si può determinare la trasformazione che lascia fisso l'asse y e sposta l'asse x.
Poichè la combinazione di cambiamenti di variabili dà ancora un cambiamento di variabili dello stesso tipo, possiamo trovare una trasformazione che sposta l'origine degli assi in un altro qualsiasi punto e sposta anche i punti unitari.
Si noti che essendo questi cambiamenti di variabili lineari, anche nel nuovo sistema coordinato le rette saranno rappresentate da equazioni lineari. Sarà del tutto equivalente descrivere la geometria del piano Π_F usando le vecchie o le nuove coordinate. □

Andando di pari passo con il Capitolo precedente procediamo parlando della relazione di collocamento. L'interpretazione di quest'ultima in un piano Cartesiano su un campo F non sarà però sempre possibile, dovremo infatti imporre una struttura aggiuntiva al campo per poter definire nel piano Π_F una relazione di collocamento. Definiamo a tale proposito un *campo ordinato*:

Definizione 22. Un campo F si dice *ordinato* se ammette un sottoinsieme P, i cui elementi sono detti *positivi*, che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) Se $a,\ b \in P$ allora $a + b \in P$ e $a \cdot b \in P$.

(ii) Per ogni $a \in F$, una ed una sola delle seguenti affermazioni è vera:

$$a \in P, \quad a = 0, \quad -a \in P.$$

Talvolta a partire dallo stesso campo è possibile imporre una struttura di ordine in più modi. Sia $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (sottocampo di $\mathbb{R}$), possiamo ordinare tale campo prendendo P come l'insieme degli elementi di F che sono positivi in $\mathbb{R}$; otteniamo tuttavia un campo ordinato anche considerando l'applicazione $\phi : F \to \mathbb{R}$ tale che $\phi(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$ per ogni a, $b \in \mathbb{Q}$ e prendendo P come l'insieme degli elementi $x \in F$ tali che $\phi(x) > 0$ in $\mathbb{R}$.

Proposizione 21. Sia F con il sottoinsieme P un campo ordinato, allora:

(a) L'elemento 1 è positivo, cioè $1 \in P$.

(b) La caratteristica del campo F è zero.

(c) Il più piccolo sottoinsieme di F contenente 1 è isomorfo a $\mathbb{Q}$.

(d) Per ogni $a \in F$ e $a \neq 0$, $a^2 \in P$.

Dimostrazione. Per provare il punto (a) ricordiamo che in ogni campo $1 \neq 0$. Se fosse $-1 \in P$ allora anche $(-1) \cdot (-1) = 1 \in P$, ma per come si definisce l'insieme degli elementi positivi è impossibile che sia 1 che -1 stiano in P, allora necessariamente $1 \in P$. Da questo segue che anche $1+1+\cdots+1 \in P$, ovvero sommando un qualsiasi numero di volte l'elemento 1 a se stesso si ottiene ancora un elemento di P, quindi tale somma è sempre diversa da 0, in altre parole la caratteristica del campo F è zero. Questo ci garantisce inoltre l'iniettività della mappa che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa l'elemento $1+1+\cdots+1$ (n volte) di F e che possiamo estendere iniettivamente in una mappa da $\mathbb{Q}$ in F. L'immagine di quest'ultima è isomorfa a $\mathbb{Q}$ e coincide con il più piccolo sottocampo di F contenente 1. Infine se $a \neq 0$, necessariamente:

$$a \in P \quad \Rightarrow \quad a \cdot a = a^2 \in P,$$

oppure

$$-a \in P \quad \Rightarrow \quad -a \cdot -a = a^2 \in P,$$

provando quanto richiesto nell'ultimo punto. □

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, dove il ruolo di P è giocato dal sottoinsieme dei numeri razionali positivi, è un esempio di campo ordinato. Il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con il sottoinsieme dei numeri positivi invece non lo è; osserviamo infatti che $(i)^2 = -1$ non è un numero positivo e quindi la proprietà (d) non è verificata.

Proposizione 22. In un campo ordinato F *definiamo* $a > b$ se $a - b \in P$ e $a < b$ se $b - a \in P$; allora sono verificate le seguenti proprietà:

(i) Se $a > b$ e $c \in F$, allora $a + c > b + c$.

(ii) Se $a > b$ e $b > c$ allora $a > c$.

(*iii*) Se $a > b$ e $c > 0$ allora $ac > bc$.

(*iv*) Dati a, $b \in F$ una e una sola delle seguenti relazioni è verificata:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

(La dimostrazione di tutti e quattro i punti è conseguenza immediata della definizione di campo ordinato.)

Proposizione 23. Sia F un campo e nel piano Π_F sia definita una relazione di collocamento che soddisfa gli assiomi $(B1) - (B4)$, allora F è un campo ordinato. D'altra parte se F con un suo sottoinsieme P forma un campo ordinato, allora è possibile definire una relazione di collocamento che soddisfa gli assiomi $(B1) - (B4)$ nel piano cartesiano Π_F.

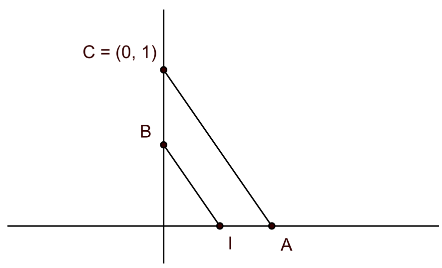
Dimostrazione. Supponiamo che F sia un campo e che nel piano Π_F sia definita una relazione di collocamento che soddisfa $(B1) - (B4)$. Definiamo $P \subset F$ come l'insieme di tutti gli elementi $a \in F$ tali che $a \neq 0$ e il punto A di coordinate $(a, 0)$ dell'asse x appartiene alla semiretta uscente da $O = (0, 0)$ contenente anche $(1, 0)$. Poichè l'addizione di due elementi di P, ad esempio a e b, corrisponde al porre segmenti consecutivamente sull'asse x, allora anche $a + b \in P$. Siano poi a, $b \in P$ e r la retta passante per $A = (a, 0)$ e $C = (0, 1)$:

$$r : \quad (1 - 0)x + (a - 0)y - a = 0.$$

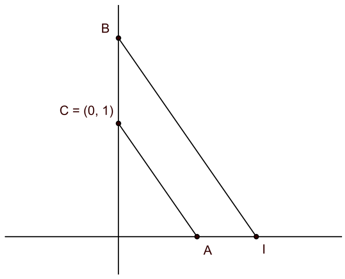
Determiniamo la retta s, passante per il punto $B = (0, b)$ e parallela ad r:

$$s : \quad x + a(y - b) = 0.$$

Essendo $b \in P$, anche sull'asse y il punto $(0, b)$ starà dalla stessa parte di $(0, 1)$ rispetto all'origine; si presentano tuttavia due possibilità: $O * B * C$ oppure $O * C * B$. Osserviamo il triangolo OAC; se vale $O * B * C$ la retta s intercetta nel punto B il lato CO, allora per l'assioma $(B4)$ dovrà intercettare anche OA (se intersecasse AC troveremmo un assurdo essendo per costruzione s parallela a r). Allora tale punto di intersezione, di coordinate $I = (ab, 0)$, verifica la relazione $O * I * A$, perciò risulta anch'esso dalla stessa parte di $(1, 0)$ rispetto all'origine e quindi $ab \in P$. D'altra parte se



valesse $O * C * B$, detto I il punto di intersezione tra s e l'asse x, potremmo considerare il triangolo OBI ed osservare che ora la retta r intercetta il lato OB e quindi ancora per l'assioma $(B4)$ dovrà intercettare anche il lato OI. Poichè quest'ultimo giace sull'asse x, tale punto di intersezione sarà necessariamente il punto A, che quindi verifica $O * A * I$, da cui segue che I giace dalla stessa parte di $(1, 0)$ rispetto all'orgine e di conseguenza $ab \in P$.



Abbiamo così provato che P soddisfa la prima proprietà presente nella definizione di campo ordinato. Osservando poi che per costruzione F è l'unione disgiunta di P, 0 e $-P$ possiamo concludere che F è un campo ordinato.
Supponiamo ora di avere F, con sottoinsieme P, un campo ordinato. Definiamo in Π_F una relazione di collocamento: presi $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ tre punti distinti, allineati su una retta di equazione $y = mx+q$, diremo che B è collocato tra A e C $(A * B * C)$ se:

$$a_1 < b_1 < c_1 \quad \text{oppure} \quad a_1 > b_1 > c_1,$$

altrimenti, cioè se la retta è verticale, la stessa relazione di collocamento varrà se:

$$a_2 < b_2 < c_2 \quad \text{oppure} \quad a_2 > b_2 > c_2.$$

Dobbiamo verificare gli assiomi $(B1)-(B4)$: il primo viene immediatamente dalla definizione, in particolare osserviamo che $A * B * C$ vale se:

$$a_1 * b_1 * c_1 \quad \text{cioè} \quad a_1 < b_1 < c_1 \quad \text{o} \quad c_1 < b_1 < a_1$$

oppure

$$a_2 * b_2 * c_2 \quad \text{cioè} \quad a_2 < b_2 < c_2 \quad \text{o} \quad c_2 < b_2 < a_2,$$

quindi è soddisfatta anche $C * B * A$.
Siano dati i punti distinti $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ e sia $ax + by + c = 0$ la retta che li contiene. Nel caso i punti non siano allineati verticalmente, ricordando la Proposizione 22, dovrà valere $a_1 < b_1$ oppure $a_1 > b_1$. Nel primo caso la soluzione del seguente sistema ci dà le coordinate del punto C, che per costruzione è allineato con A e B, è da loro distinto e verifica $a_1 < b_1 < c_1$, cioè $A * B * C$:

$$\begin{cases} x = b_1 + 1 \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

Se invece $a_1 > b_1$ procediamo in modo analogo ma il sistema da considerare sarà:

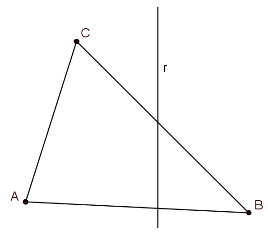
$$\begin{cases} x = b_1 - 1 \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

Nel caso in cui i punti appartengano ad una retta verticale di equazione $x = t$ (quindi $a_1 = t = b_1$) procediamo allo stesso modo ma lavorando con la seconda coordinata.
Ora, se a, b e c sono tre elementi distinti di F una ed una sola delle seguenti relazioni è verificata:

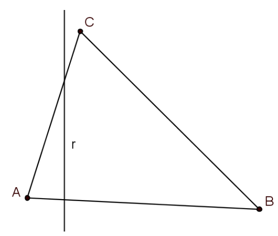
$$a < b < c, \qquad a < c < b, \qquad b < a < c,$$

$$c < b < a, \qquad b < c < a, \qquad c < a < b,$$

da cui si deduce che anche l'assioma $(B3)$ è soddisfatto.
Infine sia ABC un triangolo e r una retta che interseca il lato AB. Un cambiamento di coordinate preserva o inverte tutte le disuguaglianze. Allora, per come abbiamo definito la relazione di collocamento, a meno di cambiamento di coordinate, possiamo supporre che r sia una retta verticale. Sia $x = d$ la sua equazione. Indichiamo con a, b e c la prima coordinata dei punti A, B e C (per provare l'assioma è assunto che d sia diverso da a, b e c altrimenti la retta passerebbe per uno dei vertici del triangolo). Dalle ipotesi segue che: $a < d < b$ oppure $b < d < a$. Per la simmetria del problema possiamo assumere che valga $a < d < b$. Ora, se $c < d$ dalla Proposizione 22 segue $c < d < b$ e quindi r interseca il lato CB (ma non AC perchè essendo $a < d$ e $c < d$ sicuramente non può esistere $D \in r$ che verifica $A * D * C$);



se invece $c > d$ troviamo $a < d < c$ ed in questo caso la retta r interseca il lato AC e non BC.



Così anche l'assioma $(B4)$ è soddisfatto. $\square$

2.2 Il piano cartesiano su campi pitagorici e euclidei - Verifica degli assiomi di congruenza e dell'assioma per le intersezioni nel modello cartesiano

Come accennato nella Sezione precedente il campo $\mathbb{Q}$, con il sottoinsieme dei numeri positivi, ci fornisce un buon esempio di campo ordinato. Perciò, per quanto detto sinora, nel piano cartesiano razionale $\mathbb{Q}^2$ gli assiomi $(I1) - (I3)$, $(B1) - (B4)$ sono verificati. Possiamo tuttavia osservare che definita una funzione distanza tra due punti $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$:

$$\mathrm{dist}^2(A, B) = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2,$$

e interpretando il concetto di congruenza dicendo che il segmento AB è congruente al segmento CD se:

$$\mathrm{dist}^2(A, B) = \mathrm{dist}^2(C, D),$$

l'assioma $(C1)$ non è verificato. Per mostrarlo consideriamo la semiretta s, di origine O, composta dai punti dell'asse x con ascissa positiva. Presi i punti $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$ calcoliamo:

$$\mathrm{dist}^2(A, B) = (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2 = 2.$$

Non è possibile determinare un punto $D \in s$ tale che $OD \cong AB$. Infatti il punto D dovrebbe avere coordinate $(x, 0)$, con $x \in \mathbb{Q}$, e:

$$x^2 = 2.$$

Abbiamo voluto proporre questo esempio, che ci evidenzia che a partire da un campo ordinato F non è detto che Π_F verifichi gli assiomi di congruenza, come presentazione di questa Sezione. Infatti andremo ora ad introdurre il concetto di congruenza per segmenti ed angoli in un piano Π_F associato ad un campo ordinato F.

Sfruttando la Proposizione 23 possiamo dire che un *segmento* AB è l'insieme formato dai punti A, B e tutti quelli collocati tra A e B. Dati i punti $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ consideriamo la funzione:

$$\mathrm{dist}^2(A, B) = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2.$$

(Vorremmo definire la congruenza a partire dall'usuale distanza euclidea, ma il campo F non è detto che sia munito della radice quadrata.) Si noti che se A e B sono punti distinti allora $\mathrm{dist}^2(A, B) > 0$.
Con questi elementi siamo in grado di stabilire quando due segmenti sono congruenti, infatti:

Definizione 23. Due segmenti AB e CD in un piano cartesiano Π_F, con F campo ordinato, si dicono *congruenti* se:

$$\mathrm{dist}^2(A,B) = \mathrm{dist}^2(C,D).$$

Analogamente definiremo la congruenza tra angoli a partire da una funzione: la tangente. (Non scordiamo però che stiamo lavorando su campi qualsiasi, e quindi non possiamo assumere a priori proprietà che ci sono note dalla trigonometria.)

Definizione 24. Diremo che un angolo formato dalle semirette s ed r, rispettivamente di coefficiente angolare m ed m', è un *angolo retto* se è soddisfatta l'equazione: $mm' = -1$. Diremo che un angolo è *acuto* se è interno ad un angolo retto, mentre diremo che è *ottuso* se contiene al suo interno un angolo retto.

Definizione 25. Sia α un angolo formato dalle semirette r e r', rispettivamente di coefficiente angolare m e m'. La *tangente* di α è:

$$\tan\alpha = \pm\left|\frac{m'-m}{1+mm'}\right|,$$

dove prendiamo il segno $+$ se α è acuto e il segno $-$ se ottuso. Diremo che la tangente di un angolo retto è ∞; inoltre nel caso in cui uno dei due coefficienti angolari sia ∞ poniamo:

$$\frac{\infty - m}{1+m\cdot\infty} = \frac{1}{m}.$$

(Si noti che non si può presentare il caso $\infty - \infty$ in quanto, per come è stato definito, un angolo non può essere mai generato da semirette con lo stesso coefficiente angolare.)

Definizione 26. Due angoli, α e β, di un piano cartesiano su un campo ordinato F si dicono *congruenti* se hanno la stessa tangente:

$$\tan\alpha = \tan\beta.$$

Proposizione 24. Sia F un campo ordinato, allora il piano cartesiano Π_F soddisfa gli assiomi $(C2)-(C5)$. L'assioma $(C1)$ vale se e solo se il campo F soddisfa la seguente condizione:

(∗) per ogni elemento $a \in F$, l'elemento $\sqrt{1+a^2} \in F$. Ovvero il campo è *Pitagorico*.

Dimostrazione. Gli assiomi $(C2)$ e $(C5)$, che trattano della transitività della congruenza rispettivamente tra segmenti e tra angoli, sono automaticamente verificati per come sono state definite queste relazioni.

Per mostrare l'assioma $(C3)$ consideriamo i punti allineati A, B e C con B collocato tra A e C e siano D, E, F tre punti che verificano:

$$D * E * F, \quad AB \cong DE, \quad \text{e} \quad BC \cong EF.$$

Vogliamo mostrare che $AC \cong DF$. Supponiamo che le rette a cui appartengono le due terne di punti abbiano rispettivamente equazione $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, dalle ipotesi segue che:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2,$$

da cui si ottiene

$$(x_B - x_A)^2(1 + m^2) = (x_E - x_D)^2(1 + m'^2), \tag{2.1}$$

e analogamente

$$(x_C - x_B)^2(1 + m^2) = (x_F - x_E)^2(1 + m'^2). \tag{2.2}$$

Dividendo membro a membro la 2.1 e la 2.2, si ottiene:

$$\left|\frac{x_B - x_A}{x_E - x_D}\right| = \left|\frac{x_C - x_B}{x_F - x_E}\right| \tag{2.3}$$

(assumeremo $x_A < x_B$ e $x_D < x_E$, gli altri casi si mostrano in modo del tutto analogo).
Sfruttando la 2.1, la 2.2 e la 2.3, andiamo a calcolare:

$$\begin{aligned}
(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 &= (x_C - x_A)^2(1 + m^2) = \\
&= (x_C - x_B + x_B - x_A)^2(1 + m^2) = \\
&= (x_C - x_B)^2(1 + m^2) + (x_B - x_A)^2(1 + m^2) + \\
&+ 2(x_C - x_B)(x_B - x_A)(1 + m^2) = \\
&= (x_F - x_E)^2(1 + m'^2) + (x_E - x_D)(1 + m'^2) + \\
&+ 2\frac{(x_B - x_A)^2(x_F - x_E)}{(x_E - x_D)} = \\
&= (x_F - x_E)^2(1 + m'^2) + (x_E - x_D)(1 + m'^2 + \\
&+ 2(x_E - x_D)(x_F - x_E)(1 + m'^2) = \\
&= (x_F - x_E + x_E - x_D)^2(1 + m'^2) = \\
&= (x_F - x_D)^2 + (y_F - y_D)^2.
\end{aligned}$$

Questo prova che $AC \cong DF$, come volevamo. Anche il caso in cui i punti sono allineati verticalmente la dimostrazione è analoga. Si noti che non è stato necessario assumere l'ipotesi di campo Pitagorico.
Consideriamo ora che sia dato un angolo α e una semiretta di origine A con

coefficiente angolare m. Mostrare l'assioma $(C4)$ equivale a vedere che esiste una retta passante per A, con coefficiente angolare m', che verifica:

$$\tan\alpha = \pm\left|\frac{m'-m}{1+mm'}\right|,$$

dove sarà da considerare il segno $+$ o $-$ a seconda che α sia acuto o ottuso. Quindi ci siamo ricondotti a risolvere un'equazione lineare in m': [2]

$$m' = \frac{m \pm \tan\alpha}{1 \mp m\tan\alpha},$$

che ha soluzione in F. Le due soluzioni corrispondono ai due angoli che verificano l'assioma e si trovano da parti opposte rispetto alla retta data di coefficiente angolare m.
Approfondiamo ora la trattazione dell'assioma $(C1)$, che come abbiamo visto all'inizio della Sezione, non è soddisfatto a partire da un campo ordinato qualsiasi. Consideriamo quindi un campo arbitrario F, l'elemento $a \in F$ e il segmento di estremi $(0,0)$ e $(a,1)$. Se assumiamo che valga l'assioma $(C1)$ possiamo considerare un segmento ad esso congruente, ancora con un estremo nell'origine ma giacente sull'asse x, solo se esiste $b \in F$ tale che:

$$\mathrm{dist}^2((0,0),(a,1)) = \mathrm{dist}^2((0,0),(b,0)),$$

ovvero

$$1 + a^2 = b^2.$$

Quindi assumendo l'assioma $(C1)$ l'elemento b deve appartenere ad F, cioè $\sqrt{1+a^2} \in F$. Abbiamo così provato che se vale l'assioma $(C1)$ in Π_F deve essere soddisfatta la condizione $(*)$.
D'altra parte supponiamo che F soddisfi $(*)$, allora per ogni a, $b \in F$ con $a \neq 0$ possiamo scrivere:

$$a^2 + b^2 = a^2\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right),$$

e posto $c = \frac{b}{a}$, abbiamo:

$$\sqrt{a^2+b^2} = |a| \cdot \sqrt{1+c^2} \in F.$$

[2] Nel caso in cui l'angolo sia retto e/o la retta data sia verticale, poniamo convenzionalmente:

$$m' = \frac{m \pm \infty}{1 \mp m\cdot\infty} = -\frac{1}{m}; \qquad m' = \frac{\infty \pm \tan\alpha}{1 \mp \infty\cdot\tan\alpha} = \mp\frac{1}{\tan\alpha}; \qquad \text{e} \qquad m' = \frac{\infty \pm \infty}{1 \mp \infty\cdot\infty} = 0.$$

Da questo segue che presi due qualsiasi punti A e $B \in \Pi_F$ la loro distanza è un elemento di F:

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \in F.$$

Ora supponiamo che sia data una retta r di equazione $y = mx + q$, un suo punto A e di voler riportare a partire da A, su r, un segmento di lunghezza d. Sappiamo che $A = (a, ma + q)$ e cerchiamo un punto $C = (c, mc + q)$ che soddisfi:

$$\text{dist}(A, C) = d,$$
$$\sqrt{(a - c)^2 + (ma + q - mc - q)^2} = d,$$
$$|a - c| \cdot \sqrt{1 + m^2} = d.$$

Poichè stiamo assumendo che F sia Pitagorico, la quantità $\sqrt{1 + m^2} \in F$, allora possiamo risolvere l'equazione in c. Il caso in cui la retta r è verticale ci porta all'equazione $|c - a| = d$; in ogni caso si troveranno due soluzioni in F, corrispondenti alle due semirette di r aventi origine in A. $\square$

Lasciamo un attimo in sospeso l'assioma ($C6$), che tratteremo nella Sezione successiva, e riprendiamo invece l'assioma (E).

Proposizione 25. Sia Π_F il piano cartesiano sul campo ordinato F. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) Il piano Π_F soddisfa l'assioma per le intersezioni sulle circonferenze (E).

(ii) Il piano Π_F soddisfa la proprietà sulle intersezioni tra circonferenze e rette (RCI). (Si riveda la Proposizione 18.)

(iii) Il campo F soddisfa:

($**$) per ogni $a \in F$ e $a > 0$, allora $\sqrt{a} \in F$. (In questo caso il campo F si dice *Euclideo*.)

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia Γ una circonferenza di equazione $f = 0$ e $r : g = 0$ una retta. Allora l'equazione $f + g = 0$ ci fornisce l'equazione di un'altra circonferenza Δ le cui intersezioni con Γ sono le stesse di Γ con r; questo ci dice che l'assioma (E) implica la proprietà (RCI).
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Dato un elemento $a \in F$, tale che $a > 0$ consideriamo i punti $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $A' = (a + 1, 0)$ e la circonferenza Γ di centro $\left(\frac{1}{2}(a + 1), 0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}(a+1)$. Detta r la retta verticale passante per il punto A, che risulta interno alla circonferenza, per la Proposizione 18 la retta r e la circonferenza si intersecano esattamente in due punti. Svolgendo i calcoli osserviamo che uno dei due avrà coordinate $(a, \sqrt{a})$ e da questo segue che se vale (RCI) allora $\sqrt{a} \in F$, provando così che F è un campo Euclideo.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Assumiamo ora che F sia un campo Euclideo. Prese Γ e Γ' due circonferenze di Π_F, possiamo scrivere le loro equazioni:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = s^2,$$

dove (a, b) e (c, d) sono le coordinate dei due centri ed r e s i rispettivi raggi. Si noti che per le ipotesi fatte sul campo: $r,\ s \in F$. Inoltre i termini di secondo grado hanno tutti coefficiente uguale a 1, allora sottraendo membro a membro le due equazioni rimarrà un'equazione lineare. Quest'ultima, messa a sistema con l'equazione di una delle due circonferenze, ci permette di trovare gli eventuali punti di intersezione tra le due circonferenze che, dalle ipotesi, avranno come coordinate elementi di F. Si noti che Γ e Γ' soddisfano le ipotesi dell'assioma (E) se e solo se il sistema è determinato e quindi i punti di intersezione esistono. $\square$

2.3 L' assioma $(C6)$ e i movimenti rigidi

L'obiettivo di questa Sezione sarà mostrare che l'assioma $(C6)$, rimasto sinora fuori dalla nostra trattazione, è soddisfatto in un piano Π_F con F campo ordinato. Per farlo sarà necessario studiare quelli che si definiscono *movimenti rigidi*.

Definizione 27. Sia Π una geometria con i concetti indefiniti di punto, retta, collocamento e congruenza tra segmenti e tra angoli. Definiamo *movimento rigido* di Π una mappa $\phi : \Pi \to \Pi$, tale che:

(1) É biunivoca.

(2) Manda rette in rette.

(3) Preserva le relazioni di collocamento.

(4) Per ogni A, $B \in \Pi$, risulta: $AB \cong \phi(A)\phi(B)$.

(5) Per ogni angolo α, si ha: $\alpha \cong \phi(\alpha)$.

Quindi un movimento rigido mantiene la struttura della geometria determinata dai concetti indefiniti suddetti.

La mappa che manda ogni punto di Π in se stesso, ovvero l'identità, è un banale esempio di movimento rigido. Inoltre si può facilmente osservare che l'insieme G di tutti i movimenti rigidi di Π forma un gruppo.
Il seguente assioma, che vedremo essere equivalente all'assunzione dell'assioma $(C6)$, ci dà gli elementi necessari per giustificare il *metodo della sovrapposizione* di Euclide:

(**ERM**) (Esistenza dei Movimenti Rigidi)

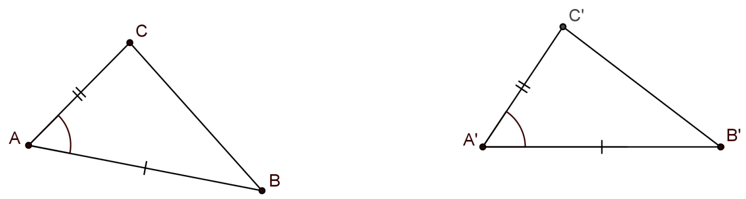
(1) Per ogni A, $A' \in \Pi$ esiste un movimento rigido $\phi \in G$ tale che $\phi(A) = A'$.

(2) Per ogni terna di punti O, A e $A' \in \Pi$ esiste un movimento rigido $\phi \in G$ tale che: $\phi(O) = O$ e la semiretta $\overrightarrow{OA}$ viene mandata da ϕ nella semiretta $\overrightarrow{OA'}$.

(3) Per ogni retta r esiste un movimento rigido $\phi \in G$ che scambia i semipiani individuati da r e lascia fissi tutti i punti della retta.

Proposizione 26. Sia Π un piano che soddisfa gli assiomi di Incidenza, di Collocamento, $(C2)$, $(C5)$ e solo la parte dell'unicità degli assiomi $(C1)$ e $(C4)$. Allora in Π, (ERM) implica l'assioma $(C6)$.

Dimostrazione. Supponiamo siano dati due triangoli ABC e $A'B'C'$ con $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Sfruttando il primo punto dell' Esistenza dei Movimenti Rigidi, possiamo considerare la mappa ϕ tale che $\phi(A) = A'$ e indichiamo con $B'' = \phi(B)$. Dalla definizione di movimento rigido segue che $AB \cong A'B''$, da cui sfruttando le ipotesi e l'assioma $(C2)$ segue anche che $A'B' \cong A'B''$.



Prendiamo ora un movimento rigido ψ che lascia fisso A' e manda la semiretta $\overrightarrow{A'B''}$ nella semiretta $\overrightarrow{A'B'}$ (ψ esiste per $(ERM$-$2)$). Poichè $A'B' \cong A'B''$, ψ preserva la congruenza tra segmenti e le ipotesi ci dicono che vale la parte dell'unicità dell'assioma $(C1)$, possiamo dedurre che $\psi(B'') = B'$. Chiamiamo $C'' = \psi\phi(C)$.
Consideriamo la retta r passante per A' e B', se C' e C'' sono dalla stessa parte rispetto a tale retta non abbiamo nulla da fare, mentre nel caso in cui C' e C'' siano da parti opposte rispetto alla retta r consideriamo (per $(ERM$-$3)$) il movimento rigido σ che lascia fissa la retta r e scambia i due semipiani da essa individuati.
Indichiamo con $\theta \in G$ (dove G è il gruppo dei movimenti rigidi di Π), la composizione $\psi\phi$ o $\sigma\psi\phi$, nel caso in cui sia necessario utilizzare anche σ, ed osserviamo che: $\theta(A) = A'$, $\theta(B) = B'$ e chiamiamo $C''' = \theta(C)$, che sarà coincidente con C'' se $\theta = \psi\phi$ e con $\sigma(C'')$ se $\theta = \sigma\psi\phi$. Poichè θ è un movimento rigido $\angle BAC \cong \angle B'A'C'''$, per ipotesi $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, allora dall'assioma $(C5)$ segue che $\angle B'A'C' \cong \angle B'A'C'''$. Ora, per la parte dell'unicità dell'assioma $(C4)$, essendo C' e C''' dalla stessa parte rispetto a r, possiamo dire che $\overrightarrow{A'C'}$ coincide con $\overrightarrow{A'C'''}$ e, sfruttando le ipotesi e l'assioma $(C2)$, essendo $A'C' \cong A'C'''$, per l'unicità di $(C1)$ concludiamo che C' e C''' coincidono. Infine, essendo $\theta(B) = B'$ e $\theta(C) = C'$, dalla definizione di movimento rigido segue che $BC \cong B'C'$, e similmente θ manderà l'angolo $\angle ABC$ in $\angle A'B'C'$ e $\angle ACB$ in $\angle A'C'B'$ che risulteranno così a due a due congruenti. Abbiamo quindi dimostrato che i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti: assumendo (ERM) anche l'assioma $(C6)$ è verificato. $\square$

Teorema 5. Sia F un campo ordinato Pitagorico, allora (ERM) vale nel piano Cartesiano associato Π_F.

Dimostrazione. Consideriamo $A = (a, b)$ e la trasformazione τ, che chiameremo *traslazione*, data da:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

La trasformazione:

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b, \end{cases}$$

è l'inversa di τ, che si prova così essere biunivoca. Osserviamo poi che τ manda rette in rette, in particolare una retta di equazione $y = mx + q$ viene mandata nella retta di equazione: $y' = m(x' - a) + q + b$ e una retta verticale viene mandata in una retta verticale. Da questo notiamo anche che il coefficiente angolare della retta immagine è lo stesso della retta di partenza, quindi gli angoli vengono preservati. Poichè in F, aggiungendo una costante ad ogni elemento, le disuguaglianze non cambiano, possiamo dire che anche le relazioni di collocamento vengono preservate dalla traslazione. Per mostrare che τ è un movimento rigido dobbiamo ancora vedere che preserva la dist^2, ovvero presi A, $B \in \Pi_F$ allora $AB \cong \tau(A)\tau(B)$. Ma questo si vede immediatamente in quanto:

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(\tau(A), \tau(B)) &= ((a_1 + a) - (b_1 + a))^2 + ((a_2 + b) - (b_2 + b))^2 = \\ &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = \\ &= \text{dist}^2(A, B). \end{aligned}$$

Perciò $\tau \in G$, il gruppo dei movimenti rigidi di Π. Ora, presi due punti $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ consideriamo la traslazione in cui $a = c_1 - b_1$ e $b = c_2 - b_2$, allora $\tau(B) = C$ ed è così provato (ERM-1).

Per provare l'esistenza di movimenti rigidi del secondo tipo prendiamo una trasformazione ρ, che chiameremo *rotazione*, definita da:

$$\begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy, \end{cases}$$

dove c, $s \in F$ e $c^2 + s^2 = 1$. Anche in questo caso l'applicazione è biunivoca, e possiamo esibire la sua inversa:

$$\begin{cases} x = cx' + sy' \\ y = -sx' + cy'. \end{cases}$$

Osserviamo poi che le rette vengono mandate in rette e che poichè le trasformazioni lineari preservano le disuguaglianze, allora anche le relazioni di collocamento sono preservate.

Si noti, con un semplice calcolo, che una retta di coefficiente angolare m viene mandata in una retta con coefficiente angolare m' dato da:

$$m' = \frac{cm + s}{c - sm}.$$

Questo ci serve per provare che ρ preserva gli angoli, infatti detto α l'angolo formato da due rette con coefficiente angolare m_1 e m_2, siano m_1' e ${m_2}'$ i coefficienti angolari delle due rette trasformate, allora svolgendo i calcoli e ricordando che $c^2+s^2=1$, possiamo osservare che:

$$\frac{m_1'-m_2'}{1+m_1'm_2'}=\frac{\frac{cm_1+s}{c-sm_1}-\frac{cm_2+s}{c-sm_2}}{1+\frac{(cm_1+s)(cm_2+s)}{(c-sm_1)(c-sm_2)}}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2},$$

provando che $\alpha \cong \phi(\alpha)$. Infine, consideriamo due punti A e B e andiamo a calcolare:

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}^2(\rho(A)\rho(B)) &= (a_1'-b_1')^2+(a_2'-b_2')^2=\\ &=(ca_1-sa_2-cb_1+sb_2)^2+(sa_1+ca_2-sb_1-cb_2)^2=\\ &=(c^2+s^2){a_1}^2+(s^2+c^2){a_2}^2+(c^2+s^2){b_1}^2+(s^2+c^2){b_2}^2+\\ &-2csa_1a_2-2c^2a_1b_1+2csa_1b_2+2csa_2b_1-2s^2a_2b_2-2csb_1b_2+\\ &+2sca_1a_2-2s^2a_1b_1-2sca_1b_2-2csa_2b_1-2c^2a_2b_2+2scb_1b_2=\\ &={a_1}^2+{b_1}^2+{a_2}^2+{b_2}^2-2a_1b_1-2a_2b_2=\\ &=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=\mathrm{dist}^2(A,B).\end{aligned}$$

Allora $\rho \in G$.
Andiamo ora a vedere come sfruttare questa trasformazione per mostrare (ERM-2). Siano O, A e A' tre punti, con una traslazione possiamo ricondurci al caso in cui O sia l'origine e le rette passanti per O e rispettivamente A e A' abbiano equazione $y=mx$ e $y=m'x$. Ogni rotazione lascia fissa l'origine, vogliamo però che $\overrightarrow{OA}$ venga mandata in $\overrightarrow{OA'}$, cioè dobbiamo scegliere c e $s \in F$ con $c^2+s^2=1$ in modo che:

$$m'=\frac{cm+s}{c-sm}.$$

Da questo segue che:

$$s=\frac{m'-m}{1+mm'}c.$$

Posto:

$$k=\frac{m-m'}{1+mm'},$$

il movimento rigido che stiamo cercando sarà dato dalla composizione della traslazione che manda O nell'origine con la rotazione in cui c ed s risolvono:

$$s=kc; \quad \text{e} \quad c^2+s^2=1.$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo discutere del terzo movimento rigido presente in (ERM). Per far questo consideriamo una nuova trasformazione σ, che diremo *riflessione*, di questa forma:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y. \end{cases}$$

Allora presa r la retta che vogliamo lasciare fissa, usando una traslazione τ che porta un qualsiasi punto $P \in r$ nell'origine O, possiamo assumere che $O \in r$. Preso poi $A \in r$ e $A \neq O$, consideriamo la rotazione ρ che sposta $\overrightarrow{OA}$ nel semiasse positivo delle x. Procedendo analogamente a prima possiamo ossevare che $\phi = \rho^{-1}\sigma\rho$ è un movimento rigido ed è il movimento rigido richiesto. □

Corollario 4. Sia F un campo ordinato Pitagorico, allora Π_F soddisfa l'assioma $(C6)$.

Dimostrazione. Nelle Sezioni precedenti abbiamo visto che gli assiomi di Incidenza, l'assioma delle Parallele (Proposizione 19), gli assiomi di Collocamento (Proposizione 23) e gli assiomi $(C1) - (C5)$ (Proposizione 24) sono soddisfatti nel piano Cartesiano su un campo ordinato e Pitagorico. Per il Teorema 5, sappiamo anche che vale (ERM), allora per la Proposizione 26 l'assioma $(C6)$ è verificato. □

Questo Corollario ci permette di concludere che:

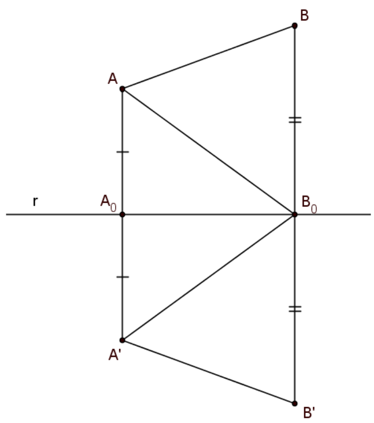
Teorema 6. Preso F un qualsiasi campo ordinato Pitagorico, allora il piano Cartesiano Π_F è un piano di Hilbert che soddisfa l'assioma delle Parallele (P). Inoltre Π_F è Euclideo se e solo se F è Euclideo.

Dimostrazione. Ripercorrendo la dimostrazione precedente (Corollario 4), è immediata la verifica della prima parte del Teorema. Per concludere basta far riferimento alla Proposizione 25. □

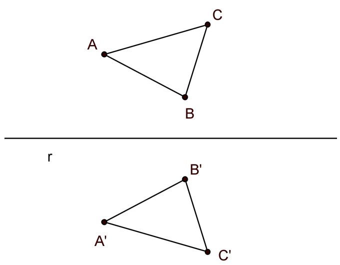
Proposizione 27. In un piano di Hilbert l'Esistenza dei Movimenti Rigidi (ERM) è verificata.

Dimostrazione. Iniziamo la dimostrazione mostrando che, in un piano di Hilbert, data una retta r esiste la *riflessione* rispetto a tale retta, cioè il movimento rigido che lascia fissi i punti di r e scambia i semipiani da essa individuati. Una volta dimostrato questo, che equivale a $(ERM\text{-}3)$, scegliendo riflessioni rispetto a particolari rette, vedremo che anche $(ERM\text{-}1)$ e $(ERM\text{-}2)$ sono verificati, come richiesto.
Quindi per ogni $P \in r$ definiamo $\sigma(P) = P$; per ogni punto $A \notin r$ consideriamo la perpendicolare s ad r passante per A e detto $A_0 = s \cap r$, determiniamo $A' \in s$ tale che $AA_0 \cong A_0A'$. Poniamo $\sigma(A) = A'$. Osservare che $\sigma^2 =$id ci permette di dire che σ è biunivoca. Siano ora A e B due punti non appartenenti ad r, vogliamo vedere che $AB \cong A'B'$ dove $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$. Se A e B appartenessero alla stessa perpendicolare ad r il risultato sarebbe immediato per la congruenza della differenza di segmenti congruenti. Altrimenti, detti A_0 e B_0 i punti di r che appartengono rispettivamente alla sua perpendicolare per A e per B, consideriamo i triangoli A_0AB_0 e $A_0A'B_0$, che risultano congruenti. Allora in particolare $\angle AB_0A_0 \cong \angle A'B_0A_0$. Considerando la differenza di angoli (si ricordi l'Esercizio 18) possiamo anche dire

che $\angle AB_0B \cong \angle A'B_0B'$. D'altra parte $AB_0 \cong A'B_0$ (in seguito alla congruenza dei triangoli A_0AB_0 e $A_0A'B_0$), allora per l'assioma $(C6)$ possiamo ancora una volta concludere che i triangoli AB_0B e $A'B_0B'$ sono congruenti ed in particolare $AB \cong A'B'$, come volevamo.



Consideriamo ora tre punti non allineati A, B e C ed indichiamo le loro immagini tramite σ con A', B' e C'. Sfruttiamo la Proposizione $(I.8)$ degli Elementi di Euclide, che dal Capitolo 1 sappiamo valere in un piano di Hilbert (Teorema 1), per dire che i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti. In particolare notiamo che $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, ovvero σ conserva gli angoli. Gli assiomi di Hilbert, uniti alla conservazione delle distanze e degli



angoli appena vista, ci permettono di concludere che anche le rette vengono mandate in rette e le relazioni di collocamento sono preservate da σ, quindi abbiamo stabilito la validità del terzo punto dell' Esistenza dei Movimenti Rigidi.
Per provare $(ERM\text{-}1)$, dati i punti A e A', consideriamo r come la retta perpendicolare alla retta AA' passante per il punto medio del segmento AA', allora la riflessione σ_r corrisponde al movimento rigido cercato. Infine prendendo la bisettrice dell'angolo $\angle AOA'$ e la riflessione rispetto a tale retta, proviamo $(ERM\text{-}2)$. $\square$

Corollario 5. In un piano che soddisfa gli assiomi $(I1) - (I3)$, $(B1) - (B4)$ e $(C1) - (C5)$, l'assioma $(C6)$ è equivalente all' Esistenza dei Movimenti Rigidi (ERM).

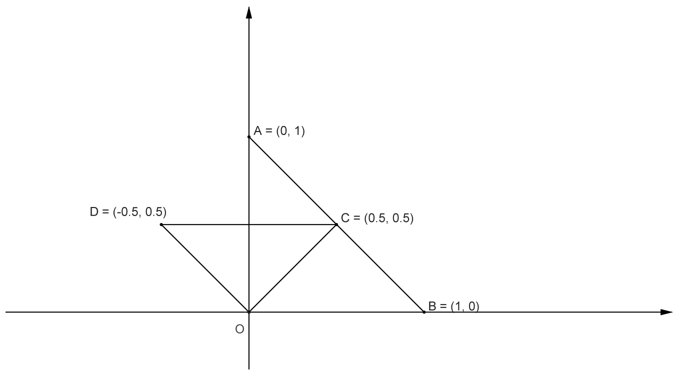
Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalle Proposizioni 26 e 27. $\square$

2.4 Note ed esempi

Iniziamo l'ultima Sezione di questo Capitolo considerando il piano cartesiano definito a partire da un particolare campo: $\mathbb{R}$. Lavoriamo quindi nel piano Cartesiano reale $\mathbb{R}^2$ con la *geometria del taxi*; ora la distanza tra due punti $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ è definita nel modo seguente:

$$d(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Due segmenti si diranno congruenti se: $d(A, B) = d(C, D)$.
Ricordando le Proposizioni 19 e 23, essendo $\mathbb{R}$ un campo Pitagorico e facendo riferimento alla Proposizione 24, al Teorema 5 e alla Proposizione 26, potremmo dire che tutti gli assiomi di Hilbert sono soddisfatti in questa geometria. Si osservi tuttavia la seguente figura:



Indicando con $\alpha = \angle AOB$ e $\beta = \angle DOC$ si ha:

$d(A, O) = |0 - 0| + |1 - 0| = 1$

$d(D, O) = |-\frac{1}{2} - 0| + |\frac{1}{2} - 0| = 1$

$d(B, O) = |1 - 0| + |0 - 0| = 1$

$d(C, O) = |\frac{1}{2} - 0| + |\frac{1}{2} - 0| = 1$

$\tan\alpha = \infty = \tan\beta$.

Quindi nei triangoli AOB e DOC: $AO \cong DO$, $BO \cong CO$ e $\angle AOB \cong \angle DOC$ (in particolare sono angoli retti), allora per l'assioma $(C6)$ dovrebbe risultare $AB \cong DC$, ma:

$$d(A, B) = |0 - 1| + |1 - 0| = 2,$$

mentre

$$d(C, D) = \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1.$$

Otteniamo perciò una contraddizione: dalla costruzione proposta emerge che l'assioma ($C6$) non è soddisfatto in questa geometria. Attenzione! Abbiamo inserito questo esempio come ammonizione, la contraddizione infatti non sussiste: i risultati ottenuti nelle precedenti Sezioni non valgono in questo contesto, poichè sfruttano una relazione di congruenza (Definizione 23) che si basa su una diversa funzione distanza, strettamente legata a quella euclidea.
Possiamo tuttavia dimostrare che, a parte ($C6$), tutti gli altri assiomi continuano a valere in questo piano: per gli assiomi di Incidenza e Collocamento nulla è cambiato e la dimostrazione proposta nelle Proposizioni 19 e 23 continua a valere; vediamo cosa accade per gli assiomi di Congruenza:

($C1$) Sia dato un segmento AB ed indichiamo con $d = d(A, B)$. Sia r una semiretta con origine in un punto $C = (c_1, c_2)$, vogliamo vedere che esiste ed è unico il punto $D \in r$ tale che $AB \cong CD$. Possiamo assumere che la semiretta uscente da C sia nella direzione delle x crescenti e con coefficiente angolare $m > 0$. Un qualsiasi punto $D \in m$ sarà della forma $D = (c_1 + h, c_2 + mh)$, dove $h > 0$. Allora:

$$d(C, D) = |c_1 + h - c_1| + |c_2 + mh - c_2| = |h| + |mh|.$$

Imponiamo: $d(C, D) = d(A, B) = d$. Essendo $m, h > 0$, si ha:

$$(1 + m)h = d.$$

Tale equazione è lineare in h, allora l'unica soluzione ci permette di trovare le coordinate del punto D che esiste ed è unico con le caratteristiche richieste.

($C2$)-($C5$) Seguono automaticamente dalla definizione delle rispettive relazioni di congruenza.

($C3$) Basta mostrare che la funzione distanza è additiva presi tre punti A, B e C allineati. Sia B collocato tra A e C; andiamo a mostrare che $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$. Supponiamo che la retta che contiene i tre punti abbia equazione $y = mx + q$ e che il punto A sia quello con la coordinata x più piccola. Allora esistono $h, k > 0$ tali che:

$$B = (a_1 + h, a_2 + mh),$$

$$C = (a_1 + h + k, a_2 + m(h + k)).$$

Quindi:

$$d(A, B) = |a_1 - a_1 - h| + |a_2 - a_2 - mh| = |h| + |mh| = h + mh,$$

$$d(B, C) = |a_1 + h - a_1 - h - k| + |a_2 + mh - a_2 - mh - mk| = |k| + |mk| = k + mk,$$

$$d(A,C) = |a_1 - a_1 - h - k| + |a_2 - a_2 - mh - mk| = h + k + mh + mk.$$

A questo punto si può verificare che:

$$d(A,B) + d(B,C) = h + mh + k + mk = d(A,C).$$

$(C4)$ Infine siano: $\overrightarrow{DF}$ una semiretta di coefficiente angolare m ed α un angolo. Osserviamo che esiste un unico m' che risolve l'equazione:

$$\frac{m - m'}{1 + mm'} = \tan\alpha,$$

cioè esiste un'unica retta r passante per D con la quale la semiretta $\overrightarrow{DF}$ forma un angolo congruente ad α.

Anche questo secondo esempio è costruito sul piano Cartesiano Reale. L'abbiamo scelto perchè ci permette di esibire un modello in cui la disuguaglianza triangolare non vale.
Quindi, considerato il piano Cartesiano reale $\mathbb{R}^2$, con le usuali definizioni di rette e collocamento, indichiamo con $d(A,B)$ la distanza euclidea e definiamo:

$$d'(A,B) = \begin{cases} d(A,B) & \text{se il segmento } AB \text{ è orizzontale o verticale} \\ 2d(A,B) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Diremo che $AB \cong CD$ se $d'(A,B) = d'(C,D)$. Come visto sopra possiamo dedurre dalle Proposizioni 19 e 23 che gli assiomi di Incidenza e Collocamento sono verificati; anche per gli assiomi $(C1)$ e $(C2)$ possiamo procedere analogamente a prima. Verifichiamo che d' è additiva: presi tre punti che soddisfano $A * B * C$, distinguiamo due casi:

- se il segmento AB è orizzontale o verticale, essendo i tre punti allineati, anche i segmenti AC e BC saranno rispettivamente orizzontali o verticali. In questo caso d' coincide con d, che sappiamo essere additiva. Quindi:

$$d'(A,C) = d(A,C) = d(A,B) + d(B,C) = d'(A,B) + d'(B,C).$$

- altrimenti, anche i segmenti BC e AC non saranno orizzontali o verticali, allora:

$$d'(A,C) = 2d(A,C) = 2(d(A,B) + d(B,C)) =$$

$$= 2d(A,B) + 2d(B,C) = d'(A,B) + d'(B,C).$$

Si considerino ora i punti $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (1,1)$, allora:

$$d'(A,B) = d(A,B) = 1,$$

$$d'(B,C) = d(B,C) = 1,$$

$$d'(A,C) = 2d(A,C) = 2\sqrt{2}.$$

Si può osservare che

$$d'(A,C) \geq d'(A,B) + d'(B,C).$$

Abbiamo mostrato che in questo modello non vale la disuguaglianza triangolare e quindi possiamo dedurre che questa non è conseguenza degli assiomi $(I1) - (I3)$, $(B1) - (B4)$, $(C1) - (C3)$.
Per provare la disuguaglianza triangolare sono stati necessari gli assiomi sugli angoli $(C4) - (C6)$ (si veda la Proposizione $(I.20)$ e l'Esercizio 23).

Proposizione 28. Sia Ω l'insieme di tutti i numeri reali che possono essere espressi a partire da un numero razionale utilizzando un numero finito di passi che coinvolgono le seguenti operazioni: $+$, $-$, $\cdot$, $:$ e $c \to \sqrt{1+c^2}$. Allora Ω è un campo ordinato Pitagorico.

Dimostrazione. Presi a e $b \in \Omega$, gli elementi $a \pm b$, $a \cdot b$ e a/b (con $b \neq 0$), sono ancora in Ω; questo ci permette di dedurre che Ω è un campo. Osserviamo poi che se $c \in \Omega$ anche $\sqrt{1+c^2} \in \Omega$. Infine, detto P il sottoinsieme di Ω composto dagli elementi che sono positivi in $\mathbb{R}$, possiamo concludere che Ω è un campo ordinato e Pitagorico. $\square$

Definizione 28. Il campo Ω appena definito (Proposizione 28), si dice *campo di Hilbert.*

Il campo di Hilbert è il più piccolo campo ordinato Pitagorico ed il più piccolo campo a partire dal quale il piano cartesiano associato soddisfa gli assiomi di Hilbert ($(I1) - (I3)$, $(B1) - (B4)$ e $(C1) - (C6)$).
In modo analogo alla Proposizione 28 si dimostra il seguente risultato:

Proposizione 29. Sia $F = K$, dove indichiamo con K il *campo dei numeri costruibili*, ovvero: l'insieme dei numeri reali che possono essere espressi a partire da un numero razionale utilizzando una quantità finita di operazioni $+$, $-$, $\cdot$, $:$ e $a > 0 \to \sqrt{a}$. Allora K è un campo ordinato Euclideo.

Si parla di campo dei numeri costruibili perchè è il più piccolo campo sul quale è possibile effettuare costruzioni con riga e compasso. Poichè $1+c^2 > 0$, per ogni $c \in \Omega$, si nota che $\Omega \subset K$ ma $\Omega \neq K$ infatti ad esempio il numero costruibile $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \Omega$. Allora possiamo dire che Π_K soddisfa gli assiomi di Incidenza, di Collocamento e gli assiomi $(C1) - (C6)$. Tuttavia:

Proposizione 30. In Π_K non è sempre possibile trisecare un angolo dato.

Dimostrazione. Si prova facilmente che un angolo è costruibile se e solo se il suo coseno è costruibile; allora mostriamo che esiste un angolo α tale che $\cos\alpha \in K$ ma $\cos\frac{\alpha}{3} \notin K$. Ricordiamo che:

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

allora equivalentemente:

$$\cos(\alpha) = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Consideriamo in particolare:

$$\alpha = \frac{\pi}{3},$$

e poniamo

$$x = 2\cos\frac{\pi}{9}.$$

Sostituendo troviamo l'equazione:

$$x^3 - 3x - 1 = 0,$$

che non ha radici razionali (posto $q(x) = x^3-3x-1$, eventuali radici razionali sono solo ± 1, ma $q(\pm 1) \neq 0$). Non ci saranno allora neppure radici costruibili (infatti è possibile dimostrare che un polinomio di terzo grado ha radici costruibili se e solo se ha radici razionali). Questo ci permette di concludere che $2\cos\frac{\pi}{9}$ non è costruibile e di conseguenza non è possibile trisecare l'angolo $\frac{\pi}{3}$. □

Quindi abbiamo visto che il piano cartesiano definito a partire dal campo dei numeri razionali non soddisfa tutti gli assiomi di congruenza, è necessario considerare il campo dei numeri costruibili per poter esibire un esempio di piano cartesiano in cui tutti gli assiomi $(I1)-(I3)$, $(B1)-(B4)$ e $(C1)-(C6)$ sono verificati. Per poter trisecare un angolo qualsiasi dobbiamo poi considerare l'insieme dei numeri reali appartenenti all'estensione di $\mathbb{Q}$ con qualunque radice quadratica e cubica. Infine si osservi che: la chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$ non è un campo ordinato.

Per concludere questa Sezione vogliamo sottolineare il legame tra F e Π_F (ad esempio abbiamo già visto che l'assioma $(C1)$ è verificato in Π_F se e solo se F è Pitagorico,...). Mostreremo quindi come particolari proprietà del campo F si manifestano nel piano cartesiano associato.

Proposizione 31. Il piano cartesiano Π_F sul campo F ammette una configurazione di quattro punti A, B, C e D tali che $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ e $AD \parallel BC$ se e solo se la caratteristica del campo è uguale a 2.

Dimostrazione. Supponiamo che il campo abbia caratteristica uguale a 2; necessariamente conterrà il sottocampo formato dai soli elementi $\{0, 1\}$. I punti $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 1)$ e $D = (1, 0)$ appartengono a Π_F e verificano le condizioni richieste, infatti: la retta AB è parallela alla retta CD, avendo rispettivamente equazione:

$$x = 0, \quad \text{e} \quad x = 1,$$

quindi lo stesso coefficiente angolare (∞). La retta AC è parallela alla retta BD, avendo rispettivamente equazione:

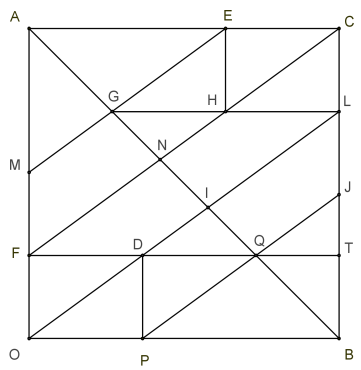
$$y = x \quad \text{e} \quad y = -x + 1,$$

si faccia attenzione che siamo in caratteristica 2, quindi $1 = -1$ essendo $1+1 = 0$. Quanto detto sui coefficienti angolari di rette parallele è verificato. Infine la retta AD di equazione $y = 0$ è parallela alla retta BC di equazione $y = 1$.
D'altra parte supponiamo che esista nel piano Π_F una configurazione di quattro punti come descritta sopra. Possiamo considerare un cambiamento di variabili che sposta l'origine nel punto A e in modo che B e D siano i nuovi punti unitari sugli assi. Dalle ipotesi segue che il punto C sarà il punto di coordinate $(1, 1)$. La retta AC avrà equazione $x - y = 0$ e $BD : x + y - 1 = 0$. Per ipotesi le due rette devono essere parallele, cioè non devono avere soluzioni in comune. Poichè il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

ha soluzione solo se $2 \neq 0$, possiamo concludere che la configurazione esiste solo se $2 = 0$, ovvero il campo F ha caratteristica uguale a 2. □

Proposizione 32. Sia Π un piano Cartesiano su un campo F di caratteristica 0. La configurazione riportata sotto è ammessa in Π se e solo se $\sqrt{3} \in F$.



Dimostrazione. (Assumiamo che le linee che appaiono parallele (perpendicolari) siano parallele (perpendicolari).) Possiamo prendere il punto O come origine, quindi $O = (0, 0)$ e siano OB e OA gli assi ed in particolare $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$. Sia P il punto di coordinate $(a, 0)$. Il punto Q appartiene alla linea AB, quindi le sue coordinate dovranno soddisfare l'equazione $y = -x + 1$ e dalla costruzione sappiamo che la sua ascissa è $2a$, allora $Q = (2a, 1 - 2a)$. Siamo in grado di determinare anche le coordinate dei punti $D = (a, 1 - 2a)$ e $F = (0, 1 - 2a)$. Il punto E ha coordinate $(1 - a, 1)$. Analogamente a prima possiamo dedurre che $G = (1 - 2a, 2a)$, $H = (1 - a, 2a)$ e $L = (1, 2a)$.
Il coefficiente angolare della retta OL è $2a$, mentre la retta EG ha coefficiente angolare $\frac{1-2a}{a}$. Dal parallelismo tra EG e OL segue:

$$2a = \frac{1 - 2a}{a},$$

o equivalentemente

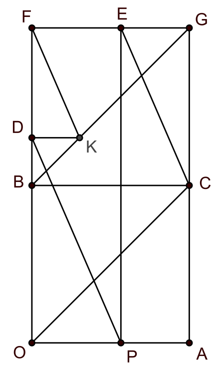
$$2a^2 + 2a - 1 = 0.$$

Tale equazione ha due soluzioni:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2},$$

di cui l'unica accettabile è quella positiva. Allora affinchè esista la configurazione data è necessario e sufficiente che $\sqrt{3} \in F$. □

Proposizione 33. Sotto le stesse ipotesi della Proposizione 32 possiamo mostrare che la seguente configurazione è ammessa in Π se e solo se $\sqrt{13} \in F$:



Dimostrazione. Analogamente a prima prendiamo il punto O come origine, quindi $O = (0, 0)$ e siano OB e OA gli assi; in particolare siano $A = (1, 0)$,

$B = (0, 1)$ e P il punto di coordinate $(a, 0)$. Il punto E ha coordinate $(a, 2)$, allora la retta passante per E e $C = (1, 1)$ avrà equazione:

$$x + (1 - a)y + 2 - a = 0.$$

Possiamo determinare le coordinate di D intersecando la retta $x = 0$ con la parallela a EC passante per P e troviamo $D = (0, \frac{-a}{a-1})$. Il punto K, che appartiene alla retta $y = x + 1$, avrà quindi coordinate $(\frac{1-2a}{a-1}, \frac{-a}{a-1})$. La retta FK, dove F è il punto $(0, 2)$, ha coefficiente angolare:

$$\frac{3a - 2}{2a - 1}.$$

Dal parallelismo tra FK e EC segue l'uguaglianza:

$$\frac{3a - 2}{2a - 1} = \frac{1}{a - 1}.$$

Ovvero:

$$3a^2 - 7a + 3 = 0;$$

tale equazione ha due soluzioni, di cui l'unica accettabile è quella positiva che coincide con

$$\frac{7 + \sqrt{13}}{6}.$$

Allora affinchè esista la configurazione data è necessario e sufficiente che $\sqrt{13} \in F$. $\square$

Capitolo 3

Isomorfismo tra piano di Hilbert e piano cartesiano sul campo dei segmenti aritmetici

Eccoci giunti alla parte conclusiva della tesi; in quest'ultimo Capitolo vedremo che è possibile introdurre un sistema di coordinate in un piano di Hilbert in cui vale l'assioma delle Parallele. Tale piano di Hilbert risulterà *isomorfo* ad un piano cartesiano definito a partire da un particolare campo ordinato F; geometria sintetica e geometria analitica verranno così a corrispondersi.
Più precisamente quanto appena detto sarà argomento dell'ultima delle tre Sezioni in cui è divisto il Capitolo. Sarà necessario prima: 1) definire geometricamente le operazioni di somma e prodotto tra classi di segmenti appartenenti ad un piano di Hilbert soddisfacente l'assioma delle Parallele (per costruire il campo ordinato F dei segmenti aritmetici); 2) recuperare la teoria della similitudine dei triangoli.

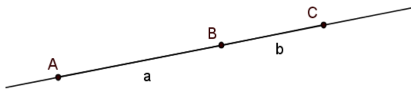
3.1 Costruzione del campo dei segmenti aritmetici

Abbiamo visto che in un piano di Hilbert la relazione di congruenza tra segmenti è una relazione di equivalenza (Proposizione 6); detto P l'insieme di tali classi di equivalenza, andiamo ora a definire due operazioni in tale insieme: *addizione* e *moltiplicazione*. Si noti che prima di definire la moltiplicazione sarà necessario fissare un segmento che giochi il ruolo di elemento neutro (lo chiameremo *segmento unitario*). Le due operazioni ci permetteranno, dopo aver introdotto un elemento 0, di costruire un campo ordinato F dove gli elementi positivi sono proprio tutti e soli gli elementi di P.

Definizione 29. Indicate con a e b due classi di equivalenza di segmenti congruenti, definiamo la loro somma come segue:

- scegliamo un rappresentante di a, che chiameremo AB,

- sulla retta AB prendiamo il punto C in modo che valga $A * B * C$ e il segmento BC sia un rappresentante di b.



Allora definiamo $a + b$ come la classe di equivalenza di cui il segmento AC è un rappresentante.

Vediamo prima di tutto che tale operazione è ben definita; per farlo consideriamo $A'B'$, un altro rappresentate di a. Preso C' sulla retta $A'B'$, dalla parte opposta di A' rispetto a B' in modo che $B'C'$ sia un altro rappresentante di b, osserviamo che $AC \cong A'C'$, come immediata conseguenza dell'assioma $(C3)$, quindi anche $A'C'$ è un rappresentante di $a + b$ e così la somma risulta ben definita.
Mostriamo ora che tale operazione segue le usuali regole dell'aritmetica dei numeri postivi.

Proposizione 34. In un piano di Hilbert la somma di classi di equivalenza di segmenti verifica le seguenti proprietà:

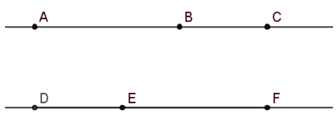
1. $a + b = b + a$.

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

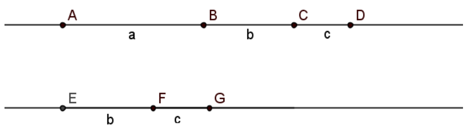
3. Date due classi a e b, una ed una sola delle seguenti affermazioni è vera:

   - a=b,
   - esiste una classe c tale che $a + c = b$,
   - esiste una classe d tale che $a = d + b$.

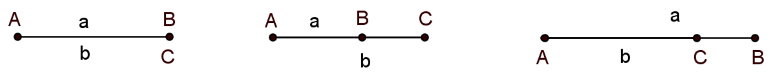
Dimostrazione. Sia AB un rappresentante di a, prendiamo il punto C che verifica $A * B * C$ e in modo che BC sia un rappresentante di b, allora dalla definizione segue che AC è un rappresentante di $a + b$. Analogamente prendiamo DE un rappresentante di b e un punto F in modo che valga $D * E * F$ e il segmento EF sia un rappresentante di a. Allora DF per



definizione è un rappresentante di $b+a$. Ma per costruzione $AB \cong EF$, $AC \cong DE$, allora per l'assioma $(C3)$ possiamo concludere che $AC \cong DF$ e quindi $a+b=b+a$, provando il punto (1).
Andiamo ora a trovare un rappresentante di $(a+b)+c$. Preso un segmento AB tra i rappresentanti di a scegliamo prima il punto C che verifica $A{*}B{*}C$ e BC sia un rappresentante di b, dopo di che prendiamo D che verifica $A{*}C{*}D$ e in modo che CD sia un rappresentante di c. Allora AD è un rappresentante di $(a+b)+c$. D'altra parte consideriamo il rappresentante EF di b e sulla retta passante per E e F prendiamo G che verifica $E*F*G$ e $FG \in c$. Così EG è un rappresentante di $b{+}c$. Sia poi H un punto sulla retta AB, collocato



dalla parte opposta di A rispetto a B, che soddisfa $BH \cong EG$, cioè tale che BH sia un rappresentante di $b+c$. Per costruzione e sfruttando l'assioma $(C3)$ possiamo dire che $BD \cong EG$, allora necessariamente, per l'assioma $(C1)$ il punto H e il punto D coincidono, perciò $(a+b)+c = a+(b+c)$.
Infine abbiamo le classi di equivalenza a e b, consideriamo i punti allineati A, B e C tali che AB e AC siano rispettivamente rappresentanti delle due classi. Se $B=C$ allora $a=b$; se risulta $A*B*C$, allora $a+[BC]=b$; se invece C è collocato tra A e B, avremo $a=b+[CB]$. É l'assioma $(B3)$



che ci permette di concludere, in quanto queste sono le uniche tre possibilità mutualmente esclusive che possono presentarsi. $\square$

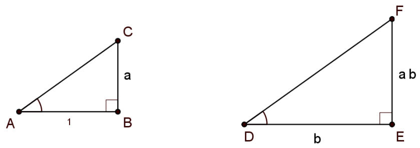
Prima di definire la moltiplicazione scegliamo una classe di equivalenza arbitraria da indicare con il simbolo 1, che chiameremo classe di equivalenza dei segmenti unitari.

Definizione 30. Date le classi a e b definiamo il prodotto ab come segue:

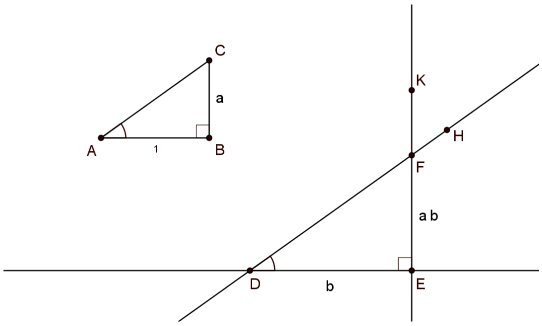
- consideriamo un triangolo ABC con $AB \in 1$, $BC \in a$ e l'angolo $\angle ABC$ retto. Indichiamo con $\alpha = \angle BAC$.

- Consideriamo un secondo triangolo DEF con $DE \in b$, l'angolo $\angle DEF$ retto e $\angle FDE \cong \alpha$.

Allora definiamo ab come la classe di equivalenza del segmento EF.



Soffermiamoci un attimo su questa definizione, ed in particolare sull'esistenza del segmento EF; vediamo più in dettaglio come costruire il triangolo DEF e sotto quali ipotesi è possibile farlo. Osserviamo che dato il triangolo ABC e un segmento $DE \in b$, per l'assioma $(C4)$ possiamo determinare una semiretta $\overrightarrow{DH}$ in modo che formi con la semiretta $\overrightarrow{DE}$ un angolo congruente ad α. Analogamente è possibile determinare, dalla stessa parte di H rispetto alla retta DE, un punto K in modo che la semiretta $\overrightarrow{EK}$ risulti perpendicolare a DE. Si riuscirà a costruire il triangolo se le rette DH e EK non sono parallele. Per vedere questo sfruttiamo la Proposizione $(I.29)$ di Euclide, che



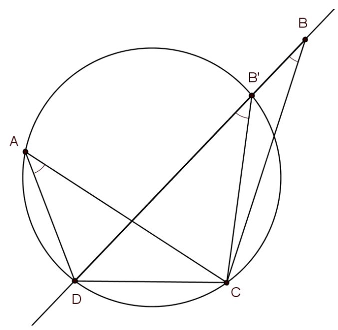
abbiamo visto poter dimostrare in un piano di Hilbert solo con l'aggiunta dell'assioma delle Parallele (Teorema 4), e la Proposizione $(I.17)$, che ci dice che α è minore di un angolo retto: le rette EK e DH devono intersecarsi poichè non formano angoli alterni interni congruenti se tagliate da ED. Quello che ancora ci manca da vedere è che tale punto di intersezione sia proprio nel semipiano contenente H e K. Ma se così non fosse riusciremmo ad individuare un triangolo, nel semipiano opposto, che ha per angoli il supplementare di $\angle KED$, che è un angolo retto, e un angolo coincidente con il complementare di α, che si può dedurre essere maggiore di un angolo retto, trovando così un assurdo in quanto in contraddizione con la Proposizione $(I.17)$. Allora necessariamente le semirette $\overrightarrow{DH}$ e $\overrightarrow{EK}$ si incontreranno determinando il punto F.

Vediamo ora che anche il prodotto è ben definito. Consideriamo quindi A', B' e C', tre punti che formano un triangolo rettangolo in B', con $A'B' \in 1$ e $B'C' \in a$. Allora, per l'assioma $(C6)$ i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti ed in particolare avremo $\angle BAC = \alpha \cong \angle B'A'C'$. Se $D'E'F'$ è un altro triangolo rettangolo, costruito come appena visto con $\angle F'D'E' \cong \alpha$ e $D'E' \in b$, per la Proposizione $(I.26)$ di Euclide (che possiamo utilizzare

in un piano di Hilbert grazie al Teorema 1), il triangolo $D'E'F'$ risulterà congruente a DEF ed in particolare $FE \cong F'E'$.
Prima di presentare le proprietà del prodotto sarà necessario dimostrare che in un piano di Hilbert che soddisfa anche l'assioma delle Parallele vale la seguente Proposizione sugli angoli inscritti in una circonferenza che insistono su uno stesso arco.

Proposizione 35. Siano A, B, C e D quattro punti, con A e B dalla stessa parte rispetto alla retta CD. Allora: i punti A, B, C, D giacciono su una stessa circonferenza se e solo se $\angle DAC \cong \angle DBC$.

Dimostrazione. Se assumiamo che A, B, C e D stiano su una stessa circonferenza la Proposizione ($III.21$) degli Elementi di Euclide ci garantisce la tesi, in quanto i due angoli insistono sullo stesso arco DC.
Per il viceversa supponiamo $\angle DAC \cong \angle DBC$ e senza perdere di generalità assumiamo che B sia interno ad $\angle ADC$, altrimenti basterà scambiare il ruolo di A e di B. Per la Proposizione ($IV.5$) presente negli Elementi di Euclide possiamo circoscrivere una circonferenza Γ al triangolo ADC. La retta BD, per quanto visto nel Corollario 2, incontrerà la circonferenza Γ in un secondo punto B' (oltre che in D) e allora, utilizzando le Proposizioni ($III.21$) e ($I.16$), otteniamo una contraddizione: l'angolo $\angle DB'C$, visto come angolo esterno del triangolo $B'BC$ dovrebbe risultare maggiore di $\angle DBC$ mentre sappiamo che sono congruenti in quanto per ipotesi $\angle DBC \cong \angle DAC$ e dalla ($III.21$) segue che anche $\angle DB'C \cong \angle DAC$. Allora necessariamente i punti B e B' coincidono e di conseguenza anche B appartiene alla circonferenza.

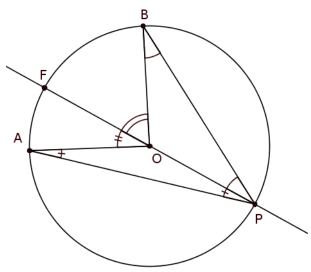


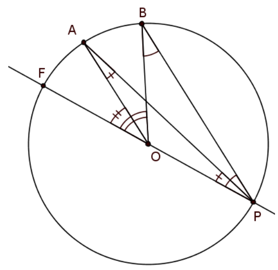
Dobbiamo quindi assicurarci che la Proposizione ($III.21$) e la Proposizione ($IV.5$) siano valide in un piano di Hilbert che soddisfa l'assioma delle Parallele (per quanto riguarda la ($I.16$) già lo sappiamo dal Teorema 1). La Proposizione ($III.21$) ci dice che : "due angoli, con vertice su una stessa circonferenza, se insistono su uno stesso arco allora sono congruenti". La dimostrazione di questo fatto segue immediatamente dalla ($III.20$) (avremmo infatti due angoli che sono metà di uno stesso angolo, e perciò congruenti.)
Vediamo quindi più in dettaglio la dimostrazione di quest'ultima Proposizione. Dobbiamo mostrare che dato un arco di circonferenza, l' angolo al

centro $\angle AOB$ è congruente al doppio di un qualsiasi angolo alla circonferenza $\angle APB$ che insiste sullo stesso arco.
Tracciamo la retta passante per P e per O, che grazie all'Esercizio 17, sappiamo intersecare la circonferenza in un punto $F \neq P$. Supponiamo che F sia interno all'angolo $\angle AOB$. I triangoli APO e BPO sono triangoli isosceli, allora (Proposizione $(I.5)$):

$$\angle APO \cong \angle PAO \quad \text{e} \quad \angle BPO \cong \angle OBP.$$

Dal Teorema 4 sappiamo che in un piano di Hilbert in cui vale (P) è possibile





dimostrare la Proposizione $(I.32)$, allora:

$$\angle AOF \cong \angle APO + \angle PAO \cong \angle APO + \angle APO,$$

e analogamente,

$$\angle FOB \cong \angle BPO + \angle PBO \cong \angle BPO + \angle BPO.$$

In conclusione, essendo:

$$\angle AOB = \angle AOF + \angle FOB,$$

$$\angle APB = \angle APO + \angle OPB,$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \angle AOB = \angle AOF + \angle FOB &\cong \\ &\cong \angle APO + \angle APO + \angle BPO + \angle BPO \cong \\ &\cong \angle APB + \angle APB. \end{aligned}$$

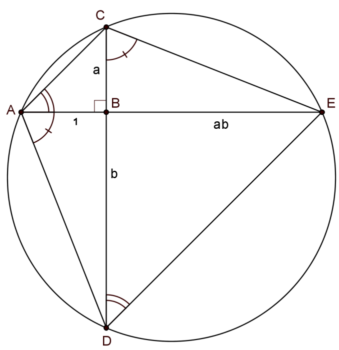
Analogamente si mostra il caso in cui F è esterno all'angolo $\angle AOB$, si dovrà solo fare attenzione a lavorare con la differenza tra angoli.
Resterebbe ancora da mostrare la Proposizione $(IV.5)$, di cui tralasciamo la dimostrazione in quanto analoga a quella della $(IV.4)$, che vedremo all'interno della Proposizione 39. □

Siamo ora in grado di dimostrare che:

Proposizione 36. In un piano di Hilbert in cui vale anche l'assioma delle Parallele, il prodotto di classi di equivalenza di segmenti verifica le seguenti proprietà: per ogni a, b e c,

1. $a \cdot 1 = a$.
2. $ab = ba$.
3. $a(bc) = (ab)c$.
4. per ogni a esiste un unico b tale che $ab = 1$.
5. $a(b + c) = ab + ac$.

Dimostrazione. Seguendo la definizione del prodotto, per calcolare $a \cdot 1$ il triangolo DEF avrà il lato $DE \in 1$. In questo caso i triangoli ABC e DEF avranno: $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle CBA \cong \angle FED$ e $AB \cong DE$, allora per la Proposizione $(I.26)$ i due triangoli risulteranno congruenti ed in particolare $EF \cong CB$, quindi $a \cdot 1 = a$.
Consideriamo ora che siano dati a e b, costruiamo il triangolo rettangolo ABC con angolo retto in B, $AB \in 1$ e $CB \in a$. Indichiamo con α l'angolo $\angle CAB$ e con D il punto della retta BC, che giace nel semipiano opposto a C rispetto alla retta AB, tale che $BD \in b$. Infine sia E il punto della retta AB che giace dalla parte opposta di A rispetto alla retta CD e verifica $\angle BDE \cong \alpha$. Con questa costruzione, dalla definizione di prodotto segue

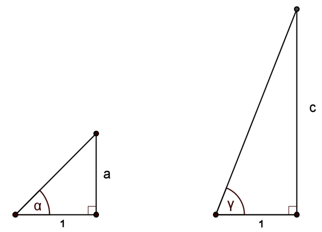


che $BE \in ab$. Per la Proposizione 35, essendo $\angle CAE \cong \angle CDE$ (gli angoli $\angle CAB$ e $\angle BDE$ sono rispettivamente uguali agli angoli $\angle CAE$ e $\angle CDE$), sappiamo che i punti A, D, E e C appartengono ad una stessa circonferenza. Allora, sempre per la stessa Proposizione possiamo anche dire che:

$$\angle DAE \cong \angle DCE.$$

Lavorando ora sui triangoli ABD e CBE, dalla definizione di prodotto segue che BE è un rappresentante anche di ba; allora come volevamo $ab = ba$.

Per provare la proprietà associativa consideriamo due triangoli rettangoli, entrambi con un cateto unitario e l'altro appartenente rispettivamente alle classi di congruenza a e c. Si individuano così nei due triangoli rispettiva-



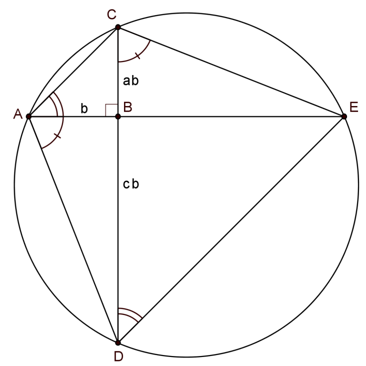
mente gli angoli α e γ.
Sia allora ABC un triangolo rettangolo in B, con AB rappresentante di b e l'angolo $\angle BAC \cong \alpha$. Per definizione avremo $CB \in ab$. Determiniamo poi i punti D ed E rispettivamente sulle rette CB e AB, tali che:

$$\angle BAD \cong \gamma \quad \text{e} \quad \angle BDE \cong \alpha.$$

Sfruttando ripetutamente la definizione di prodotto possiamo dire che:

$$BD \in cb \quad \text{e} \quad BE \in a(cb).$$

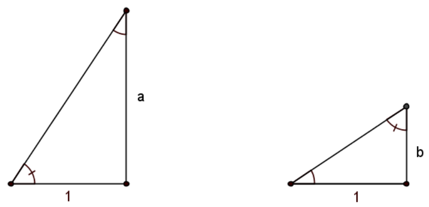
Ragionando in modo analogo al passo precedente sappiamo che l'angolo



$\angle DCE = \angle BCE \cong \gamma$ e da questo segue che BE è un rappresentante anche di $c(ab)$. Avendo già mostrato la commutatività possiamo concludere che:

$$a(bc) = (ab)c.$$

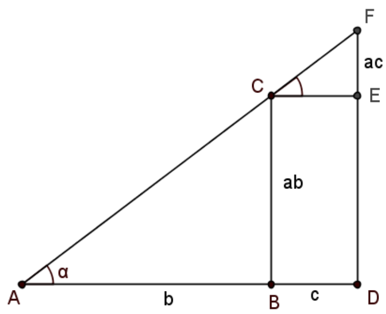
Andiamo quindi ora a provare la proprietà (4). Consideriamo un triangolo rettangolo con un cateto unitario e l'altro appartenente alla classe di congruenza a. Siano α l'angolo acuto adiacente al cateto unitario e β quello opposto. Prendiamo ora un altro triangolo rettangolo con un angolo congruente a β e il lato ad esso adiacente unitario. Indichiamo con b la classe



di equivalenza a cui appartiene l'altro cateto, il cui angolo adiacente è congruente ad α (Proposizione $(I.32)$). Allora si osserva che $ab = 1$.
Infine siano dati a, b e c, e sia α l'angolo individuato in un triangolo rettangolo di cateti 1 ed a. Costruiamo un triangolo rettangolo ABC con l'angolo retto in B, il lato $AB \in b$ e $\angle BAC \cong \alpha$ così che $BC \in ab$. Sia poi D il punto sulla retta AB tale che:

$$A * B * D \quad \text{e} \quad BD \in c.$$

Tracciamo poi la parallela ad AB passante per C e la perpendicolare pas-



sante per D, così da individuare in E il loro punto di intersezione e in F il punto di intersezione tra la perpendicolare ad AB e la retta AC. Dal parallelismo segue che $\angle ECF \cong \alpha$, inoltre anche $CE \in c$. Allora EF risulta un rappresentante della classe ac. Poichè $BCDE$ è un rettangolo, $DE \in ab$. Ora, dalla definizione di somma possiamo dire che AD è un rappresentante di $b+c$ e DF è un rappresentante di $ab+ac$. D'altra parte il triangolo ADF ha un lato appartenente alla classe $b+c$ ed un angolo congruente ad α, allora per definizione $DF \in a(b+c)$. Abbiamo quindi mostrato che.

$$a(b+c) = ab + ac.$$

$\square$

Proposizione 37. In un insieme P siano definite due operazioni, $+$ e $\cdot$, che soddisfano le proprietà viste nelle Proposizioni 34 e 36. Allora esiste un unico campo ordinato F i cui elementi positivi sono tutti e soli gli elementi di P.

Dimostrazione. Presi $a,\, b \in P$, consideriamo l'insieme delle coppie ordinate (a, b) e vi introduciamo la relazione di equivalenza $\sim$:

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \text{se} \quad a + b' = a' + b$$

(si pensi (a, b) come se fosse l'elemento $a - b$).
Definiamo F come l'insieme delle classi di equivalenza di tali coppie ordinate, dotato di addizione e moltiplicazione:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc).$$

Tralasciamo la prova della buona definizione dell'addizione e diamo un cenno di come provare che la moltiplicazione è ben definita. Conviene infatti operare in due passi. Consideriamo $(a, b) \sim (a', b')$ e $(c, d) \sim (c', d')$, proviamo prima di tutto che:

$$(a, b)(c, d) \sim (a, b)(c', d'),$$

poi, che

$$(a, b)(c', d') \sim (a', b')(c', d').$$

Unendo questi risultati possiamo concludere.
Indichiamo con 0 la classe di equivalenza che ha come rappresentante la coppia (a, a) per un qualsiasi $a \in P$ e con 1 la classe che ha come rappresentante $(1 + a, a)$ per un qualsiasi $a \in P$. Sfruttando le proprietà dell'insieme P si osserva che 0 e 1 si comportano rispettivamente come l'elemento neutro dell'addizione e della moltiplicazione e che tali operazioni verificano tutte le condizioni necessarie per concludere che F è un campo. Ci soffermiamo solo nel mostrare che per ogni $(a, b) \neq 0$ esiste l'elemento inverso rispetto alla moltiplicazione: per l'ultimo punto della Proposizione 34, ed essendo $(a, b) \neq 0$ distinguiamo due casi, nel primo assumiamo che esista un elemento c tale che $a + c = b$. Detto c' l'elemento che verifica $cc' = 1$, allora definiamo $(a, b)^{-1} = (1, 1 + c')$, infatti:

$$(a, b)(1, 1 + c') = (a + b + bc', a + ac' + b),$$

e poichè

$$bc' = (a + c)c' = ac' + cc',$$

possiamo osservare che, per un qualsiasi $x \in P$:

$$a + b + bc' + x = a + ac' + b + 1 + x,$$

ovvero

$$(a, b)(1, 1 + c') \sim (1 + x, x).$$

Nel secondo caso assumiamo che esista d tale che $d + b = a$ e procediamo analogamente per dimostrare che ora l'elemento inverso di (a, b) è dato dalla

coppia $(1+d',1)$ dove d' è l'elemento che verifica $dd'=1$.
A questo punto definiamo la mappa ϕ che ad ogni elemento $a \in P$ associa $(a+b,b) \in F$, per un qualsiasi $b \in P$. Si noti che presi a e a' tali che $\phi(a) = \phi(a')$, cioè $(a+b,b) = (a'+b',b')$ si ha $a+b+b' = a'+b'+b$ da cui $a = a'$. La mappa risulta quindi biunivoca nella sua immagine, che si potrà perciò identificare con P. Inoltre ϕ preserva la somma e il prodotto. Mostriamo ora che preso $x = (a,b) \in F$ allora $x \in P$, $x = 0$ oppure $-x \in P$. Ancora dalla Proposizione 34 dobbiamo distinguere tre casi: se $a = b$, allora $x = 0$, se invece esiste c tale che $a+c = b$, allora $x = (a,b) = (a,a+c)$ e $-x = (a+c,a) \in P$, infine se esiste d tale che $a = b+d$, allora $x = (a,b) = (b+d,b) \in P$. Queste osservazioni ci permettono di concludere che F, con sottoinsieme P (o meglio la sua identificazione tramite ϕ), è un campo ordinato. □

Proposizione 38. Dato un piano di Hilbert che soddisfa l'assioma delle Parallele, una volta scelto un segmento unitario 1, esiste (a meno di isomorfismi) un unico campo ordinato F, dove l'addizione e la moltiplicazione sono quelle delle Definizioni 29 e 30 e gli elementi positivi sono le classi di equivalenza generate dalla relazione di congruenza tra segmenti.

Dimostrazione. Definito l'insieme P come richiesto, grazie alle Proposizioni 34 e 36 ci troviamo nelle ipotesi della Proposizione 37, che ci permette di concludere. □

3.2 Similitudine dei triangoli

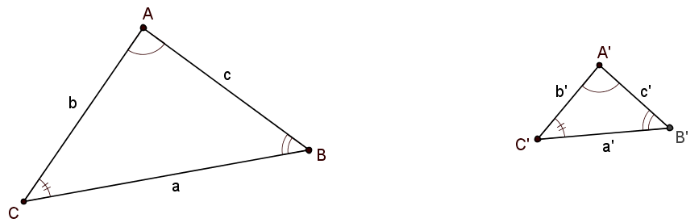
Riteniamo sia interessante a questo punto spendere qualche parola sulle *proporzioni*, che vedremo avere un ruolo fondamentale in questa Sezione. Euclide introduce le proporzioni nel Quinto Libro degli Elementi, per poi applicarle alla geometria nel Sesto. Riportiamo la Definizione (V.5) secondo la traduzione proposta da Frajese [7]: " Si dice che due grandezze A e B sono nello stesso rapporto di altre due, C e D, quando, presi in qualunque modo i numeri interi m ed n, considerati gli equimultipli mA, mC della prima e della terza grandezza e gli equimultipli nB, nD della seconda e della quarta, si abbia: $mA > nB$ se e solo se $mC > nD$, $mA < nB$ se e solo se $mC < nD$ e $mA = nB$ se e solo se $mC = nD$".
Questo lavoro è necessario in quanto tale definizione deve trascendere dai numeri: non si aveva a disposizione un campo numerico dove lavorare (Euclide essenzialmente lavora con le sezioni di Dedekind sopra i numeri razionali (1872), è come se ne anticipasse la costruzione).
Leggendo gli Elementi si osserva inoltre che le grandezze considerate da Euclide sono *archimedee*, cioè soddisfano l'assioma di Archimede. [1]
Hilbert utilizza un metodo diverso per introdurre le proporzioni con il quale, vedremo, poter comunque recuperare i risultati del Sesto Libro degli Elementi: viene sfruttata la costruzione del campo F delle classi di segmenti. Nella didattica moderna le proporzioni sono introdotte confrontando i numeri reali corrispondenti alle misure dei segmenti.
Vedremo che con l'approccio di Hilbert non sarà necessario l'assioma di Archimede, nè la teoria dell'area (utilizzata invece da Euclide ad esempio nella dimostrazione della Proposizione ($VI.2$)). Continuiamo quindi a lavorare in un piano di Hilbert in cui è verificato anche l'assioma delle Parallele.

Definizione 31. La classe di congruenza di un segmento AB è un elemento $a \in F$. Definiamo a come la *lunghezza* di AB. Se AB e CD sono due segmenti rispettivamente di lunghezza a e b, definiamo il loro *rapporto* come l'elemento $\frac{a}{b} \in F$. Quattro segmenti di lunghezza a, b, c e d si diranno *proporzionali* se, in F:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Definizione 32. Due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono *simili* se hanno i tre angoli rispettivamente uguali e i lati corrispondenti sono proporzionali, cioè:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

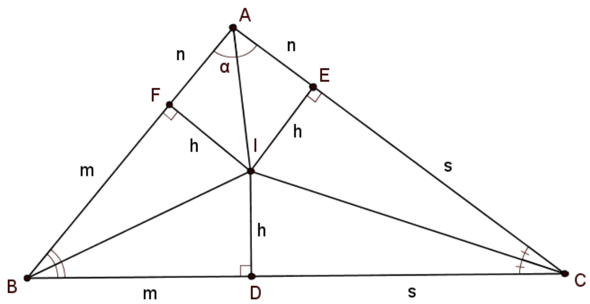
[1] Questo assioma viene enunciato negli Elementi come definizione. Euclide nella definizione (V.4) infatti afferma: "Si dice che hanno fra loro *rapporto* le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente."



(Da qui in avanti se non specificato diversamente indicheremo con a la lunghezza del lato opposto al vertice A, con b quella del lato opposto a B,... come in figura.)

Proposizione 39 (Primo criterio di similitudine)**.** Se due triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno i tre angoli rispettivamente uguali, allora i due triangoli sono simili.

Dimostrazione. Consideriamo il triangolo ABC e tracciamo r ed s, le bisettrici degli angoli $\angle ABC$ e $\angle ACB$. Chiamiamo I il loro punto di intersezione



(che esiste, altrimenti le due rette dovrebbero risultare parallele e gli angoli corrispondenti, formati da r ed s tagliate da BC, supplementari). Da I tracciamo le perpendicolari ad ogni lato e chiamiamo F, D ed E i rispettivi punti di intersezione con AB, BC e CA. Per costruzione i triangoli FIB e BID sono congruenti, come i triangoli DIC e CIE, allora in particolare $FI \cong ID \cong IE$; indichiamo con h tale classe di congruenza. Si può notare che anche la bisettrice dell'angolo $\angle BAC$ passa per I, essendo il luogo geometrico dei punti equidistanti da AB e AC. (NOTA: Questa costruzione corrisponde alla dimostrazione dell'esistenza della circonferenza inscritta in un triangolo, Proposizione (IV.4)). Considerando ancora le coppie di triangoli congruenti (AEI e AFI; BID e BIF; CID e CIE), poniamo:

$$AE \cong AF \in n, \qquad BD \cong BF \in m, \qquad CD \cong CE \in s.$$

Procedendo in modo analogo sul triangolo $A'B'C'$ troviamo i punti D', E', F', I' e i segmenti n', m', s' e h'.
Sia ora $\alpha \cong \angle BAI$, costruiamo un triangolo rettangolo con un angolo α e

il lato ad esso adiacente di lunghezza 1. Detto r l'altro cateto del triangolo osserviamo che per definizione $h = rn$. Ma, essendo per ipotesi $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$ varrà anche: $h' = rn'$. Dividendo membro a membro queste due relazioni si ha:

$$\frac{n}{n'} = \frac{h}{h'}.$$

Lavorando equivalentemente con gli altri angoli otteniamo anche:

$$\frac{m}{m'} = \frac{h}{h'} \quad \text{e} \quad \frac{s}{s'} = \frac{h}{h'};$$

posto tale rapporto uguale a k possiamo scrivere:

$$n = kn', \qquad m = km' \quad \text{e} \quad s = ks'.$$

I lati dei triangoli ABC e $A'B'C'$ sono dati dalle somme di questi segmenti, ad esempio $a = m + s$ e $a' = m' + s'$, allora dalla Proposizione 36 segue che:

$$a = ka',$$

e analogamente

$$b = kb',$$

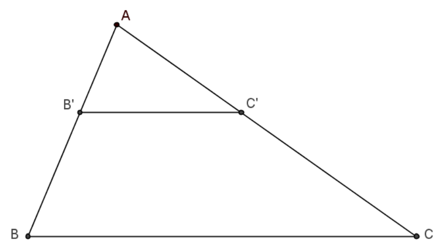
$$c = kc'.$$

Questo ci dice che:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

ovvero che i due triangoli sono simili. □

Proposizione 40 (Teorema di Talete)**.** Dato un triangolo ABC, sia $B'C'$ la retta parallela a BC con $B' \in AB$ e $C' \in AC$, allora i lati AB e AC sono proporzionali ad AB' e AC'. D'altra parte siano $B' \in AB$ e $D \in AC$ tali che AB e AC risultano proporzionali ad AB' e AD, allora la retta $B'D$ è parallela a BC.



Dimostrazione. Poichè stiamo lavorando in un piano di Hilbert che soddisfa anche l'assioma (P) possiamo sfruttare la Proposizione $(I.29)$ (si ricordi il Teorema 4), per dedurre che:

$$\angle AB'C' \cong \angle ABC \qquad \text{e} \quad \angle AC'B' \cong \angle ACB.$$

Essendo poi $\angle BAC$ comune ai triangoli ABC e $AB'C'$, per la Proposizione 39 possiamo concludere che quest'ultimi sono simili ed in particolare:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}.$$

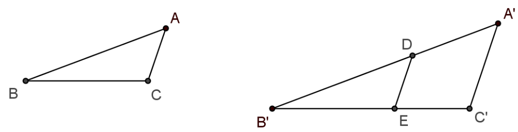
Dimostriamo la seconda parte sfruttando le ipotesi e considerando la retta $B'C'$ parallela a BC (ragionando poi analogamente al passo precedente), avremo che: AB e AC sono proporzionali ad AB' e AD, ma anche ad AB' e AC'. Allora dovrà risultare necessariamente $AD \cong AC'$, e dall'assioma $(C1)$ i punti D e C' coincideranno. La retta $B'D$ è quindi proprio la retta $B'C'$, che è parallela a BC, come volevamo. □

Proposizione 41 (Terzo criterio di similitudine)**.** Siano dati i triangoli ABC e $A'B'C'$ con:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

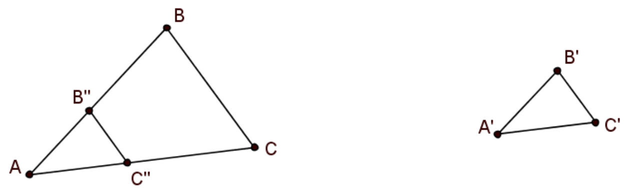
allora i due triangoli sono simili.

Dimostrazione. Se fosse $a = a'$ i due triangoli risulterebbero congruenti (e quindi anche simili) per la Proposizione $(I.8)$; mostriamo quindi il caso in cui $a < a'$ (il caso $a > a'$ è analogo). Essendo a' maggiore di a, esiste un punto $D \in A'B'$ che soddisfa $B'D \cong BA$. Tracciamo la parallela al lato $A'C'$, passante per D. Sia E il punto in cui tale retta interseca il lato $B'C'$ e



osserviamo, per la Proposizione 40, che i triangoli $DB'E$ e $A'B'C'$ sono simili; allora hanno i lati in proporzione. Per ipotesi anche i lati di ABC sono in proporzione con i lati di $A'B'C'$, perciò i lati di ABC saranno in proporzione anche con i lati di $DB'E$. Ma, per costruzione $B'D \cong BA$, allora il fattore di proporzionalità tra ABC e $DB'E$ sarà 1. Quindi il triangolo ABC è congruente al triangolo $DB'E$ (Proposizione $(I.8)$), in particolare saranno congruenti gli angoli corrispondenti. Questo ci permette di dire che gli angoli di ABC sono uguali agli angoli di $A'B'C'$ e concludere, per la Proposizione 39, che allora i due triangoli sono simili, come volevamo. □

Proposizione 42 (Secondo criterio di similidutine)**.** Siano dati i triangoli ABC e $A'B'C'$ con $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e i lati AB e AC proporzionali ad $A'B'$ e $A'C'$. Allora i due triangoli sono simili.



Dimostrazione. Senza perdere di generalità assumiamo $AB > A'B'$, allora esiste $B'' \in AB$ che soddisfa $A'B' \cong AB''$; ma allora esisterà anche $C'' \in AC$ che verifica $A'C' \cong AC''$. Per costruzione abbiamo: AB e AC proporzionali ad AB'' e AC'' e, ricordando l'assioma $(C6)$, i triangoli $A'B'C'$ e $AB''C''$ congruenti. Dalla Proposizione 40 segue che la retta $B''C''$ è parallela alla retta BC, e quindi:

$$\angle AB''C'' \cong \angle ABC \quad \text{e} \quad \angle AC''B'' \cong \angle ACB.$$

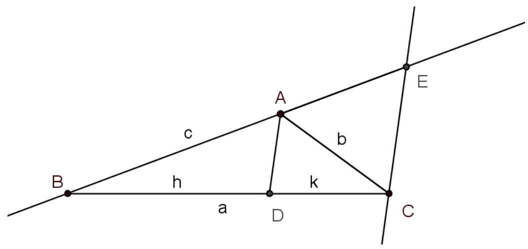
Per la congruenza tra $A'B'C'$ e $AB''C''$ possiamo dire che i due triangoli di partenza hanno tutti gli angoli rispettivamente congruenti e quindi sono simili per la Proposizione 39. □

Proposizione 43 (Teorema della bisettrice)**.** Sia dato un triangolo ABC e sia $D \in BC$ tale che $\angle BAD \cong \angle DAC$. Allora AC e AB sono proporzionali a DC e BD.

Dimostrazione. Sia r la retta parallela ad AD passante per C; sia E il punto di intersezione tra r e la retta passante per A e B. Per costruzione, ricordando la Proposizione $(I.29)$, sappiamo che:

$$\angle BAD \cong \angle AEC \quad \text{e} \quad \angle DAC \cong \angle ACE,$$

ma per ipotesi $\angle BAD \cong \angle DAC$, allora il triangolo ACE risulta un triangolo



isoscele; in particolare $AE \cong AC$. Considerando la Proposizione 40 sul triangolo BCE possiamo inoltre dire che BE e BC sono proporzionali a BA e BD. Riassumendo abbiamo:

$$AE \cong AC \in b,$$

$$AB \in c,$$

$$BE \in b + c,$$

$$BD \in h,$$

$$DC \in k,$$

$$BC \in a \quad \text{e} \quad a = h + k,$$

con

$$\frac{(c+b)}{c} = \frac{h+k}{h}.$$

Quest'ultima relazione si può esprimere equivalentemente nella forma:

$$\frac{b}{c} = \frac{k}{h},$$

che per definizione di proporzionalità ci dice proprio che AC e AB sono proporzionali a DC e BD. □

Queste ultime Proposizioni corrispondono ad altrettante Proposizioni del Sesto Libro degli Elementi di Euclide, possiamo infatti più in generale dimostrare che:

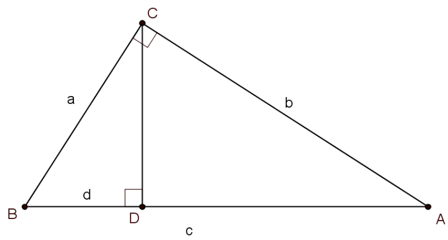
Teorema 7. In un piano di Hilbert in cui è soddisfatto anche l'assioma delle Parallele, le Proposizioni $(VI.2) - (VI.13)$ sono verificate.

Dimostrazione. Abbiamo proposto all'inizio di questa Sezione la Proposizione 39, che corrisponde alla $(VI.4)$; l'abbiamo poi utilizzata per mostrare la Proposizione 40, che equivale alla $(VI.2)$ (si noti quindi che nel piano di Hilbert queste Proposizioni si susseguono con un ordine diverso da quello degli Elementi). Abbiamo inoltre visto le Proposizioni 41, 42 e 43 che corrispondono rispettivamente alla $(VI.5)$, $(VI.6)$ e $(VI.3)$.
Le rimanenti si provano con ragionamenti analoghi a quelli appena visti. □

La teoria della similitudine tra triangoli ci permette inoltre di mostrare alcuni risultati che Euclide enunciava in termini di area: vediamo una versione del Teorema di Pitagora $(I.47)$ in cui la relazione di base è espressa tramite un'equazione composta da elementi del campo F.

Proposizione 44 (Teorema di Pitagora)**.** Sia dato un triangolo ABC con $\angle ACB$ retto, allora nel campo F vale:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Dimostrazione. Tracciamo la perpendicolare al lato AB passante per il punto C e indichiamo con D il punto di tale retta che appartiene anche ad AB. Si individuano così due triangoli rettangoli BCD e ACD, che hanno gli angoli congruenti al triangolo di partenza. La Proposizione 39 ci permette di dire che i tre triangoli sono simili (questo risultato coincide con la Proposizione $(VI.8)$). Allora, per la similitudine di CBD con ABC avremo:

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{c},$$

e per la similitudine tra ACD e ABC:

$$\frac{c-d}{b} = \frac{b}{c}.$$

Da queste relazioni deduciamo che:

$$cd = a^2, \qquad \text{e} \qquad c^2 - cd = b^2.$$

Andando a sostituire si ha la tesi:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Corollario 6. Dato un piano di Hilbert che soddisfa l'assioma delle Parallele, il campo dei segmenti definito nella Proposizione 38 è Pitagorico.

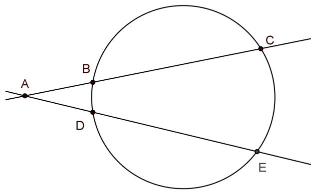
Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che per ogni $a \in F$ allora $\sqrt{1+a^2} \in F$. Il caso in cui $a = 0$ è ovvio; se a fosse negativo possiamo scrivere $-a$ al posto di a, riconducendoci così a lavorare con una quantità positiva. Discutiamo perciò il caso in cui a è positivo (ovvero a è la lunghezza di un qualche segmento). Costruiamo un triangolo rettangolo con i cateti di lunghezza 1 ed a. L'ipotenusa è un segmento di lunghezza c che, per la Proposizione 44, verifica: $c^2 = 1 + a^2$. Allora $\sqrt{1+a^2} = c \in P \subset F$. □

Molti altri risultati possono essere provati sfruttando la similitudine dei triangoli. Sul libro di Hartshorne [9] si trovano ad esempio la dimostrazione della Proposizione $(III.35)$, della $(III.36)$ e il Teorema di Menelao.
Dedichiamo quindi l'ultima parte di questa Sezione alla dimostrazione di alcuni risultati classici della geometria e della trigonometria, utilizzando come strumento fondamentale la similitudine dei triangoli.

Proposizione 45 (Teorema delle secanti)**.** Sia dato un punto A esterno ad una circonferenza. Tracciamo due secanti, che individuano rispettivamente i punti B, C e D, E, allora:

$$[AB] \cdot [AC] = [AD] \cdot [AE].$$

Il prodotto $[AB]\cdot[AC]$ è detto *potenza* del punto A rispetto alla circonferenza.



Dimostrazione. Per provare la Proposizione uniamo il punto B con E e il punto D con C, così da individuare i triangoli ABE e ADC che hanno l'angolo in A comune. All'interno della Proposizione 35 abbiamo visto che la Proposizione $(III.21)$ vale in un piano di Hilbert che soddisfa anche l'assioma delle Parallele, allora insistendo sullo stesso arco delimitato dai punti B e D, gli angoli $\angle ACD$ e $\angle BEA$ risultano congruenti. Essendo di conseguenza anche $\angle ABE \cong \angle ADC$, abbiamo la similitudine tra i triangoli ABE e ADC, dalla quale segue:

$$\frac{[AB]}{[AD]} = \frac{[AE]}{[AC]},$$

ovvero

$$[AB] \cdot [AC] = [AD] \cdot [AE].$$

□

Proposizione 46 (Teorema di Ceva)**.** Sia P un punto interno ad un triangolo qualsiasi ABC. Siano D, E ed F i punti in cui le rette che uniscono P con ogni vertice intersecano il lato opposto. Allora:

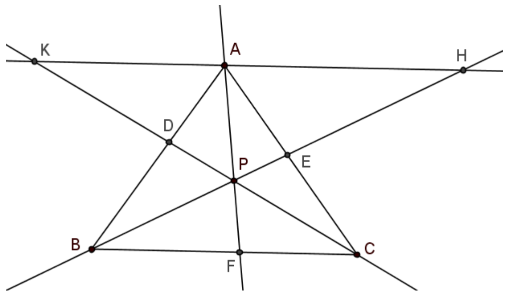
$$\frac{[AD]}{[BD]} \cdot \frac{[BF]}{[CF]} \cdot \frac{[EC]}{[AE]} = 1.$$

Dimostrazione. Tracciamo la retta parallela a BC passante per A ed indichiamo con K e H i suoi punti di intersezione rispettivamente con la retta CP e BP. Essendo le rette KH e BC parallele, considerando la trasversale CK abbiamo:

$$\angle AKP \cong \angle PCF,$$

se poi consideriamo come trasversale la retta AF abbiamo:

$$\angle KAP \cong \angle PFC,$$



inoltre

$$\angle APK \cong \angle CPF,$$

essendo opposti al vertice. Allora i triangoli AKP e FCP risultano simili, per la Proposizione 39; in particolare:

$$\frac{[AP]}{[PF]} = \frac{[AK]}{[CF]}.$$

Analogamente si mostrano le similitudini tra i triangoli:

$$ADK \quad \text{e} \quad BDC, \quad \text{da cui} \quad \frac{[AD]}{[BD]} = \frac{[AK]}{[BC]};$$

$$APH \quad \text{e} \quad FPB, \quad \text{da cui} \quad \frac{[AP]}{[PF]} = \frac{[AH]}{[BF]};$$

$$AEH \quad \text{e} \quad CEB, \quad \text{da cui} \quad \frac{[AE]}{[EC]} = \frac{[AH]}{[BC]}.$$

Sfruttando queste relazioni osserviamo che:

$$\frac{[AD]}{[BD]} = \frac{[AK]}{[BC]} = \frac{[AP]}{[PF]} \cdot \frac{[CF]}{[BC]} = \frac{[AH]}{[BF]} \cdot \frac{[CF]}{[BC]} = \frac{[CF]}{[BF]} \cdot \frac{[AE]}{[EC]},$$

concludendo:

$$\frac{[AD]}{[BD]} = \frac{[CF]}{[BF]} \cdot \frac{[AE]}{[EC]},$$

da cui:

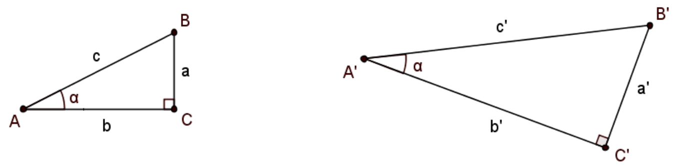
$$\frac{[AD]}{[BD]} \cdot \frac{[BF]}{[CF]} \cdot \frac{[EC]}{[AE]} = 1.$$

□

In un piano di Hilbert in cui vale anche l'assioma delle Parallele consideriamo un triangolo ABC con $\angle BCA$ retto. Detto α l'angolo $\angle BAC$, indichiamo:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Abbiamo quindi definito seno e coseno come elementi del campo ordinato F (Proposizione 38).
Si osservi che andando a considerare un secondo triangolo $A'B'C'$, rettangolo in C' e con $\angle B'A'C' \cong \alpha$ come visto prima, ricordando il Teorema 4 e per la Proposizione 10, possiamo concludere che i due triangoli sono simili.



Allora in particolare avremo:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'},$$

e analogamente per ogni altra coppia di lati. Questo ci dice che le funzioni seno e coseno, appena definite, dipendono solo dall'angolo α e non dal triangolo scelto.
Come conseguenza della Proposizione 44 abbiamo la relazione fondamentale:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

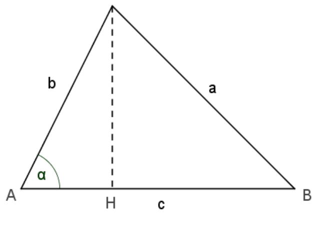
Mostriamo ora due Teoremi basilari della trigonometria.

Proposizione 47 (Teorema del coseno)**.** Dato ABC un triangolo qualsiasi con lati a, b, c e detto α l'angolo in A, vale la seguente uguaglianza:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Dimostrazione. Sarà necessario distinguere due casi: α acuto e α ottuso.

Se l'angolo α è acuto,

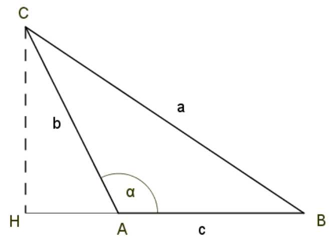


tracciata l'altezza relativa alla base AB consideriamo il triangolo CHA dove osserviamo che: $[CH] = b \sin \alpha$ e $[AH] = b \cos \alpha$. Essendo BHC un triangolo

rettangolo vale la seguente relazione: $a^2 = [CH]^{\,2} + [BH]^{\,2}$.
Inoltre $[BH] = c - [AH]$. (Si osservi che possiamo assumere senza perdere di generalità che l'altezza CH cada internamente ad AB).
Allora:

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + b^2\sin^2\alpha \\ &= c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + b^2\sin^2\alpha \\ &= b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Nel caso in cui α è ottuso, sarà necessario osservare che $\cos\alpha = -\frac{[AH]}{[AC]}$ e $\sin\alpha = \frac{[CH]}{[AC]}$.

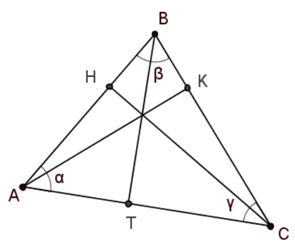


La dimostrazione poi procede in modo analogo. □

Anche quest'ultima Proposizione compare negli Elementi di Euclide, Proposizione $(II.13)$, enunciata in termini di area.

Proposizione 48 (Teorema del seno)**.** Dato ABC un triangolo qualsiasi con lati a, b e c , valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$



Dimostrazione. Tracciamo le altezze AK, CH e BT (possiamo assumere che K, H e T appartengano ai lati del triangolo, in caso contrario la dimostrazione è del tutto analoga). Abbiamo:

$$\sin\alpha = \frac{[CH]}{[CA]}, \quad \sin\beta = \frac{[AK]}{[AB]}, \quad \text{e} \quad \sin\gamma = \frac{[AK]}{[AC]}.$$

Per la Proposizione 39 possiamo dire che: il triangolo AKC è simile al triangolo BTC, il triangolo ATB è simile a AHC ed infine che CHB è simile al triangolo AKB. Da queste similitudini seguono le relazioni:

$$\frac{[AK]}{[AC]} = \frac{[BT]}{[BC]},$$

$$\frac{[BT]}{[AB]} = \frac{[CH]}{[CA]},$$

e

$$\frac{[CH]}{[BC]} = \frac{[AK]}{[AB]}.$$

Dalle prime due deduciamo:

$$[BT] = a \sin\gamma \quad \text{e} \quad [BT] = c \sin\alpha.$$

Inoltre

$$[CH] = \frac{[BT][CA]}{[AB]} = \frac{bc \sin\alpha}{c},$$

e

$$[CH] = a \sin\beta,$$

allora riassumendo:

$$a \sin\gamma = c \sin\alpha \quad \text{e} \quad a \sin\beta = b \sin\alpha.$$

Divendo la prima uguaglianza per ac e la seconda per ab si ha la tesi:

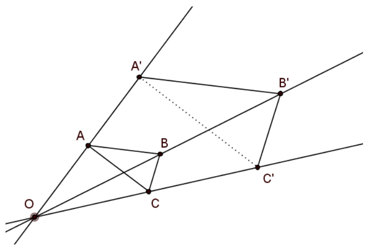
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

$\square$

3.3 Introduzione delle coordinate in un piano di Hilbert

Come a riassumere quanto visto sinora proponiamo i seguenti Teoremi.

Teorema 8. Sia Π_F un piano cartesiano su un campo ordinato F, data la configurazione sotto riportata, se $AB \parallel A'B'$ e $BC \parallel B'C'$, allora anche $AC \parallel A'C'$.



Dimostrazione. Nel piano cartesiano Π_F possiamo considerare un cambiamento di coordinate in modo tale che:

$$O = (0,0), \quad A = (0,1), \quad C = (1,0) \quad \text{e siano} \quad B = (a,b), \quad A' = (0,c).$$

La retta AC è la retta di equazione $y = -x + 1$, ed ha quindi coefficiente angolare uguale a -1. Il nostro obiettivo è provare che è lo stesso coefficiente angolare della retta $A'C'$.
Cerchiamo prima di tutto le coordinate del punto C' e per farlo partiamo dal determinare l'equazione della retta passante per A e B:

$$(b-1)x - ay + a = 0.$$

Scriviamo ora l'equazione della retta parallela ad AB passante per A':

$$(b-1)x - ay + ac = 0,$$

l'equazione della retta passante per O e B:

$$bx - ay = 0,$$

e sfruttando le proprietà delle due operazioni del campo determiniamo le coordinate del loro punto di intersezione $B' = (ac, bc)$. Allora, scritta l'equazione della retta BC:

$$-bx + (a-1)y + b = 0,$$

possiamo determinarne la parallela passante per B' ed intersecandola con la retta OC trovare le coordinate del punto $C' = (c, 0)$. Concludiamo con l'equazione della retta $A'C'$:

$$cx + cy - c \cdot c = 0,$$

o equivalentemente

$$y = -x + c,$$

che ci permette di osservare che il coefficiente angolare di tale retta è -1, proprio come volevamo. □

Questa dimostrazione è di tipo algebrico; nel seguente Teorema lavoreremo invece con gli strumenti che ci sono dati a disposizione dalla geometria sintetica.

Teorema 9. In un piano di Hilbert che soddisfa anche l'assioma delle Parallele siano dati due triangoli ABC e $A'B'C'$. Assumiamo che la retta AB sia parallela alla retta $A'B'$, la retta BC sia parallela alla retta $B'C'$ e le rette AA', BB' e CC' abbiano in comune il punto O. Allora anche $AC \parallel A'C'$.

Dimostrazione. Facendo riferimento alla figura precedente consideriamo i triangoli $OA'B'$ e OAB, che hanno in comune l'angolo in O; dal parallelismo tra le rette segue che:

$$\angle OA'B' \cong \angle OAB,$$

e

$$\angle OB'A' \cong \angle OBA.$$

Allora per la Proposizione 39 possiamo dire che i due triangoli sono simili ed in particolare:

$$\frac{[OA']}{[OA]} = \frac{[OB']}{[OB]}.$$

Analogamente, considerando i triangoli $OC'B'$ e OCB, abbiamo:

$$\frac{[OC']}{[OC]} = \frac{[OB']}{[OB]},$$

allora

$$\frac{[OA']}{[OA]} = \frac{[OB']}{[OB]} = \frac{[OC']}{[OC]}.$$

Soffermiamoci ora sui triangoli $OA'C'$ e OAC, che hanno in comune l'angolo in O. Dalla precedente relazione sappiamo inoltre che:

$$\frac{[OA']}{[OC']} = \frac{[OA]}{[OC]}.$$

Per la Proposizione 42 i due triangoli risulteranno simili ed in particolare $\angle OA'C' \cong \angle OAC$. Essendo angoli corrispondenti formati dalle rette $A'C'$ e AC tagliate dalla trasversale AA', possiamo concludere che le due rette sono parallele, come richiesto. □

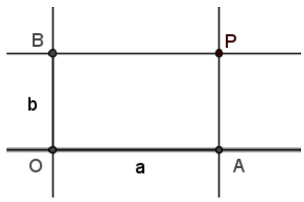
Quelli appena visti sono due diversi enunciati di uno stesso Teorema: il Teorema di Desargues, che abbiamo dimostrato essere verificato sia in un piano cartesiano su un campo F, che in un piano di Hilbert.
In questa Sezione mostreremo che questa non è una particolarità di questo Teorema ma: il piano di Hilbert a partire dal quale si riesce a definire un campo ordinato F, come visto nella Proposizione 38, *corrisponde* proprio al piano cartesiano definito a partire da tale campo.
Si pensi all'assioma (E) e alla proprietà di intersezione retta circonferenza (RCI), la loro equivalenza è stata dimostrata provando che entrambe sono equivalenti alla proprietà di un campo di essere Euclideo. Non siamo a conoscenza di una dimostrazione puramente sintetica di questo risultato. L'importanza di quello che vedremo risiede quindi sia nel dare la possibilità di affrontare, come visto, un Teorema da diversi punti di vista, ma anche nel poter usufruire in un piano di Hilbert di risultati dimostrabili solo algebricamente, o viceversa di sfruttare proprietà ricavate con la geometria sintetica in un piano cartesiano su un campo.
Prima di tutto cerchiamo di chiarire cosa si intende con il termine "corrispondenza", più precisamente infatti diremo che i due piani sono *isomorfi* .

Definizione 33. Siano Π e Π' due piani di Hilbert. Si definisce un *isomorfismo* tra Π e Π' una mappa biunivoca $\varphi\colon \Pi \to \Pi'$ tale che:

1. Un sottoinsieme $L \subseteq \Pi$ è una retta se e solo se $\varphi(L) \subseteq \Pi'$ è una retta.
2. Tre punti $A, B, C \in \Pi$ sono collocati in modo che valga $A * B * C$ se e solo se in Π' risulta $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$.
3. Dati quattro punti $A, B, C, D \in \Pi$ il segmento AB è congruente a CD se e solo se il segmento $\varphi(A)\varphi(B)$ è congruente al segmento $\varphi(C)\varphi(D)$ in Π'.
4. Se α è un angolo formato dalle semirette AB e CD in Π e chiamiamo $\varphi(\alpha)$ l'angolo formato da $\varphi(A)\varphi(B)$ e $\varphi(A)\varphi(C)$ in Π', gli angoli α e β sono congruenti in Π se e solo se gli angoli $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$ sono congruenti in Π'.

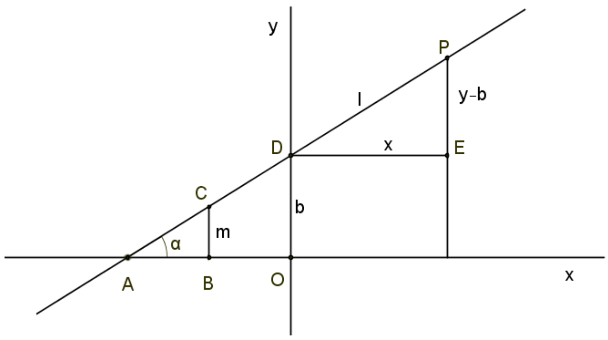
Teorema 10 (Introduzione delle coordinate)**.** Sia Π un piano di Hilbert che soddisfa l'assioma delle parallele (P). Sia F il campo ordinato dei segmenti aritmetici di Π. Allora F è Pitagorico e Π è isomorfo al piano cartesiano F^2 sul campo F.

Dimostrazione. Fissiamo due rette perpendicolari sul piano Π; chiameremo *asse x* e *asse y* le due rette e *origine*, O, il loro punto di intersezione. Sull'asse x possiamo individuare un punto 1_x per cui il segmento $O1_x$ risulti un rappresentante dell'elemento 1 del campo F. Tutti i punti dell'asse x che stanno dalla stessa parte di 1_x rispetto all'origine definiscono la semiretta positiva. Si procede analogamente per determinare il semiasse positivo $\overrightarrow{01_y}$. Per ogni punto P del piano possiamo poi considerare la retta PA perpendicolare all'asse x con $A \in x$ e PB perpendicolare all'asse y con $B \in y$. Indicheremo $[OA] = a \in F$ e $[OB] = b \in F$.



Definiamo la mappa $\varphi \colon \Pi \to F^2$ associando ad ogni punto $P \in \Pi$ l'elemento $(\pm a, \pm b) \in F^2$, dove il segno $+$ o $-$ indica se i punti A e B appartengono al semiasse positivo o negativo. La mappa φ definisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di Π e l'insieme delle coppie ordinate di elementi di F; per mostrare che φ è un isomorfismo dobbiamo verificare che è compatibile con le nozioni di retta, collocamento, congruenza di segmenti e congruenza di angoli. É necessario ricordare che in Π questi sono concetti indefiniti le cui proprietà sono date solo tramite gli assiomi e le loro conseguenze, mentre in F^2 questi concetti sono definiti tramite condizioni algebriche.

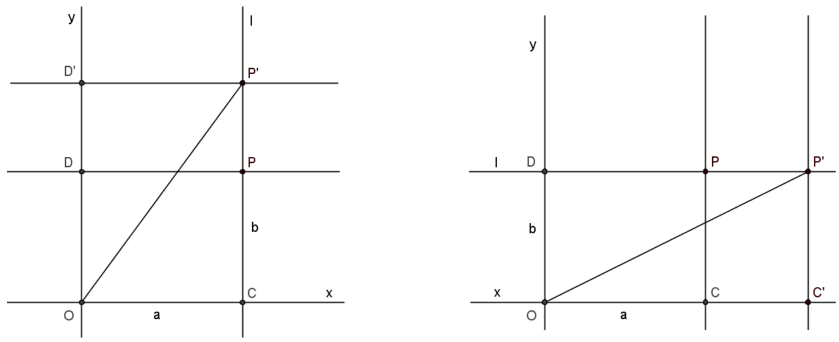
Primo passo: Sia l una retta di Π, consideriamo prima di tutto il caso in cui l è una retta generica, vedremo di seguito i casi in cui l è una retta verticale (parallela all'asse y) o orrizzontale (parallela all'asse x). Indichiamo con A il punto in cui l interseca l'asse x e prendiamo $B \in x$ tale che $AB \in 1$. Tracciata la retta perpendicolare all'asse x passante per B, sia C il suo punto di intersezione con l, indichiamo con $m \in F$ la classe di BC (diremo che m è il *coefficiente angolare* di l) e con α l'angolo $\angle CAB$. Sia poi D il punto di intersezione tra l e l'asse y e $[OD] = b \in F$. Assumiamo



senza perdere di generalità che: A appartenga alla semiretta negativa dell'asse x, B stia tra A e O, D appartenga alla semiretta positiva dell'asse y. Sia $P = (x, y)$ un punto arbitrario del piano, tracciando la perpendicolare all'asse x per P ed all'asse y per D, individuiamo il triangolo DPE in cui $[DE] = x$ e $[PE] = y - b$. Si noti che se il punto P appartiene alla retta l allora gli angoli corrispondenti $\angle PDE$ e α, formati dall'asse x con la sua parallela DE e tagliate da l, risultano congruenti. D'altra parte, se i due angoli sono congruenti, per l'assioma $(C4)$, il punto P deve appartenere alla retta l. Quindi:

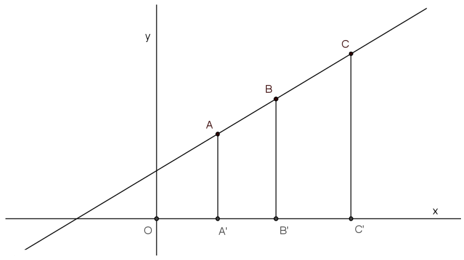
$$P \in l \iff \angle PDE \cong \alpha.$$

Tale condizione, portando come immediata conseguenza la similitudine dei triangoli ACB e DPE, equivale a dire che: $P = (x, y)$ appartiene a l se e solo se $y - b = mx$, ovvero $y = mx + b$.
Consideriamo ora il caso in cui la retta l è verticale. Sia $P = (a, b) \in l$, indichiamo con D il punto dell'asse y tale che $DP \in a$ e con C il punto dell'asse x tale che $CP \in b$. Preso un punto qualsiasi del piano $P' = (x, y)$ siano C' e D' i punti di intersezione rispettivamente dell'asse x e dell'asse y con le loro perpendicolari passanti per P'. Osserviamo che $P' \in l$ se e solo se $\angle P'CO$ è retto, ovvero se e solo se i triangoli $P'D'O$ e OCP' sono congruenti e quindi $x = a$.
Se infine la retta l è parallela all'asse y, il punto $P' \in l$ se e solo se $\angle P'DO$ è retto e, analogamente a quanto appena visto, si giunge a concludere che: $P' \in l$ se e solo se $y = b$. Poichè le rette di F^2 sono definite da equazioni



lineari, quanto detto prova che: $L \subseteq \Pi$ è una retta se e solo se $\varphi(L) \subseteq F^2$ è una retta, come volevamo.

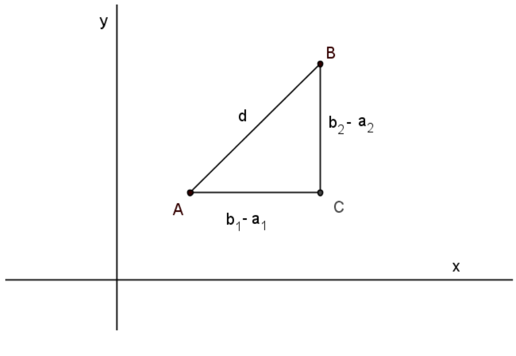
Secondo passo: Siano A, B, C tre punti allineati di Π (dal passo precedente sappiamo che anche le loro immagini sono allineate in Π'). Chiamiamo A', B', C' le loro proiezioni sull'asse delle x (assumiamo ancora senza perdere di generalità che le coordinate dei tre punti siano tutte positive). Poichè per costruzione AA', BB', CC' sono parallele, i punti A e C sono da parti opposte rispetto a BB' se e solo se anche A' e C' lo sono, cioè vale $A * B * C$ se e solo se vale $A' * B' * C'$. Siano $a, b, c \in F$ e assumiamo che $OA' \in a$, $OB' \in b$ e $OC' \in c$, allora da $A' * B' * C'$ segue che $OA' \leq OB' \leq OC'$ oppure $OC' \leq OB' \leq OA'$, cioè $a \leq b \leq c \quad$ o $\quad c \leq b \leq a$. Dalla definizione di collocamento in F^2 (Proposizione 23), questo vuol dire che $\varphi(B)$ è collocato



tra $\varphi(A)$ e $\varphi(C)$, come volevamo. Si noti che se i tre punti A, B e C sono allineati verticalmente A', B' e C', coincidono; si lavorerà allora analogamente ma con le proiezioni dei tre punti sull'asse y, ancora in accordo con la definizione di collocamente della Proposizione 23.

Terzo passo: Siano A e B due punti di Π con AB un rappresentante di $d \in F$. Siano $\varphi(A) = (a_1, b_1)$ e $\varphi(B) = (b_1, b_2)$, allora possiamo disegnare il triangolo ABC con i lati paralleli agli assi e per costruzione avremo:

$$AC \in b_1 - a_1 \quad \text{e} \quad BC \in b_2 - a_2.$$



Per il teorema di Pitagora in F (Proposizione 44), abbiamo che:

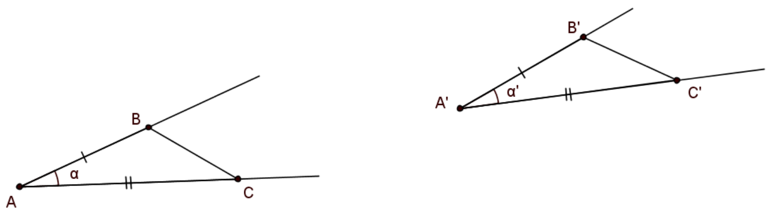
$$d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2.$$

Sia ora $A'B'$ un nuovo segmento di lunghezza $d' \in F$, analogamente a prima se $\varphi(A') = (a'_1, a'_2)$ e $\varphi(B') = (b'_1, b'_2)$, vale:

$$d'^2 = (b'_1 - a'_1)^2 + (b'_2 - a'_2)^2.$$

Ora, sappiamo che $AB \cong A'B'$ se e solo se $d = d'$, per come si è definito il campo F. D'altra parte $d = d'$ se e solo se $d^2 = d'^2$ essendo entrambi elementi positivi di F. Le equazioni viste sopra ci dicono che d^2 e d'^2 sono proprio uguali alla funzione distanza usata per definire la congruenza di segmenti in F^2 (Definizione 23). Possiamo quindi concludere che $AB \cong A'B'$ se e solo se $\varphi(A)\varphi(B) \cong \varphi(A')\varphi(B')$.

QUARTO PASSO: Mostriamo infine che due angoli α e α' sono congruenti in Π se e solo se gli angoli $\phi(\alpha)$ e $\phi(\alpha')$ sono congruenti in Π'.
Consideriamo gli angoli α ed α', indichiamo con A e A' i loro vertici e rispettivamente sulle semirette che generano i due angoli determiniamo i punti B, C e B', C', in modo che risulti $AB \cong A'B'$ e $AC \cong A'C'$. Unendo B con C e B' con C', si individuano i triangoli ABC e $A'B'C'$.



Se $\alpha \cong \alpha'$ dall'assioma $(C6)$ segue che i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti, in particolare $BC \cong B'C'$. D'altra parte se $BC \cong B'C'$, sapendo che la Proposizione $(I.8)$ è soddisfatta in Π (Teorema 1), i due triangoli risulteranno congruenti ed in particolare l'angolo α risulterà congruente all'angolo α'. Abbiamo quindi provato che:

$$\alpha \cong \alpha' \quad \Longleftrightarrow \quad BC \cong B'C'.$$

Applichiamo la funzione ϕ ai sei vertici dei due triangoli, abbiamo:

$$\phi(A)\phi(B) \cong \phi(A')\phi(B')$$

e

$$\phi(A)\phi(C) \cong \phi(A')\phi(C'),$$

per il passo precedente.
Poichè anche in F^2 possiamo ragionare in modo analogo a quello appena visto, avremo:

$$\phi(\alpha) \cong \phi(\alpha') \Longleftrightarrow \phi(B)\phi(C) \cong \phi(B')\phi(C').$$

Riassumendo:

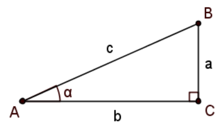
$$\alpha \cong \alpha' \Leftrightarrow BC \cong B'C' \Leftrightarrow \phi(B)\phi(C) \cong \phi(B')\phi(C') \Leftrightarrow \phi(\alpha) \cong \phi(\alpha'),$$

come volevamo. $\square$

Prima di concludere, osserviamo che l'ultimo passo necessario per provare il Teorema 10 è stato dimostrato indirettamente. É possibile tuttavia affrontare anche una dimostrazione diretta; di seguito ne proponiamo un accenno.
Nella Sezione 3.2 abbiamo introdotto il seno ed il coseno di un angolo come elementi del campo F, ci servirà ora considerare la tangente. Analogamente a quanto visto per seno e coseno, anche la tangente (che indicheremo con $\tan_*$), non dipenderà dal triangolo considerato ma solo dall'angolo α.

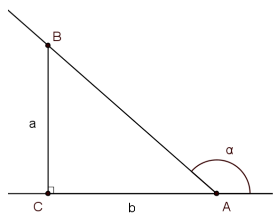
Definizione 34. Individuato nel piano Π un triangolo ABC con $\angle BCA$ retto e l'angolo $\angle BAC = \alpha$, si definisce:

$$\tan_* \alpha = \frac{a}{b}$$



Si faccia attenzione, $\tan_*$ non è definita per angoli retti e nel caso in cui l'angolo α è ottuso abbiamo:

$$\tan_* \alpha = -\frac{a}{b}.$$



Per comodità da qui in avanti supponiamo di lavorare con angoli acuti.

Proposizione 49. Dati due angoli adiacenti α e β, con vertice comune nel punto A, è possibile provare le formule che esprimono la tangente di una somma e una differenza di angoli:

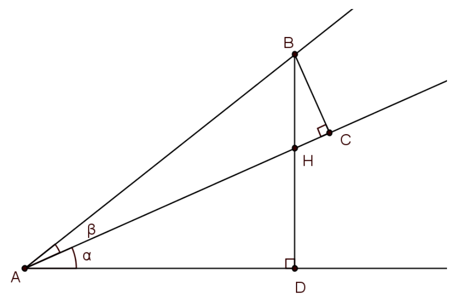
$$\tan_*(\alpha + \beta) = \frac{\tan_* \alpha + \tan_* \beta}{1 - \tan_* \alpha \tan_* \beta}, \tag{3.1}$$

$$\tan_*(\alpha - \beta) = \frac{\tan_* \alpha - \tan_* \beta}{1 + \tan_* \alpha \tan_* \beta}. \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Proponiamo la dimostrazione solo della 3.1.
Dalla Definizione 34 di tangente, dal Teorema di Pitagora (Proposizione 44) e dalla similitudine dei triangoli, seguono:

$$[AD]^2 + [DB]^2 - [AC]^2 - [BC]^2 = 0,$$

$$[AD]\tan_* \alpha - [DH] = 0,$$
$$[CH] - [BC]\tan_* \alpha = 0,$$
$$[DB] - [AD]\tan_*(\alpha+\beta) = 0,$$
$$[BC] - [AC]\tan_* \beta = 0,$$
$$[CH]^2 + [BC]^2 - ([DB] - [DH])^2 = 0,$$
$$[CH]\cdot([AC] - [CH]) - [DH]\cdot([DB] - [DH]) = 0.$$



Moltiplichiamo ognuna di queste sette equazioni rispettivamente per i seguenti sette coefficienti [2]:

$$1) \quad \tan_*(\alpha+\beta)\cdot\tan_*\alpha\cdot\tan_*\beta\cdot(1+\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*\alpha - \tan_*\alpha^2),$$

$$2) \quad \tan_*(\alpha+\beta)\cdot([DB]\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*^2\alpha\tan_*\beta + [AD]\tan_*^2\alpha\tan_*\beta +$$
$$+[DH]\tan_*\alpha\tan_*\beta - [DB]\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*\alpha + [DH]\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*\alpha +$$
$$+[AD]\tan_*\alpha - [AD]\tan_*(\alpha+\beta) + [DH]),$$

$$3) \quad \tan_*(\alpha+\beta)\cdot([DB]\tan_*^2\alpha\tan_*\beta + [AC]\tan_*^2\alpha + [CH]\tan_*\alpha\tan_*\beta +$$
$$-[AC]\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*\alpha + [CH]\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*\alpha +$$
$$-[BC]\tan_*\alpha - [AC] + [CH]),$$

[2] Abbiamo ottenuto questo suggerimento dall'aiuto di un calcolatore.

$$4)\quad ([DB]\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*^3\alpha\tan_*\beta+[AD]\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*^2\alpha\tan_*\beta+$$

$$-[DB]\tan_*^2\alpha\tan_*(\alpha+\beta)+[DH]\tan_*^2\alpha\tan_*(\alpha+\beta)+[AD]\tan_*^2\alpha+$$

$$+[AD]\tan_*\alpha\tan_*\beta-[AD]\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*\alpha+[DH]\tan_*(\alpha+\beta)),$$

$$5)\quad \tan_*(\alpha+\beta)\cdot\tan_*\alpha\cdot([AC]\tan_*^2\alpha-[AC]\tan_*\alpha\tan_*(\alpha+\beta)+$$

$$+[CH]\tan_*\alpha\tan_*(\alpha+\beta)-[AC]+2[CH]),$$

$$6)\quad \tan_*(\alpha+\beta)\cdot\tan_*\alpha\cdot(\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*\alpha\tan_*\beta-\tan_*\alpha+\tan_*\beta),$$

$$7)\quad \tan_*(\alpha+\beta)\cdot(\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*^2\alpha\tan_*\beta-\tan_*^2\alpha+$$

$$+2\tan_*\alpha\tan_*\beta+\tan_*\alpha\tan_*(\alpha+\beta)+1).$$

Sommando membro a membro, si osserva che gran parte dei termini si annullano, e rimane:

$$[AD][DB]\tan_*\alpha\cdot(\tan_*(\alpha+\beta)\tan_*\alpha\tan_*\beta+\tan_*\alpha+\tan_*\beta-\tan_*(\alpha+\beta))=0.$$

Essendo $[AD]$, $[DB]$ e $tan_*\alpha$, quantità diverse da zero, si osserva che la precedente equazione equivale proprio a quella cercata, ovvero:

$$\tan_*(\alpha+\beta)=\frac{\tan_*\alpha+\tan_*\beta}{1-\tan_*\alpha\tan_*\beta}.$$

□

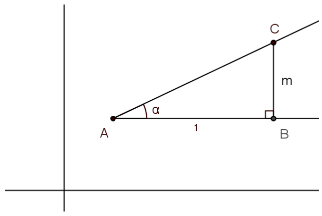
Procediamo ora ricordando che, nel piano cartesiano definito a partire da un campo, avevamo definito (pagina 84) la tangente come:

$$\tan\alpha=\frac{m'-m}{1+mm'},$$

dove α è l'angolo, supposto acuto, formato da due semirette r' e r, rispettivamente di coefficiente angolare m' e m.
Prendiamo ora un qualsiasi angolo α generato dalle semirette r ed r', se r coincide con l'asse x (o con una retta ad esso parallela) e r' ha equazione $y=mx+q$, si ha:

$$\tan\alpha=\frac{m-0}{1+m\cdot 0}=m.$$

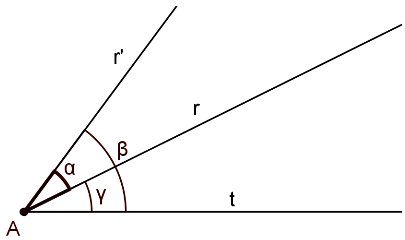
D'altra parte, detto A il vertice dell'angolo α e scelto $B\in r$ tale che



$AB \in 1$, individuiamo il triangolo rettangolo ABC con il terzo vertice C che, per quanto visto nel PRIMO PASSO della dimostrazione del Teorema 10, verificherà $BC \in m$. Possiamo quindi calcolare:

$$\tan_* \alpha = \frac{[BC]}{[AB]} = \frac{m}{1} = m.$$

Abbiamo così provato che nel caso in cui una delle semirette che genera l'angolo considerato è parallela all'asse x: $\tan \alpha = \tan_* \alpha$. Osserviamo ora che questo risultato può essere esteso ad un angolo generato da due semirette qualsiasi $r : y = mx + q$ e $r' = m'x + q'$.
Detto A il vertice dell'angolo α, sia t la semiretta parallela all'asse delle x passante per A che individua con r' ed r rispettivamente gli angoli β e γ. Dall'uguaglianza 3.2 della Proposizione 49, possiamo dire che:



$$\tan_* \alpha = \tan_*(\beta - \gamma) = \frac{\tan_* \beta - \tan_* \gamma}{1 + \tan_* \beta \tan_* \gamma}.$$

Essendo β e γ due angoli con una semiretta parallela all'asse x, per quanto appena visto:

$$\frac{\tan_* \beta - \tan_* \gamma}{1 + \tan_* \beta \tan_* \gamma} = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma},$$

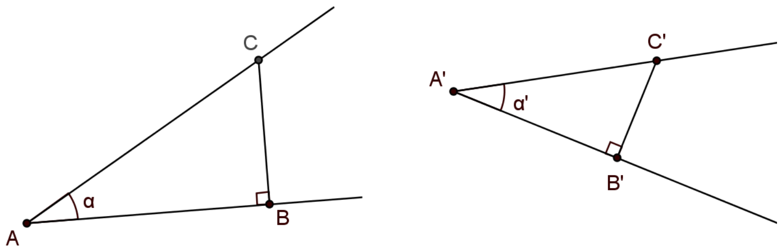
inoltre essendo $\tan \beta = m'$ e $\tan \gamma = m$, dalla Definizione 25 si ha:

$$\frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} = \tan(\beta - \gamma) = \tan \alpha.$$

Abbiamo così provato che preso un qualsiasi angolo α,

$$\tan_* \alpha = \tan \alpha.$$

Siamo ora in grado di dimostrare che due angoli α e α' sono congruenti in Π se e solo se gli angoli $\phi(\alpha)$ e $\phi(\alpha')$ sono congruenti in Π'. Si ricorda che $\phi(\alpha) \cong \phi(\alpha')$ se e solo se i due angoli hanno la stessa tangente (Definizione 26).
Siano r ed s le semirette che generano l'angolo α e r' ed s' le semirette che generano α'. In Π, detti A e A' i vertici dei due angoli, costruiamo due triangoli ABC e $A'B'C'$, rettangoli rispettivamente in B e B', scegliendo $B \in r$, $B' \in r'$, $C \in s$ e $C' \in s'$.



Dalla Proposizione 39 e dalla definizione di triangoli simili segue che $\alpha \cong \alpha'$ se e solo se il triangolo ABC è simile al triangolo $A'B'C'$, ma allora:

$$\frac{[AC]}{[A'C']} = \frac{[BC]}{[B'C']} = \frac{[AB]}{[A'B']}.$$

L'ultima uguaglianza equivale a scrivere:

$$\tan_* \alpha = \tan_* \alpha',$$

avendo dimostrato che per un qualsiasi angolo $\tan_* \alpha = \tan \alpha$, possiamo concludere che:

$$\tan \alpha = \tan \alpha',$$

ovvero, come volevamo:

$$\phi(\alpha) \cong \phi(\alpha').$$

Appendice A

Assiomi di Hilbert

Si trovano nella Sezione 1.1 gli assiomi:

(**I1**) Per ogni coppia di punti distinti A e B, esiste un'unica retta r che contiene sia A che B.

(**I2**) Ogni retta contiene almeno due punti.

(**I3**) Ci sono tre punti non allineati.

(**P**) **(assioma delle Parallele - Playfair -)** Per ogni punto A e ogni retta r esiste al più una retta contenente A e parallela a r.

Si trovano nella Sezione 1.2 gli assiomi:

(**B1**) Se il punto B è tra A e C (possiamo scrivere $A * B * C$) allora A, B e C sono tre punti allineati e distinti. Vale inoltre $C * B * A$.

(**B2**) Per ogni coppia di punti distinti A e B esiste un punto C tale che $A * B * C$.

(**B3**) Dati tre punti distinti su una retta, uno ed uno solo di questi è tra gli altri due.

(**B4**) ***(Pasch)*** Siano A, B e C tre punti non allineati ed r una retta non contenente nessuno dei tre punti. Se r contiene un punto D che sta tra A e B, allora dovrà contenere anche un punto che sta tra A e C o tra B e C, ma non entrambi.

Si trovano nella Sezione 1.3 gli assiomi:

(**C1**) Dato un segmento AB e una semiretta r con origine in C, esiste un unico punto D, appartenente ad r, che verifica $AB \cong CD$.

(**C2**) Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, allora $CD \cong EF$. Inoltre ogni segmento è congruente a se stesso.

(**C3**) Siano dati i punti A, B e C tali che $A * B * C$ ed i punti D, E ed F tali che $D * E * F$. Se $AB \cong DE$ e $BC \cong EF$, allora $AC \cong DF$.

Si trovano nella Sezione 1.4 gli assiomi:

(**C4**) Dato un angolo $\angle BAC$ e una semiretta $\overrightarrow{DF}$, esiste un'unica semiretta $\overrightarrow{DE}$, giacente su uno dei due semipiani individuati dalla retta contenente D ed F, tale che $\angle BAC \cong \angle EDF$.

(**C5**) Siano α, β e γ tre angoli; se $\alpha \cong \beta$ e $\alpha \cong \gamma$, allora $\beta \cong \gamma$. Inoltre ogni angolo è congruente a se stesso.

(**C6**) Siano dati due triangoli ABC e DEF tali che $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$. Allora i due triangoli sono congruenti, in particolare $BC \cong EF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$.

Si trovano nella Sezione 1.6 gli assiomi:

(**E**) Date due circonferenze Γ e Δ, se esistono almeno due punti in Δ, che chiamiamo A e B, tali che A è interno a Γ e B è esterno a Γ, allora Γ e Δ si intersecano.

(**A**) **(Assioma di Archimede)** Dati i segmenti AB e CD, esiste un numero naturale n tale che la somma di n copie di AB è maggiore di CD.

(**D**) **(Assioma di Dedekind)** Supponiamo che i punti di una retta r siano divisi in due insiemi non vuoti S e T in modo tale che nessun punto di S sia compreso tra due punti di T e nessun punto di T sia compreso tra due punti di S. Allora esiste un unico punto P tale che per ogni $A \in S$ e per ogni $B \in T$:

$$A = P \quad \text{o} \quad B = P \quad \text{o} \quad A * P * B.$$

Si trova nella Sezione 2.3:

(**ERM**) (Esistenza dei Movimenti Rigidi)

- (**1**) Per ogni A, $A' \in \Pi$ esiste un movimento rigido $\phi \in G$ tale che $\phi(A) = A'$.
- (**2**) Per ogni terna di punti O, A e $A' \in \Pi$ esiste un movimento rigido $\phi \in G$ tale che: $\phi(O) = O$ e la semiretta $\overrightarrow{OA}$ viene mandata da ϕ nella semiretta $\overrightarrow{OA'}$.
- (**3**) Per ogni retta r esiste un movimento rigido $\phi \in G$ tale che scambia i semipiani individuati da r e lascia fissi tutti i punti della retta.

Appendice B

Proposizioni degli Elementi di Euclide citate

- LIBRO PRIMO -

(**I.1**) Su un segmento dato, è possibile costruire un triangolo equilatero.

(**I.2**) É possibile costruire, a partire da un punto dato, un segmento uguale ad un segmento dato.

(**I.3**) É possibile togliere un segmento minore da un segmento maggiore.

(**I.4**) (PRIMO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI: LATO-ANGOLO-LATO.) Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti (del primo), opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti (del secondo).

(**I.5**) (PONS ASINORUM) Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.

(**I.6**) Se un triangolo ha gli angoli alla base uguali, allora è isoscele.

(**I.7**) Da ciascun estremo di un segmento si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte, altre due rette rispettivamente uguali a quelle precedenti ed aventi un diverso punto d'incontro.

(**I.8**) (TERZO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI: LATO-LATO-LATO.) Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali.

(**I.9**) É possibile bisecare un qualsiasi angolo dato.

(**I.10**) É possibile bisecare un qualsiasi segmento dato.

(**I.11**) É possibile costruire la perpendicolare ad una retta data per un suo punto.

(**I.12**) É possibile costruire la perpendicolare ad una retta data per un punto che non le appartiene.

(**I.13**) Due rette incidenti formano due angoli retti, o coppie di angoli adiacenti la cui somma è uguale a due angoli retti.

(**I.14**) Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto ad essa, si tracciano due altre rette, e queste formano con la prima angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, esse saranno allineate.

(**I.15**) Angoli opposti al vertice sono uguali.

(**I.16**) In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti.

(**I.17**) Ogni coppia di angoli di un triangolo è minore di due angoli retti.

(**I.18**) In un triangolo l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore degli altri due.

(**I.19**) In un triangolo il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore degli altri due.

(**I.20**) (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE) In ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente.

(**I.21**) Considerato un lato di un triangolo, se a partire dai suoi estremi si costruiscono due segmenti che si incontrano internamente al triangolo, la somma di tali segmenti sarà minore della somma degli altri due lati del triangolo, ma l'angolo tra loro compreso sarà maggiore dell'angolo compreso tra i due lati.

(**I.22**) Dati tre segmenti tali che ogni coppia di due è maggiore del terzo, è possibile costruire un triangolo che ha per lati i segmenti dati.

(**I.23**) É possibile costruire, a partire da un punto su una retta, un angolo uguale ad un angolo dato.

(**I.24**) Dati due triangoli con due lati uguali, il triangolo che ha l'angolo tra essi compreso maggiore, ha la base più grande.

(**I.25**) Dati due triangoli con due lati uguali, il triangolo che ha la base maggiore, ha anche l'angolo compreso tra i due lati più grande.

(**I.26**) (SECONDO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI: ANGOLO - LATO - ANGOLO E ANGOLO - ANGOLO - LATO.) Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli ed un lato uguale ad un lato, o quello adiacente agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente.

(**I.27**) Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali, allora sono parallele.

(**I.28**) Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti uguali o la somma degli angoli coniugati è uguale a due angoli retti, allora sono parallele.

(**I.29**) Se una retta incide su due rette parallele, allora forma angoli alterni interni uguali.

(**I.30**) Rette parallele ad una stessa retta sono parallele tra loro.

(**I.31**) (ESISTENZA DELLA PARALLELA) Dato un punto, esiste la retta parallela ad una retta data passante per il punto.

(I.32) La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti; ogni angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso.

(I.33) Dati due segmenti uguali e paralleli allora anche i segmenti che congiungono i loro rispettivi estremi sono uguali e paralleli.

(I.34) I parallelogrammi hanno lati e angoli opposti uguali fra loro, e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali.

(I.47) Teorema di pitagora. Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.

- Libro Terzo -

(III.1) É possibile determinare il centro di una circonferenza data.

(III.2) Il segmento che unisce due punti di una circonferenza è interno alla circonferenza.

(III.3) Una qualsiasi retta passante per il centro che taglia a metà una corda, è perpendicolare alla corda; una qualsiasi retta passante per il centro che cade perpendicolarmente su una corda, allora la seca a metà.

(III.4) Due corde non passanti per il centro che si intersecano non si secano a metà.

(III.5) Due circonferenza che si intersecano non hanno lo stesso centro.

(III.6) Se due circonferenze sono tangenti non hanno lo stesso centro.

(III.7) Se in un cerchio si prende su un diametro un punto che non sia il centro, ed altre rette vengono condotte dal punto alla circonferenza, sarà massima la retta su cui è il centro, minima quella che rimane del diametro, sottratta da esso la prima, e delle altre la più vicina alla retta che passa per il centro è sempre maggiore di quella più lontana, e dal punto potranno condursi alla circonferenza soltanto due rette uguali, una da ciascun lato della minima.

(III.8) Se si prende un punto esternamente ad un cerchio, e dal punto si conducono linee rette alla circonferenza del cerchio, di cui una per il centro e le altre condotte a caso, delle rette che cadono sulla circonferenza dalla parte concava, è massima quella che passa per il centro, mentre delle altre la retta più vicina a quella che passa per il centro è sempre maggiore di quella più lontana; delle rette, invece, che cadono sulla circonferenza dalla parte convessa, è minima quella il cui prolungamento è il diametro, mentre delle altre la retta più vicina a quella minima è sempre minore di quella più lontana; e dal punto dato si potranno condurre alla circonferenza soltanto due rette uguali, una da ciascun lato della retta minima.

(III.9) Se si prende un punto internamente ad un cerchio, e dal punto possono condursi alla circonferenza più di due rette uguali, il punto preso è il centro del cerchio.

(**III.10**) Un cerchio non interseca un altro cerchio in più di due punti.

(**III.11**) Se due cerchi sono tangenti fra loro internamente e si trovano i loro centri, la retta che congiunge i centri stessi, se inoltre prolungata, cadrà nel punto di contatto dei cerchi.

(**III.12**) Se due cerchi sono tangenti fra loro esternamente, la retta che congiunge i loro centri passerà per il punto di contatto.

(**III.13**) Un cerchio tangente internamente o esternamente ad un altro, non può toccarlo in più di un punto.

(**III.14**) Corde uguali hanno la stessa distanza dal centro. Corde che hanno la stessa distanza dal centro sono uguali.

(**III.15**) In un cerchio il diametro è la corda massima, e delle altre corde quella che è più vicina al centro è sempre maggiore di quella più lontana.

(**III.16**) In un cerchio, una retta che sia tracciata perpendicolare al diametro partendo da un estremo di questo, cadrà esternamente al cerchio, nessun' altra retta potrà interporsi nello spazio fra la retta e la circonferenza, e l'angolo del semicerchio è maggiore, e quello che rimane fra la retta e la circonferenza minore, di ogni angolo acuto.

(**III.17**) É possibile condurre da un punto dato una linea retta che sia tangente ad un cerchio dato.

(**III.18**) Se una retta è tangente ad un cerchio, il raggio che congiunge il centro con il punto di contatto sarà perpendicolare alla tangente.

(**III.19**) Se una retta è tangente ad un cerchio, e dal punto di contatto si conduce ad essa una perpendicolare, il centro del cerchio sarà sulla retta così condotta.

(**III.21**) Se due angoli che hanno per vertice uno stesso punto di una circonferenza individuano uno stesso arco, allora sono uguali.

(**III.35**) Se due corde di una circonferenza si intersecano, il rettangolo che ha per dimensioni i segmenti individuati sulla prima corda è uguale al rettangolo che ha per dimensioni i segmenti individuati sulla seconda corda.

(**III.36**) Da un punto esterno ad una circonferenza siano tracciate una retta tangente ed una secante alla circonferenza. Allora il quadrato costruito sul segmento tangente è uguale al rettangolo che ha per lati i due segmenti che hanno per estremi il punto dato e i due punti di intersezione tra la secante e la circonferenza.

- Libro Quarto -

(**IV.4**) É possibile inscrivere un cerchio in un triangolo dato.

(**IV.5**) É possibile circoscrivere un cerchio ad un triangolo dato.

(**VI.2**) Se in un triangolo si conduce una retta parallela ad uno dei lati, essa divide proporzionalmente i due altri lati del triangolo; e se due lati di un triangolo sono divisi proporzionalmente, la retta che congiunge i punti di divisione sarà parallela al rimanente lato del triangolo.

(**VI.3**) Un retta uscente dal vertice di un triangolo è la bisettrice se e solo se taglia il lato opposto proporzionalmente ai restanti lati.

(**VI.4**) Due qualsiasi triangoli equilateri sono tra loro proporzionali.

(**VI.5**) Se due triangoli hanno i lati proporzionali, i triangoli saranno tra loro equiangoli ed avranno rispettivamente uguali gli angoli opposti ai lati omologhi, cioè ai lati che si corrispondono nella proporzione.

(**VI.6**) Se due triangoli hanno rispettivamente un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati comprendenti i due angoli uguali, i triangoli saranno fra loro equiangoli: avranno cioè rispettivamente uguali gli angoli opposti ai lati omologhi.

(**VI.7**) Se due triangoli hanno due lati in proporzione ed un qualsiasi angolo uguale, allora sono simili.

(**VI.8**) L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo lo divide in due triangoli entrambi simili al primo e tra loro.

(**VI.9**) Togliere da una retta data una qualunque parte assegnata.

(**VI.10**) É possibile dividere una retta data, ed indivisa, in parti proporzionali e similmente disposte rispetto a quelle di un'altra retta data, già divisa in parti.

(**VI.11**) Dati due segmenti, trovare dopo di essi il terzo proporzionale.

(**VI.12**) Dati due segmenti è possibile trovare il quarto proporzionale.

(**VI.13**) Dati due segmenti è possibile trovare il medio proporzionale.

Bibliografia

[1] Avellone M., *Filosofia e fondamenti di Geometria a fine Ottocento. Aspetti per un percorso didattico.*, `http://math.unipa.it/~grim/avellone.pdf`.

[2] Bazzucchi A., De Santis A. M., *Gli assiomi di Hilbert e loro conseguenze.*, Lavoro per didattica e fondamenti della geometria., Università Degli Studi Dell'Aquila., SSIS IX ciclo, A.A. 2008/2009, `http://ssiscesto.altervista.org/gne_hilbert.pdf`.

[3] Bertolini F., *Evoluzione della geometria.*, Aracne, Roma, 2009.

[4] Bottazzini U., *I geometri italiani e i Grundlagen der Geometrie di Hilbert.*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana Serie 8, fasc. n.3, p.545-570, Unione Matematica Italiana, 2001.

[5] Fano G., *Sui fondamenti della geometria.*, `http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=GM_Fano_1910_1`.

[6] Colizza M., *Una chiacchierata (con fini didattici) su la geometria analitica.*, Appunti del laboratorio didattico di Geometria-SSIS, 2001, `http://www.dmi.units.it/~colizza/Geom.anal.html.`

[7] Frajese A., Maccioni L., *Gli Elementi di Euclide.*, U.T.E.T., Torino, 2000.

[8] Greenberg M. J. , *Euclidean and non Euclidean Geometries, development and history.*, W. H. Freeman and Company, 1993.

[9] Hartshorne R., *Geometry: Euclid and Beyond.*, Springer, 2000.

[10] Hilbert D., Bernays P., Canetta P., *Fondamenti della Geometria; con i supplementi di Paul Bernays.*, Feltrinelli, Milano, 1970.

[11] Hilbert D., *Foundations of Geometry.*, Open Court, La Salle, 1971.

[12] Marchini C., *Il problema dei fondamenti.* Appunti dalle lezioni di Fondamenti della Matematica, Università degli Studi di Parma, A.A. 2009/2010, `http://old.unipr.it/arpa/urdidmat/Fond09_10/Cap6Fond09_10.pdf`

[13] Martin G. E., *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.*, Springer, New York, 1975.

[14] Ottaviani G., *Riflessioni sull'insegnamento della geometria oggi.*, atti Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie, Montevarchi, 2001, `http://web.math.unifi.it/users/ottavian/MONTEV.pdf`