Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
C.d.L. in Matematica

Anno Accademico 2015-2016
Tesi di Laurea Triennale

INVARIANTI DELLA QUARTICA DI KLEIN

Candidato:
Michele Fantechi
michele.fantechi@stud.unifi.it

Relatore:
Prof. Giorgio Ottaviani
ottavian@math.unifi.it

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il mio Professore relatore Giorgio Maria Ottaviani per la pazienza con cui mi ha seguito nel periodo di tesi e la mia famiglia per il sostegno che mi ha fornito in questi anni di università.
Ringrazio inoltre i miei compagni di corso, sempre aperti a discussioni stimolanti ed interessanti sulla materia.

Indice

Capitolo 1

Basi di Teoria degli Invarianti

1.1 Introduzione

La tesi consiste nel calcolo di due casi interessanti di anelli degli invarianti polinomiali sotto l'azione di gruppi finiti. Nella prima parte della tesi studieremo una particolare azione del gruppo simmetrico S_4 su $\mathbb{C}^6$, nella seconda parte il caso dell'azione del gruppo degli automorfismi della Quartica di Klein sul piano proiettivo .

1.2 Azione di gruppi lineari finiti e invarianti

Diamo ora alcune definizioni e risultati fondamentali della Teoria degli Invarianti.
Mentre i risultati sono solamente enunciati, le dimostrazioni si trovano nelle prime sezioni del secondo capitolo di [2].

Definizione 1.1 (Polinomio Invariante)**.** Dato un campo $\mathbb{K}$, un gruppo finito $G \leq GL(n, \mathbb{K})$ agisce naturalmente sullo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ secondo l'usuale prodotto matriciale.
Tale azione si può allora estendere naturalmente all'anello dei polinomi in n variabili $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, identificando le variabili $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ con le coordinate dello spazio vettoriale. Dunque $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si dice *invariante* se $f(x_1, \ldots, x_n) = f \circ \sigma(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall \sigma \in G$. L'insieme degli invarianti $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^G$ ha una struttura di anello e si denomina *anello degli invarianti rispetto all'azione di G.*

Definizione 1.2 (Operatore di Reynolds)**.** Definiamo l'*operatore di Reynolds* $(\cdot)^* : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$,

$$f^* = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} f \circ \sigma$$

Osservazione 1.3. *L'operatore di Reynolds è $\mathbb{K}$-lineare, idempotente e costante sugli invarianti. Dunque è una proiezione dell'anello dei polinomi nell'anello degli invarianti. Inoltre è un $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$-omomorfismo di moduli.*

Enunciamo ora un teorema fondamentale sulla struttura degli anelli degli invarianti.

Teorema 1.4 (di Hilbert)**.** *L'anello degli invarianti $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ di un gruppo finito $G \leq GL(n, \mathbb{K})$ è finitamente generato.*

Questo teorema ci assicura la possibilità di generare $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ con un numero finito di invarianti, però non essendo esso costruttivo non pone alcun limite al numero di invarianti necessari. Dunque per quanto esso sia di fondamentale importanza, necessitiamo di ricorrere al teorema dovuto a Noether per poter affrontare il problema del calcolo effettivo dell'anello.

Teorema 1.5 (del limite del grado di Noether)**.** *L'anello degli invarianti $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G$ di un gruppo finito $G \leq GL(n, \mathbb{K})$ ha una base come algebra di al più $\binom{n+|G|}{n}$ invarianti di grado minore o uguale a $|G|$.*

Il limite al numero di invarianti dato dal teorema è ottimale: è il numero di monomi di grado minore di $|G|$.

Definizione 1.6 (Serie di Hilbert)**.** Data una $\mathbb{K}$-algebra graduata V finitamente generata, ovvero $V = \bigoplus_{i>0} V_i$ e $V_0 = \mathbb{K}$, la *funzione di Hilbert* di V è $h_V \; : \; n \mapsto \dim_{\mathbb{K}}(V_n)$ che associa a n la dimensione di V_n come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. La *serie di Hilbert* di V è la serie formale:

$$S_V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_V(n) \, t^n$$

Osservazione 1.7. *L'algebra degli invarianti è una $\mathbb{K}$-algebra graduata:*

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G_d \;\; e \;\; \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G_0 = \mathbb{K}$$

Dove $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d^G$ rappresenta gli invarianti omogenei di grado d. Pertanto l'anello degli invarianti ammette una serie di Hilbert, che permette di comprendere più approfonditamente la struttura e i generatori dell'anello.

Osservazione 1.8. *Osservando che l'anello degli invarianti è un'algebra graduata risulta ovvio che si può cercare una base degli invarianti limitandoci ai polinomi omogenei procedendo per il grado. Questa osservazione, unita al Teorema di Noether precedente, fornisce il seguente algoritmo che ci permette di individuare una base per l'anello tramite l'operatore di Reynolds.*

Algoritmo 1.9. *Per ogni grado d da 1 a $|G|$:*

1) *Consideriamo i monomi $x_1^{d_1} \cdot ... \cdot x_n^{d_n}$ tali che $d_1 + ... + d_n = d$, $d_i \in \mathbb{N}$.*

2) *Per ogni monomio calcoliamo $(x_1^{d_1} \cdot ... \cdot x_n^{d_n})^*$. Se questo è non nullo e non generato dalla base finora trovata va aggiunto alla base.*

Si verifica che il numero di passi di tale algoritmo risulta essere $\binom{n+|G|}{n}$.

Le precedenti osservazioni fanno chiarezza sull'importanza del sottostante risultato che permette di ottenere la serie di Hilbert dell'anello in modo indiretto, consentendo quindi di saltare alcuni passi dell'algoritmo.

Teorema 1.10 (di Molien)**.** *La serie di Hilbert dell' anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^G$ equivale a*

$$\Phi_G(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in |G|} \frac{1}{det(id - t \cdot \sigma)}$$

Ogni volta che in seguito si troverà il termine serie di Molien ci riferiremo alla serie di Hilbert dell'anello considerato calcolata tramite il precedente teorema. Come ultimo risultato enunciamo un utile lemma per il calcolo delle serie di Hilbert di algebre generate da polinomi indipendenti.

Lemma 1.11. *Siano $p_1, \ldots, p_m$ polinomi algebricamente indipendenti di gradi rispettivamente $d_1, \ldots, d_m$. La serie di Hilbert dell'algebra graduata $\mathbb{K}[p_1, \ldots, p_m]$ equivale a:*

$$H(t) = \frac{1}{(1 - t^{d_1}) \ldots (1 - t^{d_m})}$$

Nota 1.12. *Spesso si farà riferimento al calcolo delle dipendenze algebriche fra polinomi e alla verifica di appartenenza ad un'algebra di un polinomio. Queste operazioni sono implementabili su vari sistemi di calcolo tramite la teoria delle basi di Groebner. Alcuni algoritmi espliciti per questi calcoli sono descritti nella quinta sezione del secondo capitolo di [2].*

Capitolo 2

Un esercizio interessante

L'esercizio si può trovare a pagina 28 di [2]. Il problema consiste nel calcolo di una base minimale per l'anello degli invarianti $\mathbb{C}[x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}]^{S_4}$ in cui si considera $x_{ij} = x_{ji}$ e l'azione di S_4 sulle coordinate:

$$\sigma \in S_4, \quad \sigma \cdot x_{ij} = x_{(\sigma \cdot i, \sigma \cdot j)}$$

Osservazione 2.1. *L'azione di S_4 sulle variabili ha una peculiarità, permette infatti di vedere le variabili come le trasposizioni di S_4, che ricordiamo, sono generatori del gruppo. Si verifica facilmente che se consideriamo l'insieme $\{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ogni variabile viene lasciata invariata dall'azione di due specifiche trasposizioni, $(ij) \cdot x_{ij} = x_{ij}$ e dalla trasposizione complementare (hk), $(hk) \cdot x_{ij} = x_{ij}$.*

2.1 Rappresentazione del gruppo

Per studiare più efficacemente il problema, che altrimenti secondo l'algoritmo 1.9 richiederebbe un numero molto grande di calcoli, possiamo cercare dei sottospazi invarianti di $\mathbb{C}[x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}]$, e studiare il problema su di essi. Per prima cosa quindi calcoliamo i caratteri della rappresentazione. Poiché il gruppo è S_4, le sue classi di coniugio sono i tipi ciclici e troviamo la seguente tabella dei caratteri:

	Id	(1,2)	(1,2)(3,4)	(1,2,3)	(1,2,3,4)
Caratteri	6	2	2	0	0

Confrontando i caratteri con la tabella delle rappresentazioni irriducibili di S_4 che segue,

	Id	(1,2)	(1,2)(3,4)	(1,2,3)	(1,2,3,4)
χ_{banale}	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	1	-1
χ_{std}	3	1	-1	0	-1
$\chi_{std} \otimes \chi_{sgn}$	3	-1	-1	0	1
χ_2	2	0	2	-1	0

si ricava che la rappresentazione in esame, che denoteremo ρ_6, risulta essere somma diretta della rappresentazione banale, della rappresentazione bidimensionale e di quella standard, ovvero che $\rho_6 = \rho_{banale} \oplus \rho_2 \oplus \rho_{std}$. I sottospazi invarianti che cerchiamo avranno allora dimensione 1,2 e 3.

2.2 Sottospazi invarianti

L'azione di permutazione del gruppo sulla somma delle variabili $s = x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34}$ lascia invariata s, che genera quindi un sottospazio invariante di dimensione 1.
Considerando le somme delle trasposizioni complementari $x_{12}+x_{34}$, $x_{13}+x_{24}$ e $x_{23} + x_{14}$ si verifica che l'azione delle trasposizioni le permuta fra loro. Le loro differenze $c_1 = (x_{12} + x_{34}) - (x_{13} + x_{24})$ e $c_2 = (x_{13} + x_{24}) - (x_{23} + x_{14})$ formano un sottospazio di dimensione 2.
Se consideriamo il sottospazio generato da $d_1 = x_{12} - x_{34}$, $d_2 = x_{13} - x_{24}$ e $d_3 = x_{23} - x_{14}$, che vengono permutati a meno del segno dal gruppo, ricaviamo che lo spazio $\mathbb{C}(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34})$ è somma diretta dei sottospazi trovati. Dunque otteniamo la sottostante scomposizione in somma diretta nei sottospazi invarianti:

$$\mathbb{C}(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}) = \mathbb{C}(s) \oplus \mathbb{C}(c_1, c_2) \oplus \mathbb{C}(d_1, d_2, d_3)$$

2.3 Invarianti dei sottospazi

Banalmente un polinomio invariante dei sottospazi è un polinomio invariante dello spazio. Dunque procediamo a trovare gli invarianti dei sottospazi, anche se questo in generale non è sufficiente per avere una base dell'anello degli invarianti nelle sei variabili iniziali.

Invarianti di $\mathbb{C}[s]$: osservando che la variabile s è invariante, dato che ogni polinomio costruito su una variabile invariante risulta invariante, segue che $\mathbb{C}[s]^{S_4} = \mathbb{C}[s]$. Denoteremo d'ora in poi $X_1 = s$ quando considereremo l'invariante invece della variabile .

Invarianti di $\mathbb{C}[c_1, c_2]$: Il sottogruppo di Klein $V_4 \trianglelefteq S_4$ viene mappato nell'identità dalla rappresentazione dell'azione nel sottospazio. L'azione del gruppo allora può essere considerata come l'azione del gruppo quoziente $\frac{S_4}{V_4} \simeq S_3$. Per trovare gli invarianti applichiamo l'algoritmo 1.9, calcolando prima la serie di Molien dell'anello degli invarianti:

$$\phi_2(y) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-y)^2} + \frac{3}{(1-y^2)} + \frac{2}{(1+y+y^2)}\right) = \frac{1}{(1-y^2)(1-y^3)}$$

Possiamo usare l'operatore di Reynolds per trovare un invariante di grado due e uno di grado tre che risultino indipendenti. Questo si può verificare tramite gli algoritmi a cui si fa riferimento in 1.12. Svolgendo il calcolo, otteniamo:

$$Y_2 = c_1^2 - c_1c_2 + c_2^2 \ , \ Y_3 = c_1^2c_2 - c_1c_2^2$$

In tal modo usando il Lemma 1.11 otteniamo che $\mathbb{C}[c_1, c_2]^{S_4}$ e $\mathbb{C}[Y_2, Y_3]$ hanno la stessa serie di Hilbert e poiché $\forall d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}[Y_2, Y_3]_d \subseteq \mathbb{C}[c_1, c_2]_d^{S_4}$, coincidono.

Invarianti di $\mathbb{C}[d_1, d_2, d_3]$: L'azione in questo sottospazio è fedele e procediamo secondo il metodo algoritmico. Calcoliamo la serie di Molien:

$$\phi_3(z) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{6}{(1-z)^2(1+z)} + \frac{3}{(1-z)(1+z)^2} + \frac{8}{(1-z^3)} + \frac{6}{(1+z)(1+z^2)}\right)$$

$$\text{Ovvero, } \phi_3(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}$$

La serie trovata suggerisce di cercare invarianti indipendenti di gradi due, tre e quattro. Tramite l'operatore di Reynolds si trovano rapidamente gli invarianti,

$$Z_2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \ , \ Z_3 = d_1d_2d_3 \ , \ Z_4 = d_1^2d_2^2 + d_1^2d_3^2 + d_2^2d_3^2$$

che verifichiamo essere indipendenti. Analogamente a quanto osservato per $\mathbb{C}[c_1, c_2]$, verifichiamo che coincidono le serie di Hilbert di $\mathbb{C}[d_1, d_2, d_3]^{S_4}$ e di $\mathbb{C}[Z_2, Z_3, Z_4]$ implicando $\mathbb{C}[d_1, d_2, d_3]^{S_4} = \mathbb{C}[Z_2, Z_3, Z_4]$.

2.4 Invarianti di $\mathbb{C}[s, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3]$

Per calcolare una base di invarianti di $\mathbb{C}[s, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3]$ è opportuno cercare gli invarianti restanti fra i polinomi nelle variabili miste dei sottospazi. Per fare questo osserviamo la seguente interessante proprietà della serie di Molien.

Osservazione 2.2. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e G un gruppo finito lineare che agisce su di esso. Sia $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ una scomposizione di V in sottospazi invarianti per l'azione di G. La rappresentazione di G è composta allora di matrici a blocchi sui sottospazi invarianti V_i, $i = 1, ..., m$. Poiché il determinante si fattorizza rispetto alla scomposizione in blocchi, possiamo dire che la serie di Molien può essere calcolata tenendo conto del contributo dei singoli sottospazi differenziando le variabili usate nel calcolo.*

Procediamo nel calcolo della serie di Molien con variabili miste. Useremo la x per descrivere il contributo di $\mathbb{C}(s)$, y per il contributo di $\mathbb{C}(c_1, c_2)$ e z per quello di $\mathbb{C}(d_1, d_2, d_3)$.

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{24}\frac{1}{(1-x)}\Big(\frac{1}{(1-y)^2(1-z)^3} + \frac{6}{(1-y^2)(1-z)^2(1+z)} +$$

$$+\frac{3}{(1-y)^2(1-z)(1+z)^2} + \frac{8}{(1+y+y^2)(1-z^3)} + \frac{6}{(1-y^2)(1+z)(1+z^2)}\Big)$$

Una volta svolto il calcolo otteniamo:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{y^3z^6 + y^2z^4 + yz^4 + y^2z^2 + yz^2 + 1}{(1-x)(1-y^2)(1-z^2)(1-y^3)(1-z^3)(1-z^4)} \tag{2.1}$$

Osservando quanto ottenuto è evidente che il denominatore altro non è che il prodotto dei denominatori delle serie di Molien dei singoli sottospazi. Possiamo ipotizzare che gli invarianti che tali fattori rappresentano siano esattamente quelli trovati come basi dei sottospazi. Gli invarianti X_1, Y_2, Y_3, Z_2, Z_3 e Z_4 sono algebricamente indipendenti in quanto generati da diverse variabili.
Consideriamo il monomio yz^2. La sua forma suggerisce di cercare un invariante di terzo grado in cui le variabili c_1 e c_2 hanno grado uno e le variabili d_1, d_2 e d_3 hanno grado 2. Possiamo considerare anche solo i monomi di tale forma nelle variabili sopracitate e calcolarne l'operatore di Reynolds dell'azione del gruppo su $\mathbb{C}[s, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3]$. Tramite l'operatore si individua un

solo polinomio di tale forma, $J_3 = d_1^2 c_1 - d_2^2 c_1 + d_2^2 c_2 - d_3^2 c_2$.
Analogamente a quanto fatto per il monomio yz^2, possiamo trovare invarianti corrispondenti per i restanti monomi del numeratore:

$$y^2z^2 \to J_4 = d_1^2c_1^2 + d_2^2c_1^2 - 2d_2^2c_1c_2 + d_2^2c_2^2 + d_3^2c_2^2$$

$$yz^4 \to J_5 = d_1^2d_3^2c_1 - d_2^2d_3^2c_1 + d_1^2d_2^2c_2 - d_1^2d_3^2c_2$$

$$y^2z^4 \to J_6 = d_1^2d_3^2c_1^2 + d_2^2d_3^2c_1^2 - 2d_1^2d_3^2c_1c_2 + d_1^2d_2^2c_2^2 + d_1^2d_3^2c_2^2$$

$$y^3z^6 \to J_9 = d_1^6c_1^3 - d_2^6c_1^3 - 2d_1^6c_1^2c_2 + d_2^6c_1^2c_2 - 2d_3^6c_1^2c_2 + 2d_1^6c_1c_2^2 - d_2^6c_1c_2^2 + 2d_3^6c_1c_2^2 + d_2^6c_2^3 - d_3^6c_2^3$$

Per verificare di aver trovato una base minimale dobbiamo confrontare la serie di Molien in una variabile, che otteniamo sostituendo con t le altre variabili in (2.1), con la serie di Hilbert dell'algebra degli invarianti trovati.
La serie in una singola variabile è:

$$\Phi(t) = \frac{t^9 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + 1}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)^2(1-t^4)} \tag{2.2}$$

Per calcolare la serie di Hilbert dell'algebra generata dagli invarianti necessitiamo di conoscere le relazioni algebriche fra i generatori. Tali relazioni formano un ideale, detto ideale delle relazioni. Consideriamo l'omomorfismo suriettivo:

$$\pi : \mathbb{C}[x_1, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, j_3, j_4, j_5, j_6, j_9] \to \mathbb{C}[X_1, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, Z_3, J_3, J_4, J_5, J_6, J_9]$$

$$a_i \mapsto A_i$$

L'ideale delle relazioni R è il nucleo di tale omomorfismo suriettivo e pertanto otteniamo un isomorfismo fra il quoziente del dominio e del nucleo e l'immagine:

$$\mathbb{C}[x_1, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, j_3, j_4, j_5, j_6, j_9]/R \simeq \mathbb{C}[X_1, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, Z_3, J_3, J_4, J_5, J_6, J_9]$$

Calcoliamo l'ideale delle relazioni del set dei generatori tramite la teoria delle basi di Groebner, e troviamo ben 19 generatori che non riportiamo per brevità. Calcolando la serie di Hilbert dell'algebra nella sua rappresentazione fornita dall'isomorfismo troviamo che coincide con la serie trovata in (2.2). In modo analogo a quanto fatto per i sottospazi, otteniamo l'uguaglianza delle algebre:

$$\mathbb{C}[s, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3]^G = \mathbb{C}[X_1, Y_2, Y_3, Z_2, Z_3, Z_4, J_3, J_4, J_5, J_6, J_9]$$

Gli invarianti trovati formano quindi una base minimale dell'anello degli invarianti.

Capitolo 3

Invarianti della Quartica di Klein

3.1 Struttura del gruppo degli automorfismi

In questa parte della tesi studiamo gli invarianti dell'azione del gruppo degli automorfismi nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$, ambiente naturale della quartica. Possiamo però svolgere il calcolo per comodità su $\mathbb{C}^3$ tramite matrici in $SL(3,\mathbb{C})$ per poi estendere il risultato al proiettivo.
Il riferimento principale per questa parte è [3].

Definizione 3.1. Si definisce *Quartica di Klein* la curva algebrica di genere 3 su $\mathbb{P}^2$, data dal luogo degli zeri dell'equazione $x^3y + y^3z + z^3x$.
Denotiamo con G il gruppo degli automorfismi di tale quartica.

Il seguente teorema si trova come Teorema III.3.9 di [4].

Teorema 3.2 (di Hurwitz)**.** *Il gruppo degli automorfismi che conservano l'orientazione di una curva algebrica proiettiva complessa non singolare di genere g>1 ha ordine al più 84(g-1)*

La classificazione delle curve algebriche proiettive complesse e dei loro gruppi degli automorfismi ci assicura che il gruppo degli automorfismi della Quartica di Klein ha effettivamente ordine massimo, ovvero $84(3-1) = 168$, e che è l'unico gruppo semplice di tale ordine. Possiamo pensare a G secondo le sue rappresentazioni lineari equivalenti $PSL(2,\mathbb{F}_7) \simeq GL(3,\mathbb{F}_2)$.
Per quanto osservato finora abbiamo una caratterizzazione del gruppo degli automorfismi G da cui poter estrarre le proprietà necessarie al calcolo. D'ora in poi useremo G per indicare sia il gruppo degli automorfismi, sia l'unico

gruppo semplice di ordine 168, sia, più avanti, la sua rappresentazione lineare in $\mathbb{C}^3$. Elenchiamo quindi le seguenti proprietà di G:

Proposizione 3.3. *Il gruppo G ha le seguenti proprietà:*

i) G ha classi di coniugio:

Classi di coniugio	*1a*	*2a*	*3a*	*4a*	*7a*	*7b*
numero di elementi	*1*	*21*	*56*	*42*	*24*	*24*

ii) G ha sottogruppi massimali di ordine al più 21 e 24, che corrispondono rispettivamente, a meno di automorfismi del gruppo, al normalizzatore di un 7-Sylow, isomorfo a $C_3 \times C_7$, e al normalizzatore di un sottogruppo non ciclico di ordine 4 di G che è isomorfo a S_4.

3.2 Rappresentazione del gruppo

Consideriamo ora la rappresentazione del gruppo come gruppo lineare, $G \leq PSL(3, \mathbb{C})$. Per le considerazioni precedenti possiamo limitarci a considerare $SL(3, \mathbb{C})$ piuttosto che $PSL(3, \mathbb{C})$. Generare tutto il gruppo è superfluo per i nostri scopi e possiamo considerare un set di generatori con i quali verificare l'invarianza dei polinomi rispetto all'azione.
Cerchiamo due elementi che generino uno dei sottogruppi massimali di ordine 21, che denoteremo con K. Se consideriamo un elemento g della classe di coniugio $7a$, il normalizzatore di $\langle g \rangle$ viene generato da un 3-ciclo h tale che $h^{-1}gh = g^2$. Dunque h permuta i tre autovettori di g. Se denotiamo $\rho = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ possiamo rappresentare g e h come segue:

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad g = \begin{bmatrix} \rho^4 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

Poiché g e h generano un sottogruppo massimale in G, per ottenere tutto il gruppo basta un terzo generatore non contenuto nel sottogruppo individuato. La seguente rappresentazione dell'involuzione s, già individuata nell'originale pubblicazione di Klein, risulta un candidato appropriato:

$$s = -\frac{1}{\sqrt{-7}} \begin{bmatrix} \rho - \rho^6 & \rho^2 - \rho^5 & \rho^4 - \rho^3 \\ \rho^2 - \rho^5 & \rho^4 - \rho^3 & \rho - \rho^6 \\ \rho^4 - \rho^3 & \rho - \rho^6 & \rho^2 - \rho^5 \end{bmatrix}$$

Individuiamo quindi anche un altro sottogruppo massimale in G, fra quelli di ordine 24, che denoteremo H, in quanto utile nell'individuare gli invarianti. Il gruppo generato da h, s e $k = g^{-2}sg^2$ è esattamente uno dei sottogruppi massimali isomorfo ad S_4 e la sua rappresentazione coincide con la rappresentazione di S_4 come gruppo di simmetria che preserva l'orientazione del cubo agendo sulle sue diagonali. Questa rappresentazione coincide con il prodotto della rappresentazione standard con la rappresentazione con segno di S_4 presentata nella tabella del capitolo 2.

3.3 L'anello degli invarianti

Come primo passo per il calcolo dei generatori dell'anello calcoliamo la serie di Molien e in base ai suggerimenti che fornisce cerchiamo una base di invarianti per l'algebra.

La serie di Molien Cerchiamo un rappresentante per ogni classe di coniugio. Si verifica facilmente per questioni di grado, dato che per quasi ogni ordine c'è un'unica classe, che i seguenti elementi sono rappresentanti delle classi. Per distinguere gli elementi della classe $7a$ e $7b$ basterà calcolare lo spettro. Per la classe dell'identità possiamo ovviamente scegliere questa come rappresentante, mentre s, h e g risultano candidati ideali per le classi $2a, 3a, 7a$. Gli elementi kg^3, kg^2 risultano essere di grado 4 e 7 rispettivamente, ed un rapido calcolo dello spettro ci assicura che kg^2 è nella classe $7b$. Con questo abbiamo un insieme di rappresentanti per calcolare la serie. Denotiamo d'ora in poi $\alpha = \rho + \rho^2 + \rho^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$.

Osservazione 3.4. *La serie di Molien $\Phi_G(t)$ di $\mathbb{C}[x, y, z]^G$ è*

$$\Phi_G(t) = \frac{1}{168}\Big(\frac{1}{(1-t)^3} + \frac{21}{(1+t-t^2-t^3)} + \frac{56}{(1-t^3)} +$$

$$+\frac{42}{(1-t+t^2-t^3)} + \frac{24}{(1-\alpha t+\bar{\alpha}t^2-t^3)} + \frac{24}{(1-\bar{\alpha}t+\alpha t^2-t^3)}\Big) = \dots$$

Moltiplicando i termini fra loro perché abbiano una forma a noi più congeniale otteniamo:

$$\dots = \frac{-t^{12} - t^{11} + t^9 + t^8 - t^6 + t^4 + t^3 - t - 1}{(1+t)(1-t^4)(1-t^3)(1-t^7)} = \dots$$

Notiamo che il prodotto del numeratore per il fattore $(1-t+t^2)(1+t^3)(1+t^7)(1-t^{21})$ *risulta essere* $1-t^{42}$. *Moltiplicando anche il denominatore per tale fattore otteniamo:*

$$\dots = \frac{1-t^{42}}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{14})(1-t^{21})} = \frac{1+t^{21}}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{14})} \tag{3.1}$$

La serie in questa forma ci suggerisce di cercare gli invarianti fra i gradi 4,6,14 e 21. Inoltre essa indica la presenza di una dipendenza algebrica nella base di invarianti. Per individuare gli invarianti si può utilizzare l'algoritmo 1.9 o considerare alcune proprietà del gruppo.

Invarianti di G: Considerando il sottogruppo massimale isomorfo ad S_4, H, trovato precedentemente come sottogruppo generato da h,s e k, risulta banale che $\mathbb{C}[x,y,z]^G \subseteq \mathbb{C}[x,y,z]^H$. Cerchiamo un invariante per l'azione di H. Questo non sarà invariante per l'azione di G, ma risulterà utile per calcolare gli invarianti per G di grado più alto. Costruendo l'operatore di Reynolds per il sottogruppo troviamo che esso ha un unico invariante di secondo grado:

$$x^2+y^2+z^2+\bar{\alpha}(xy+xz+yz) \tag{3.2}$$

Se consideriamo invece il sottogruppo massimale di ordine 21 generato da g e h, K, e ne calcoliamo l'operatore di Reynolds, troviamo che non ha invarianti di grado minore a 4 oltre a xyz, che non risulta però invariante per s, e che lo spazio degli invarianti di grado 4, $Sym^4((\mathbb{C}^3)^*)^G$, è unidimensionale e viene generato da:

$$\sigma_4 = x^3y+y^3z+z^3x \tag{3.3}$$

Risulta evidente che (3.3) è invariante sotto l'azione di h che ne permuta i monomi e che l'azione di g moltiplica ogni monomio per un fattore ρ^k tale che $7 \mid k$, ovvero vale $\rho^k = 1$ e tale fattore lascia invariato il monomio. Si verifica facilmente che (3.3) è invariante per l'azione di G una volta verificata l'invarianza per l'azione di s.
Ovviamente non risulta sorprendente che σ_4 sia invariante. Il polinomio ha infatti per luogo degli zeri, se considerato nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$, esattamente la Quartica di Klein.

Osservazione 3.5. *Ricordando che* $G \leq PSL(3,\mathbb{C})$ *e la seguente formula per il calcolo del determinante Hessiano, che deriva dalla regola della catena,*

$\mathbb{H}(f \circ g) = det(g)^2 g(\mathbb{H}(f))$, $\forall f \in \mathbb{C}[x,y,z]$, $\forall g \in G$, segue che il determinante Hessiano di un invariante per l'azione di G risulta essere invariante. Ricordiamo anche che il determinante Hessiano di un polinomio in n variabili di grado d è un polinomio di grado $n(d-2)$.

Abbiamo quindi un candidato per l'invariante di grado $6 = 3(4-2)$ ideale, e calcolando il determinante Hessiano di σ_4 otteniamo:

$$\sigma_6 = -\frac{1}{54}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial z^2} \end{vmatrix} = xy^5 + yz^5 + zx^5 - 5x^2y^2z^2 \tag{3.4}$$

Sia σ_4 sia σ_6 sono irriducibili. Se questi non lo fossero, potendo avere al massimo sei fattori, o tali fattori risulterebbero invarianti, o l'azione del gruppo permuterebbe i fattori a meno di un coefficiente. La prima opzione viene esclusa dal fatto che non si hanno invarianti di grado inferiore a 4. La seconda opzione implicherebbe che l'ordine dello stabilizzatore di uno dei fattori sia maggiore dell'ordine dei sottogruppi massimali, infatti avrebbe indice, corrispondente alla cardinalità dell'orbita, minore di sei.
Un banale invariante di grado 14 è il prodotto degli invarianti $\sigma_4^2\sigma_6$. Questo indica che lo spazio degli invarianti di grado 14 non è generato da un singolo invariante e che conviene svolgere i calcoli modulo σ_4.
Un invariante di grado 14 non generato da σ_4 e σ_6 può essere trovato in due modi diversi. Il primo consiste nel calcolare una particolare estensione del determinante Hessiano, per cui vale un corrispettivo dell'osservazione 3.5, così da ottenere:

$$\sigma_{14} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x\partial z} & \frac{\partial\sigma_6}{\partial x} \\ \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial y\partial z} & \frac{\partial\sigma_6}{\partial y} \\ \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\sigma_4}{\partial z^2} & \frac{\partial\sigma_6}{\partial z} \\ \frac{\partial\sigma_6}{\partial x} & \frac{\partial\sigma_6}{\partial y} & \frac{\partial\sigma_6}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

Se denotiamo con $\sum_{cyc}$ le somme dell'immagine del polinomio secondo l'azione naturale dei 3-cicli sulle coordinate, otteniamo la sottostante identità:

$$\sigma_{14} = \sum_{cyc} (x^{14} - 34x^{11}y^2z - 250x^9yz^4 + 375x^8y^4z^2 - 126x^6y^3z^5) \tag{3.5}$$

In alternativa possiamo considerare il sottogruppo H e il suo invariante di secondo grado come visto in 3.2. L'azione per coniugio di G su H genera altri 6 sottogruppi coniugati ad H. Tali sottogruppi, che risultano isomorfi, hanno ciascuno un invariante di grado 2. L'azione per coniugio dell'elemento g e delle sue potenze individua i sottogruppi coniugati ad H e l'azione lineare di tali elementi permuta gli invarianti di secondo grado dei sottogruppi coniugati. Dunque il loro prodotto fornisce un invariante di grado 14, dato che l'azione del gruppo ne permuta i fattori. L'invariante prodotto μ è relazionato con σ_{14} tramite l'identità:

$$\mu = \sigma_{14} + (69 + 7\alpha)\sigma_4^2\sigma_6$$

Cerchiamo infine un invariante di grado 21 come suggerisce la serie di Molien. Possiamo nuovamente trovare tale invariante seguendo due metodi.
Indicheremo d'ora in poi con Jac l'operatore determinante dello Jacobiano.

Lemma 3.6. *Siano $f_1, \dots, f_n$ polinomi in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con $\mathbb{K}$ un campo e $g \in G \leq GL(n, \mathbb{K})$ allora,*

$$Jac(g \cdot f_1, \dots, g \cdot f_n) = det(g)g(Jac(f_1, \dots, f_n))$$

Inoltre se $f_1, \dots, f_n$ sono invarianti e $G \leq SL(n, \mathbb{K})$ allora $Jac(f_1, \dots, f_n)$ è invariante.

Il lemma appena enunciato suggerisce un primo metodo per trovare l'invariante di ventunesimo grado. Infatti il grado del determinante Jacobiano di σ_4, σ_6 e σ_{14} risulta proprio essere (4-1)+(6-1)+(14-1)=21. Calcolando troviamo:

$$\sigma_{21} = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_4}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_4}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_4}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_6}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_6}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_6}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{14}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{14}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{14}}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

La seguente proposizione ci assicura inoltre che, siccome il loro Jacobiano è non nullo, σ_4, σ_6 e σ_{14} sono indipendenti algebricamente.

Proposizione 3.7. *Siano $f_1, \dots, f_n$ polinomi in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e sia $Jac(f_1, \dots, f_n) \neq 0$, allora $f_1, \dots, f_n$ sono algebricamente indipendenti.*

Il secondo metodo per trovare un invariante di grado 21 deriva dalla particolare struttura di G. L'unica classe di coniugio di ordine due conta ventuno elementi. Ogni involuzione della classe ammette un polinomio invariante di primo grado rispetto alla propria azione mentre l'azione di G permuta tali

polinomi. Ne consegue che il loro prodotto è un invariante di ventunesimo grado per G.
Tramite la teoria delle basi di Groebner troviamo che $\sigma_4,\ \sigma_6,\ \sigma_{14}$ e σ_{21} sono dipendenti algebricamente e che nello specifico σ_{21}^2 è generato dall'algebra $\mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}]$ secondo la seguente identità:

$$\sigma_{21}^2 = \sigma_{14}^3 - 1728\sigma_6^7 + 1008\sigma_4\sigma_6^4\sigma_{14} + 88\sigma_4^2\sigma_6\sigma_{14}^2 + 60032\sigma_4^3\sigma_6^5 + \\ +1088\sigma_4^4\sigma_6^2\sigma_{14} - 22016\sigma_4^6\sigma_6^3 - 256\sigma_4^7\sigma_{14} + 2048\sigma_4^9\sigma_6$$

3.4 Base dell'algebra degli invarianti

Consideriamo ora l'algebra $\mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}] \bigoplus \sigma_{21} \cdot \mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}]$ e calcoliamone la serie dei Hilbert con l'ausilio del Lemma 1.11.
Per calcolare la serie di Hilbert possiamo considerare la biezione naturale fra gli elementi di $\mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}]$ e di $\sigma_{21} \cdot \mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}]$ data dal prodotto per σ_{21} che associa univocamente a elementi di grado d del primo elementi di grado $d+21$ del secondo. Così risulta evidente che le serie di Hilbert in forma ridotta delle algebre differiranno fra loro per un fattore t^{21} a numeratore, cosa che ha l'effetto di traslare la dimensione degli spazi graduati di ventuno. Poiché i generatori dell'algebra $\mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}]$ sono indipendenti, è possibile usare il lemma 1.11 e dunque la sua serie di Hilbert vale:

$$H_1(t) = \frac{1}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{14})}$$

Per la biezione a cui si è fatto riferimento, la serie di $\sigma_{21} \cdot \mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}]$ é:

$$H_2(t) = \frac{t^{21}}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{14})}$$

Dato che le due algebre sono in somma diretta possiamo sommare le serie per ottenere la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}] \bigoplus \sigma_{21} \cdot \mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}]$ ottenendo:

$$H(t) = \frac{1+t^{21}}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{14})} \tag{3.7}$$

Ricordando ora che vale $(\mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}] \bigoplus \sigma_{21} \cdot \mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}])_d \subseteq \mathbb{C}[x,y,z]_d^G$ per ogni grado d, e notando che le serie (3.7) e (3.1) coincidono, otteniamo infine la descrizione dell'algebra degli invarianti:

$$\mathbb{C}[x,y,z]^G = \mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}] \bigoplus \sigma_{21} \cdot \mathbb{C}[\sigma_4, \sigma_6, \sigma_{14}]$$

Bibliografia

[1] David Cox, John Little, Donald O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer 2007

[2] Bernd Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Springer-Verlag 1993

[3] Noam D. Elkies, *The Klein Quartic in Invariant Theory*, The Eightfold Way MSRI Publications volume 35 1998, pagine 51-58

[4] Rick Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics 5, AMS, 1995