



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

**Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**  
**Corso di Laurea in Matematica**

# **Le curve piane e le proprietà della cicloide**

**Plane Curves and the properties of the cycloid**

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

Candidata: Irene Vezzosi

Anno accademico 2014-2015



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

**Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

**Corso di Laurea in Matematica**

# **Trasformazione di un poligono in un'ellisse con il metodo delle potenze**

**From random polygon to ellipse by the power  
method**

Relatore: Prof.ssa Alessandra Papini

Candidata: Irene Vezzosi

Anno accademico 2014-2015

## INDICE

1. INTRODUZIONE ALLE CURVE PIANE E ALLA CURVATURA.....	1
1.1 Le curve piane.....	1
1.2 Ascissa curvilinea .....	2
1.3 Vettore tangente e vettore normale.....	4
1.4 La curvatura .....	5
1.5 Il numero di rotazione.....	15
1.6 Caratterizzazione di una curva piana dalla curvatura .....	17
2. TEOREMA DEI QUATTRO VERTICI .....	19
2.1 Teorema del numero di rotazione o Umlaufsatz.....	19
2.2 Curve convesse.....	22
3 ALCUNE CURVE CELEBRI .....	29
3.1 <i>La cicloide</i> .....	29
3.2 <i>La chiocciola (o lumaca) di Pascal</i> .....	47
Bibliografia: .....	62

## Introduzione

Uno dei concetti primitivi della nostra intuizione spaziale è quello di linea o curva piana. La nozione di curva ha subito nella storia della matematica una notevole evoluzione. Le prime storiche intuizioni mantengono un significato geometrico ma vanno rese rigorose all'interno degli strumenti della matematica moderna.

Noi considereremo la curva come un oggetto unidimensionale e continuo, in particolare in questa tesi ci occuperemo delle curve piane.

Tutti i risultati presentati sono ben noti, però sono affrontati in letteratura in maniera un po' "sparpagliata". Abbiamo quindi preferito operare una selezione che presenti in maniera semplice e ordinata una serie di proprietà e di risultati riguardanti le curve piane.

Nel corso del primo capitolo si introduce la definizione classica di curva. Vengono presentate le principali proprietà delle curve come l'ascissa curvilinea, la curvatura e il numero di rotazione.

Il secondo capitolo è invece incentrato su due teoremi: il teorema del numero di rotazione o Umlaufsatz e il teorema dei quattro vertici. In questo modo si è cercato di approfondire l'argomento caratterizzando le curve piane.

Nell'ultimo capitolo vengono sviluppati due esempi di curve celebri: la cicloide e la chiocciola di Pascal. Definiamo le curve e poi cerchiamo le varie equazioni che le descrivono. Abbiamo cercato di approfondire lo studio di queste curve provando a non fermarci ai soli calcoli fini a se stessi ma anche dandone delle interpretazioni che vanno oltre la matematica.

Abbiamo illustrato alcune proprietà geometriche e fisiche importanti:

- La cicloide è la curva che descrive il tragitto più breve tra due punti per un corpo soggetto alla gravità (brachistocrona);

- La cicloide viene utilizzata per costruire un pendolo isocrono;
- La chiocciola ha come caso particolare una curva trisettrice, cioè che permette di trisecare gli angoli.

# Capitolo 1

## 1. INTRODUZIONE ALLE CURVE PIANE E ALLA CURVATURA

### 1.1 Le curve piane

**Definizione 1.1.1:** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Una curva in  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione  $C^\infty$   $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $c$  si dirà *curva regolare* se  $\forall t \in I$  si ha  $\dot{c}(t) \neq 0$ .

La variabile  $t$  è detta *parametro* della curva.

Se  $I$  non è un intervallo aperto, allora per definizione  $\exists$  un intervallo aperto  $I^*$  tale che  $I \subset I^*$  e un'applicazione  $C^\infty$   $c^*: I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $c = c^*|_I$ .

**Definizione 1.1.2:** Sia data una curva continua  $c: I \rightarrow X$  allora

$$c^* := c(I)$$

si chiama *traccia* o *supporto* della curva.

Spesso con un piccolo abuso di linguaggio si indica con la parola "curva" il supporto e non la funzione. In sostanza la traccia di una curva è l'equivalente dell'immagine della funzione che la rappresenta. D'ora in avanti tratteremo curve il cui codominio è rappresentato dallo spazio euclideo  $\mathbb{R}^2$ , cioè le curve piane.

**Definizione 1.1.3:** Sia  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva continua con  $I=[a,b]$ , allora se:

- 1)  $c(a) = c(b)$  la curva è *chiusa*;
- 2)  $c(a) \neq c(b)$  la curva è *aperta*.

E i punti  $a$  e  $b$  si dicono *estremi* della curva.

**Definizione 1.1.4:** Data la curva  $c: I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  regolare, se esistono  $m$  punti distinti (con  $m > 1$ )  $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_m \in I$  tali che

$$c(t_1) = c(t_2) = \dots = c(t_m)$$

mentre  $\forall t \in (a, b)$  con  $t \neq t_k \forall k = 1, \dots, m$  vale che  $c(t) \neq c(t_1)$  allora si dice che  $c(t_1)$  è un *punto  $m$ -plo* della curva.

Se una curva non ha punti m-plici allora si dice che la curva è *semplice*.

**Osservazione:** Questo significa che una curva con parametro sarà semplice se a valori distinti di  $t$  corrispondono punti distinti, esclusi al più gli estremi dell'intervallo  $I$  che possono avere la stessa immagine.

Quindi una curva semplice può essere chiusa, ma non può autointersecarsi.

## 1.2 Ascissa curvilinea

**Definizione 1.2.1:** Siano  $c:I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\tilde{c}:\tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  due curve. Un diffeomorfismo  $\phi:\tilde{I} \rightarrow I$  tale che  $\tilde{c} = c \circ \phi$  è chiamato *trasformazione di parametro* o *cambio di variabile* da  $c$  a  $\tilde{c}$ . Questo cambiamento preserva l'orientamento se  $\phi' > 0$ .

**Definizione 1.2.2:** Sia  $c:I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrica regolare, la *lunghezza della curva* è data da:

$$l(c) = \int_a^b \|c'(\tau)\| d\tau$$

**Definizione 1.2.3:** Sia  $c:I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva parametrica regolare. Si chiama *ascissa curvilinea* la funzione  $s:I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\forall t \in I$

$$s(t) = \int_a^t \|c'(\tau)\| d\tau$$

**Osservazione:** In generale possiamo trovare molti parametri a secondo del problema che stiamo studiando, l'ascissa curvilinea è un particolare parametro perché porta la curva ad avere proprietà notevoli, cioè il vettore tangente in ogni suo punto sarà di modulo uguale a 1. Infatti: sia  $c(t)$  una curva piana e considero  $s(t)$  l'ascissa curvilinea. Allora il vettore tangente parametrizzato tramite  $s$  è  $dc/ds$ .

**Proposizione 1.1.1:** Se  $c(t)$  è parametrizzata dall'ascissa curvilinea allora  $\|\dot{c}(t)\|=1$ .

**Dimostrazione:**

$$\frac{dc}{ds} = \frac{dc}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dc}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dc}{dt} \frac{1}{\|dc/dt\|} \Rightarrow \left\| \frac{dc}{ds} \right\| = \left\| \frac{dc}{dt} \right\| \frac{1}{\|dc/dt\|} = 1 \Rightarrow \text{quindi}$$

il vettore tangente ha modulo 1.

□

Allora possiamo dire che una curva  $c(t)$  con  $t \in I$  è detta parametrizzata dalla lunghezza d'arco o ascissa curvilinea se  $|c'(t)|=1$ .

**Esempio:** Lunghezza di una circonferenza di centro  $C(x_0, y_0)$ .

La circonferenza indicata ha equazione parametrica :

$$\begin{cases} x = x_0 + \cos(t) \\ y = y_0 + \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

La curva è regolare perché  $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$$

è una parametrizzazione di classe  $C^1$  con

$$\dot{c} = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Quindi la lunghezza della curva è

$$l(c) = \int_0^{2\pi} \|c'(\tau)\| \, d\tau = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(\tau))^2 + (\cos(\tau))^2} \, d\tau = \int_0^{2\pi} 1 \, d\tau = 2\pi - 0 = 2\pi$$

□

**Proposizione 1.1.2:** Ogni curva regolare  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  può essere parametrizzata dalla lunghezza d'arco. Cioè data una curva regolare  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  c'è un cambio di variabili  $\phi: J \rightarrow I$  tale che  $|(c \circ \phi)'(s)| = 1$

**Dimostrazione:** L'equazione ideale per  $\phi$  sarebbe :

$$\left| \frac{dc}{ds} \right| = \left| \frac{dc}{dt} \right| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| = 1.$$

Si ha che  $s(t) = \int_a^t \|c'(\tau)\| \, d\tau$  con  $a \in I$ , si prende  $\phi$  tale che  $s(t) = \phi^{-1}(t)$ . Siccome  $c$  è regolare,  $\phi$  esiste e soddisfa l'equazione iniziale voluta; possiamo quindi parametrizzare la curva con  $c \circ \phi$  che risulta parametrizzata con l'ascissa curvilinea.

□

### 1.3 Vettore tangente e vettore normale

**Definizione 1.3.1:** Un campo vettoriale  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un'applicazione differenziabile  $X: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Il vettore  $X(t)$ , che è il valore di  $X$  una volta assegnato  $t \in I$ , sarà pensato come giacente nella copia di  $\mathbb{R}^2$  identificato con  $T_{c(t)}\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 1.3.2:** Un campo vettoriale tangente di  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  è formato dai vettori lungo  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dato da  $t \rightarrow \dot{c}(t)$ .

**Osservazione:**

- Data una curva in forma parametrica  $c(t) = (x(t), y(t))$ , il vettore tangente sarà dato dal vettore  $\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ .
- Il versore tangente sarà dato dal vettore tangente normalizzato, cioè il vettore tangente diviso per la norma del vettore tangente stesso.

Se  $\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  è il vettore tangente, il versore tangente sarà

$$T(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}.$$

Per la Prop.1.1.1 si ha  $\|\dot{c}(t)\|=1$ , se derivo  $\dot{c} \cdot \dot{c} = 1$  ottengo  $2\ddot{c} \cdot \dot{c} = 0$  cioè  $\ddot{c} \perp \dot{c}$ . Quindi possiamo definire il vettore normale.

**Definizione 1.3.3:** Il vettore normale di una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea sarà dato da  $\ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$  e il versore normale sarà

$$N(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|}.$$

**Definizione 1.3.4:** Un Sistema di Frenet in  $\mathbb{R}^2$  è un sistema mobile di 2 vettori  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  dipendenti da  $t$ , utili per descrivere il comportamento locale della curva considerata  $c(t)$ .

Se  $c(t)$  è descritta dalla lunghezza d'arco si pone :

$$e_1(t) = \dot{c}(t)$$

$$e_2(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|}.$$



Per determinare il sistema di Frenet è necessario supporre che la curva sia regolare, cioè  $\dot{c}(t)$  e  $\ddot{c}(t)$  siano linearmente indipendenti e quindi formino una base.

## 1.4 La curvatura

**Definizione 1.4.1:** La *curvatura* è data da

$$k(t) = \frac{\langle \dot{e}_1(t), e_2(t) \rangle}{|\dot{c}(t)|}.$$

**Osservazione:** Con il termine curvatura indichiamo la misura di quanto un determinato oggetto si discosti dall'essere piatto.

Cerchiamo di calcolare la curvatura se la curva è data in forma parametrica  $c(t) = (x(t), y(t))$ .

Osservando la figura 1 possiamo dedurre alcune relazioni:

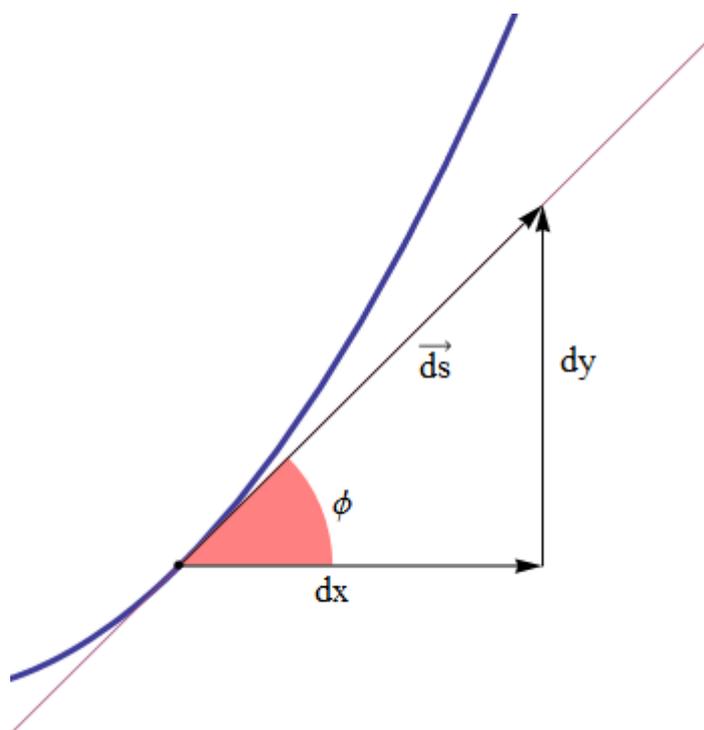


Figura 1

$$\tan(\phi) = \frac{dy}{dx}$$

$$\tan(\phi) = \frac{dy}{dx} = \frac{y' dt}{x' dt} = \frac{y'}{x'}$$

Supposto che sia  $x'(t) \neq 0$  deduciamo pure

$$\phi = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right)$$

per cui non ci resta che eseguire la differenziazione

$$d\phi = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} \cdot \frac{y'' x' - y' x''}{(x')^2} dt = \frac{y'' x' - y' x''}{(x')^2 + (y')^2} dt$$

Questa relazione rimane valida anche indipendentemente dalla condizione  $x'(t) \neq 0$ . Mettendo assieme possiamo infine ottenere il rapporto  $d\phi/ds$  come

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{dt (x' y'' - x'' y')}{((x')^2 + (y')^2) \left(dt \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)} = \frac{x' y'' - x'' y'}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}$$

e quindi definire la *curvatura orientata* di una curva  $c:\{(x(t), y(t))\}$  come

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \frac{x' y'' - x'' y'}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}$$

La curvatura orientata può essere anche negativa, quindi volendo collegare il concetto di curvatura con una quantità positiva come il raggio possiamo scrivere

$$|k| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| = \left| \frac{y'' x' - y' x''}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}} \right|$$

Spesso indichiamo con  $k$  il suo valore assoluto.

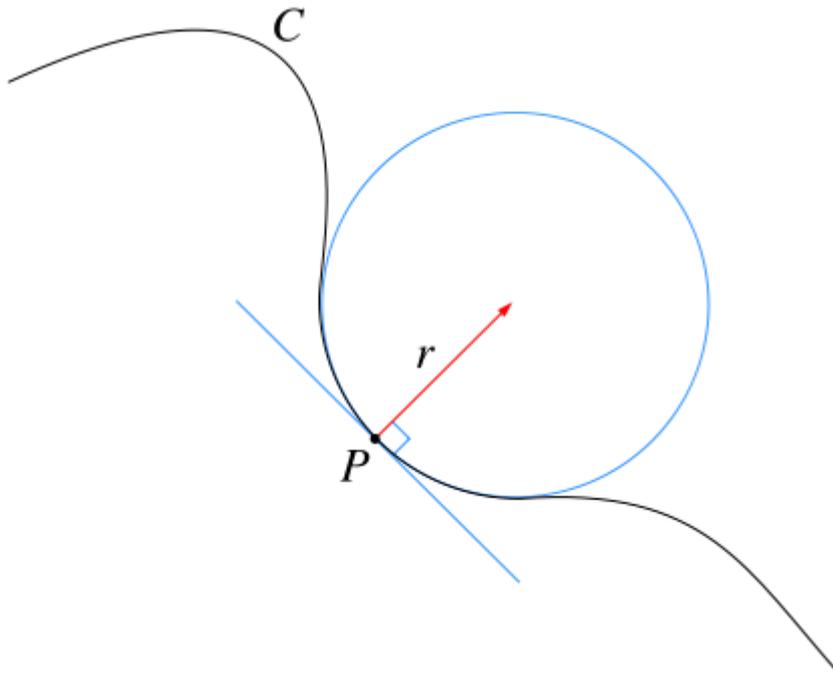
**Definizione 1.4.2:** Il *raggio di curvatura* è definito come  $k(t) = \frac{1}{r}$ .

**Esempi:**

- La retta si può identificare con una circonferenza con raggio infinito, quindi ha  $k(t) = 0$
- La circonferenza di raggio  $r$  ha curvatura costante  $k(t) = 1/r$ .

Per una generica curva piana, la curvatura varia da punto a punto, e viene definita tramite la costruzione del cerchio osculatore, che è tangente alla curva e la approssima fino al secondo ordine: dato un punto  $P$  della curva, la curvatura in  $P$  è pari alla curvatura del cerchio osculatore.

Se la curva è quasi dritta il cerchio osculatore ha raggio grande e la curvatura è quasi nulla (come abbiamo visto, al limite, vale zero per una retta); grandi curvature corrispondono invece a punti in cui si hanno forti cambiamenti di direzione.



Le equazioni di Frenet per una curva piana e regolare sono:

$$\dot{c}(t) = |\dot{c}(t)| e_1(t)$$

$$\dot{e}_1(t) = w_{12}(t) e_2(t)$$

$$\dot{e}_2(t) = -w_{12}(t) e_1(t)$$

Queste possono essere anche scritte così:

$$\dot{c}(t) = |\dot{c}(t)| e_1(t)$$

$$\dot{e}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -w_{12}(t) \\ w_{12}(t) & 0 \end{pmatrix} e(t)$$

dove  $e(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}$

In queste equazioni abbiamo definito la quantità  $w_{12}$  come :

$$w_{12}(t) = \dot{e}_1(t) \cdot e_2(t) = -w_{21}(t).$$

Così possiamo scrivere la curvatura in un'altra forma:

$$k(t) = \frac{w_{12}(t)}{|\dot{c}(t)|}.$$

**Osservazione:**

- Se  $|\dot{c}(t)|=1$  allora si ha  $\dot{c}(t)= e_1(t)$  e derivando quest'ultima equazione si ha

$$\ddot{c}(t) = \dot{e}_1(t) = w_{12}(t) e_2(t) = k(t) e_2(t) \Rightarrow |k(t)| = |\ddot{c}(t)|$$

- Il segno di  $k(t)$  è positivo quando  $e_2(t)$  e  $\ddot{c}(t)$  formano un angolo acuto, mentre  $k(t)$  è negativo quando formano un angolo ottuso.

Graficamente significa che se  $k(t) > 0$  allora  $e_2(t)$  punta verso la parte convessa della curva  $c(t)$  considerata, mentre se  $k(t) < 0$  allora  $e_2(t)$  punta verso la parte concava.

- E' possibile che  $k(t)$  sia uguale a 0; se in più  $\dot{k}(t) \neq 0$  allora significa che lo zero di  $k(t)$  è isolato e si chiama *punto di flesso* della curva.

**Esempio:** Funzione seno

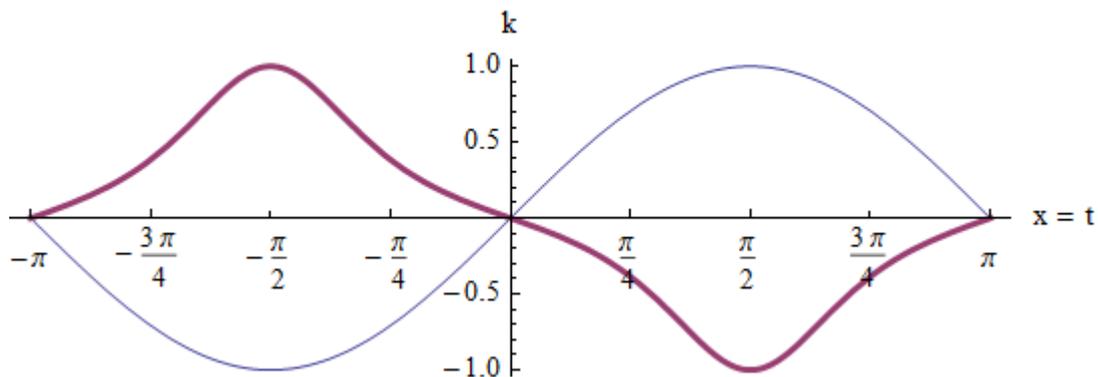
$$c(t) = (t, \sin(t)) \text{ per } t \in \mathbb{R} .$$

Con i dovuti calcoli si ha che la curvatura sarà data dall'espressione

$$k = \frac{\sin[t]}{(1 + \cos[t]^2)^{3/2}}$$

Quindi  $k(t) < 0$  per  $t \in (0, \pi)$  e  $k(t) > 0$  per  $t \in (-\pi, 0)$ , come si può vedere dal grafico sottostante.

**Funzione  $\sin(x)$  e sua curvatura orientata**

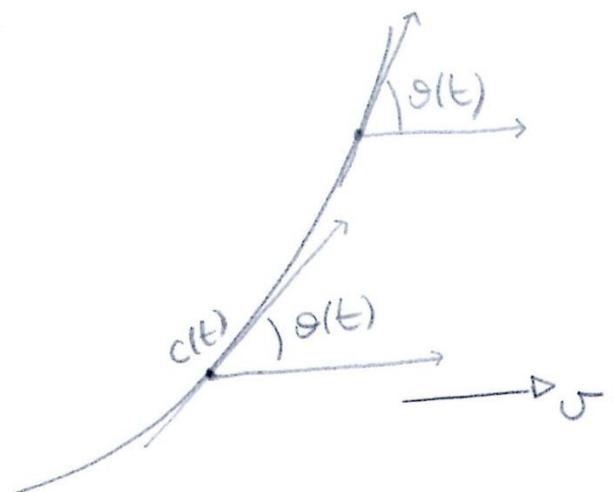


Da questo grafico possiamo anche vedere che  $c(0)$  e  $c(\pi)$  sono i punti di flesso della funzione seno. □

Definisco  $\theta(t)$  nel modo seguente:

$$\begin{cases} \cos \theta(t) = e_1(t) \cdot v \\ \sin \theta(t) = -e_2(t) \cdot v \end{cases}$$

dove  $v$  è un vettore di lunghezza unitaria fissato che corrisponde alla direzione  $\theta=0$ .



Allora  $\theta(t)$ , a meno di multipli di  $2\pi$ , è l'angolo da  $v$  a  $e_1(t)$  misurato nella direzione positiva. In un intorno sufficientemente piccolo di un valore  $t_0 \in I$ ,  $\theta(t)$  può essere definita ed è continua. Inoltre  $\theta(t)$  è differenziabile in questo intorno.  $\dot{\theta}(t)$  risulta ben definita e non dipende dalla scelta di  $\theta(t)$ .

**Proposizione 1.4.1:** Considero  $\theta(t)$  localmente definita come sopra. Allora  $\dot{\theta}(t) = w_{12}(t) = k(t) |\dot{c}(t)|$ .

Nel caso in cui  $|\dot{c}(t)|=1$  si ha  $k(t)=\dot{\theta}(t)$ .

**Dimostrazione:** Considero le equazioni che definiscono  $\theta(t)$ :

$$\begin{cases} \cos \theta(t) = e_1(t) \cdot v \\ \sin \theta(t) = -e_2(t) \cdot v \end{cases}$$

E le derivo:  $-\sin \theta(t) \dot{\theta}(t) = \dot{e}_1(t) \cdot v + e_1(t) \cdot \dot{v}$   
 $\cos \theta(t) \dot{\theta}(t) = -\dot{e}_2(t) \cdot v - e_2(t) \cdot \dot{v}$

Ma  $v$  è un vettore di lunghezza unitaria quindi  $\dot{v}=0$ , inoltre utilizzando le equazioni di Frenet possiamo riscrivere le equazioni ricavate nel modo seguente:

$$-\sin \theta(t) \dot{\theta}(t) = w_{12}(t) e_2(t) \cdot v = -\sin \theta(t) w_{12}(t)$$

$$\cos \theta(t) \dot{\theta}(t) = -w_{12}(t) e_1(t) \cdot v = \cos \theta(t) w_{12}(t)$$

quindi possiamo dedurre che  $\dot{\theta}(t) = w_{12}(t)$

Ma a sua volta  $w_{12}(t) = k(t) |\dot{c}(t)| \Rightarrow \dot{\theta}(t) = k(t) |\dot{c}(t)|$

□

**Proposizione 1.4.2: (caratterizzazione della retta)** Per le curve piane le seguenti due condizioni sono equivalenti:

1.  $k(t)=0 \forall t \in I$
2.  $\exists$  una parametrizzazione di  $c(t)$  della forma  $c(t)=(t-t_0)v+v_0$  dove  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $v, v_0 \in \mathbb{R}^2$  con  $v \neq 0$ , cioè  $c(t)$  è una retta.

**Dimostrazione:** Supponiamo che  $|\dot{c}(t)| = 1$ .

1.  $\Rightarrow$  2. :  $k(t)=0$  quindi  $\ddot{c}(t) = 0$ . Integro e ottengo  $\dot{c}(t)=\text{costante}=\dot{c}(t_0)$ . Integro di nuovo:  $c(t)=(t-t_0)\dot{c}(t_0)+c(t_0)$  per  $t_0 \in I$  fissato.

2.  $\Rightarrow$  1. :  $c(t)=(t-t_0)v+v_0$  quindi se derivo avrò:  $\dot{c}(t)=v$  quindi  $|\dot{c}(t)|=|v|$  che però abbiamo preso  $=1$ . Perciò  $|\dot{c}(t)|=1$ , derivando  $\dot{c}$  si ha  $\ddot{c}=0$ , questo comporta  $k(t)=0$ .

□

**Proposizione 1.4.3 : (caratterizzazione di un cerchio)** Per le curve piane le seguenti due condizioni sono equivalenti:

1.  $|k(t)| = 1/r = \text{costante} > 0$
2.  $c(t)$  è un parte di arco di cerchio di raggio  $r$  cioè  $\exists$  un  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  con  $|c(t) - x_0| = r = \text{costante} > 0 \quad \forall t \in I$

**Dimostrazione:** Supponiamo  $|\dot{c}(t)| = 1$  .

1.  $\Rightarrow$  2. :  $k(t) = 1/r$  quindi le equazioni di Frenet diventano:

$$\dot{c}(t) = |\dot{c}(t)| e_1(t) = e_1(t)$$

$$\dot{e}_1(t) = w_{12}(t) e_2(t) \quad \dot{e}_2(t) = -k(t) |\dot{c}(t)| e_1(t) = -\varepsilon/r e_1(t)$$

$$\dot{e}_2(t) = -w_{12}(t) e_1(t) \quad \dot{e}_1(t) = -k(t) |\dot{c}(t)| e_2(t) = -\varepsilon/r e_2(t)$$

dove  $\varepsilon = \pm 1$ .

Considero la quantità  $c(t) + \varepsilon r e_2(t)$  e la derivo. Ottengo:

$$(c(t) + \varepsilon r e_2(t))' = \dot{c}(t) + \varepsilon r \dot{e}_2(t) = \dot{c}(t) + \varepsilon r \left( \frac{-\varepsilon}{r} e_1(t) \right) = \dot{c}(t) - \varepsilon^2 e_1(t) \quad \text{ma}$$

$$\varepsilon = \pm 1 \Rightarrow \varepsilon^2 = 1 \Rightarrow$$

$$(c(t) + \varepsilon r e_2(t))' = \dot{c}(t) - e_1(t) = e_1(t) - e_1(t) = 0$$

Quindi  $c(t) + \varepsilon r e_2(t) = x_0$  con  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . Possiamo dedurre che  $c(t) - x_0 = -\varepsilon r e_2(t) \Rightarrow$

$$|c(t) - x_0|^2 = r^2 \Rightarrow 2.$$

2.  $\Rightarrow$  1. : Abbiamo  $(c(t) - x_0) \cdot (c(t) - x_0) = r^2$ , se differenziamo otteniamo:  $2 \dot{c}(t) \cdot (c(t) - x_0) = 0$ . Siccome  $\dot{c}(t) = |\dot{c}(t)| e_1(t) = e_1(t)$  allora si ha che  $e_1(t) \cdot (c(t) - x_0) = 0$ , significa che  $(c(t) - x_0)$  e  $e_1(t)$  sono ortogonali, ma il vettore ortogonale a  $e_1(t)$  è  $e_2(t)$ , quindi  $(c(t) - x_0)$  è multiplo di  $e_2(t)$ , di lunghezza pari a  $r$ , in particolare possiamo prendere  $(c(t) - x_0) = \varepsilon r e_2(t)$  con  $\varepsilon = \pm 1$ . Derivando questa ultima equazione si ha:

$\dot{c}(t) = \varepsilon r \dot{e}_2(t)$ , quindi prendendo le norme :

$$|\dot{c}(t)| = r |\dot{e}_2(t)| \Rightarrow \text{ma } |\dot{c}(t)| = 1 \Rightarrow 1 = r |\dot{e}_2(t)| = r |k(t)| \Rightarrow$$

$$|k(t)| = 1/r.$$

□

**Definizione 1.4.3:** Sia  $c: I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva chiusa. La curva  $\tilde{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  è detta *curva periodica di periodo  $w$*  se :

$$\tilde{c}|_I = c \text{ e } \forall t \in \mathbb{R} \quad \tilde{c}(t+w) = \tilde{c}(t) \text{ dove } w=b-a.$$

**Definizione 1.4.4:** Una *curva regolare a tratti* è una funzione continua  $c: I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con una partizione

$$a=b_{-1}=a_0 < b_0=a_1 < \dots < b_{k-1}=a_k < b_k=a_{k+1}=b$$

di  $[a,b]$  tale che  $c_j := c|_{[a_j, b_j]}$ , con  $0 \leq j \leq k$ , è una curva differenziabile e regolare.

I punti  $c(a_j)=c(b_{j-1})$  sono detti *angoli* di  $c$ . Inoltre se  $c$  è una curva regolare a tratti si ha che  $c$  è:

- chiusa se  $c(a)=c(b)$ ;
- semplicemente chiusa se  $c$  è chiusa e  $c|_{[a,b]}$  è iniettiva.

**Proposizione 1.4.4:** Sia  $c: I=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare. Allora  $\exists$  una funzione continua, regolare a tratti  $\theta: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) .$$

Inoltre la differenza  $\theta(b) - \theta(a)$  è indipendente dalla scelta di  $\theta$ .

**Dimostrazione:** Scelgo una partizione  $a=t_0 < t_1 < \dots < t_k=b$  in modo che  $e_1(t)|_{[t_{j-1}, t_j]}$  giaccia interamente in qualche semicerchio aperto di  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|=1\}$ . Questo è chiaramente possibile perché  $e_1(t)$  è continua. Si sceglie  $\theta(a)$  soddisfacente alla richiesta della proposizione. Allora  $\theta$  è univocamente determinata su  $[a, t_1]=[t_0, t_1]$  dalla richiesta di essere continua. Se  $\theta$  è nota su  $[t_0, t_{j-1}]$ , ha un'unica estensione a  $[t_0, t_j]$ ; cioè  $\theta(t_{j-1})$  è data e  $c'$  è un'unica funzione continua  $\tilde{\theta}: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\tilde{\theta}(t_{j-1}) = \theta(t_{j-1})$  soddisfacente le richieste della proposizione. Usando  $\tilde{\theta}$ , noi possiamo estendere  $\theta$  in modo tale che sia continua su  $[t_0, t_j]$ . Procedendo in questo modo possiamo definire  $\theta$  su  $[a,b]$  in modo continuo.

Si osserva che  $\theta|_{[t_{j-1}, t_j]}$  è differenziabile perché  $e_1$  e le funzioni trigonometriche sono differenziabili.

Infine, supponiamo che  $\theta$  e  $\varphi$  siano due funzioni soddisfacenti le richieste della proposizione. Allora  $\varphi(t) - \theta(t) = 2\pi k(t)$ , dove  $k(t)$  è una funzione continua a valori interi. Questo forza  $k(t)$  ad essere una costante, quindi  $\theta(b) - \theta(a) = \varphi(b) - \varphi(a)$  □

Quella che segue è una proposizione che ci è utile per associare una funzione angolare  $\theta$  a un'applicazione continua  $e: T \rightarrow \mathbb{R}^2$  quando  $T$  è un insieme stellato.

**Proposizione 1.4.5:** Sia  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme stellato rispetto a  $x_0 \in T$ , cioè se  $x \in T$  allora il segmento lineare  $\overline{x x_0}$  è ancora in  $T$ . Si suppone che  $e: T \rightarrow \mathbb{S}^1$  sia una funzione continua. Allora  $\exists$  una funzione continua  $\theta: T \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfacente  $e(x) = (\cos \theta(x), \sin \theta(x))$ .

Inoltre, se  $\theta$  e  $\tilde{\theta}$  sono due funzioni di questo tipo, esse differiscono di una costante multipla di  $2\pi$ .

**Dimostrazione:** Scelgo  $\theta(x_0)$  tale che:

$$e(x_0) = (\cos \theta(x_0), \sin \theta(x_0)).$$

L'esistenza della funzione  $\theta$  è garantita dalla prop. 1.4.4 su ogni raggio  $\overline{x x_0}$  con  $x \in T$ , in modo che sia continua con valore iniziale  $\theta(x_0)$ . Si deve dimostrare che  $\theta$  è continua pe ogni  $y_0 \in T$ .

Scegliamo  $\delta > 0$  tale che  $\forall y' \in \overline{x_0 y_0}$ ,  $|y - y'| < \delta \Rightarrow$  la separazione angolare tra  $e(y)$  e  $e(y')$  è strettamente minore di  $\pi$ . Se  $\overline{x_0 y_0}$  è compatto e  $e$  è continua allora  $\delta$  esiste.

Dato  $\varepsilon > 0$ , si sceglie un intorno  $U$  di  $y_0$  piccolo abbastanza da garantire  $U \subseteq B_\delta(y_0)$  e  $y \in U \Rightarrow |\theta(y) - \theta(y_0)| = 2k\pi + \varepsilon'$ , dove  $|\varepsilon'| < \varepsilon$  e  $k$  è un numero intero che dipende da  $y$ . Siccome  $e$  è continua allora esiste un tale insieme  $U$ .

Mostreremo che se  $k=0$  allora  $\theta$  è continua in  $y_0$ .

Sia  $y \in U$ . Considero  $\varphi(s) = \theta(x_0 + s(y - x_0)) - \theta(x_0 + s(y_0 - x_0))$  con  $0 \leq s \leq 1$ .

$\varphi$  rappresenta la differenza dei valori di  $\theta$  in corrispondenza dei punti sui segmenti  $\overline{x_0y}$  e  $\overline{x_0y_0}$ .  $\varphi$  è continua perché  $\theta$  è continua su tutti i segmenti.

Dal fatto che  $|(x_0 + s(y - x_0)) - (x_0 + s(y_0 - x_0))| = |s(y - y_0)| < \delta$ , si ha che la separazione angolare tra  $x_0 + s(y - x_0)$  e  $x_0 + s(y_0 - x_0)$  non può mai essere uguale a  $\pi$ . Quindi  $|\varphi(s) - \varphi(0)| < \pi$ .

Ma  $\varphi(0) = 0 \Rightarrow$  sia  $s=1$ :  $\pi > |\varphi(1)| = |\theta(x_0 + y - x_0) - \theta(x_0 + y_0 - x_0)| = |\theta(y) - \theta(y_0)| = |2k\pi - \varepsilon'|$ .

Questo implica  $k=0$ .

□

## 1.5 Il numero di rotazione

**Definizione 1.5.1:** Sia  $c: [0, w] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare a tratti e chiusa. Sia  $0 = b_{-1} = a_0 < b_0 = a_1 < \dots < b_{k-1} = a_k < b_k = w$  una partizione di  $[0, w]$  negli intervalli  $I_j := [a_j, b_j]$  nei quali  $c_j := c|_{I_j}$  sono differenziabili,  $1 \leq j \leq k$ .

Sia  $\alpha_j$  l'angolo orientato da  $\dot{c}(b_{j-1}) := \dot{c}(b_{j-1}-)$  a  $\dot{c}(a_j) := \dot{c}(a_j+)$ . Gli  $\alpha_j, 1 \leq j \leq k$ , sono detti *angoli esterni* di  $c$ .

Noi si richiederà che  $-\pi \leq \alpha_j \leq \pi$ .

Il numero

$$n_c := \frac{1}{2\pi} \sum_j (\theta_j(b_j) - \theta_j(a_j)) + \frac{1}{2\pi} \sum_j \alpha_j$$

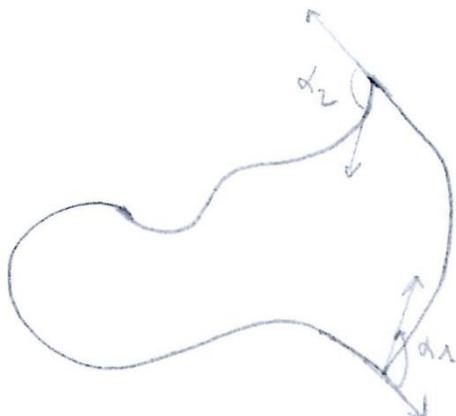
è il *numero di rotazione* di  $c$ . Le funzioni  $\theta_j: I_j \rightarrow \mathbb{R}$  con  $0 \leq j \leq k$ , sono le funzioni determinate nella prop. 1.4.4.

### Osservazione:

- Se  $c$  è una curva chiusa e liscia, allora  $\alpha_j = 0$  e

$$n_c = \frac{\theta(w) - \theta(0)}{2\pi}.$$

- $n_c$  è il numero di avvolgimento rispetto all'origine di una curva chiusa  $e_1(t)$  con  $t \in [0, w]$ .

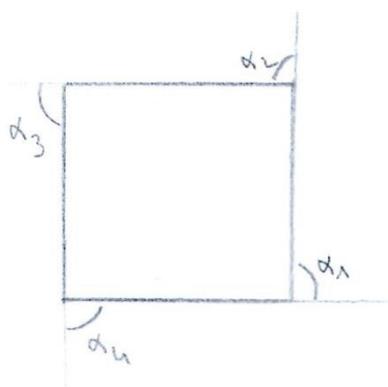


**Esempi:**

1. Sia  $c$  una parametrizzazione nel senso positivo (cioè antiorario) di un triangolo. Si ha che  $c$  è composta da 3 archi differenziabili,  $c_j$ , che sono dei segmenti. Allora si ha che  $\theta_j = \text{costante}$  e  $\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 2\pi$ .

Quindi  $n_c = 1$ .

2. Se  $c$  è una parametrizzazione di un poligono convesso, analogamente al triangolo, si trova che  $n_c = \pm 1$ .



3. Sia  $c$  una parametrizzazione nel senso positivo di un cerchio, allora  $n_c = 1$ .

Se si fanno  $m$  giri completi, allora l'equazione sarà:

$c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ,  $0 \leq t \leq m$  e quindi  $n_c = m$ .

**Proposizione 1.5.1:** Il numero di rotazione  $n_c$  di una curva chiusa regolare a tratti è un intero. Inoltre

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_{I_j} k(t) |c'(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \sum_j \alpha_j.$$

**Dimostrazione:** Dalla definizione di  $n_c$  si ha che :

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \sum_j (\theta_j(b_j) - \theta_j(a_j)) + \frac{1}{2\pi} \sum_j \alpha_j, \text{ che posso riscrivere così:}$$

$$2\pi n_c = \sum_j (\theta_j(b_j) - \theta_j(a_j)) + \sum_j \alpha_j \Rightarrow$$

$$2\pi n_c = \sum_{j=0}^k [\theta_{j-1}(b_{j-1}) - \theta_j(a_j) + \alpha_j], \text{ dove } \theta_{-1} \text{ è interpretato come } \theta_k.$$

Dalla definizione di  $\alpha_j$  si ha che  $\frac{\theta_{j-1}(b_{j-1}) - \theta_j(a_j) + \alpha_j}{2\pi}$  è un numero intero  $\Rightarrow n_c$  è intero.

Inoltre se si osserva che dalla prop. 1.4.1 si ha che  $\dot{\theta}_j(t) = k(t) |c'(t)|$ .

$$\text{Questo implica che } n_c = \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_{I_j} k(t) |c'(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \sum_j \alpha_j.$$

□

**Osservazione:** Da questa proposizione si deduce che  $n_c$  è invariante per cambi di variabili che mantengono l'orientamento o congruenze di  $\mathbb{R}^2$ . Un cambiamento di variabili che comporti la variazione dell'orientamento o una simmetria di  $\mathbb{R}^2$ , cambierà solo il segno di  $n_c$ .

## 1.6 Caratterizzazione di una curva piana dalla curvatura

**Teorema 1.6.1:** Data una funzione  $k(s): (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ , esiste un arco di curva nel piano, parametrizzato dalla lunghezza d'arco  $s$ , la cui curvatura è rappresentata da  $k(s)$ , che è unico a meno di isometrie. Precisamente, dato un punto iniziale  $(x_0, y_0)$ , un vettore tangente unitario  $(t_{x,0}, t_{y,0})$  e un punto  $s_0 \in (a,b)$  esiste una parametrizzazione dell'arco di

curva  $(x(s), y(s))$  per  $s \in (a, b)$  dove  $(x(s_0), y(s_0)) = (x_0, y_0)$  e  $(\frac{dx}{ds}(s_0), \frac{dy}{ds}(s_0)) = (t_{x,0}, t_{y,0})$ .

**Dimostrazione:** La dimostrazione si riconduce alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali. Chiamiamo  $(t_x(s), t_y(s))$  le coordinate del vettore tangente che vogliamo trovare. Considero il problema di Cauchy dato dal sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dt_x}{ds} = k(s) t_y(s) \\ \frac{dt_y}{ds} = -k(s) t_x(s) \end{cases}$$

con condizioni iniziali  $(t_x(s_0), t_y(s_0)) = (t_{x,0}, t_{y,0})$ .

Si ha che esiste un'unica soluzione di questo problema di Cauchy definita nello stesso intervallo  $(a, b)$  dove è definita  $k(s)$ . [1; pag. 383-386]

Poniamo adesso  $x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s t_x(\sigma) d\sigma$  e  $y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s t_y(\sigma) d\sigma$ .

Facendo le derivate di queste due quantità si ottiene che :

$$(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}) = (t_x, t_y) \text{ e poi si osserva che } (x(s_0), y(s_0)) = (x_0, y_0).$$

Inoltre se considero la funzione  $t_x^2 + t_y^2$  e la derivo rispetto a  $s$  ottengo:

$$\frac{d(t_x^2 + t_y^2)}{ds} = 2 t_x \frac{dt_x}{ds} + 2 t_y \frac{dt_y}{ds} = 2 t_x k(s) t_y(s) + 2 t_y (-k(s) t_x(s)) = 0.$$

Quindi  $t_x^2 + t_y^2$  è costante rispetto a  $s$ . Siccome per  $s = s_0$ , la funzione vale 1, allora possiamo dedurre che è costantemente uguale a 1. Questo significa che il vettore tangente alla curva  $(x(s), y(s))$  è unitario, cioè  $s$  è la lunghezza d'arco.

□

# Capitolo 2

## 2. TEOREMA DEI QUATTRO VERTICI

### 2.1 Teorema del numero di rotazione o Umlaufsatz

#### **Teorema 2.1.1: Umlaufsatz**

Sia  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva piana, regolare a tratti, regolare, semplice e chiusa. Supponiamo che gli angoli esterni  $\alpha_j$  di  $c$  non siano mai uguali a  $\pi$  in valore assoluto  $\Rightarrow n_c = \pm 1$

**Corollario 2.1.1:** Sia  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva piana, regolare, regolare, semplice e chiusa con  $|\dot{c}|=1$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_I k(t) dt = \pm 1$$

#### **Dimostrazione teorema:**

Passo 1): Facciamo un cambiamento di variabili di  $c$  e una isometria di  $\mathbb{R}^2$  in modo da poter mettere  $c$  in una particolare forma (ricordiamoci che  $n_c$  è invariante per questi cambiamenti). Sia  $g$  una retta di  $\mathbb{R}^2$  che interseca l'immagine di  $c$ . Ci sarà almeno un punto  $p$  nell'intersezione di  $g$  con l'immagine di  $c$  che avrà la seguente proprietà: una semiretta di  $g$  con punto finale  $p$  non avrà altri punti in comune con l'immagine di  $c$ .

Tramite una leggera traslazione di  $g$ , se necessario, noi possiamo garantire che  $p$  non è un angolo di  $c$  (gli angoli di  $c$  sono isolati). Quindi, senza perdere di generalità, noi possiamo assumere che  $c'$  è una semiretta  $H$  proveniente da un valore regolare  $P$  di  $c$  e che  $H$  non ha altri punti in comune con l'origine di  $c$ .

Sia  $h$  il vettore unitario nella direzione di  $H$ .

Siccome  $c$  è regolare, noi possiamo riparametrizzare  $c$  con la lunghezza d'arco:  $|\dot{c}(t)|=1$ . Inoltre noi richiediamo che  $c(0)=c(w)=p$ . Se necessario, una traslazione e una rotazione di  $\mathbb{R}^2$  porta ad avere  $c(0)$  nell'origine e  $\dot{c}(0) = e_1(0) = (1, 0)$ .

Passo 2): Sia  $0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < w$  una partizione di  $[0, w]$  tale che  $c$  sia regolare in ogni segmento. Gli angoli di  $c$  sono i punti  $c(a_j)$  con  $0 < j < k$ .

Definiamo  $T = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq w\} \setminus \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1 = t_2 = a_j\}$ .

L'insieme  $T$  è stellato rispetto a  $(0, w)$ .

Sia  $e: T \rightarrow S^1$  un'applicazione definita da

$$e(t_1, t_2) = \begin{cases} \dot{c}(t_1) & \text{se } t_1 = t_2 \neq a_j \\ -\dot{c}(0) & \text{se } (t_1, t_2) = (0, w) \\ \frac{c(t_2) - c(t_1)}{|c(t_2) - c(t_1)|} & \text{negli altri casi in cui } (t_1, t_2) \in T \end{cases}$$

ed è una funzione continua.

Dalla prop. 1.4.5 abbiamo che  $\exists$  una funzione continua  $\theta: T \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa

$$(\cos \theta(t_1, t_2), \sin \theta(t_1, t_2)) = e(t_1, t_2) \quad \text{con } (t_1, t_2) \in T.$$

$\theta$  è determinata a meno di un multiplo intero di  $2\pi$ . Noi scegliamo  $\theta$  che soddisfa  $\theta(0, w) = +\pi$ .

Passo 3): Mostreremo che  $\theta(w, w) - \theta(0, 0) = \pm 2\pi$ .

Per  $t \in (0, w)$ ,  $\theta(t, w) - \theta(0, w)$  misura l'angolo tra  $-e_1$  e il vettore unitario  $e(t, w) = \frac{c(w) - c(t)}{|c(w) - c(t)|}$ . Ma  $e(t, w)$  non può essere mai uguale a  $-e_1$ . Quindi  $\theta(t, w) - \theta(0, w)$  è sempre minore di  $2\pi$ . Allora quando  $t = w$ ,  $\theta(w, w) - \theta(0, 0) = \pm\pi$ .

Analogamente  $\theta(0, t) - \theta(0, 0)$ , che rappresenta l'angolo da  $e_1$  a  $e(0, t)$ , è uguale a 0 quando  $t = 0$  e non può mai superare  $2\pi$ .

Quindi come  $t \rightarrow w$ ,  $\theta(0, t) - \theta(0, 0) \rightarrow \pm\pi$ .

Il segno è lo stesso di  $\theta(w, w) - \theta(0, w)$ .

$$\Rightarrow \theta(w, w) - \theta(0, 0) = \theta(w, w) - \theta(0, w) + \theta(0, w) - \theta(0, 0) = \pm 2\pi.$$

Passo 4): Considero  $c(a_j) = c(b_{j-1})$ , un angolo di  $c$  con un angolo esterno  $\alpha_j$ . L'angolo  $\alpha_j$  è uguale all'angolo tra  $\dot{c}(b_{j-1})$  e  $\dot{c}(a_j)$ , misurato in senso positivo.

Definiamo  $\theta(a_j, a_j) = \lim_{t \rightarrow a_j} \theta(t, t)$  con  $t > a_j$

$$\theta(b_{j-1}, b_{j-1}) = \lim_{t \rightarrow b_{j-1}} \theta(t, t) \quad \text{con } t < b_{j-1}$$

Si ha che :  $\alpha_j = \theta(a_j, a_j) - \theta(b_{j-1}, b_{j-1})$ .

Infatti: Sia  $\Delta$  il triangolo i cui vertici sono  $x_{-1} = c(b_{j-1} - \varepsilon)$

$$x_0 = c(b_{j-1}) = c(a_j)$$

$$x_1 = c(a_j + \varepsilon)$$

dove  $\varepsilon$  soddisfa  $b_{j-2} < b_{j-1} - \varepsilon < b_{j-1} + \varepsilon < b_j$ .

Si assume che  $x_{-1}, x_0, x_1$  ordinano i vertici di  $\Delta$  nel senso positivo. Senza perdere di generalità,  $\Delta$  potrebbe essere assunto non-degenere. Considero  $\alpha_{\pm 1}$ , con  $0 < \alpha_{\pm 1} < \pi$ , l'angolo al vertice  $x_{\pm 1}$ .

Quindi  $\theta(b_{j-1}, a_j + \varepsilon) - \theta(b_{j-1} - \varepsilon, a_j + \varepsilon) = \alpha_1 + 2\pi k_1$  per alcuni interi  $k_1$ .

Se  $\varepsilon$  è scelto abbastanza piccolo,  $\theta(b_{j-1} - \varepsilon, a_j + \varepsilon) - \theta(b_{j-1} - \varepsilon, a_j) = \alpha_{-1}$

$\Rightarrow \theta(a_j, a_j + \varepsilon) - \theta(b_{j-1} - \varepsilon, b_{j-1}) = \alpha_1 + \alpha_{-1} = \pi - \beta_0$  dove  $\beta_0$  è l'angolo in  $x_0$ .

Come  $\varepsilon \rightarrow 0$ , così  $\pi - \beta_0 \rightarrow \alpha_j$ , l'angolo esterno di  $c(t)$  in  $a_j$ .

Questo prova che  $\alpha_j = \theta(a_j, a_j) - \theta(b_{j-1}, b_{j-1})$ .

[Se  $x_{-1}, x_0, x_1$  orienta  $\Delta$  nel senso negativo, si può dimostrare una proprietà analoga].

Passo 5): Dai passi 3) e 4) e dalla definizione 1.5.1 possiamo scrivere:

$$\pm 2\pi = \theta(w, w) - \theta(0, 0) = \theta(w, w) - \sum_{j=1}^{k-1} \theta(a_j, a_j) - \sum_{j=1}^{k-1} \theta(b_{j-1}, b_{j-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j - \theta(0, 0)$$

Siccome  $\theta(a_j, a_j) = \theta_j(a_j)$  e  $\theta(b_{j-1}, b_{j-1}) = \theta_j(b_{j-1})$ , la parte destra dell'uguaglianza precedente è  $2\pi n_c$ .

Abbiamo  $w = b_k$  e  $0 = a_0$ .

Quindi il teorema è dimostrato.

□

**Dimostrazione corollario:** Segue direttamente dal teorema e dalla proposizione 1.5.1.

□

## 2.2 Curve convesse

**Definizione 2.2.1:** Una curva regolare piana  $c:I\rightarrow\mathbb{R}^2$  è *convessa* se,  $\forall t_0\in I$ , la curva giace interamente da una parte della tangente in  $c(t_0)$ , cioè  $\forall t_0\in I$  una ed una sola delle seguenti disuguaglianze è valida :

$$(c(t)-c(t_0))\cdot e_2(t_0)\geq 0 \quad \forall t\in I$$

o

$$(c(t)-c(t_0))\cdot e_2(t_0)\leq 0 \quad \forall t\in I$$

**Teorema 2.2.1: (caratterizzazione delle curve convesse)**

Sia  $c:I\rightarrow\mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa regolare e piana.

$C$  è convessa  $\Leftrightarrow$  una delle seguenti condizioni è vera:

$$k(t)\geq 0 \quad \forall t\in I$$

o

$$k(t)\leq 0 \quad \forall t\in I$$

figura convessa

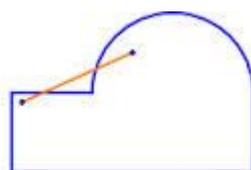
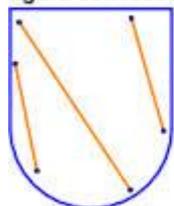


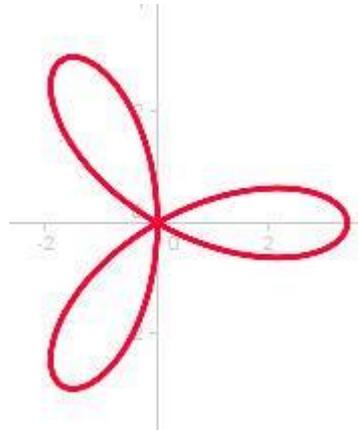
figura concava

**Osservazioni:**

1) Se una delle due condizioni richieste nel teorema vale, allora potremo ottenere l'altra dopo un cambio di variabili che cambia l'orientazione. Quindi geometricamente sono equivalenti.

2) Se  $c$  è una curva chiusa ma non semplice il teorema non vale . Per esempio il trifoglio (detto anche curva di Pretzel) soddisfa la condizione  $k(t)\geq 0$  ma non è convessa. Infatti il trifoglio è una curva chiusa piana ma non è

semplice, in quanto si sovrappone a se stessa formando degli intrecci.



**Dimostrazione:** Assumiamo come sempre che  $|c'(t)|=1$ , se così non fosse basterà fare un cambio di variabili. Consideriamo la funzione  $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $e_1(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ , come definito nella prop. 1.4.4.

Possiamo dire che  $\dot{\theta}(t) = k(t) |c'(t)|$  (vedi prop. 1.4.1) e quindi  $\dot{\theta}(t) = k(t)$ .

Ora procediamo con la dimostrazione vera e propria:

$\Rightarrow$ : supponiamo  $c$  convesso, mostreremo che  $k$  non cambia segno facendo vedere che  $\theta(t)$  è strettamente monotona. Se  $\theta(t') = \theta(t'')$  e  $t' < t''$  allora  $\theta$  è costante in  $[t', t'']$ .

Se  $c$  è semplice, ci deve essere almeno un punto  $t'''$  dove  $\theta(t''') = -\theta(t'') = -\theta(t')$ . Usando la convessità di  $c$ , è possibile concludere che 2 delle linee tangenti a  $c$  nei punti  $c(t')$ ,  $c(t'')$ ,  $c(t''')$  debbano coincidere.

Sia  $p_1 = c(t_1)$  e  $p_2 = c(t_2)$  con  $t_1 < t_2$ , considero questi due punti e il segmento che li unisce  $\overline{p_1 p_2}$ . Questo segmento deve giacere completamente sull'immagine di  $c$ . Infatti se  $q$  è un punto su

$\overline{p_1 p_2}$  che non si trova sull'immagine di  $c$ , allora la linea perpendicolare a  $\overline{p_1 p_2}$  e passante per  $q$  interseca  $c$  in almeno 2 punti e, siccome  $c$  è convessa, questi 2 punti devono giacere dalla stessa parte di  $\overline{p_1 p_2}$ . Sia  $r$  il punto d'intersezione più vicino a  $\overline{p_1 p_2}$  e  $s$  quello più lontano, allora  $r$  giace nella parte interna del triangolo  $p_1 p_2 s$ . Se considero la retta tangente a  $c$  nel punto  $r$ , ci sono dei punti di  $c$  su entrambi i lati di questa retta e questo contraddice il fatto che  $c$  è convessa.

Quindi  $\overline{p_1 p_2} = \{c(t) | t_1 \leq t \leq t_2\}$ , che significa che  $\theta(t_1) = \theta(t) = \theta(t_2)$  per  $t \in [t_1, t_2]$ .

In particolare se  $t_1 = t'$  e  $t_2 = t''$ , si è dimostrato che  $\theta$  è strettamente monotona.

$\Leftarrow$ : Procediamo per assurdo e quindi neghiamo la tesi. Supponiamo che  $c$  non sia convessa, allora  $\exists$  un  $t_0 \in I$  tale che  $\varphi(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot e_2(t_0)$  cambia segno.

Siano  $t_+$  e  $t_-$  (diversi da  $t_0$ ) dei valori di  $t \in I$  dove  $\varphi(t)$  assume il suo massimo e il suo minimo rispettivamente:

$$\varphi(t_-) < \varphi(t_0) = 0 < \varphi(t_+).$$

Siccome  $\dot{\varphi}(t_-) = \dot{\varphi}(t_+) = 0$  allora  $e_1(t_-)$  e  $e_1(t_+)$  sono uguali a  $\pm e_1(t_0)$ . Quindi almeno due di questi vettori sono uguali. Attraverso una riparametrizzazione, possiamo dire che esistono  $s_1$  e  $s_2$  con  $s_1 = 0 < s_2 < w$  e  $e_1(s_1) = e_1(s_2)$ .

Ma questo significa che  $\theta(s_1) - \theta(s_2) = 2\pi k$ , con  $k$  intero e  $\theta(s_1 + w) - \theta(s_2) = 2\pi k'$  con  $k'$  intero.

Dal teorema 2.1.1 (Umlaufsatz),  $k + k' = \pm 1$  e, siccome  $\theta|_{[0, s_2]}$  e  $\theta|_{[s_2, w]}$  sono funzioni non costanti,  $kk' \neq 0$ .

Quindi  $kk' < 0$ , questo comporta che  $k(t) = \dot{\theta}(t)$  deve cambiare segno (uno dei  $k$  deve essere positivo e l'altro negativo).

Questo però contraddice l'ipotesi su  $k$  e quindi  $c$  è convessa.

□

La curvatura di una curva piana chiusa di classe  $C^2$  è una funzione continua definita su un compatto, per cui ammette sempre un massimo ed un minimo; in particolare  $\dot{k}$  si annulla almeno in due punti. Un risultato importante è che la derivata della curvatura in realtà si annulla in almeno quattro punti.

**Definizione 2.2.2:** Un vertice di una curva piana regolare  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un punto critico della curvatura  $k: I \rightarrow \mathbb{R}$  nell'intervallo  $I'$  di  $I$ , cioè  $\dot{k}(t_0) = 0$  con  $t_0 \in I'$ .

Quindi il vertice è un massimo o un minimo locale o un flesso della curvatura.

**Esempio:** Se  $k(t) = \text{costante}$  allora tutti i punti sono vertici.

**Esempio:** Se la curva è un'ellisse i vertici sono 4, che sono in corrispondenza dei semiassi.

**Teorema 2.2.2: (Teorema dei quattro vertici)**

Una curva piana convessa, semplice, chiusa e regolare ha almeno quattro vertici.

**Dimostrazione:** Si ha che  $k(t)$  ha un massimo e un minimo su  $I = [0, w]$ , quindi possiamo dedurre che  $c(t)$  ha almeno 2 vertici. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che  $c(t)$  sia parametrizzata con la lunghezza d'arco e che  $k(t)$  abbia minimo in  $t=0$  e massimo in  $t_0$  con  $0 < t_0 < w$ . Dopo un'opportuna rotazione, possiamo assumere che la retta che passa per  $c(0)$  e  $c(t_0)$  è l'asse  $x$  nel piano  $(x, y)$  e che, se  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\exists$  almeno un punto  $\hat{t}$ ,  $0 < \hat{t} < t_0$ , tale che  $y(\hat{t}) > 0$ . Se  $y(t) \equiv 0$ ,  $0 < t < t_0 \Rightarrow k(t) \equiv 0$ ,  $0 < t < t_0 \Rightarrow k = 0$  in  $I$  che è impossibile.

Vogliamo dimostrare che  $c(0)$  e  $c(t_0)$  sono i soli punti di  $c(t)$  che stanno sull'asse  $x$ .

Per dimostrare questo procedo per assurdo, quindi suppongo che  $c(t_1)$  sia un altro punto di  $c$  sull'asse  $x$ . La convessità di  $c(t)$  obbliga la retta tangente a  $c(t)$  nel punto di mezzo di  $c(0)$ ,  $c(t_0)$ ,  $c(t_1)$  a passare attraverso altri 2 punti. Per il teorema 2.2.1, questo implica che il segmento  $\overline{c(0)c(t_0)}$

giaccia interamente nell'immagine di  $c(t)$ , facendo in modo che  $k(0)=k(t_0)=0$ . Ma questo risultato è impossibile dal momento che ho imposto  $k(t)\equiv 0$  su  $I$ .

Adesso suppongo che  $c(t_0)$  e  $c(0)$  siano gli unici vertici di  $c(t)$ . Allora si ha:

$$\dot{k}(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_0]$$

$$\dot{k}(t) \leq 0, \quad t \in [t_0, w]$$

Questo comporta che  $\dot{k}(t) y(t) \geq 0$  per  $t \in [0, w]$ .

Quindi :

$0 \leq \int_0^w \dot{k}(t)y(t) dt = - \int_0^w k(t)\dot{y}(t) dt$  usando l'integrazione per parti.

Inoltre dal fatto che

$$e_1(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

$$e_1(t) = k(t) e_2(t)$$

$$e_2(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$$

segue che:

$$\ddot{x}(t) = -k(t)\dot{y}(t).$$

Quindi:

$$0 \leq \int_0^w \dot{k}(t)y(t) dt = - \int_0^w k(t)\dot{y}(t) dt = \int_0^w \ddot{x}(t) dt.$$

Considero i valori  $t \in [0, t_0]$  tali che  $\dot{k}(t) \geq 0$ , si hanno due casi:

1. Se tale insieme è vuoto, segue che  $\dot{k}(t)=0 \quad \forall t \Rightarrow$  la curva è una retta che passa per  $(x(0), 0)$  e  $(x(t_0), 0)$  cioè  $y(t)\equiv 0$  che è l'asse  $x$ ;
2. Se tale insieme non è vuoto abbiamo  $t'$  con  $\dot{k}(t')>0$ , per il teorema della permanenza del segno  $c'$  è un intorno di  $t'$  dove  $\dot{k}(t) > 0$  per  $t$  appartenente a questo intorno. Se si avesse  $\dot{k}(t)y(t)=0$ , in questo intorno si avrebbe  $y(t)=0$

e quindi la curva sarebbe una retta. Quindi si avrebbe che  $k(t)=0$  e anche  $\dot{k}(t)=0$ . Questo contraddice l'ipotesi che abbiamo fatto.

Concludendo, abbiamo dimostrato che, sotto le ipotesi fatte, ci deve essere almeno un altro punto  $t$  dove  $\dot{k}(t)$  cambia segno, cioè dove  $k$  ha un estremo relativo. Ma sappiamo che gli estremi relativi vengono in coppia, quindi ci devono essere quattro vertici.

□

Osserviamo che il Teorema del quattro vertici può essere dimostrato anche senza l'ipotesi di convessità, ma sarebbe più difficile da provare. (Come referenza storica citiamo [4])

**Definizione 2.2.3:** Una curva convessa  $c:I \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $k(t) \neq 0 \forall t \in I=[0,w]$  è detta *curva strettamente convessa*.

**Osservazioni:**

1) Per ogni punto  $c(t)$  su una curva strettamente convessa e chiusa  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  c'è un unico punto  $c(t')$  tale che  $e_1(t) = -e_1(t')$ . Si dice che  $c$  ha un'ampiezza costante se  $d(c(t), c(t')) = d$ , dove  $d$  è una costante.

2) Se osserviamo la dimostrazione del teorema dei quattro vertici vedremo che si potrebbe ottenere un risultato più forte:

**Teorema 2.2.3:** Una curva semplice, chiusa e convessa deve avere:

- $k = \text{costante} \neq 0$   
oppure
- una funzione curvatura con due massimi relativi e due minimi relativi.

Nel 2° caso inoltre abbiamo bisogno che i valori di  $k$  nei massimi relativi siano strettamente più grandi dei valori di  $k$  nei minimi relativi.

Da quest'ultimo teorema noi possiamo vedere che non tutte le funzioni periodiche  $k:[0,w] \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$  si presentano come funzioni curvatura di una curva convessa chiusa  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Il seguente teorema implica che le restrizioni necessarie su  $k$  date prima sono anche sufficienti:

**Teorema 2.2.4: ( inversione del teorema dei quattro vertici)**

Sia  $k:[0,w] \rightarrow \mathbb{R} > 0$  una funzione periodica, continua e strettamente positiva con  $k(0)=k(w)$  che è o costante o ha due massimi e due minimi, i valori di  $k$  nei massimi saranno strettamente più grandi dei valori di  $k$  nei minimi. Allora esiste una curva di  $C^2$ ,  $c: [0,w] \rightarrow \mathbb{R}^2$  che è semplice e chiusa e la cui funzione curvatura è uguale a  $k$ . [2]

**Osservazione:** Il teorema 2.2.4 è una versione "globale" per curve chiuse rispetto al teorema 1.6.1.

Il teorema dei quattro vertici ha la seguente generalizzazione:

**Teorema 2.2.5:** Sia  $c$  una curva semplice, chiusa e non omotopa su  $M$ , una superficie orientata con una metrica Riemanniana di curvatura di Gauss costante. Allora la curvatura geodetica di  $c$  ha almeno quattro punti stazionari. (Come referenza storica citiamo [4])

# Capitolo 3

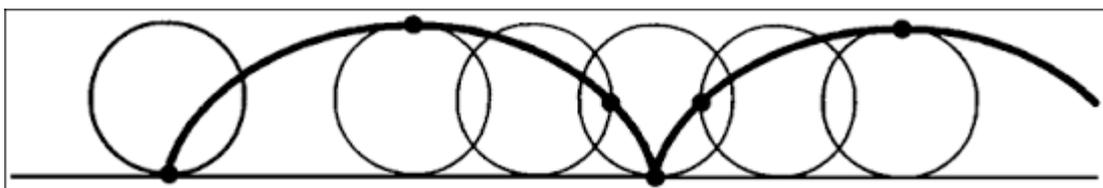
## 3 ALCUNE CURVE CELEBRI

### 3.1 La cicloide

La cicloide fu studiata da Pascal nel 1657. Durante una meditazione notturna Pascal affrontò i problemi della curva detta ROULETTE (in francese), CYCOLIDIS o TROCOIDIS ( in latino). Scrisse tutti i suoi studi un anno più tardi, cioè nel 1658, in "Histoire de la roulette".

In particolare troviamo scritto che la roulette è una delle curve più comuni che possiamo trovare dopo la retta e la circonferenza.

Pascal la descrisse così "la roulette è il percorso che fa nell'aria il punto di una ruota, quando essa rotola nel suo movimento normale, dal momento in cui il punto comincia a sollevarsi da terra, fino al momento in cui la rotazione continua della ruota l'abbia ricondotto a terra, dopo un giro completo."



Galileo era stato il primo ad occuparsene e poi anche altri la studiarono : Mersenne, Torricelli, Fermat, Descartes , tutti però avevano ottenuto dei risultati parziali .

In coordinate cartesiane la cicloide è rappresentata dall'equazione :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta R - R \sin(\theta) \\ y(\theta) = R - R \cos(\theta) \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $\theta$  è un parametro che corrisponde all'angolo attraverso il quale il cerchio rotolante ha ruotato e che è misurato in radianti.

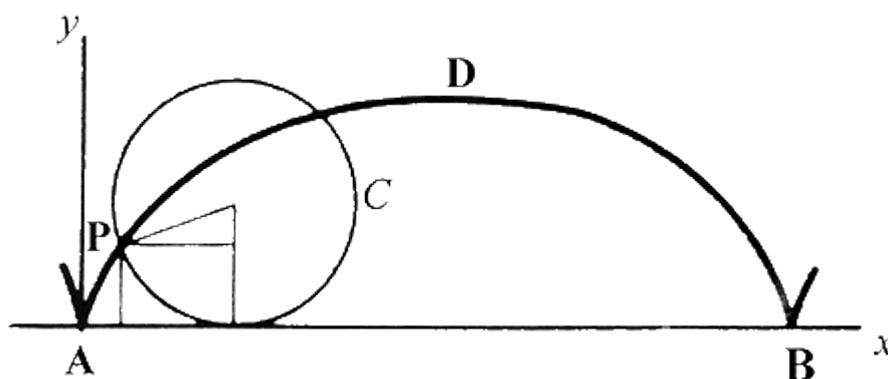


Fig. 3.1

Si può osservare che il centro è descritto da:

$$\begin{cases} x = R \theta \\ y = R \end{cases}$$

Risolvendo il sistema 3.1 rispetto a  $\theta$  si può trovare l'equazione cartesiana.

Ricavo  $\theta$  :

$$R \cos \theta = R - y$$

cioè:

$$\cos \theta = \frac{R-y}{R} = 1 - \frac{y}{R} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{y}{R} \right)$$

$$\text{Quindi } x = R \cos^{-1} \left( 1 - \frac{y}{R} \right) - R \sin \left[ \cos^{-1} \left( 1 - \frac{y}{R} \right) \right]$$

$$\text{Ma } \sin^2 (\cos^{-1} (x)) = 1 - x^2 \Rightarrow$$

$\sin(\cos^{-1}(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$  e considero solo i casi maggiori di 0.

$$\begin{aligned}
 \text{Si ha: } R \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right) - R \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2} &= \\
 = R \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right) - R \sqrt{1 - 1 + \frac{y^2}{R^2} + \frac{2y}{R}} &= \\
 = R \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right) - R \sqrt{-\frac{y^2}{R^2} + \frac{2y}{R}} &= \\
 = R \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right) - R \sqrt{\frac{y(2R-y)}{R^2}} &= \\
 = R \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right) - R \frac{\sqrt{y(2R-y)}}{R} &= \\
 = R \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{y(2R-y)}. &
 \end{aligned}$$

L'equazione cartesiana ottenuta è :

$$x = R \cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{y(2R-y)}$$

Possiamo quindi dedurre che la cicloide è una curva trascendente e non algebrica.

Quindi la cicloide descrive degli archi, il 1° arco è formato dai punti per cui  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Quando  $y$  è vista come una funzione di  $x$ , la cicloide è differenziabile ovunque tranne che nei punti dove  $c'$  è una cuspide, che sono i punti dove tocca l'asse delle  $x$ . In questi ultimi la derivata tende a  $\pm\infty$  (proprio come si comporta una cuspide). Rispetto alla figura 3.1 i punti dove la cicloide non è regolare sono proprio i punti d'intersezione con l'asse delle ascisse.

Proviamo a derivare il sistema 3.1:

$$\begin{cases} \dot{x}(\theta) = R - R \cos(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = R \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(\theta) = R \sin(\theta) \\ \ddot{y}(\theta) = R \cos(\theta) \end{cases}$$

La cicloide è una curva regolare a tratti , infatti , siccome  $\frac{dc}{d\theta} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 R^2 (1-\cos\theta)$ , si ha:

$$\frac{dc}{d\theta} \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq 2k\pi \text{ per } k \in \mathbf{Z} .$$

**Proposizione 1:**  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R}{y} - 1$

**Dimostrazione:**  $\left(\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right) / \left(\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2\right) = \frac{(R \sin(\theta))^2}{(R-R \cos(\theta))^2} = \frac{\sin^2 \theta}{(1-\cos\theta)^2} = \frac{1-\cos^2 \theta}{(1-\cos\theta)^2}$   
 $= \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)^2} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{-1+2+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{-1+\cos\theta}{1-\cos\theta} + \frac{2}{1-\cos\theta} = -1$   
 $+ \frac{2}{1-\cos\theta} = -1 + \frac{2}{\frac{y}{R}} = -1 + 2 \left(\frac{R}{y}\right)$  , perché  $y(\theta) = R - R \cos(\theta)$  quindi  $1 - \cos\theta = \frac{y}{R}$ .

**Proprietà:**

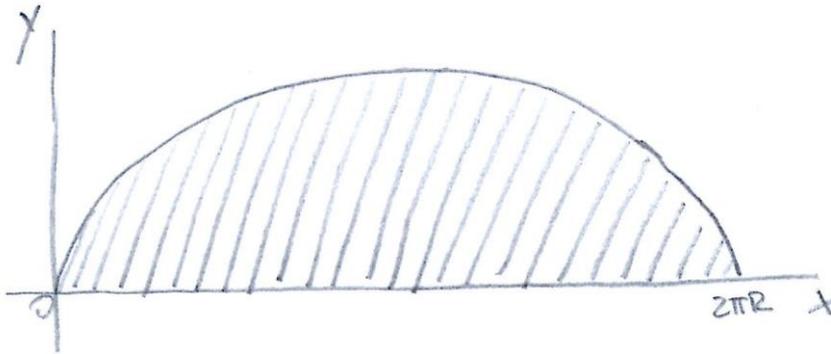
1. Le dimensioni di una cicloide sono strettamente legate a quella della circonferenza generatrice:

- L'altezza massima dell'arco è pari al suo diametro.
- La lunghezza di un arco di cicloide è 4 volte il diametro, cioè 8 volte il raggio  $\Rightarrow L=8R$  (sarà dimostrata a pag. con la proposizione 4 ).
- La base sottostante l'arco è pari alla circonferenza  $\Rightarrow \pi d = 2\pi R$
- L'area compresa fra un arco di cicloide e la base è 3 volte l'area del cerchio.

Questa proprietà era già sospetta a Galileo, il quale la riscontrò, non riuscendo a misurarla per via teorica , per via fisica, pesando materialmente dei pezzi di metallo ritagliati secondo la sagoma della curva e della circonferenza generatrice. Galileo dedusse per via empirica che il rapporto doveva essere prossimo a 3:1, ma rifiutò la sua prima intuizione forse ritenendo tale rapporto troppo semplice e anzi si convinse che aveva sbagliato dopo una serie di errori accidentali nelle misurazioni successive.

Questa proprietà è stata poi dimostrata da Torricelli e anche da altri studiosi. Nella dimostrazione si parte dalla definizione di Area.

**Proposizione 2:**  $A = 3 \pi R^2$



**Dimostrazione :**

$$A = \int_0^{2\pi R} y \, dx$$

Si ha che  $x = \theta R - R \sin(\theta)$  e  $y(\theta) = R - R \cos(\theta)$ , quindi  $\frac{dx}{d\theta} = R(1 - \cos(\theta))$  cioè  $dx = R(1 - \cos(\theta))d\theta$ .

Analizzo gli estremi: Se  $x=0 \Rightarrow \sin \theta = \theta \Rightarrow \theta=0$ ;

Se  $x = 2\pi R \Rightarrow 2\pi R = R(\theta - \sin \theta) \Rightarrow 2\pi = \theta - \sin \theta \Rightarrow \theta = 2\pi$

Allora l'integrale diventa:

$$A = \int_0^{2\pi} (R - R \cos(\theta)) R(1 - \cos(\theta)) d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) d\theta$$

Siccome  $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$$A = R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta\right) d\theta =$$

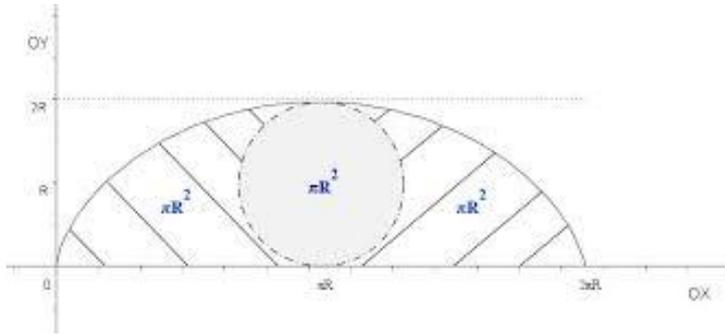
$$= \frac{3}{2} R^2 \int_0^{2\pi} d\theta - 2 R^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta$$

L'integrale di  $\cos \theta$  è il  $\sin \theta$  che in 0 in  $2\pi$  si annulla, quindi il secondo termine verrebbe 0; l'integrale di  $\cos 2\theta$  sarebbe  $\frac{1}{2} \sin 2\theta$  che si annulla negli estremi, quindi anche questo termine viene = 0: Alla fine rimane solo il primo termine:

$$A = \frac{3}{2} R^2 (2\pi - 0) = \frac{3}{2} R^2 2\pi = 3\pi R^2.$$

□

Osservazione:



Possiamo osservare che quindi l'area della cicloide può essere vista come 3 volte l'area della circonferenza che la genera, che è proprio  $\pi R^2$ .

Già Galileo riscontrò per via fisica questa proprietà, ma non riuscì a farlo via teorica. Galileo pesò materialmente dei pezzi di metallo ritagliati secondo la sagoma della curva e della circonferenza generatrice; così dedusse, per via empirica che il rapporto doveva essere 3:1, ma rifiutò la sua intuizione forse perché pensava fosse troppo semplice, anzi si convinse che la sua prima impressione era sbagliata, questo dopo una serie di errori accidentali in successivi studi e misurazioni.

L'esattezza della relazione tra le due aree fu invece dimostrata dopo la morte di Galileo, dall'allievo Torricelli e, quasi contemporaneamente da altri matematici.

- **Proposizione 3** : Il baricentro della figura racchiusa fra il primo arco di cicloide e l'asse delle x ha coordinate  $(\pi R, \frac{5}{6}\pi R)$ .

**Dimostrazione:** Essendo il diametro uguale a  $2\pi R$  si ha che l'ascissa è  $\pi R$ . Ora ricaviamo l'ordinata:

$$y_G = \frac{\iint y \, dx \, dy}{\iint dx \, dy} = \frac{\frac{1}{2} \int y^2 \, dx}{\int y \, dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^3 (1 - \cos \theta)^3 \, d\theta}{\int_0^{2\pi} R^2 (1 - \cos \theta)^2 \, d\theta}$$

Il termine al denominatore è l'area quindi vale  $3\pi R^2$ .

Il termine al numeratore lo dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^3 (1 - \cos \theta)^3 d\theta &= \frac{1}{2} R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^3 \theta - 3\cos \theta + 3 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} R^3 \left[ \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta - 3 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{2} R^3 \left[ 2\pi - \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta - 3 \sin \theta \Big|_0^{2\pi} + 3 \left( \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} \right] \end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\int \cos^n \theta d\theta = \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \theta d\theta,$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } \int \cos^3 \theta d\theta &= \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{3} + \frac{3-1}{3} \int \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{3} + \frac{2}{3} \sin \theta \end{aligned}$$

nel nostro caso calcolato tra 0 e  $2\pi$ , cioè

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \left[ \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{3} + \frac{2}{3} \sin \theta \right] \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^3 (1 - \cos \theta)^3 d\theta &= \frac{1}{2} R^3 \left[ 2\pi - 0 - 0 + 3 \frac{1}{2} 2\pi \right] = \\ &= \frac{1}{2} R^3 5\pi = \frac{5}{2} \pi R^3 \end{aligned}$$

$$\text{Alla fine } y_G = \frac{\frac{5}{2} \pi R^3}{3\pi R^2} = \frac{5}{6} R.$$

Il baricentro della figura sottesa dal primo arco della cicloide ha coordinate  $(\pi R, \frac{5}{6} R)$ .

□

• **Proposizione 4:**  $L = 8 R$

**Dimostrazione:** La lunghezza dell'arco  $L$  dall'estremo  $A$  all'estremo  $B$  è data da

$$\begin{aligned} L &= \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta} d\theta = \\ &= R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \theta - 2\cos \theta + \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Ricordiamo la formula fondamentale della trigonometria  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , e si ottiene:

$$\begin{aligned} L &= R \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos \theta) d\theta = R \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos \theta) d\theta = \\ &= \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos \theta)} d\theta \end{aligned}$$

Ma  $\frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}$ , quindi:

$$L = \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta = 2R \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta$$

Faccio un cambio di variabili :  $w = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 2w$ ,  $d\theta = 2dw$ .

Quando  $\theta = 0, w = 0$  quando  $\theta = 2\pi, w = \pi$ .

Allora abbiamo:

$$L = 2R \int_0^\pi \sin w \cdot 2 dw = 4R [-\cos w]_0^\pi = -4R \cos\pi + 4R \cos 0 = 4R + 4R = 8R.$$

□

- **Proposizione 5:** La curvatura della cicloide è:  $k = \frac{1}{4R} \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$

**Dimostrazione:** Si parte dall'equazioni parametriche della cicloide:

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta R - R \sin(\theta) \\ y(\theta) = R - R \cos(\theta) \end{cases}$$

E dalle derivate:

$$\begin{cases} \dot{x}(\theta) = R - R \cos(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = R \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= R^2 + R^2 \cos^2\theta - 2R^2 \cos\theta + R^2 \sin^2\theta = 2R^2 - 2R^2 \cos\theta = \\ &= 2R^2(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Quindi  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R \sqrt{2(1 - \cos\theta)}$ .

La curva è descritta da  $c(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$  con

$$\dot{c}(\theta) = R \sqrt{2(1 - \cos\theta)} \cdot e_1(\theta).$$

Calcoliamo  $e_1(\theta)$ :

$$\begin{aligned} e_1(\theta) &= \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \left( \frac{R - R \cos(\theta)}{R \sqrt{2(1 - \cos\theta)}}, \frac{R \sin(\theta)}{R \sqrt{2(1 - \cos\theta)}} \right) = \\ &= \left( \frac{1 - \cos\theta}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}} \right) = \left( \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}, \frac{\sin\theta}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}} \right) = \\ &= \left( \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}, \frac{\sin\theta \sqrt{1 + \cos\theta}}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \left( \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \frac{\sin\theta \sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2(1-\cos^2\theta)}} \right) = \left( \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \frac{\sin\theta \sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2} \sin\theta} \right) =$$

$$= \left( \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}} \right) = \left( \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \right) = \left( \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2} \right)$$

Quindi  $\dot{e}_1(\theta) = \left( \frac{1}{2} \cos\frac{\theta}{2}, -\frac{1}{2} \sin\frac{\theta}{2} \right)$ .

Allora  $\dot{e}_2(\theta) = \left( \cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2} \right)$ .

Dalle formule di Frenet si ha  $\dot{e}_1(\theta) = w_{12}(\theta) e_2(\theta)$ , che nel nostro caso diventa:  $\left( \frac{1}{2} \cos\frac{\theta}{2}, -\frac{1}{2} \sin\frac{\theta}{2} \right) = w_{12} \left( \cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2} \right) \Rightarrow w_{12} = \frac{1}{2}$ .

La curvatura quindi è :

$$k(\theta) = \frac{w_{12}(\theta)}{|\dot{c}(\theta)|} = \frac{1/2}{R \sqrt{2(1-\cos\theta)}} = \frac{1/2}{R \sqrt{4 \frac{1-\cos\theta}{2}}} = \frac{1}{2R} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{4R} \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Quando  $\theta = \pi$  la curvatura  $k$  è data da  $k(\theta) = \frac{1}{4R}$ .

- Il raggio di curvatura è :  $4R \sin\frac{\theta}{2}$ .

## 2. EVOLUTA DELLA CICLOIDE

L'evoluta è per definizione il luogo dei centri di curvatura. Vale a dire che quando viene disegnato il centro di curvatura di ciascun punto di una curva, il grafico risultante sarà l'evoluta di quella curva. Per esempio l'evoluta del cerchio è un singolo punto, che corrisponde al centro del cerchio. L'evoluta della cicloide ha la proprietà di essere traslazione della cicloide dalla quale è generata.

Abbiamo che la cicloide parametrizzata è data da:

$$c(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \theta R - R \sin(\theta) \\ y(\theta) = R - R \cos(\theta) \end{cases}$$

Il suo vettore tangente (normalizzato) abbiamo visto è

$$e_1(\theta) = \left( \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2} \right), \text{ quindi il suo vettore normale (normalizzato)}$$

è  $n(\theta) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}\right)$ . Inoltre abbiamo visto che la curvatura è  $k(\theta) = \frac{1}{4R} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} = (4R \sin \frac{\theta}{2})^{-1}$ .

Il raggio di curvatura è l'inverso della curvatura e sarebbe il raggio del cerchio osculatore nel punto  $c(\theta)$ .

Per calcolare le coordinate del centro di curvatura rispetto a  $c(\theta)$ , dobbiamo partire da  $c(\theta)$  e seguire il vettore normale di una lunghezza pari al raggio di curvatura, cioè dobbiamo calcolare  $c(\theta) + (k(\theta))^{-1} n(\theta)$ :

$$\begin{aligned} c(\theta) + (k(\theta))^{-1} n(\theta) &= \\ &= (\theta R - R \sin(\theta), R - R \cos(\theta)) + (4R \sin \frac{\theta}{2}) \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}\right) = \\ &= (\theta R - R \sin(\theta), R - R \cos(\theta)) + \left(4R \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, -4R \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Ma  $2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \sin \theta$  e  $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$  quindi

$$\begin{aligned} c(\theta) + (k(\theta))^{-1} n(\theta) &= \\ &= (\theta R - R \sin(\theta), R - R \cos(\theta)) + (2 R \sin \theta, -2R(1 - \cos \theta)) = \\ &= (\theta R + R \sin(\theta), -R + R \cos(\theta)) . \end{aligned}$$

Posto  $\theta' = \theta + \pi$ , abbiamo  $\sin(\theta') = -\sin \theta$  e  $\cos(\theta') = -\cos \theta$ ,

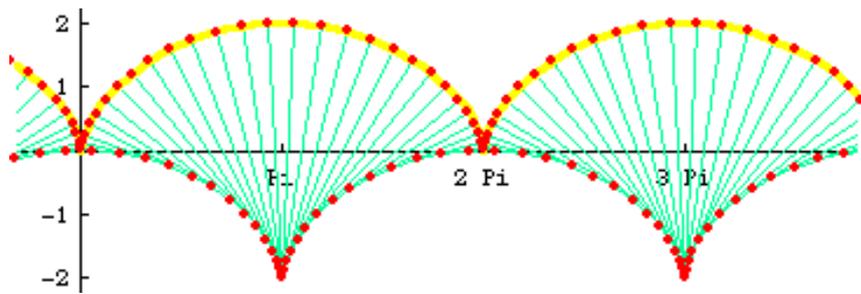
quindi l'espressione precedente diventa:

$$\begin{aligned} c(\theta) + (k(\theta))^{-1} n(\theta) &= (\theta R + R \sin(\theta), -R + R \cos(\theta)) = \\ &= ((\theta' - \pi)R - R \sin \theta', -R - R \cos \theta') = \\ &= (-\pi R, -2R) + (\theta' R - R \sin \theta', R - R \cos \theta') = (-\pi R, -2R) + c(\theta') \end{aligned}$$

che è l'equazione della cicloide da cui siamo partiti, parametrizzata da  $\theta'$  e traslata rispetto al vettore  $(-\pi R, -2R)$ .

L'evoluta è rappresentata nella seguente figura, trovata su internet, dove è evidente la traslazione rispetto a

$(-\pi R, -2R)$  (in questa figura  $R=1$ , la cicloide è sopra l'asse delle ascisse in giallo e la sua evoluta è sotto l'asse delle ascisse).



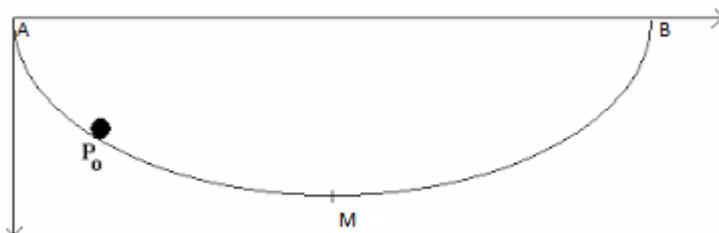
Osservazione:

Da questo disegno, dove  $R=1$ , possiamo avere una seconda dimostrazione per la lunghezza della cicloide, già ottenuta nella Prop. 4 . Vediamo che metà lunghezza è  $4R$  e quindi la lunghezza totale sarà  $L=8R$ .

3. La cicloide è la curva che risolve il problema della tautocrona ovvero le oscillazioni su di un arco di cicloide sono esattamente isocrone.

Lo studio del pendolo è stato affrontato da molti matematici e fisici perché il pendolo galileiano ha come difetto il fatto di avere le oscillazioni non perfettamente indipendenti dall'ampiezza.

Tra i vari studiosi, Huyghens prese in considerazione l'ipotesi di far oscillare un pendolo anziché su un arco di circonferenza su una cicloide e ottenne una curva isocrona o tautocrona, cioè la curva lungo la quale un punto materiale  $P$  vincolato ad essa senza attrito e sotto l'azione della sola forza di gravità impiega sempre lo stesso tempo per raggiungere il punto mediano  $M$  partendo da fermo, qualunque sia il punto di partenza  $P_0$ .



In ogni punto  $P$  della curva sia  $s$  l'ascissa curvilinea. La velocità rispetterà il principio della conservazione dell'energia, cioè l'energia cinetica in ogni punto, sarà

uguale all'energia potenziale perduta dal punto di partenza  $P_0$  di ordinata  $y_0$  con angolo  $\theta_0$ . Quindi si avrà:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g (y - y_0)$$

Se partiamo dal punto A, si ha  $y_0=0$  e  $\theta_0=0$ , quindi

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y \Rightarrow v = \sqrt{2 g y}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ma } v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} &= \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2 g y}} = \frac{\sqrt{R^2(1-\cos\theta)^2+R^2\sin^2\theta}}{\sqrt{2 g R (1-\cos\theta)}} d\theta = \\ \frac{R \sqrt{1+\cos^2\theta-2\cos\theta+\sin^2\theta}}{\sqrt{2 g R (1-\cos\theta)}} d\theta &= \frac{R\sqrt{2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2 g R (1-\cos\theta)}} d\theta = \frac{R}{\sqrt{gR}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} d\theta. \end{aligned}$$

Quindi partendo da A per arrivare al punto M si impiegherà un tempo:

$$t = \int_0^\pi \sqrt{\frac{R}{g}} d\theta = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Partendo da un punto diverso da A, per esempio da  $P_0$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 = m g (y - y_0) \Rightarrow v = \sqrt{2 g (y - y_0)} \\ dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2 g (y - y_0)}} = \frac{R\sqrt{2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2 g R (\cos\theta_0 - \cos\theta)}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}} d\theta, \end{aligned}$$

in questo caso il tempo necessario per andare da  $P_0$  a M sarà:

$$t = \int_{\theta_0}^\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^\pi \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}} d\theta$$

Osserviamo che si ha :

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow \sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta \text{ e}$$

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \Rightarrow \cos \theta_0 - \cos \theta = (2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - 1) - (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) =$$

$$= 2 (\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}), \text{ quindi:}$$

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^\pi \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^\pi \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^\pi \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_0}{2}}}} d\theta$$

ora pongo  $u = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}}$ , quindi se  $\theta = \theta_0 \Rightarrow u = 1$ , se  $\theta = \pi \Rightarrow u = 0$  e

$du = -\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta_0}{2}} d\theta$ , sostituisco nell'integrale e ottengo:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_0}{2}}}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} (-2du) = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du =$$

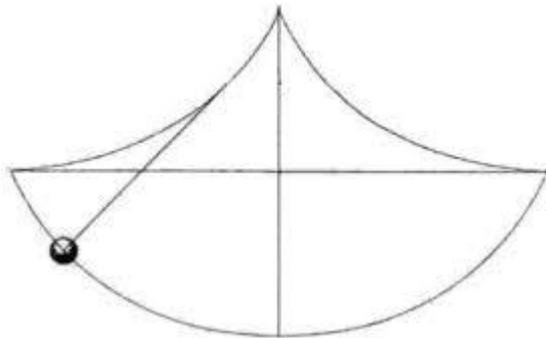
$$= 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \arcsin u \Big|_0^1 = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} .$$

Il tempo impiegato è lo stesso e per simmetria avremo la stessa cosa anche dall'altra parte. Quindi possiamo concludere che qualunque sia la partenza un punto oscillerà intorno a M con un periodo  $T = 4t$ ,

$$T = 4 \pi \sqrt{\frac{R}{g}} .$$

Questo periodo è lo stesso di un pendolo galileiano di lunghezza  $l = \sqrt{2R}$ .

Sfruttando questa proprietà Huyghens costruì un pendolo isocrono indipendentemente dall'ampiezza della oscillazione, facendo in modo che il punto si muovesse su una cicloide. Per ottenere questo, sfruttò il fatto che la cicloide ha come evoluta (insieme dei centri di curvatura) la cicloide stessa, costringendo il pendolo tra due ganasce cicloidalì.



Nella figura la cicloide superiore è il luogo dei centri di curvatura della cicloide inferiore.

4. La cicloide risolve il problema della brachistocrona ovvero la curva su cui una massa che scivola impiega meno tempo per percorrere il tragitto tra due punti dati è un arco di cicloide.

Johann Bernoulli nel 1697 pose un interessante problema: Dati due punti A e B su un piano verticale in un campo gravitazionale uniforme, trovare la curva tra essi sulla quale un punto materiale, vincolato a scorrervi senza attrito, vada da quello più in alto a quello più in basso nel minor tempo possibile. Bernoulli ricevette tre risposte: da Leibniz, da l'Hopital e da Newton.

Si sa che la distanza minima tra due punti è il segmento di retta che li unisce, ma in realtà quella che ci permette di percorrere la distanza nel minor tempo possibile è una curva che punta il più possibile verso il basso per acquistare velocità iniziale. Questa curva è proprio la cicloide.

Indicando con  $v$  la velocità del punto materiale lungo la curva, il tempo che occorre per percorrere un arco infinitesimale  $ds$  è  $\frac{ds}{v}$ . Quindi il problema sollevato da Bernoulli si riduce a determinare un minimo per l'integrale:

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} .$$

Considero l'asse delle  $y$  rivolto verso il basso, quindi con lo zero al punto iniziale quando il punto è fermo e  $v=0$ . Per il teorema della conservazione dell'energia si ha che

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgy$$

Possiamo ricavare la velocità ad un generico punto  $y$  :

$$v = \sqrt{2gy} .$$

Avendo trovato la velocità in funzione della  $y$ , conviene considerare  $y$  la variabile indipendente e quindi cercheremo un curva di equazione  $x=x(y)$ .

Il cammino infinitesimo  $ds$  può essere scritto nel modo seguente:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 \right]} = \sqrt{dy^2 (1 + \dot{x}(y)^2)} = \sqrt{1 + \dot{x}(y)^2} dy ,$$

dove  $\dot{x} = \frac{dx}{dy}$ .

Quindi l'integrale di partenza diventa e di cui dobbiamo calcolare il minimo

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}(y)^2}}{\sqrt{2gy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_2} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}(y)^2}}{\sqrt{y}} dy .$$

Questo integrale è già messo nella forma  $\int_{x_1}^{x_2} F(y(x), \dot{y}(x), x) dx$  che ben conosciamo (solo che il ruolo di  $x$  e  $y$  risulta invertito).

La funzione integranda è :

$$F(x, \dot{x}, y) = \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{\sqrt{y}}.$$

Per trovare il minimo di questa funzione nella forma classica si deve applicare l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$

Nella nostra formulazione dobbiamo scambiare la  $x$  e la  $y$  e otteniamo quella che a noi serve:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

Ma la funzione integranda risulta indipendente da  $x$ , quindi  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ . Allora rimane  $\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$ , cioè  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \text{costante}$ .

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\dot{x}^2}} 2\dot{x}}{\sqrt{y}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \text{costante}.$$

Per comodità eleviamo al quadrato e poniamo la costante uguale a  $1/2R$ :

$$\frac{\dot{x}^2}{y(1+\dot{x}^2)} = \frac{1}{2R}$$

Ricaviamo  $\dot{x}$ :  $2R\dot{x}^2 = y(1+\dot{x}^2) \Rightarrow (2R-y)\dot{x}^2 = y \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{y}{2R-y}}$ .

Quindi  $dx = \sqrt{\frac{y}{2R-y}} dy \Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{2R-y}} dy$ .

Osserviamo che abbiamo trovato:  $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{y}{2R-y} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$  che avevamo dimostrato nella Prop. 1.

Per risolvere questo integrale dobbiamo procedere per sostituzione, cioè porre  $y = R(1 - \cos\theta)$ , si ha così  $dy = R \sin\theta d\theta$ ,

$$x = \int \sqrt{\frac{R(1-\cos\theta)}{2R - (R(1-\cos\theta))}} R \sin\theta d\theta = \int \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) R \sin\theta d\theta, \text{ ma } \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

quindi:

$$x = \int \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} R \sin\theta d\theta = \int R(1-\cos\theta) d\theta = R\theta - R\sin\theta + \text{cost.}$$

Quindi abbiamo trovato due equazioni parametriche del percorso cercato che forniscono  $x$  e  $y$  in funzione del parametro  $\theta$ :

$$x = R\theta - R\sin\theta + R\cos\theta \qquad y = R(1 - \cos\theta)$$

Se  $y=0$ ,  $\theta=0$ , questo comporta che anche la costante (che compare nella formula di  $x$ ) è  $=0$ .

In conclusione le equazioni parametriche della curva sono:

$$x = R(\theta - \sin\theta) \qquad y = R(1 - \cos\theta)$$

con la costante a scelta in modo da far passare la curva proprio per il secondo punto dato, cioè B.

Le equazioni trovate sono esattamente le equazioni che rappresentano una cicloide.

□

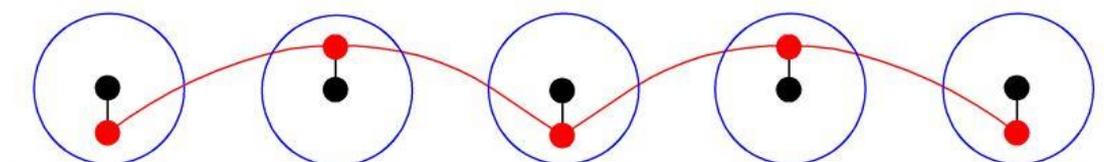
La cicloide ha due casi particolari: la CICLOIDE ALLUNGATA e la CICLOIDE ACCORCIATA.

#### 1. CICLOIDE ACCORCIATA

La cicloide accorciata (detta anche trocoide) si ha quando un punto anziché trovarsi sulla circonferenza, si trova all'interno del cerchio. L'equazione generica della cicloide è data da :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta R - a \sin(\theta) \\ y(\theta) = R - a \cos(\theta) \end{cases}$$

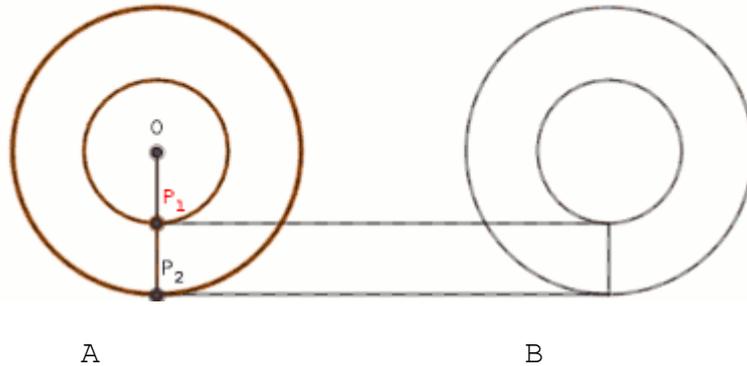
Nella cicloide normale si ha  $a=R$ , in quella accorciata si ha  $a < R$



Trocoide

ed dà luogo al cosiddetto paradosso di Aristotele che andiamo adesso a descrivere.

## Paradosso di Aristotele



Consideriamo una ruota formata da due cilindri coassiali, di diametro diverso, incollati l'uno sull'altro, il mozzo (cilindro interno) e il cerchione vero e proprio (cilindro esterno). In pratica, una ruota formata da due ruote saldate assieme, la circonferenza esterna che si muove su una strada dove è presente un marciapiede all'altezza del mozzo. Quando la ruota rotola dalla posizione A alla posizione B, le due ruote da cui è formata "rotolano" percorrendo esattamente la stessa distanza.

Ed ecco il paradosso: le due ruote devono avere la stessa circonferenza perché facendo un giro completo percorrono la stessa distanza! Ma è impossibile che due cerchi differenti abbiano la stessa circonferenza!

In particolare se il cerchio esterno fa un giro completo e quindi il punto  $P_2$  si sposta dal punto iniziale al punto finale, lo spostamento sarà lungo quanto tutta la circonferenza della ruota. Il cerchio piccolo rappresenta il mozzo della ruota (quindi si trova all'altezza del marciapiede), alla fine del giro completo  $P_1$  si sposta di un segmento che è pari alla circonferenza interna più piccola. Ma questi due spostamenti in realtà sono uguali e quindi si potrebbe dedurre che le due circonferenze sono uguali. Da questo nasce il paradosso.

Tutto questo si spiega con il fatto che la ruota corrispondente alla circonferenza esterna compie una rotazione senza strisciare mentre il mozzo, circonferenza interna, effettua un movimento di rotazione e traslazione, descrivendo una cicloide accorciata. Se invece consideriamo i

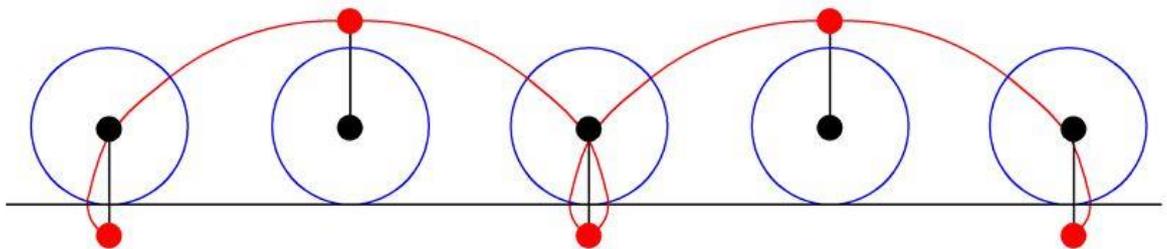
centri il movimento dal centro iniziale al centro finale sarà unicamente di traslazione.

## 2. CICLOIDE ALLUNGATA

Considerando sempre l'equazione generica:

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta R - a \sin(\theta) \\ y(\theta) = R - a \cos(\theta) \end{cases}$$

la cicloide allungata si ha quando  $a > R$ , cioè il punto non sta sulla circonferenza ma fuori.



Cicloide allungata

Un esempio è il treno. Le ruote del treno sulle rotaie percorrono delle cicloidi. La ruota però ha anche una flangia di diametro maggiore che poggiando sulla rotaia garantisce che il treno segua le rotaie e non abbia movimenti laterali. I punti che si trovano sulla flangia e cioè dentro la corona circolare delimitata dalla circonferenza di rotazione e dalla circonferenza esterna della flangia, durante la rotazione descrivono una cicloide allungata, cioè viene disegnata una cicloide con un cappio al di sotto del livello della rotaia.

In questo caso nel descrivere il cappio, i punti si muovono all'indietro. Quindi in ogni istante si ha che alcuni punti della ruota vanno indietro mentre il treno viaggia in avanti.

### 3.2 La chiocciola (o lumaca) di Pascal

La chiocciola di Pascal è una curva algebrica piana, dalla forma simile a quella di un cuore. Nella sua versione più caratteristica, la curva presenta un anello che la fa assomigliare al guscio di una lumaca, da cui deriva il nome.

Fu studiata originariamente da Albrecht Dürer nel suo lavoro del 1525 "Underweysung der messung" (=Istruzione sulla misurazione), dove sono descritti procedimenti e metodi geometrici specifici per ottenere queste curve. Venne successivamente riscoperta da Etienne Pascal (padre di Blaise Pascal).

Viene inizialmente chiamata Limaçon di Pascal e questo termine fu coniato dal francese Roberval nel 1650. Ma agli antichi tale curva era nota con il nome di concoide del cerchio.

La chiocciola di Pascal viene solitamente descritta come la concoide di un cerchio rispetto ad un punto sulla circonferenza.

Vediamo come:

Prendiamo un punto fisso  $O$  sulla circonferenza di centro  $C$  e raggio  $r$ .

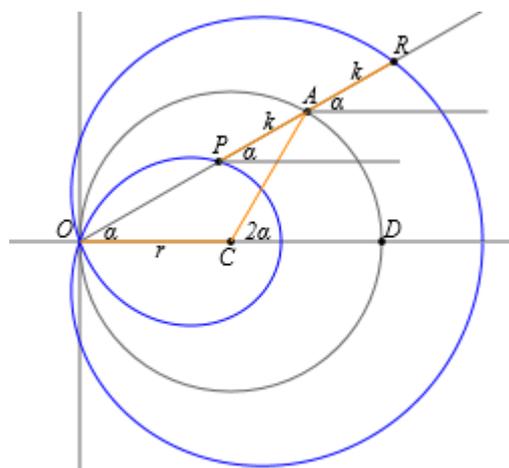


FIGURA 1

Per ogni punto A appartenente alla circonferenza, prendiamo due punti P e R che si trovano sulla semiretta OA e a distanza k da A. La chiocciola di Pascal può essere definita come il luogo geometrico dei punti P e R al variare di A sulla circonferenza, con  $\overline{AP} = \overline{AR} = k$ .

Indichiamo con  $\alpha$  l'angolo  $\widehat{AOC}$  e consideriamo il triangolo AOC: è isoscele perché  $\overline{OC} = \overline{CA} = r \Rightarrow$  le coordinate di A sono:

$$\begin{cases} A_x = r + r \cos(2\alpha) \\ A_y = r \sin(2\alpha) \end{cases}$$

Questo perché  $\widehat{ACD} = 2\alpha$  in quanto è angolo esterno del triangolo considerato e quindi è uguale alla somma degli altri due.

Il punto R ha coordinate :

$$(3.1) \quad \begin{cases} R_x = A_x + k \cos \alpha = r + r \cos 2\alpha + k \cos \alpha \\ R_y = A_y + k \sin \alpha = r \sin 2\alpha + k \sin \alpha \end{cases}$$

Sviluppando ulteriormente (3.1) si ottiene:

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + k \cos \alpha = r + r \cos(2\alpha) + k \cos \alpha = r + r(2 \cos^2 \alpha - 1) + k \cos \alpha = \\ &= r + 2r \cos^2 \alpha - r + k \cos \alpha = \cos \alpha (2r \cos \alpha + k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= A_y + k \sin \alpha = r \sin(2\alpha) + k \sin \alpha = r (2 \sin \alpha \cos \alpha) + k \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha (2r \cos \alpha + k) \end{aligned}$$

Quindi si ha che R ha queste coordinate:

$$\begin{cases} R_x = \cos \alpha (2r \cos \alpha + k) \\ R_y = \sin \alpha (2r \cos \alpha + k) \end{cases}$$

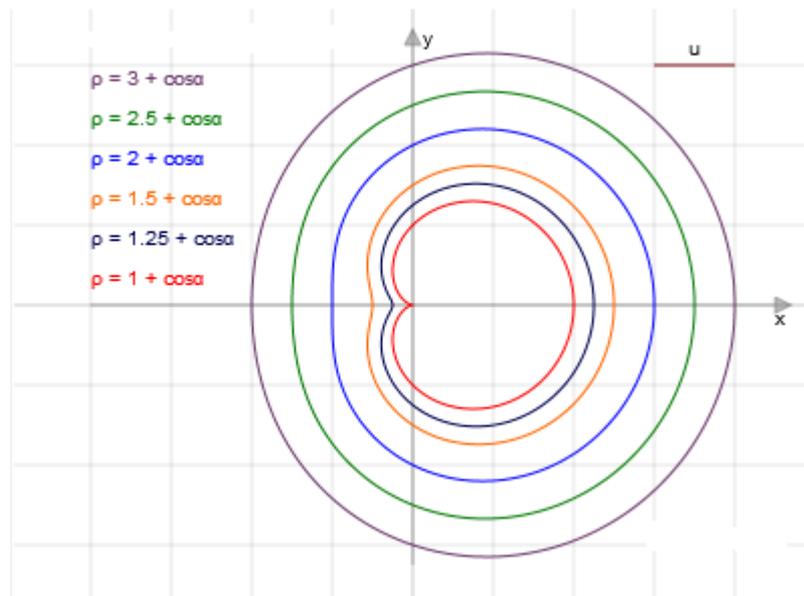
che sono le equazioni parametriche della chiocciola espresse con solo il  $\sin \alpha$  e il  $\cos \alpha$ .

Dunque possiamo esprimere la chiocciola con l'equazione in coordinate polari:

$$\rho = k + 2r \cos \alpha, \text{ con } 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

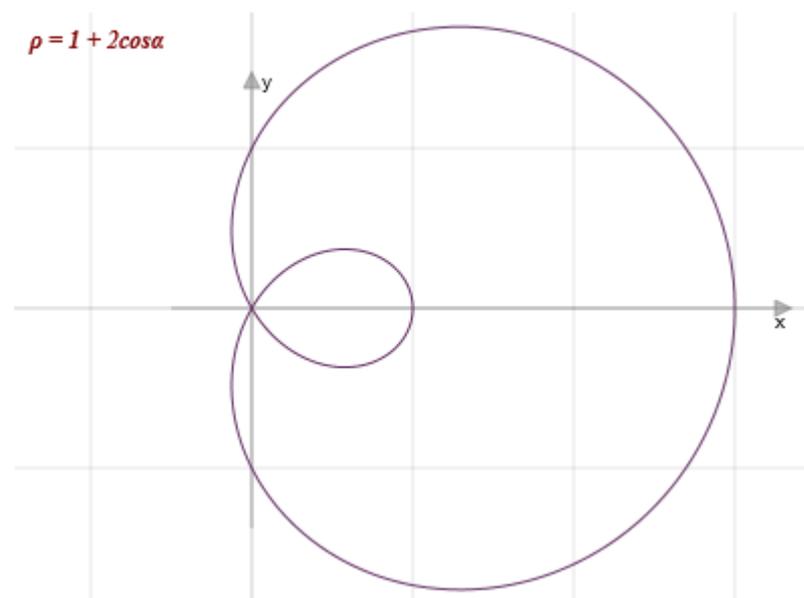
### Casi particolari:

- $k \geq 2r$ : al variare di  $k$  e  $r$  abbiamo più curve

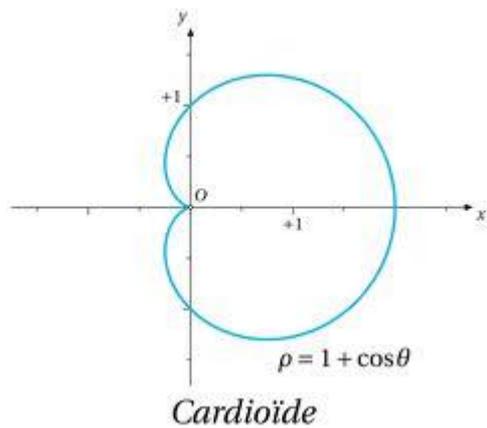


Osserviamo che la prima chiocciola "convessa" è quella blu.

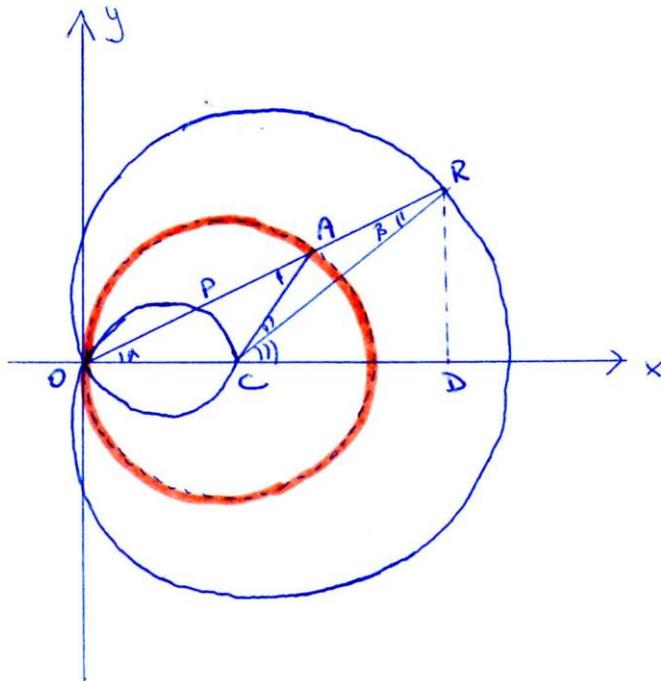
- $k \leq 2r$ : al variare di  $k$  e  $r$  abbiamo più curve, per semplicità ne facciamo vedere una soltanto



- come possiamo dedurre dai precedenti casi se  $k = \pm 2r$  otteniamo una curva particolare nota con il nome di cardioide. Nel disegno che segue  $k = 2r = 1$ :



- $k=r \Rightarrow$  trisettrice. Di questa proprietà sembra se ne sia accorto per primo Blaise Pascal e risolve il problema della trisezione dell'angolo. Considero il disegno analogo a quello utilizzato per costruire la chiocciola.



Considero il triangolo AOC: è isoscele sulla base OA perché  $AC=CO=r$ . Ora considero il triangolo ACR: siccome stiamo considerando il caso in cui  $AR=k=r=CA$ , si ha che è isoscele. Quindi chiamando  $\widehat{ARC}=\beta$  si ha  $\widehat{ACR}=\beta$ .

Ma l'angolo esterno al vertice  $\widehat{RAC}$  del triangolo isoscele è il doppio dell'angolo alla base  $\Rightarrow \alpha = 2\beta$ .

L'altra proprietà che dobbiamo usare è quella relativa all'angolo al centro e alla circonferenza: si ha che l'uno è il doppio dell'altro, allora nel nostro caso abbiamo:

$$\widehat{ACD} = 2(\widehat{ROC}) = 2\alpha. \text{ Quindi: } 2\alpha = 4\beta.$$

$$\text{Quindi } \widehat{RCD} = \widehat{ACD} - \widehat{ACR} = 4\beta - \beta = 3\beta.$$

**Osservazioni:**

- se  $k \geq 4r \Rightarrow$  la chiocciola è convessa;
- se  $k = 4r \Rightarrow$  il punto  $(-k, 0)$  ha curvatura nulla;
- se  $2r \leq k < 4r \Rightarrow$  la chiocciola è concava, a mano a mano che  $k$  si riduce rispetto a  $2r$ , la concavità diventa più pronunciata, fino a diventare un cuspidi per  $k = 2r$ , in questo caso come abbiamo detto la curva diventa una cardioide;
- se  $k = r$  abbiamo visto otteniamo la trisettrice;
- se  $0 \leq k < 2r \Rightarrow$  la curva presenta un anello, che si intreccia nell'origine; con il diminuire di  $k$  l'anello tende a riempire quello esterno, fino a che per  $k = 0$  diventa un cerchio percorso due volte.
- $\rho$  può essere negativo, in questo caso si descrive il punto sulla semiretta opposta a quella descritta dall'angolo  $\alpha$ .

Cerchiamo di arrivare all'equazione cartesiana della chiocciola.

**Proposizione 1** : L'equazione cartesiana della chiocciola di Pascal è data da

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = k^2 (x^2 + y^2)$$

**Dimostrazione:** Partiamo dalle equazioni parametriche che abbiamo ricavato :

$$\begin{cases} x(\alpha) = \cos \alpha (2r \cos \alpha + k) \\ y(\alpha) = \sin \alpha (2r \cos \alpha + k) \end{cases}$$

Dividiamo le due equazioni ottenute:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha (2r \cos \alpha + k)}{\cos \alpha (2r \cos \alpha + k)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Quindi, un generico punto P avrà coordinate:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \alpha (2r \cos \alpha + k) = 2r \cos^2 \alpha + k \cos \alpha = 2r \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + k \cos \alpha = \\ &= r + r \cos 2\alpha + k \cos \alpha. \end{aligned}$$

Adesso ci ricordiamo che  $\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$  e  $\cos (2\alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P_x &= r + r \cos 2\alpha + k \cos \alpha = r + r \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \pm \frac{k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \\ &= \frac{r(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + r(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \pm k\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2r \pm k\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

Ma  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$ , quindi

$$P_x = x(\alpha) = \frac{2r \pm k\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2r \pm k\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x \frac{x^2 + y^2}{x^2} &= 2r \pm k\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{x} = 2r \pm \frac{k}{x} \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2rx \pm k\sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$x^2 + y^2 - 2rx = \pm k\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$  si eleva al quadrato e si ottiene:

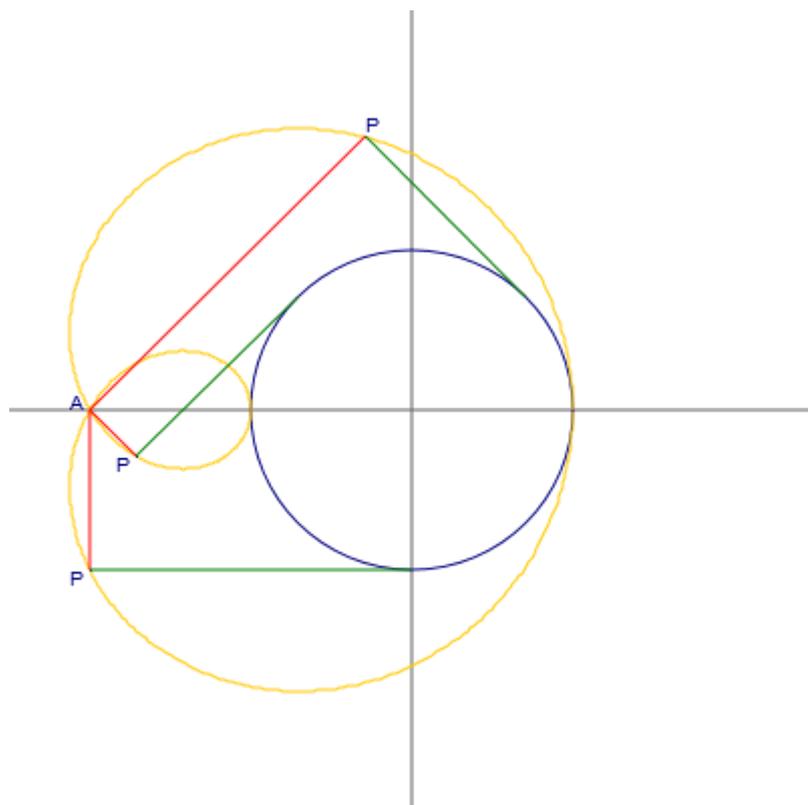
$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = k^2 (x^2 + y^2)$ , che è l'equazione cartesiana cercata di quarto grado.

□

Adesso invece cerchiamo di trovare per altra via l'equazione parametrica.

Per ottenere questa si deve costruire la chiocciola come podaria di una circonferenza. La podaria di una curva C

rispetto ad un punto A è il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari condotte da A alle tangenti alla curva.



Fissato un punto A e tracciata una qualsiasi tangente alla curva, si trova il punto d'intersezione con la perpendicolare condotta ad essa da A. Si ripete la costruzione per tutte le tangenti alla curva; si ha che tutti i punti appartengono alla podaria e, viceversa, se un punto appartiene a tale podaria esso è l'intersezione fra una tangente e la perpendicolare condotta ad essa da A.

Considero una circonferenza di centro O e raggio  $b \in \mathbb{R}$  di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(\alpha) = b \cos \alpha \\ y(\alpha) = b \sin \alpha \end{cases}$$

L'equazione della tangente in un suo punto  $P = (b \cos \alpha, b \sin \alpha)$  è:

$$y - b \sin \alpha = - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (x - b \cos \alpha)$$

L'equazione della perpendicolare alla tangente dal punto  $A = (a, 0)$  è:

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (x - a)$$

Adesso cerco l'intersezione di queste due rette:

$$\begin{cases} y - b \sin \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (x - b \cos \alpha) \\ y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (x - a) \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (x - a) - b \sin \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (x - b \cos \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha (x - a) - b \sin^2 \alpha \cos \alpha = -\cos^2 \alpha (x - b \cos \alpha)$$

$$x \sin^2 \alpha - a \sin^2 \alpha - b \sin^2 \alpha \cos \alpha + x \cos^2 \alpha - b \cos^3 \alpha = 0$$

$$x - a \sin^2 \alpha - b \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$$

$$x - a \sin^2 \alpha - b \cos \alpha = 0$$

$$x = a \sin^2 \alpha + b \cos \alpha$$

Ma  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$  e  $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$  perché  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ ;

allora possiamo scrivere:

$$x = b \cos \alpha + a \left(1 - \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}\right) = b \cos \alpha + a \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x = \frac{a}{2} + b \cos \alpha - \frac{a}{2} \cos 2\alpha$$

Di conseguenza la y sarà:

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{a}{2} + b \cos \alpha - \frac{a}{2} \cos 2\alpha - a\right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(-\frac{a}{2} + b \cos \alpha - \frac{a}{2} \cos 2\alpha\right) =$$

$$= -\frac{a}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + b \sin \alpha - \frac{a}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (2 \cos^2 \alpha - 1) =$$

$$= -\frac{a}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + b \sin \alpha - \frac{a}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} 2 \cos^2 \alpha + \frac{a}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= b \sin \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha = b \sin \alpha - \frac{a}{2} \sin 2\alpha.$$

Alla fine abbiamo ottenuto che le equazioni parametriche della curva podaria sono:

$$x = \frac{a}{2} + b \cos \alpha - \frac{a}{2} \cos 2\alpha$$

$$y = b \sin \alpha - \frac{a}{2} \sin 2\alpha.$$

Riconosciamo che sono le stesse equazioni della chiocciola prima con la posizione

$$\begin{cases} a = -2r \\ b = k \end{cases}$$

che le fa diventare

$$\begin{cases} x = -r + k \cos \alpha + r \cos 2\alpha \\ y = k \sin \alpha + r \sin 2\alpha \end{cases}$$

Adesso confrontando con le espressioni (3.1) osserviamo che sono uguali traslando

$$\begin{cases} x + r = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Quindi possiamo dedurre che se noi centriamo il nostro sistema di riferimento in  $A(k, 0)$ , invece che nel centro della circonferenza, otteniamo direttamente le formule della chiocciola che avevamo trovato. In questo caso l'equazione della circonferenza sarà:

$$\begin{cases} x = k + 2r \cos \alpha \\ y = 2r \sin \alpha \end{cases}$$

Adesso cerchiamo di trovare la curvatura. Ripartiamo dalle equazioni parametriche (3.1):

$$\begin{cases} x = r + k \cos \alpha + r \cos 2\alpha \\ y = k \sin \alpha + r \sin 2\alpha \end{cases}$$

e le deriviamo:

$$\dot{x} = -k \sin \alpha + r 2 (-\sin 2\alpha) = -k \sin \alpha - 2r \sin 2\alpha$$

$$\dot{y} = k \cos \alpha + 2r (\cos 2\alpha) = k \cos \alpha + 2r \cos 2\alpha$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = k^2 \sin^2 \alpha + 4r^2 \sin^2 2\alpha + 4kr \sin \alpha \sin 2\alpha +$$

$$+ k^2 \cos^2 \alpha + 4r^2 \cos^2 2\alpha + 4kr \cos \alpha \cos 2\alpha =$$

$$= k^2 + 4r^2 + 4kr (\sin \alpha \sin 2\alpha + \cos \alpha \cos 2\alpha)$$

$$= k^2 + 4r^2 + 4kr \cos (2\alpha - \alpha) =$$

$$= k^2 + 4r^2 + 4kr \cos \alpha$$

Deriviamo ancora:

$$\ddot{x} = -k \cos \alpha - 2r (2 \cos 2\alpha) = -k \cos \alpha - 4r \cos 2\alpha$$

$$\ddot{y} = -k \sin \alpha + 2r (-2 \sin 2\alpha) = -k \sin \alpha - 4r \sin 2\alpha$$

Abbiamo visto che la curvatura  $k$  può essere vista come:

$$K = \frac{|\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}|}{\sqrt{[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)]^3}}$$

Quindi nel nostro caso abbiamo:

$$k = \frac{|(-k \sin \alpha - 4r \sin 2\alpha)(-k \sin \alpha - 2r \sin 2\alpha) - (k \cos \alpha + 2r \cos 2\alpha)(-k \cos \alpha - 4r \cos 2\alpha)|}{\sqrt{[k^2 + 4r^2 + 4kr \cos \alpha]^3}}$$

Analizziamo per comodità solo il numeratore visto che il denominatore lo abbiamo già trovato.

Numeratore:

$$(-k \sin \alpha - 4r \sin 2\alpha)(-k \sin \alpha - 2r \sin 2\alpha) - (k \cos \alpha + 2r \cos 2\alpha)(-k \cos \alpha - 4r \cos 2\alpha) =$$

$$= k^2 \sin^2 \alpha + 2kr \sin \alpha \sin 2\alpha + 4kr \sin \alpha \sin 2\alpha + 8r \sin^2 2\alpha + k^2 \cos^2 \alpha + 4kr \cos \alpha \cos 2\alpha + 2kr \cos \alpha \cos 2\alpha + 8r^2 \cos^2 2\alpha =$$

$$= k^2 + 8r^2 + 6kr \sin \alpha \sin 2\alpha + 6kr \cos \alpha \cos 2\alpha =$$

$$= k^2 + 8r^2 + 6kr (\sin \alpha \sin 2\alpha + \cos \alpha \cos 2\alpha) =$$

$$= k^2 + 8r^2 + 6kr \cos (2\alpha - \alpha) =$$

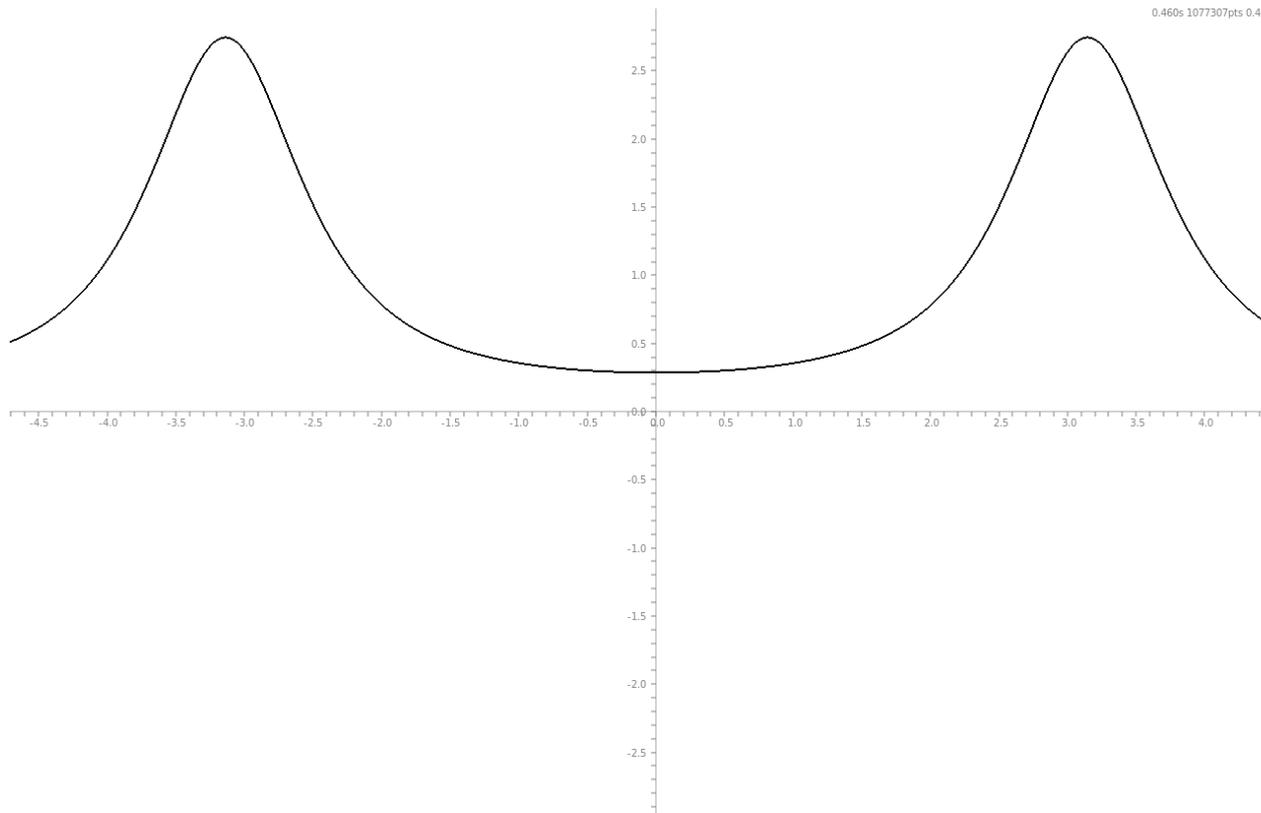
$$= k^2 + 8r^2 + 6kr \cos \alpha.$$

Quindi la curvatura risulta essere:

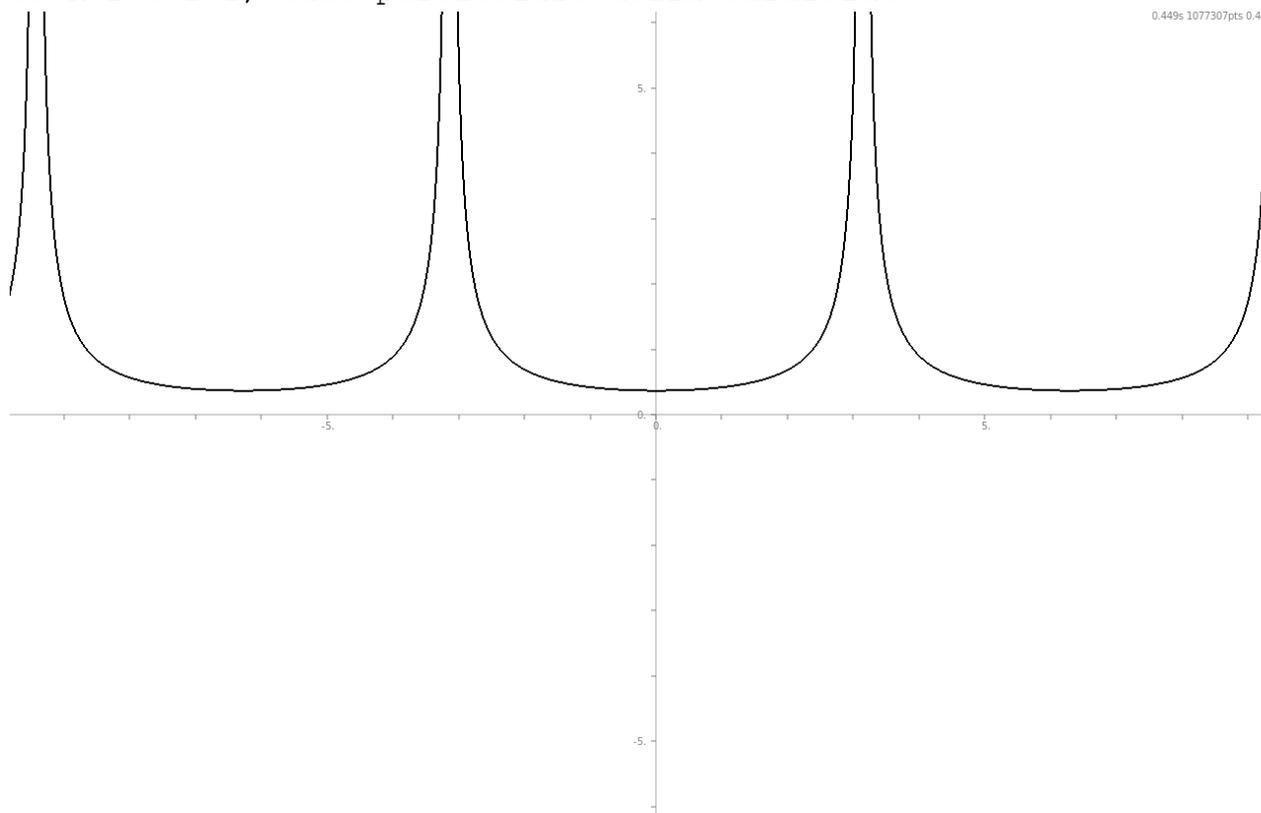
$$K = \frac{k^2 + 8r^2 + 6kr \cos \alpha}{\sqrt{(k^2 + 4r^2 + 4kr \cos \alpha)^3}}$$

Osserviamo alcuni casi:

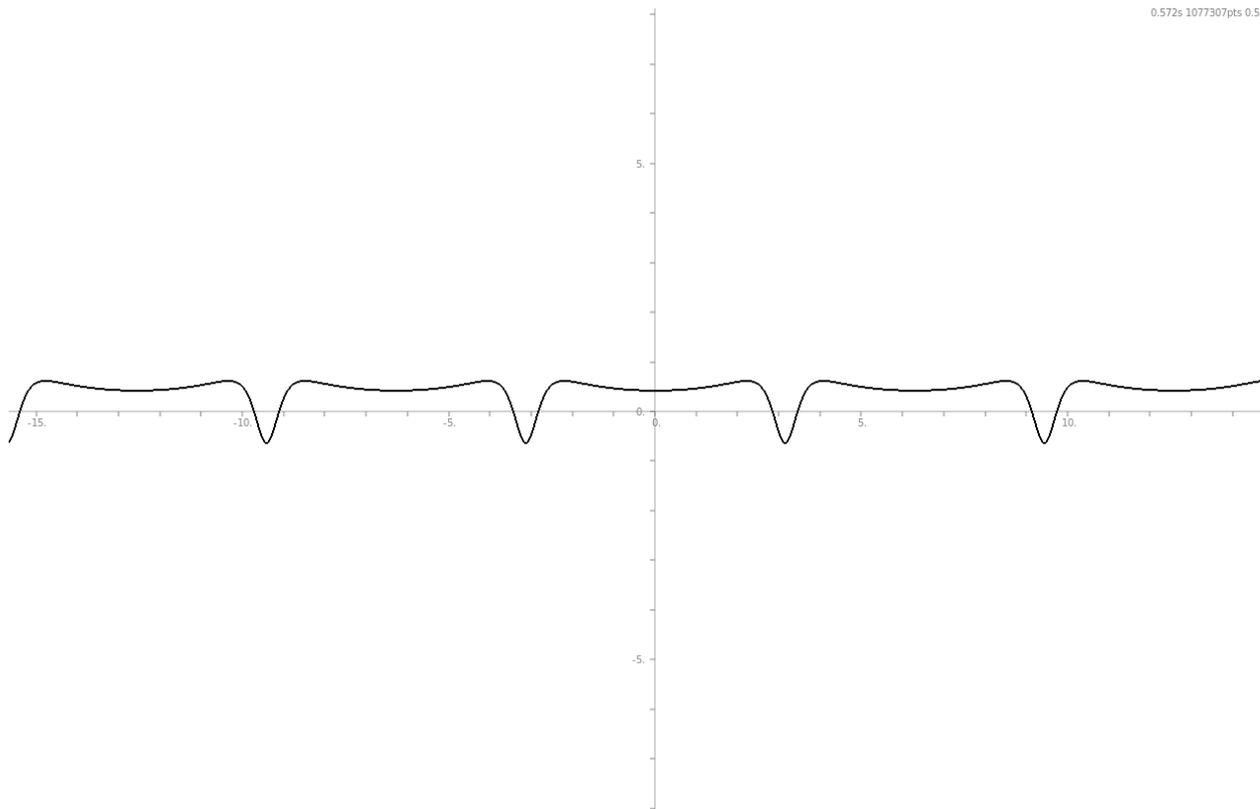
- Se  $k=2$  e  $r=5$ , si ha che il grafico di  $K$  è:



- Se  $K=2$  e  $r=1$ , caso particolare della cardioide:

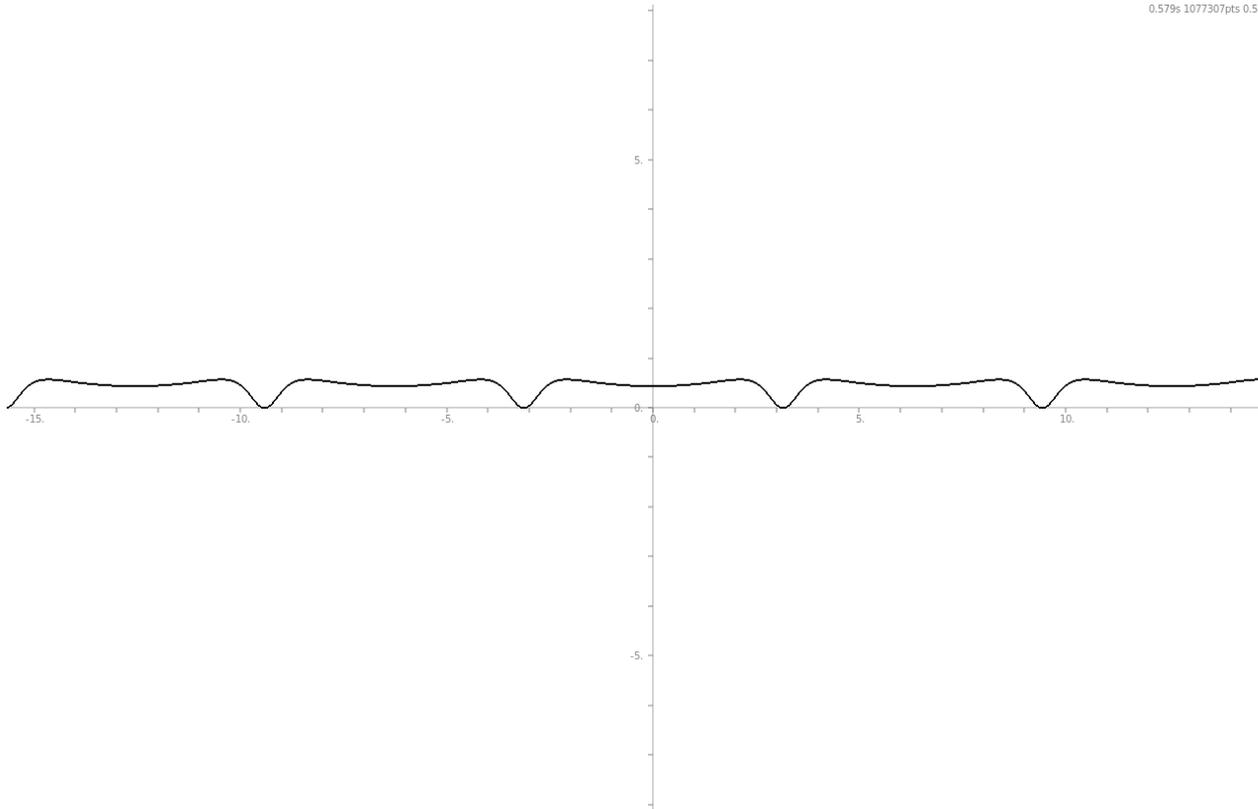


- Se  $K=2$  e  $r=0.6$  si ha un cambio di segno:

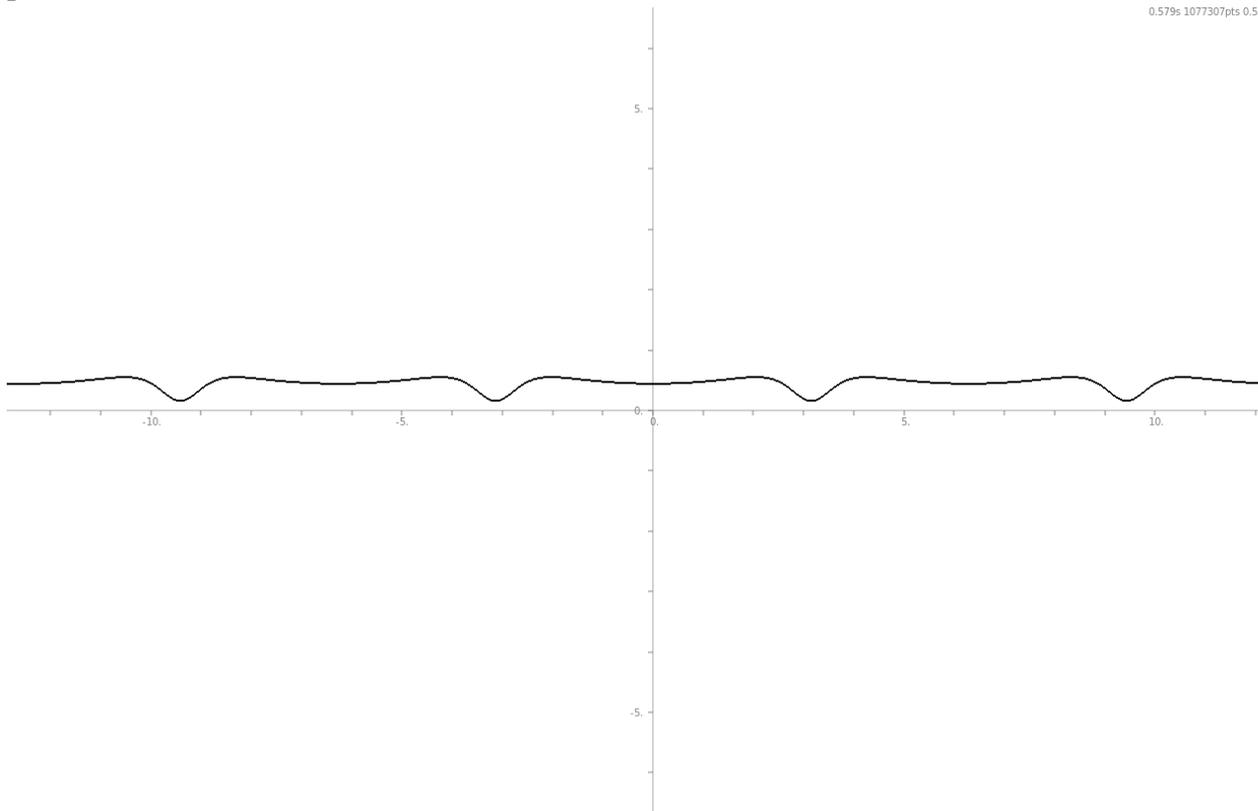


In questo esempio, come nei successivi con  $k > 2r$ , abbiamo che la curva è semplice.. Dal grafico della curvatura sono visibili i quattro punto critici, in accordo con il teorema dei Quattro vertici 2.2.2 che, come abbiamo osservato, può essere provato anche senza l'ipotesi di convessità.

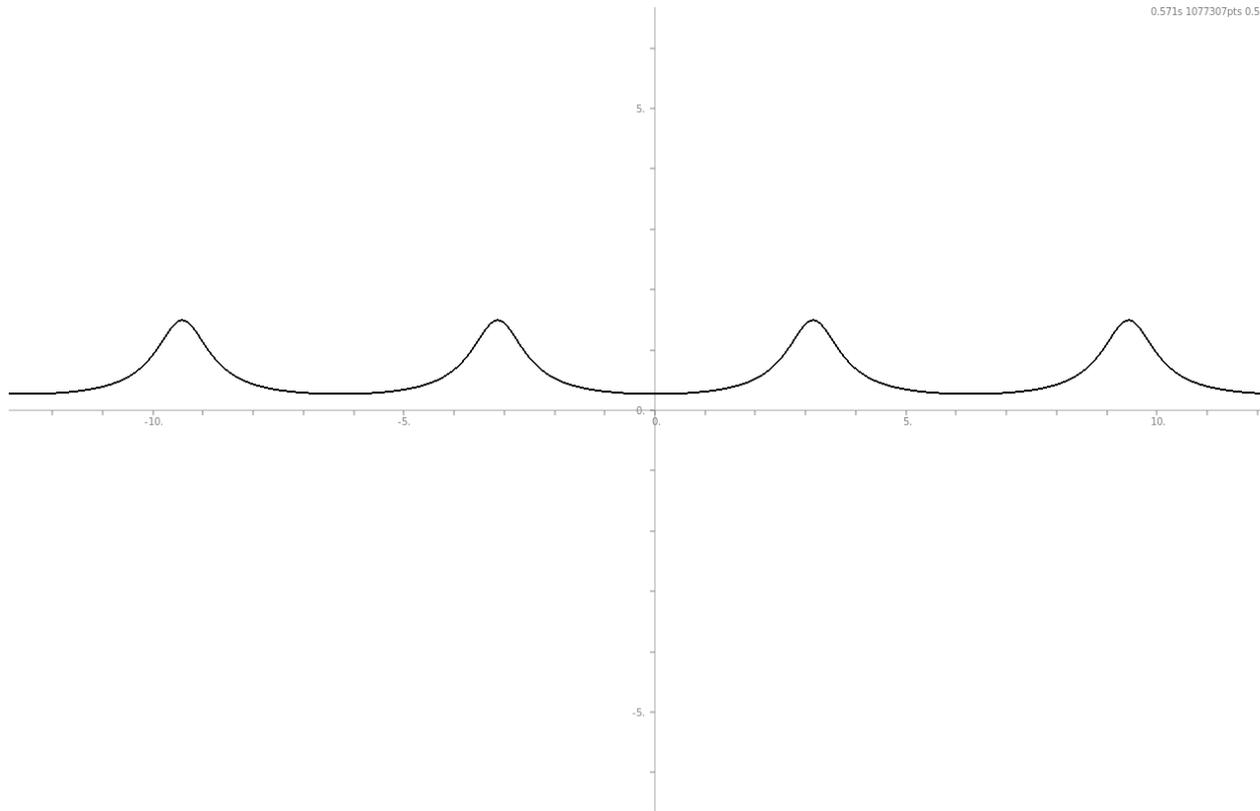
- Se  $K=2$  e  $r=0.5$ , si ha che  $k \geq 4r$  e quindi la chiocciola è convessa, infatti si osserva dal grafico che la curvatura non cambia segno.



- Se  $K=2$  e  $r=0.45$ , anche in questa caso, come nel precedente la chiocciola è convessa:



- Se  $K=2$  e  $r=2$ , che corrisponde al caso della trisettrice, si ha che:



Come abbiamo visto la curva può essere ottenuta in molti modi:

- involuppo di circonferenze (ovvero è tangente ad una famiglia di circonferenze);
- facendo ruotare una circonferenza su un'altra circonferenza e considerando la curva data da un punto sulla circonferenza ruotante (epicicloide)
- podaria di una circonferenza;
- concoide di una circonferenza.



## Bibliografia:

[1]: L. Cresci, "Le curve celebri", Muzzio, Padova, 1998

[2]: Dahlberg, Björn (2005). "The converse of the four vertex theorem". *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (7): 2131–2135.

[3]: Klingenberg Wilhelm (1978) . "A course in differential geometry", GTM 51. Springer Science+Business Media World

[4]: Kneser, Adolf (1912). "Bemerkungen über die Anzahl der Extrema der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht euklidischen Geometrie". *Festschrift Heinrich Weber*. Teubner. pp. 170–180.

[5]: S. Lang, "Analysis I", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968

[6]: [http://www.matematicamente.it/storia/Di\\_Rienzo-Cicloide.pdf](http://www.matematicamente.it/storia/Di_Rienzo-Cicloide.pdf)

[7]: [http://www.matematicamente.it/storia/Di\\_Rienzo-Cicloide.pdf](http://www.matematicamente.it/storia/Di_Rienzo-Cicloide.pdf)

[8]: <http://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid>

[9]: <https://it.wikipedia.org/wiki/Cicloide>

[10]: <http://www.webfract.it/RODONEE/Lumaca.htm>

