UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Università degli Studi di Firenze
Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
C.d.L. in Matematica

Anno Accademico 2015-2016

LA MATEMATICA NEI TABELLONI DI EMMA CASTELNUOVO: TRA TEORIA E PRATICA.

Candidato:
Anna Chiara Contaldo

Relatore:
Prof. Giorgio Ottaviani

Supervisore tirocinio:
Prof.ssa Anna Baldini

Introduzione

Nato dalla collaborazione tra l'Università di matematica di Firenze e il Liceo "Enriques Agnoletti" di Sesto Fiorentino, questo lavoro di tesi è diviso in due parti. La prima riguarda un progetto legato alla catalogazione dei tabelloni di Emma Castelnuovo. La Preside della scuola, Prof.ssa Silvia Baldaccini, infatti, ha ritenuto opportuno trovare una giusta collocazione al prezioso materiale donato dall'illustre professoressa al Liceo dopo la sua morte. Questo consta di circa 280 tabelloni realizzati per delle esposizioni tenute a Roma nel 1971 e nel 1974. In questi sono descritti molti argomenti di matematica, da alcuni più semplici come per esempio aree e perimetro fino ad arrivare ad altri che trattano di topologia e teoria dei grafi.

Per la catalogazione ho utilizzato come linee guida due libri. Il primo è di Emma Castelnuovo e Mario Barra, "Matematica nella realtà" in cui sono raccolte tutte le foto dei tabelloni della seconda esposizione, il secondo "Documenti di un'esposizione di matematica: da bambini a uomini" dove invece ce ne sono solo alcuni della prima.

È stato molto interessante portare avanti questo lavoro in quanto mi ha permesso di ripercorrere i passi dell'innovazione apportata da Emma Castelnuovo in ambito della didattica della matematica.

La seconda parte della tesi, invece, riguarda alcune lezioni che ho tenuto in classe in collaborazione con la professoressa Anna Baldini. La classe era una seconda liceo delle scienze umane, la 2^a H. In queste lezioni abbiamo ritenuto opportuno basarci sul metodo descritto nei vari libri di testo e di divulgazione di Emma Castelnuovo. L'approccio che la professoressa ritiene più giusto per l'insegnamento della matematica è quello di partire dall'osservazione della realtà. Così abbiamo proposto alcuni argomenti sotto forma di problem solving per cercare di rendere la lezione quanto più coinvolgente possibile. Gli argomenti trattati in classe riguardano principalmente i triangoli. Partendo dalla proprietà degli angoli interni sono arrivata poi a parlare di alcuni punti notevoli quali il circocentro e l'incentro. Come conclusione del percorso, poi, abbiamo affrontato il teorema di Pitagora dopo aver parlato di area ed equiscomponibilità. Gli obiettivi di questa unità didattica erano molteplici. Volevamo creare un collegamento con quanto i ragazzi avevano affrontato l'anno precedente ma allo stesso tempo cimentarci in alcuni aspetti nuovi quali le prime semplici dimostrazioni e diversi approcci.

Indice

Parte I

Emma Castelnuovo e i suoi tabelloni

Capitolo 1

Introduzione

Questo lavoro di tesi prende vita da un progetto di collaborazione tra l'università e il liceo "Enriques Agnoletti". La preside di questa scuola, la Prof.ssa Silvia Baldaccini, infatti, ha ritenuto opportuno che qualcuno mettesse in ordine il materiale che la professoressa Emma Castelnuovo donò dopo la sua morte al liceo. Questo materiale consta di molteplici tabelloni riguardanti le esposizioni che la professoressa tenne nel periodo in cui era insegnante a Roma. Queste esposizioni sono dei lavori che coinvolsero tutti i ragazzi di prima, seconda e terza media di Emma Castelnuovo. I ragazzi furono divisi in gruppi ed ognuno di essi doveva trattare un particolare argomento ed elaborare dei tabelloni in cui esporlo. Una volta conclusa questa prima parte organizzativa, i ragazzi avrebbero tenuto una vera e propria esposizione di tutto il materiale ed avrebbero presentato ciò che avevano appreso ai genitori. In questa prima parte della tesi andremo pertanto ad illustrare il nostro contributo alla sistemazione dei tabelloni che ci sono pervenuti in opportuni fascicoli e alla loro catalogazione dopo aver descritto l'importanza della figura di Emma Castelnuovo nella didattica della matematica.

Capitolo 2

Emma Castelnuovo e i suoi contributi

Quando si parla di didattica della matematica, si può cadere in errore pensando che sia una disciplina statica in cui le poche innovazioni possano riguardare solo nuovi software che possono coadiuvare il lavoro in classe. Questo non è assolutamente veritiero. Le problematiche affrontate costantemente sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica sono molteplici. Domande, dubbi e discussioni sorgono ripetutamente e riguardano diversi aspetti della matematica. Quello sicuramente più difficile da affrontare per questa disciplina è il coinvolgimento. Sono sempre più, infatti, i bambini o i ragazzi che si chiedono "perché?". Perché è necessario affrontare argomenti così noiosi e difficili, perché questo ci serve nella vita reale? Lavorando a stretto contatto con il materiale lasciato in eredità da Emma Castelnuovo, mi sono resa conto del fatto che molto probabilmente un giusto approccio c'è, basta solo soffermarsi sui dettagli. Una caratteristica fondamentale del metodo di Emma Castelnuovo è l'osservazione del mondo circostante e la costante ripresa di spunti storici. Mi ha colpito molto la prefazione contenuta nel libro di testo scritto dalla professoressa per la prima media dal titolo "La via della matematica, la geometria". Le prime parole in questo documento sono, infatti *"Cari ragazzi, questa prefazione è per voi"*. È subito evidente come tutto sia mirato all'apprendimento dei ragazzi e come il testo non sia concepito solo come linea guida per l'insegnamento. I veri protagonisti, infatti, sono gli studenti che utilizzeranno questo libro e dovranno capirne il contenuto per apprendere i fondamenti della geometria. Le parole successive sono un invito alla lettura delle prime pagine di ogni capitolo, prima ancora che gli argomenti siano trattati in classe. Queste pagine sono un vero e proprio tuffo nel passato. Spiegano in modo semplice e conciso perché nell'arco degli anni si è reso necessario affrontare alcune tematiche che ancora oggi, dopo secoli e millenni, sono considerate una solida base per la nostra cultura. Perché è così importante conoscere come si costruisce un poligono? Perché conoscere il teorema di Pitagora? Proprio su questo, anche per creare un collegamento con quello che poi ho insegnato in classe, vorrei soffermarmi un po'. Emma Castelnuovo nella prefazione al quarto capitolo di questo libro pone l'accento su come sia semplice disegnare un quadrato su di un foglio. Immaginiamo, però, di dover affrontare un problema molto più difficile ovvero la costruzione di un quadrato molto grande su un terreno. È il problema che riscontrarono gli egiziani nella costruzione delle Piramidi. Allora, ecco come la storia ci insegna perché fin dall'antichità è stato necessario conoscere alcune proprietà sui lati di un triangolo per essere certi di costruire un angolo perfettamente retto. È spiegato poi come con una semplice corda e dei nodi fatti su di essa, gli egiziani furono in grado di costruire degli angoli perfettamente retti e di erigere le maestose strutture. Il collegamento con la realtà presente e passata, quindi, è il fulcro dell'attenzione nella didattica proposta da Emma Castelnuovo. Pertanto alle domande dei ragazzi si può rispondere in questo modo e magari si può sperare di attirare l'attenzione anche dei meno appassionati. Un altro libro molto interessante che riguarda sempre l'innovazione apportata dalla professoressa è "L'officina matematica". Questo libro contiene una raccolta riguardante alcuni incontri svolti a Cenci tra professori in cui sono affrontati diversi temi in modo originale. Nell'introduzione si legge: *"Sono tre giornate dedicate a laboratori di matematica, in cui le insegnanti e gli insegnanti che partecipano sono invitati a lavorare con le mani, a costruire figure geometriche con spaghi ed elastici, a piantare chiodi per intuire quali curve presiedano alle leggi della probabilità e della frequenza, a fare bolle di sapone per scoprire le proprietà del cerchio e della sfera [...]. In una parola, quella che si sviluppa sotto la grande quercia, il vecchio ornello e negli spazi interni della Casa-laboratorio è una vera e propria officina, intesa come luogo in cui si assemblano materiali e si confrontano idee, si costruiscono oggetti e si mettono in discussione pratiche didattiche".*

Si nota quindi come questo libro, rispetto a quello di testo, sia scritto proprio per gli insegnanti e non tanto per gli alunni. In questo caso sono gli adulti a essere coinvolti nell'apprendimento e queste giornate sono state pensate proprio per mettere in discussione pratiche comuni e per far nascere qualcosa di nuovo da metodi desueti. Grazie a queste raccolte di lezioni è stato possibile per me prendere coscienza dell'enorme responsabilità che grava su un insegnante. Le domande che gli studenti si fanno e di cui abbiamo parlato prima, sono legittime se non ci si sforza in nessun modo di rendere interessante ed accattivante la lezione. Per questo motivo, la ricerca in didattica della matematica non è per nulla sterile e fine a se stessa. Trovare degli spunti, partire dalla storia per plasmare una coscienza, creare dei collegamenti con altre discipline che possono spaziare tra arte, musica, scienze sono un buon punto d'inizio per rendere la matematica meno astratta e più alla portata di tutti.

Capitolo 3

Catalogazione dei tabelloni

Il materiale donato dalla professoressa Castelnuovo era custodito in una stanza vicino ai laboratori di chimica e biologia. La prima volta che la professoressa Falsini ha accompagnato me e il professor Ottaviani in questa stanza, ci siamo resi subito conto che il materiale donato era veramente tanto. In particolare i tabelloni erano conservati in alcuni plichi mentre, nei tavoli accanto, c'era dell'altro materiale anch'esso relativo alle esposizioni. Erano più che altro oggetti costruiti da Emma o dai suoi alunni per dimostrazioni intuitive o per la rappresentazione di problemi poi risolti in alcuni tabelloni. Il nostro compito era quello di inserire i tabelloni in alcuni fascicoli con dentro dei supporti in modo tale che si rovinassero il meno possibile. Il nostro contributo più importante sarebbe stato a livello matematico. I tabelloni, ovviamente, toccavano più argomenti e la parte più difficile sarebbe stata trovare un filo logico per poi catalogarli e conservarli in biblioteca. Questo per noi è stato possibile anche grazie all'aiuto del libro scritto da Emma Castelnuovo stessa in collaborazione con Mario Barra dal titolo "Matematica nella realtà". In questo, infatti, sono custodite le foto dell'intera esposizione tenuta nel 1974. Per portare avanti il lavoro, inoltre, abbiamo fatto uso anche del libro "Documenti di un'esposizione di matematica: da bambini a uomini". Questo, al contrario del primo, contiene alcuni tabelloni della prima esposizione tenuta nel 1971. Lo abbiamo tenuto in considerazione per verificare se nell'insieme ci fossero tabelloni risalenti alla prima esposizione. Il nostro lavoro, dunque, non si è limitato esclusivamente alla catalogazione del materiale ma, nel farlo, lo abbiamo esaminato e fatto alcune considerazioni. Alcune veramente interessanti. Già solo sfogliando il libro, si può notare come i tabelloni tocchino davvero tantissimi argomenti. Questi in particolare sono

- Aree, perimetri, volumi, superficie;
- il teorema di Pitagora;
- leggi di accrescimento;

- l'infinito, in finito, l'infinitesimo;
- la bilancia. Sistemi di numerazione;
- identità strutturali;
- calcolo delle probabilità;
- coniche e quadriche;
- geometria analitica;
- le trasformazioni affini;
- ricerca della posizione del baricentro;
- il calcolo baricentrico;
- la ciclide;
- cartografia;
- topologia;
- i grafi di flusso.

Alcune di queste sezioni sono assenti, come per esempio quella riguardante la bilancia e i sistemi di numerazione, mentre altre sono incomplete. Altre ancora, poi, sono state arricchite da materiale ritenuto affine che è stato inserito per una più completa trattazione. Queste sono in particolare "Il calcolo baricentrico" a cui sono stati aggiunti i tabelloni riguardanti la produzione della cioccolata e "I grafi di flusso"completati con "Una questione di commercio" e "Petrolio e agricoltura". Alla fine della catalogazione, infine, sono stati inseriti alcuni tabelloni che non sono stati ritrovati nel libro ma che trattano un'argomentazione completa su diversi argomenti. Questi sono

- Il moto dei proiettili;
- l'energia solare;
- musica.

Questi sono legati a lavori di tesi svolti da laureandi in collaborazione con la professoressa Emma Castelnuovo. La grande quantità di temi trattati ci ha subito stupito tenendo conto che questo materiale è stato concepito per un'esposizione tenuta da ragazzi di scuola media. Si osserva, però, che tutti gli argomenti, anche quelli che possono sembrare semplici, sono trattati in modo approfondito, dettagliato e con molti collegamenti con la vita reale. Il titolo del libro, ricordiamolo, è proprio "Matematica nella realtà". Come abbiamo già detto, un aspetto che caratterizza la didattica di Emma Castelnuovo è l'approccio del tutto innovativo. In tutti i suoi libri, di testo o divulgativi, ci tiene a mettere in luce come il contatto con la realtà sia necessario e non vada mai abbandonato. I tabelloni non potevano che ribadire e sottolineare questo aspetto caratteristico. La catalogazione è cominciata con l'apertura dei diversi plichi presenti nella stanza. In ognuno di essi erano conservati una cinquantina di tabelloni ed io, uno per volta, li osservavo e cercavo di trovare l'argomento di riferimento. Una volta fatto questo, cercavo nel capitolo corrispondente del suddetto libro di Mario Barra ed Emma Castelnuovo finché non trovavo un riscontro. Trovata la corrispondenza, in un quaderno segnavo la pagina del libro in cui avevo trovato la foto del tabellone. Sono andata avanti con questo metodo finché non ho terminato i plichi. Non ho ritenuto opportuno condurre in parallelo un inizio di catalogazione poiché avevo poco spazio a mia disposizione e non sapevo dove posizionare in modo temporaneo i tabelloni inseriti nei fascicoli. Ovviamente per i tabelloni che non trovavo nel libro, avviavo una ricerca più approfondita con la speranza di trovare una corrispondenza altrove. Pochi sono stati ritrovati nel libro sulla prima esposizione, altri ancora sono stati collegati a lavori di tesi condotti con l'ausilio della professoressa, alcuni sono scritti in francese e si suppone facciano parte di un'esposizione in Niger, altri purtroppo sono singoli tabelloni ai quali non sono riuscita a trovate una collocazione. I tabelloni ritrovati nel libro, poi, sono stati riposti negli opportuni fascicoli e messi in ordine in base a come sono riportati nel libro. Accantonati in scatoloni o supporti aggiuntivi, ho terminato il lavoro puramente manuale per poi dedicarmi esclusivamente alla catalogazione. Per questa abbiamo pensato di procedere in questo modo. Per ogni capitolo del libro e per ogni argomento aggiuntivo che riportava un titolo, ho scelto un colore da associare. Ho colorato delle etichette e le ho applicate sul fascicolo e sopra vi ho riportato:

1. il nome del capitolo trovato nel libro;
2. la pagina del libro in cui trovarlo;
3. il numero del tabellone all'interno di quel capitolo in modo da lasciare un ordinamento per il posizionamento successivo a una consultazione.

Perché in fondo, oltre all'inestimabile valore che siamo riusciti a riportare alla luce, la nostra speranza, della Preside, del professor Ottaviani e mia, è sicuramente quella che i tabelloni siano utilizzati nella didattica quotidiana. Il fatto che siano custoditi in un liceo e che possano essere utilizzati per una didattica alternativa, ha due vantaggi. Il primo è che gli studenti possono venire a contatto con qualcosa d'innovativo e di diverso che può attirare la loro attenzione e magari stimolarli nell'apprendimento di quel particolare argomento. Inoltre, proprio per la loro struttura, i tabelloni possono accompagnare un intero percorso che abbraccia un'intera unità didattica. Il secondo aspetto, a mio avviso, è puramente legato alla realizzazione dei tabelloni. Se per introdurne l'utilizzo si ha l'accortezza di spiegarne il contesto storico e la loro provenienza, gli studenti rimarranno sicuramente sbalorditi. La consapevolezza che ragazzi più piccoli di loro, tanti anni prima, abbiano affrontato gli stessi argomenti ma nella scuola media e siano stati inoltre capaci di creare dei tabelloni e di spiegarne il contenuto ai genitori, può suscitare una certa curiosità e sbigottimento. Soprattutto, però, avranno la certezza che altri alunni si sono cimentati in quel particolare percorso e sono stati in grado di produrre quel materiale. Un dono davvero prezioso, dunque, quello della professoressa Castelnuovo. Tornando alla catalogazione, una volta raggruppati i tabelloni e applicato le etichette su ogni fascicolo, ne ho redatti alcuni che descrivessero il metodo usato per riporre il materiale negli appositi supporti in biblioteca. Nel primo ho descritto la provenienza dei tabelloni, il metodo utilizzato per la catalogazione e la legenda per la lettura delle etichette. Nel secondo, invece, ho creato una sorta di griglia e ho raccolto alcune informazioni per ogni capitolo del libro e per ogni argomento aggiuntivo. Ho applicato, infatti, un'etichetta del colore che contraddistingue un tema ed ho riportato le seguenti informazioni accanto:

1. nome del capitolo o dell'argomento;
2. numero dei tabelloni in totale su cui è stata apposta quell'etichetta;
3. numero di tabelloni mancanti in relazioni a quelli presenti nel libro.

L'ultimo tabellone, infine, riporta una breve storia della professoressa Emma Castelnuovo. Accanto a questo materiale esplicativo, però, è stato necessario lasciare in biblioteca una copia del libro "Matematica nella realtà" in cui sono raccolte tutte le foto dei tabelloni. Come abbiamo già detto, infatti, sulle etichette si fa esplicitamente riferimento a capitoli e pagine di questo libro quindi lasciarlo come guida per la consultazione è stato fondamentale. Alla fine del lavoro è stato possibile anche fare una sorta di stima del materiale che siamo riusciti a recuperare e di quello, invece, che purtroppo è andato perso. Il numero totale dei tabelloni conservati in biblioteca è attualmente di 282, compresi i tre aggiunti da noi. Purtroppo non tutti i cartelloni dell'esposizione sono stati ritrovati e di quelli raccolti nel libro "Matematica nella realtà" ne mancano 23. In dettaglio, il numero dei tabelloni per ciascuna sezione è

- 21 tabelloni per aree, perimetri, volumi, superficie;
- 13 tabelloni per il teorema di Pitagora;
- 28 tabelloni per leggi di accrescimento;
- 7 tabelloni per l'infinito, in finito, l'infinitesimo;
- 0 tabelloni per la bilancia. Sistemi di numerazione;
- 15 tabelloni per identità strutturali;

- 12 tabelloni per calcolo delle probabilità;
- 16 tabelloni per coniche e quadriche;
- 21 tabelloni per geometria analitica;
- 17 tabelloni per le trasformazioni affini;
- 8 tabelloni per ricerca della posizione del baricentro;
- 21 tabelloni per il calcolo baricentrico;
- 6 tabelloni per la ciclide;
- 12 tabelloni per cartografia;
- 12 tabelloni per topologia;
- 25 tabelloni per i grafi di flusso;
- 8 tabelloni per il moto dei proiettili;
- 4 tabelloni per l'energia solare;
- 4 musica.

Possiamo ritenerci comunque molto soddisfatti per la quantità di materiale attualmente conservato in maniera consona e non più accantonato in una stanza abbandonata. Inoltre, siamo grati per la pubblicazione del libro da parte di Mario Barra ed Emma Castelnuovo che rimane comunque una testimonianza anche per il materiale assente.

Capitolo 4

Particolari nascosti

Il materiale donato da Emma Castelnuovo, come abbiamo già detto, è una risorsa molto importante per la scuola. Con il nostro lavoro speriamo di aver riportato alla luce qualcosa che era rimasto in quella piccola stanza troppo a lungo. In particolare, però, speriamo che questo materiale non sia considerato superato ed obsoleto in confronto a nuove tecniche d'insegnamento quali software o laboratori. Questa raccolta racchiude in sé degli approcci e degli approfondimenti che vanno assolutamente ripresi e da cui si può prendere spunto per una didattica ancora oggi innovativa. Porre l'attenzione sull'osservazione del mondo intorno a noi, partire da questioni reali per poi affrontare un particolare argomento fino ad arrivare a delle interessanti generalizzazioni è un metodo che può porre l'attenzione su questioni che possono attrarre l'attenzione dell'alunno. Emma Castelnuovo ne era ben consapevole e questo metodo ha accompagnato i suoi anni d'insegnamento e di ricerca. Una caratteristica che solo chi è entrato in contatto con questo materiale prima della catalogazione può aver notato è l'approccio puramente didattico con cui è stata affrontata la realizzazione di tutti i tabelloni. Osservandoli attentamente, infatti, si può notare come molti di questi siano scritti con una scrittura infantile, quindi dai ragazzi stessi, e che molti apportano delle modifiche a volte fatte con una scrittura più adulta presumibilmente della professoressa stessa. Alcuni addirittura nel retro nascondono una prima versione migliorata poi in seguito oppure stralci di argomenti completamente diversi. Si può pensare che questo materiale sia stato in qualche modo riciclato e che sul retro possano esserci dei frammenti dei tabelloni che componevano la prima esposizione del 1971. Alcuni poi sono stati riscritti molto probabilmente per il convegno "Emmatematica" tenuto a Sesto Fiorentino. Questo lo riteniamo plausibile in quanto nel libro di Mario Barra gli stessi tabelloni sono fotografati ma scritti con una scrittura completamente diversa. È ammissibile credere che nel convegno del 2001 tenuto al liceo "Enriques Agnoletti", la professoressa ci tenesse che quei particolari tabelloni fossero presenti e consultabili e che abbia preferito riscriverli per non perdere parte del lavoro. Queste osservazioni mi hanno avvicinato di più al lavoro svolto da Emma Castelnuovo. Credo che la mole d'impegno impiegata per portare avanti un progetto così ambizioso sia stato veramente tanto e poter venire a contatto con tutto questo per me è stato motivo di apprendimento.

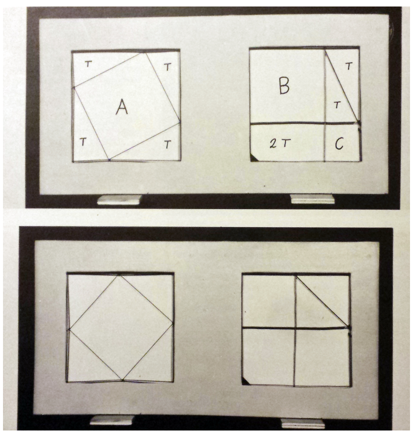
Capitolo 5

Storia e innovazione

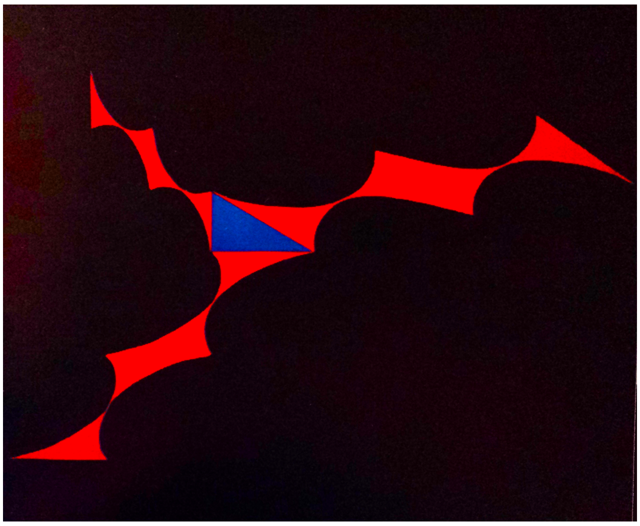
In questa sezione descriveremo in modo più dettagliato in cosa consiste l'innovazione in questi tabelloni. Lo faremo descrivendo il percorso seguito nella progettazione del materiale per il teorema di Pitagora e poi, successivamente, quelli riguardo la cicloide.

Il teorema di Pitagora

È interessante parlare del teorema di Pitagora non solo per creare un collegamento con il lavoro svolto in classe, ma anche perché è un progetto che si svolge in modo trasversale. A differenza di altri argomenti, infatti, questo viene affrontato da tutte e tre le classi. Dalla prima viene esposto il teorema con evidenti prove che ne rilevano la validità accompagnate da un collegamento storico. Nelle classi successive, invece, si passa alle estensioni del teorema che sono un po' più complicate da gestire. Vediamo come questi argomenti sono affrontati. Il teorema viene introdotto attraverso un dispositivo mobile che eccita, oltre alle facoltà intuitive, anche quelle di ragionamento.



L'osservazione d'immagini reali formate attraverso il movimento manuale e consapevole del meccanismo fa in modo che l'alunno sia convinto della relazione descritta dal teorema e non debba essere costretto ad accettarla senza ragionarci. Un altro metodo che può convincere ulteriormente gli alunni della veridicità del teorema è il metodo "alla Archimede". Si possono, infatti, confrontare i pesi dei triangoli per verificare che si ottiene un equilibrio da cui segue l'uguaglianza. In questo modo i ragazzi, quindi, sono venuti a contatto in modo sperimentale con la proprietà pitagorica scoperta nel 500 a. C. . Dopo di che vi è un tabellone che descrive la storia di Pitagora, dalla data e il luogo di nascita a testimonianze che ne descrivono l'importanza. A questo punto è chiaro come effettivamente osservazione del mondo circostante e storia siano i pilastri del metodo didattico utilizzato da Emma Castelnuovo. Il percorso continua, infatti, con alcuni richiami alla proprietà pitagorica prima di Pitagora e quindi con collegamenti agli egiziani e a una tavoletta babilonese che racchiude al suo interno un problema per la cui risoluzione è necessaria questa proprietà. Una cosa stupefacente colpisce sicuramente i ragazzi: il fatto che la proprietà fosse conosciuta molti secoli prima di Pitagora, anche se in un solo caso particolare. Si può sfruttare questo caso, infatti, per far capire ai ragazzi la differenza tra una scoperta valida solo in qualche caso ed una invece generale, valida sempre. Nella classe prima, inoltre, si osserva che il teorema vale esclusivamente per i triangoli rettangoli e come da un teorema di Euclide si ricavi in modo semplice il teorema di Pitagora. Nella seconda classe, poi, vengono affrontate le estensioni del teorema a poligoni in generale per poi passare, in terza classe, a figure curvilinee. In terza media, infatti, le estensioni attraverso le lunule di Chio conducono ad una generalizzazione del teorema che utilizza semicirconferenze. Ed ecco come il teorema di Pitagora che con una didattica che segue dei metodi classici e statici può risultare difficile, complicato e con poche applicazioni diventa divertente da insegnare e da apprendere. Sicuramente tanto stimolante da creare addirittura una pittura moderna.



La cicloide, l'Elena dei matematici

Premessa

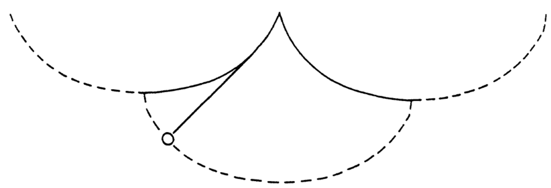
Supponiamo di voler introdurre la cicloide a ragazzi delle scuole madie e di voler descriverne alcune proprietà. Lavoriamo, dunque, in un ambiente simile a quello descritto nei libri sulle esposizioni della professoressa con l'approccio descritto fino ad ora. È impensabile introdurre a questo livello gli integrali per la descrizione di alcune proprietà quali la lunghezza della curva e l'area compresa tra la curva e la retta sottostante. Nei tabelloni di Emma Castelnuovo troviamo alcuni importanti spunti per andare oltre le dimostrazioni classiche ed ottenere una prova accessibile agli studenti di terza media. Inizieremo la trattazione con riferimenti storici per capire perché questa curva è ritenuta così importante per poi scendere nei dettagli ed analizzare il lato pratico delle scoperte che la riguardano.

Storia e definizione

Pur non essendo di difficile concezione, sembra che la cicloide non sia venuta alla luce fino al XVI secolo. Quindi, possiamo affermare che è forse la prima curva totalmente moderna, che non si trova cioè nelle opere dei geometri classici. Fu Pascal il primo a scoprire le innumerevoli proprietà della cicloide, da lui chiamata roulette, e a meravigliarsi che gli antichi greci l'avessero ignorata. Nelle sue opere egli la descrive in questo modo: "*La roulette è il percorso che fa nell'aria il punto di una ruota, quando essa rotola nel suo movimento normale, dal momento in cui il punto comincia a sollevarsi da terra, fino al momento in cui la rotazione continua della ruota non l'abbia ricondotto a terra, dopo un giro completo*". Pertanto, la cicloide altro non è che la curva generata da un punto di una circonferenza che rotoli senza strisciare sopra una retta fissata. Per semplificare, non è altro che la curva che descrive il movimento della valvola della ruota di una bicicletta. Nei primi del 1600, Galileo Galilei fu il primo ad attribuirgli il nome che oggi le diamo. Nel 1634 Roberval risolse il problema dell'area compresa tra un arco della curva (da lui chiamata trocoide dal greco trocos, ruota) e la base, che aveva visto impegnati per circa quaranta anni Torricelli e Galileo. Cartesio e Fermat, poi, trovarono le tangenti alla cicloide, ma fu Pascal, come detto, a risvegliare grande interesse nella curva ponendo diverse sfide riguardanti la cicloide a cui parteciparono i più grandi matematici dell'epoca tra cui Fermat e Huygens. Per le discordie che riuscì a suscitare fra i matematici, la cicloide fu chiamata l"'Elena dei matematici". Successivamente, scienziati del calibro dei fratelli Bernoulli, Leibniz e Newton trovarono per la curva famosissime proprietà matematiche e fisiche. La definizione sopra riportata è concisa e rigorosa ma un po' arida e forse difficile da concepire per un ragazzo. Senza una giusta introduzione, la curiosità e l'immaginazione di un ragazzo non possono accendersi in autonomia. C'è bisogno del giusto approccio per coinvolgere la classe alla scoperta di questo nuovo oggetto che per anni è stato studiato dai più grandi matematici. Tutte le proprietà scoperte non fecero che aumentare l'interesse verso questa curva in relazione, in particolare, a due problemi a prima vista senza relazione tra loro: l'isocronismo delle oscillazioni e la curva di discesa più rapida. Proprio questi problemi potrebbero essere un buon punto di partenza per introdurre la cicloide.

Il problema della tautocrona

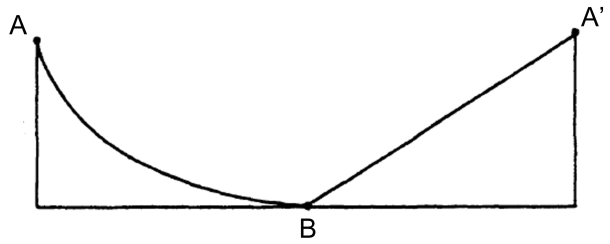
La misura del tempo era di grande importanza agli inizi dell'epoca moderna. Verso la metà del Seicento, l'idea di costruire un orologio sfruttando le oscillazioni di un pendolo cominciava a diventare tecnicamente realizzabile. Nel pendolo usuale, in cui il peso descrive un arco di circonferenza, il periodo, cioè il tempo impiegato per compiere un'oscillazione completa, dipende dall'ampiezza di questa ed è maggiore per le grandi oscillazioni, va diminuendo via via che l'ampiezza diminuisce e resta quasi costante per piccole oscillazioni. In altre parole, il pendolo circolare è isocrono solo approssimativamente, tanto più le oscillazioni sono piccole. Il problema della tautocrona consiste nel trovare una curva sulla quale tutte le oscillazioni risultino isocrone. Huygens dimostrò che la cicloide gode di questa proprietà e di conseguenza per ottenere delle oscillazioni isocrone occorre far muovere il pendolo lungo questa curva. Fu anche in grado di costruirlo. Per farlo utilizzò due guide poste da entrambi i lati del punto di sospensione.



In questo modo, il filo del pendolo non è libero di muoversi ma segue la guida e l'estremità descrive una cicloide. Per far questo, Huygens dimostrò che l'evolvente della cicloide, è la cicloide stessa. L'evolvente è, in parole semplici, la curva ottenuta sviluppando la curva di partenza. Ovvero quello che si deve fare è prendere un filo ed arrotolarlo intorno alla curva. Srotolando il filo tenendolo teso, rimaniamo tangenti alla curva e l'estremità libera del filo descrive una nuova curva che è proprio l'evolvente.

Il problema della brachistocrona

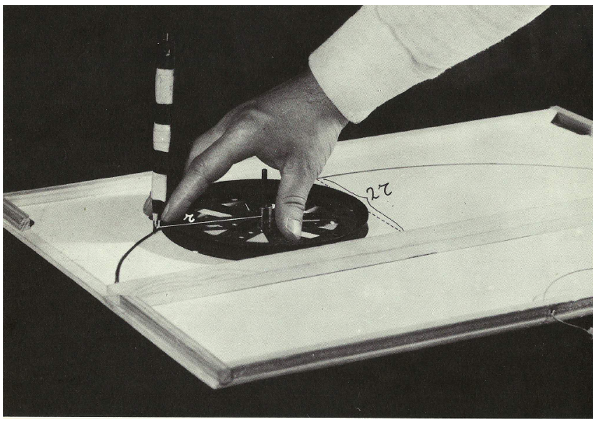
La cicloide è la soluzione anche di un altro importante problema, quello della brachistocrona ovvero la curva che rende minimo il tempo di caduta da un punto ad un altro. Supponiamo di fissare due punti A e B, il primo posto più in alto del secondo ma non sulla verticale. Lasciamo cadere da A un grave che giunga a B scivolando su una curva che unisce i due punti. Qual è la curva che rende minimo il tempo di caduta tra tutte quelle che collegano i due punti? Questa sfida fu proposta per primo da Johann Bernoulli e fu accettata da molti matematici del tempo. Tra questi anche Newton e Leibniz che avevano inventato indipendentemente il calcolo infinitesimale e, proprio grazie a questo, riuscirono a trovare la soluzione al problema. Ovviamente ai ragazzi di scuola media non possiamo proporre una soluzione basata sul calcolo infinitesimale. Diverse prove pratiche, però, possono facilmente mettere in luce come la cicloide, confrontata con altre curve quali per esempio la retta o la circonferenza, risulti essere la vincitrice. A prima vista, infatti, potrebbe sembrare che il segmento che unisce i due punti, che rappresenta la curva di minimo cammino, sia la soluzione del problema.



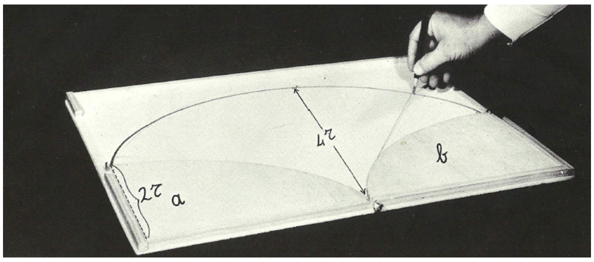
In realtà per diminuire il tempo conviene iniziare quasi verticalmente in modo da acquistare subito velocità, anche a scapito della maggiore lunghezza del cammino. Il profilo lungo il quale il tempo di caduta è minimo è, pertanto, la cicloide.

Lunghezza e area

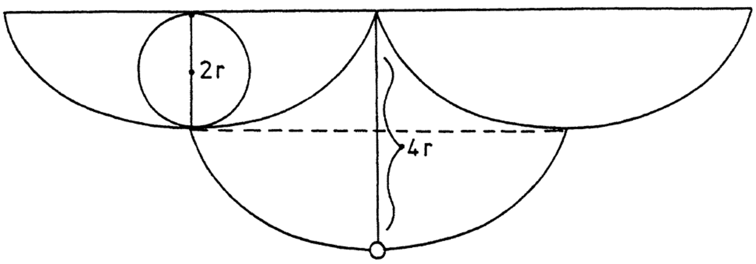
Altre proprietà della cicloide riguardano la misura della sua lunghezza e l'area compresa tra la curva e la base. La misura della curva è pari a 8 volte il raggio della circonferenza generatrice. L'area, invece, è pari a 3 volte quella della stessa circonferenza. Sappiamo che per una dimostrazione rigorosa di questi fatti basta far uso degli integrali. Per una prova adatta a ragazzi di scuola media, però, dobbiamo avvalerci di altre risorse magari più pratiche ed intuitive. Vediamo quindi come nei tabelloni vengano affrontate queste dimostrazioni. Partiamo dalla lunghezza. All'inizio di questo lavoro, ho accennato ad alcuni oggetti trovati insieme ai tabelloni che erano parte integrante dell'esposizione. Grazie ad alcuni di questi è stato possibile costruire la cicloide e dimostrare questi fatti fondamentali. Con il meccanismo in figura, infatti, notiamo come è semplice disegnare il profilo di una cicloide.



A livello didattico, è molto importante che lo studente venga a contatto con un meccanismo del genere che possa simulare la costruzione della curva in modo tale che l'alunno prenda coscienza di quello che va fatto. Al giorno d'oggi, siamo aiutati da software quali GeoGebra che ci permettono di simulare la costruzione della cicloide in modo semplice ed intuitivo. In quest'altra figura, invece, è racchiusa la dimostrazione per la lunghezza della cicloide alla portata dei ragazzi di scuola media.



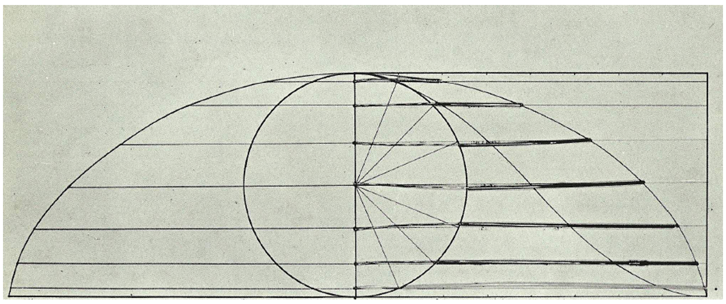
a e b sono due estremità di una cicloide. Se la corda, inizialmente aderente al profilo di a, viene da esso allontanata mantenendola tesa, possiamo costruire una curva che risulta essere ancora una cicloide. Quindi, la corda e metà curva hanno lunghezza uguale pari a $4r$.



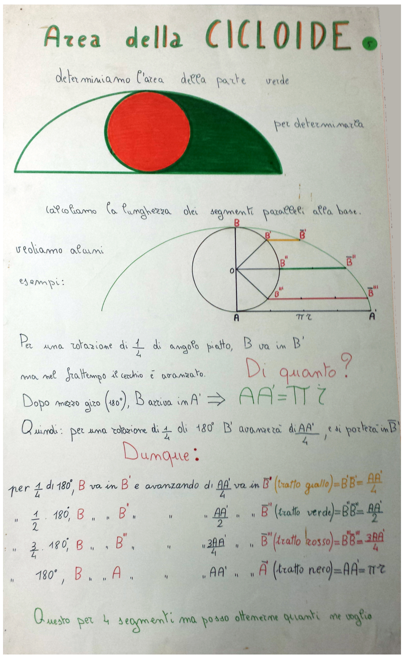
Passiamo ora alla dimostrazione riguardo l'area. A tal proposito, riportiamo uno stralcio di una lettera scritta da Galileo a Bonaventura Cavalieri il 24 febbraio 1640.

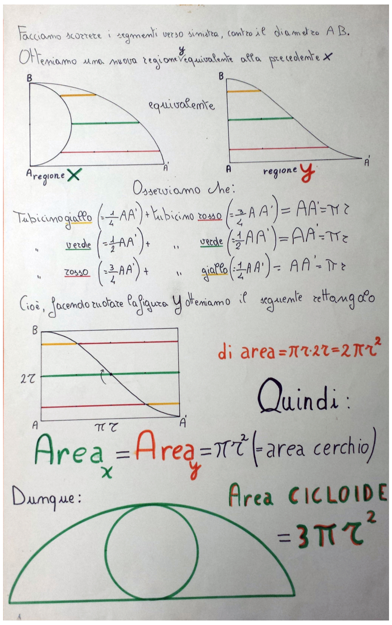
"Quella linea arcuata sono più di cinquanta anni che mi venne in mente di descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che la descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta."

Galileo Galilei molto probabilmente aveva tentato di dimostrare la proprietà dell'area della cicloide attraverso dei pesi ed una bilancia. Aveva intuito ci fosse un rapporto 3:1 ma, forse scoraggiato dalla non riuscita dei suoi esperimenti, si convinse che questo non fosse vero. Ricordiamo ancora che a livello di scuola media non possiamo ricorrere ad un approccio basato sugli integrali per ottenere la soluzione. Spinta da questo, la professoressa riporta nei tabelloni una dimostrazione efficace ed innovativa che supera in maniera elegante il problema. Convinta del fatto che l'osservazione sia alla base di un processo di apprendimento più efficace, la professoressa si avvale di un marchingegno anche in questo caso.

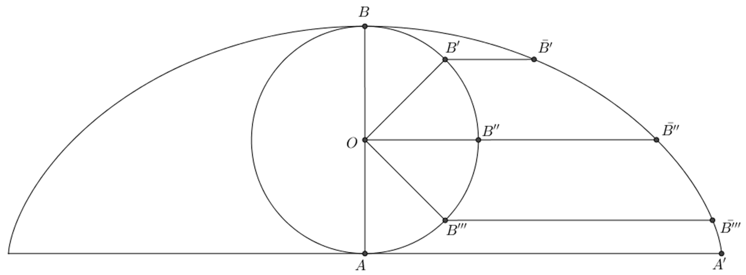


È un meccanismo che sfrutta gli scorrimenti, infatti, tra il cerchio e la cicloide ci sono dei tubicini scorrevoli. I cartelloni che riportano la dimostrazione sono i seguenti.





Osserviamo che la dimostrazione si concentra su un particolare settore della cicloide. Una volta dimostrato che l'area di questo è pari a πr^2, sarà semplice osservare che l'area compresa tra l'intera cicloide e la base è proprio $3\pi r^2$. Il primo passo consiste nel calcolare la lunghezza di alcuni segmenti paralleli alla base. Per farlo si tiene presente del fatto che i punti della cicloide sono descritti grazie alla composizioni di due moti: una rotazione ed una traslazione.



Per descrivere come il punto B arrivi sugli altri punti della cicloide, seguiamo il seguente ragionamento. B per arrivare in $\bar{B}'$ compie in successione i seguenti movimenti:

- da B va in B' grazie al moto di rotazione;
- da B' va in $\bar{B}'$ grazie al moto di traslazione.

Considerando la composizione dei due movimenti, quindi, per una rotazione della circonferenza pari a un quarto dell'angolo piatto, il punto B viene portato in $\bar{B}'$. Noi vorremmo conoscere la lunghezza del segmento $B'\bar{B}'$. Osserviamo che per mezzo giro, B arriva in A' e che AA' ha una lunghezza pari a metà circonferenza. Dunque, $AA' = \pi r$. Poiché $B'\bar{B}'$ corrisponde ad un quarto di mezzo giro, si avrà che

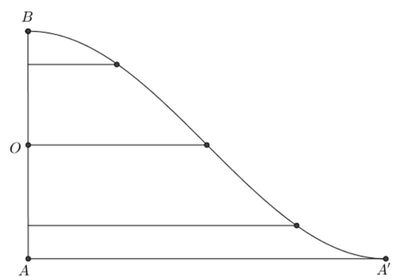
$$B'\bar{B}' = \frac{AA'}{4} = \frac{\pi r}{4}$$

Ripetendo gli stessi ragionamenti per una rotazione pari a $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{4}\pi$ otteniamo che

$$B''\bar{B}'' = \frac{AA'}{2} = \frac{\pi r}{2}$$

$$B'''\bar{B}''' = \frac{3}{4}AA' = \frac{3}{4}\pi r$$

Questi sono particolari segmenti che abbiamo considerato per semplificare i conti ma è possibile ripetere tutti i passaggi descritti sopra per qualsiasi punto sulla cicloide e per quanti punti vogliamo. Ora facciamo scorrere verso sinistra i segmenti fino a toccare il diametro AB. Otteniamo così una regione equivalente a quella di partenza per il metodo degli indivisibili.



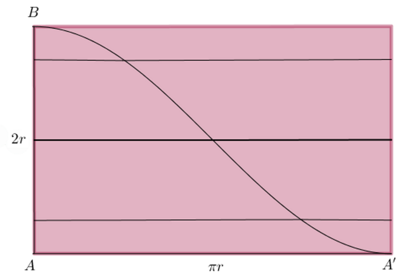
Facciamo alcune considerazioni.

$$\frac{1}{4}AA' + \tfrac{3}{4}AA' = AA' = \pi r$$

$$\frac{1}{2}AA' + \tfrac{1}{2}AA' = AA' = \pi r$$

$$\frac{3}{4}AA' + \tfrac{1}{4}AA' = AA' = \pi r$$

Cioè, facendo ruotare la figura riportata sopra otteniamo un rettangolo di base πr.



L'area di questo rettangolo è $2\pi r^2$. Concludendo, l'area del settore di cicloide considerato è uguale all'area della regione ottenuta tramite lo scorrimento dei segmenti a sinistra che altro non è metà del rettangolo ottenuto ruotando la figura. L'area della cicloide è, quindi, $3\pi r^2$

Parte II

Le mie lezioni

Capitolo 6

Introduzione

In questa seconda parte, esporremo il lavoro svolto in classe con il sussidio della professoressa Anna Baldini. In un incontro preliminare nel mese di febbraio, dopo una breve presentazione della 2^a H e su quanto era già stato svolto in classe, abbiamo deciso quali argomenti avremo presentato agli alunni. Nel percorso didattico del secondo anno non era stato affrontato ancora nessun argomento di geometria e quindi ci è sembrato opportuno continuare quello che era stato fatto il precedente anno. Seguendo le linee guida dei programmi ministeriali siamo pertanto giunti ad una conclusione. Le lezioni tenute in classe sarebbero state incentrate su diversi argomenti. In particolare le prime sulla somma degli angoli interni di un triangolo, su due punti notevoli, incentro e circocentro, e nelle successive avremmo parlato di area, equiscomponibilità fino ad arrivare al teorema di Pitagora. Abbiamo anche convenuto fosse opportuno, prima di organizzare il lavoro, proporre agli studenti un test di ingresso. Il test sarebbe stato anonimo, non sarebbe valso come valutazione ma solo come indice di preparazione degli alunni. Tutto questo per calibrare al meglio il nostro lavoro e per rendere le lezioni alla portata dei ragazzi. Qui di seguito presenteremo dunque questo test iniziale, le lezioni ed infine il compito che abbiamo proposto per la valutazione finale.

Capitolo 7

Test di ingresso

Ci è sembrato opportuno proporre questo test in quanto, purtroppo, la geometria non è sempre affrontata con lo spirito giusto. Spesso, infatti, questa rappresenta solo un modulo nel programma scolastico annuale. Alcuni professori si trovano a dover fare delle scelte e raramente il lavoro nell'ambito della geometria è portato avanti con continuità. Questo porta i ragazzi a dimenticare le cose e ad avere difficoltà a riprendere cose viste l'anno precedente. Per testare le competenze regresse degli studenti, quindi, abbiamo sviluppato un elaborato che potesse contenere tutto ciò che abbiamo ritenuto importante a livello di bagaglio culturale. Il test si è svolto il 5 marzo 2016 e i ragazzi non erano stati avvisati, in modo che non ripetessero e non si preparassero in nessun modo. Questo è stato pensato per gli studenti in seguito ad alcune ore di osservazione svolte in classe al fianco della professoressa Baldini. Alcuni degli argomenti presenti nel test sono stati successivamente ripresi in classe come, per esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo e la definizione di bisettrice. Per avere un metro di giudizio sull'efficacia delle nostre lezioni frontali, inoltre, abbiamo ritenuto opportuno riprenderne qualcuno anche nel compito in classe. Per renderci conto dell'andamento complessivo dei ragazzi, abbiamo redatto un'analisi che racchiude una statistica sulle risposte corrette e su quelle sbagliate. Il test di ingresso è stato inoltre compilato in modo tale da avere più copie diverse tra loro per evitare che i ragazzi copiassero. Questo avrebbe falsato il risultato dell'analisi e andava contro il nostro scopo. Di seguito ne riportiamo uno.

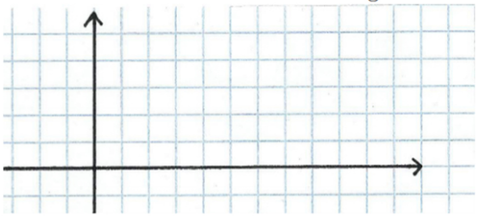
Test di ingresso di geometria
Durata massima: 60 minuti

Esercizio 1 Un triangolo ha i lati lunghi 6, 2 e 3 cm. Calcolane il perimetro.

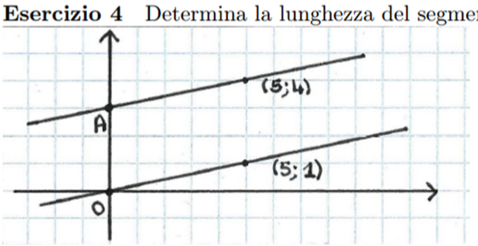
Secondo te è possibile disegnare questo triangolo? Se sì, disegnalo.

Esercizio 2 Un triangolo equilatero può essere rettangolo? Giustifica la tua risposta.

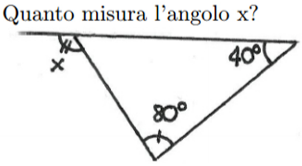
Esercizio 3 Calcola l'area del triangolo di vertici $(-1, 0)$ $(2, 0)$ e $(1, 2)$.



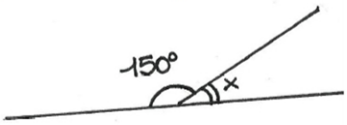
Esercizio 4 Determina la lunghezza del segmento OA.



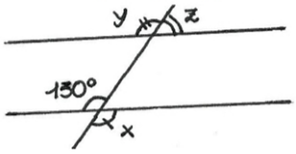
Esercizio 5 Quanto misura l'angolo x?



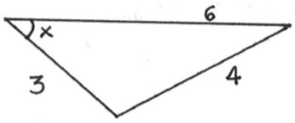
Esercizio 6 Quanto misura l'angolo x?

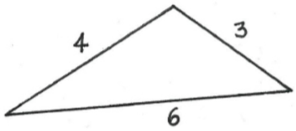


Esercizio 7 Quanto misurano gli angoli x, y e z?



Esercizio 8 Indica qual è l'angolo x nel triangolo di destra.



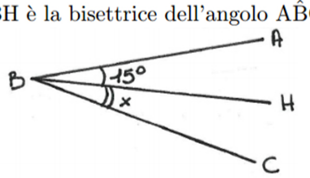


Esercizio 9 Due rette che si incontrano quanti angoli formano?

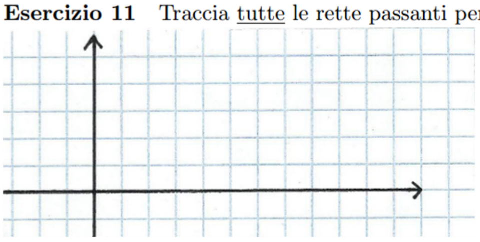
Questi sono tutti diversi tra loro?

In alcuni casi possono essere tutti uguali?

Esercizio 10 BH è la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$. Quanto misura l'angolo x?



Esercizio 11 Traccia <u>tutte</u> le rette passanti per entrambi i punti aventi coordinate $(-2, 3)$ e (2, -



Esercizio 12 Scrivi la definizione di rette parallele.

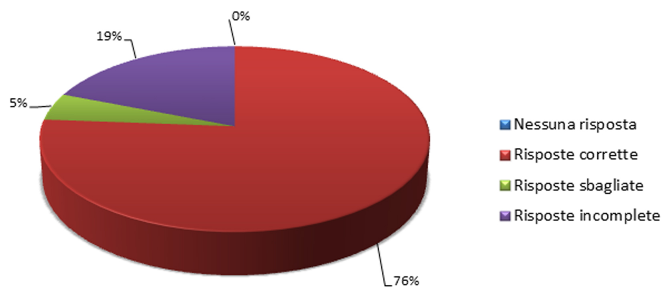
7.1 Analisi

Analizziamo ora nel dettaglio le risposte date dagli studenti. Di seguito riporteremo il testo dell'esercizio proposto con una successiva analisi dei dati raccolti.

Esercizio 1 Il testo di questo esercizio è il seguente:

Un triangolo ha i lati lunghi 6, 2 *e* 3 *cm. Calcolane il perimetro.*
Secondo te è possibile disegnare questo triangolo? Se sì, disegnalo.

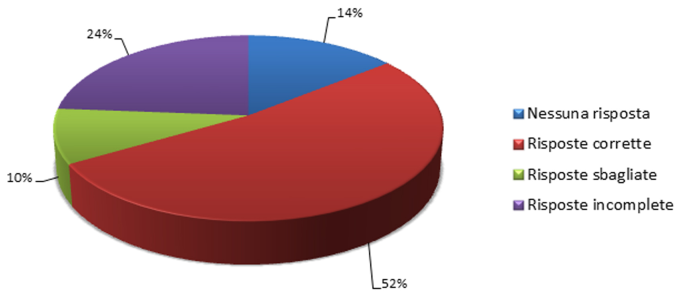
Questa domanda è stata inserita nel test per verificare la conoscenza del perimetro e di una particolare proprietà dei lati di un triangolo, la disuguaglianza triangolare. Con i dati assegnati, infatti, non era possibile costruire un triangolo perché i lati non soddisfano la disuguaglianza. Il perimetro, a parte alcune eccezioni, è stato calcolato nel modo corretto. Tra i tentativi fallimentari che riteniamo gravi riportiamo quello di uno studente che non ha risposto a nessuna delle due domande ma ha solo riportato la formula per il calcolo dell'area del triangolo e un altro in cui i dati sono stati moltiplicati tra loro e non sommati. Quasi tutti gli studenti, per rispondere alla seconda domanda, hanno fatto riferimento a tentativi pratici per disegnare il triangolo. L'ultimo esempio significativo che vogliamo riportare è il seguente. Un solo studente dopo aver calcolato il perimetro e aver trascritto la risposta giusta, ha cancellato il risultato ottenuto e riportato la risposta *Impossibile*. Di seguito riportiamo un grafico in cui abbiamo racchiuso i dati relativi a questo esercizio.



Esercizio 2 Il secondo esercizio è stato formulato in questo modo.

Un triangolo equilatero può essere rettangolo? Giustifica la tua risposta.

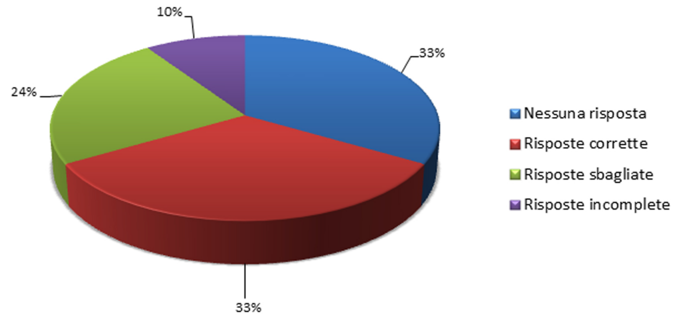
L'obiettivo era analizzare le conoscenze di triangolo equilatero e di somma degli angoli interni di un triangolo. La risposta più riportata è stata quella giusta ma abbiamo riscontrato qualche imprecisione nelle giustificazioni. Le risposte con giustificazione completamente errate le abbiamo inserite nella categoria *Risposte incomplete*. In pochi hanno fatto riferimento agli angoli interni del triangolo, molti invece si sono appellati all'uguaglianza dei lati. Riportiamo di seguito il grafico relativo a queste risposte.



Esercizio 3 Riportiamo il testo di questo terzo esercizio.

Calcola l'area del triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(2, 0)$ *e* $(1, 2)$.

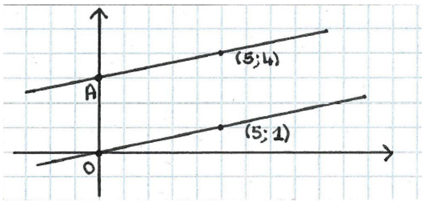
Questo tipo di problema è stato proposto con un duplice scopo. In primo luogo volevamo verificare che gli studenti sapessero localizzare nel modo corretto i punti nel piano cartesiano e di conseguenza calcolare la lunghezza di un segmento. Inoltre volevamo capire se la formula per il calcolo dell'area di un triangolo facesse parte del loro bagaglio culturale oppure no. Riportiamo subito l'analisi dei dati.



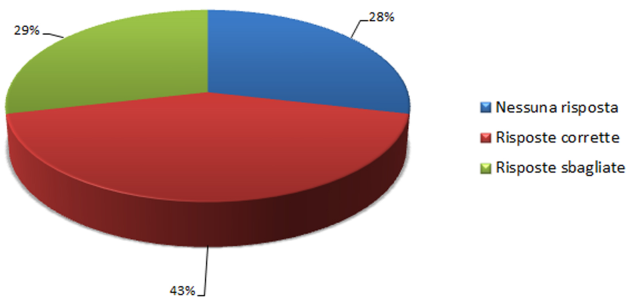
Ci colpisce subito la percentuale di risposte non date. Inoltre abbiamo riscontrato in alcuni elaborati l'errore di scambiare l'ascissa e l'ordinata nelle coordinate dei punti che abbiamo racchiuso in *Risposte incomplete* in quanto successivamente la formula dell'area è stata utilizzata nel modo corretto.

Esercizio 4 Il quarto esercizio è stato inserito per verificare se gli studenti sapessero gestire le proprietà delle rette parallele. In particolare è una semplice applicazione del teorema di Talete. Il testo dell'esercizio è il seguente.

Determina la lunghezza del segmento OA..



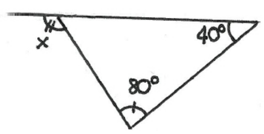
Nell'analisi non abbiamo contemplato *Risposte incomplete* in quanto non vi rientravano. Anche qui colpisce la percentuale di risposte non date. Ecco qui riportato il grafico.



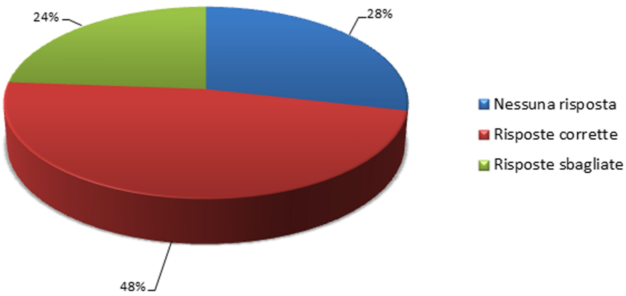
La maggior parte delle risposte sbagliate, invece della lunghezza del segmento, riportavano le coordinate del punto A.

Esercizio 5 Riportiamo di seguito il testo del quinto esercizio.

Quanto misura l'angolo x?



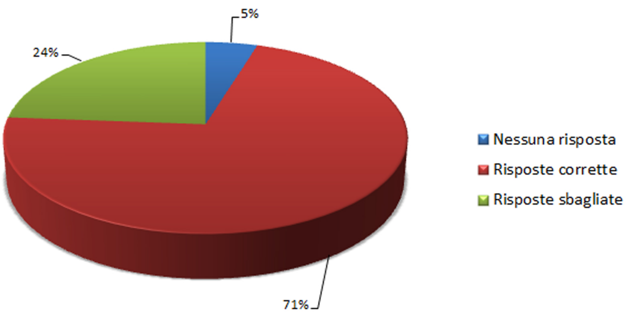
Questa tipologia di esercizio è stata inserita per due motivi. In primo luogo volevamo testare la conoscenza di angoli supplementari. Successivamente verificare che gli studenti fossero a conoscenza che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. Quest'ultima in particolare è stata proposta perchè verrà in seguito ripresa nelle lezioni frontali che proporremo come esempio di una semplice dimostrazione. Le difficoltà riscontrate nel rispondere a questa domande non sono eccessive come è evidente dalla seguente analisi.



Esercizio 6 Qui l'unico scopo voleva essere appurare se gli studenti fossero in grado di calcolare l'angolo supplementare di un angolo dato. Il testo dell'esercizio è il seguente.

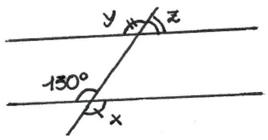
Quanto misura l'angolo x?

L'esercizio, anche se potrebbe sembrare troppo semplice, ci ha permesso di mettere in luce alcune difficoltà insite negli studenti. Queste hanno origine sia nella difficoltà di calcolo che nella mancanza della nozione di angoli supplementari. Queste possono risultare evidenti nel seguente grafico.

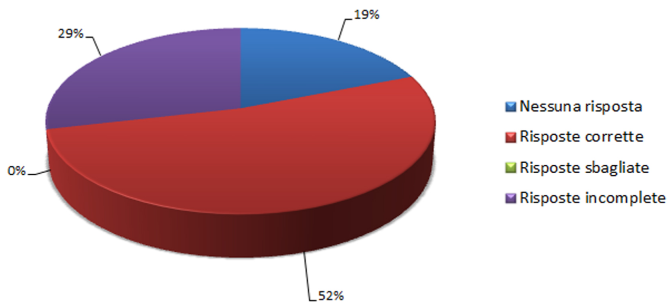


Esercizio 7 Per quello che avevamo in mente di presentare nelle lezioni frontali, era importante che gli studenti avessero almeno un'idea degli angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale. Per questo motivo abbiamo ritenuto opportuno inserire nel test questo esercizio.

Quanto misurano gli angoli x, y e z?

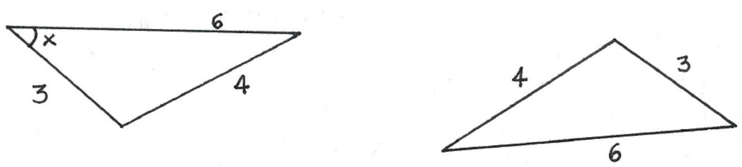


Per l'analisi dei dati abbiamo reinserito le *Risposte incomplete* in quanto alcuni studenti hanno risposto correttamente per quanto riguarda i valori di uno o due angoli, ma non hanno riportato i giusti valori per tutti e tre gli angoli presenti nell'esercizio. I dati sono riportati di seguito.

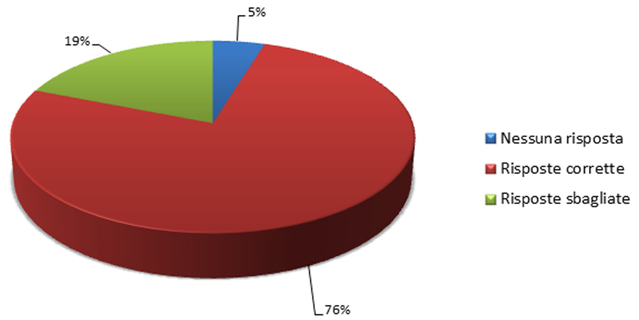


Esercizio 8 Il testo di questo esercizio è riportato di seguito.

Indica qual è l'angolo x nel triangolo di destra.



Con questo esercizio volevamo testare le capacità dinamiche degli studenti. Quello che viene richiesto, infatti, è identificare un particolare angolo di un triangolo in un altro uguale riportato accanto ma ruotato e ribaltato. Non considerare un triangolo con la base perfettamente orizzontale o con gli angoli tutti acuti, infatti, può creare qualche problema se gli studenti non sono stati abituati fin da subito a questo tipo di esercizio visivo. Il seguente grafico mette in luce il fatto che gli studenti non abbiano riscontrato particolare difficoltà.



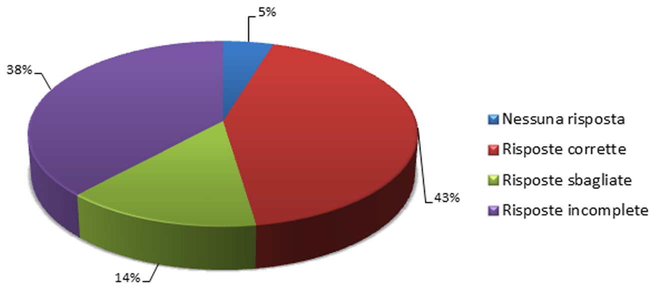
Esercizio 9 Come abbiamo detto all'inizio di questa sezione, lo scopo di questo test di ingresso è stato verificare le conoscenze che abbiamo ritenuto importanti a livello di bagaglio culturale. Tra queste sicuramente rientra la nozione di angolo. Per questo motivo è stato inserito questo ulteriore esercizio di cui riportiamo il testo.

Due rette che si incontrano quanti angoli formano?

Questi sono tutti diversi tra loro?

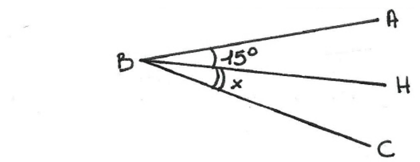
In alcuni casi possono essere tutti uguali?

Alcune difficoltà sono state riscontrate nel rispondere alla prima domanda. Alcuni studenti, infatti, hanno affermato che gli angoli formati da due rette sono *infiniti*. Di conseguenza hanno anche sbagliato le altre due risposte. Altri invece hanno riportato la giusta risposta per quanto riguarda la prima domanda ma hanno sbagliato una delle altre due o entrambe. Abbiamo racchiuso questi fatti nel seguente grafico.

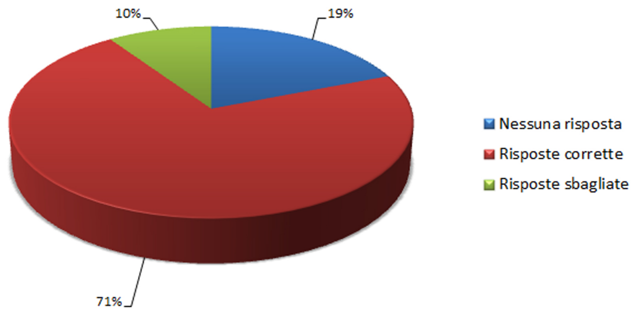


Esercizio 10 Un'altra nozione ritenuta da noi importante è quella di bisettrice. Questa, inoltre, sarà ripresa anche in seguito nelle lezioni che presenteremo agli studenti. A questo proposito abbiamo inserito il seguente esercizio.

BH è la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$. Quanto misura l'angolo x?



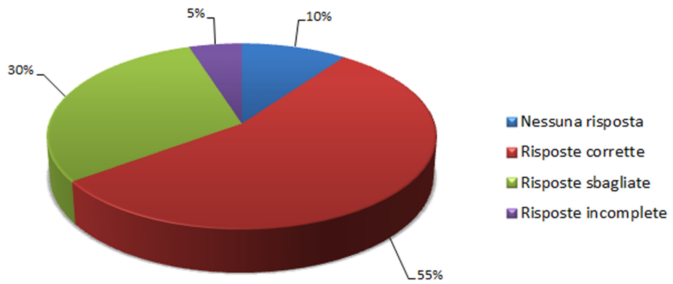
L'analisi delle risposte degli studenti è riportata di seguito



Esercizio 11 Le conoscenze di base a livello della geometria euclidea comprendono anche il postulato che per due punti passa una ed una sola retta. Per verificare che questo fosse chiaro per i ragazzi abbiamo inserito il seguente esercizio.

Traccia <u>tutte</u> le rette passanti per entrambi i punti aventi coordinate $(-2, 3)$ *e* $(2, -1)$

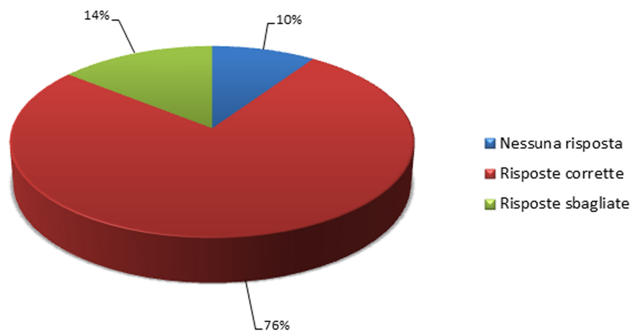
L'aver sottolineato la parola *tutte* voleva mettere alla prova gli studenti. Questo ha fatto vacillare alcuni che hanno riportato la risposta *infinite rette* o ne hanno disegnate due, mentre altri non si sono fatti trarre in inganno. L'errore che anche qui abbiamo riscontrato è l'aver scambiato ascissa e ordinata dei punti e quindi aver disegnato la retta sbagliata. Questo tipo di errori sono stati inseriti nelle *Risposte incomplete*.



Esercizio 12 L'ultima definizione che abbiamo voluto verificare è quella di rette parallele. Il testo di questo esercizio è il seguente.

Scrivi la definizione di rette parallele.

Questa domanda l'abbiamo posta in maniera completamente formale perché volevamo testare anche la capacità degli studenti di esprimere tramite parole concetti matematici. Gli studenti non hanno riscontrato grosse difficoltà e hanno fatto riferimento a rette che non si incontrano mai, equidistanti ma mai coincidenti. Riportiamo l'analisi di quest'ultimo esercizio.



Conclusioni Concludiamo l'analisi dei test di ingresso affermando che, a parte qualche caso particolarmente critico, gli studenti della classe in esame hanno, chi più chi meno, le conoscenze di base che sono per noi necessarie per affrontare il lavoro che ci eravamo proposti di presentare.

Capitolo 8

Lezioni

Una volta ottenuti i risultati commentati nella sezione precedente, abbiamo avuto delle ottime basi su cui costruire il nostro lavoro. Ogni lezione è stata calibrata e strutturata in modo tale che tutti in classe si sentissero coinvolti e partecipi. Abbiamo posto l'argomento centrale, fin dove è stato possibile, sotto forma di problem solving in modo tale da cercare di creare un collegamento con la realtà. Nelle prossime pagine presenteremo il progetto della lezione preparato come base per un'esposizione chiara e lineare. Di seguito, il riassunto fornito ai ragazzi contenente i punti cruciali della lezione in modo tale che avessero il materiale opportuno per seguire il percorso e per studiare al meglio in preparazione del compito in classe. Alcuni di questi contengono anche degli esercizi assegnati agli studenti. Infine un diario di bordo in cui vengono riportate le dinamiche registrate in classe ed eventuali interventi e commenti degli studenti o della professoressa.

8.1 Lezione 1

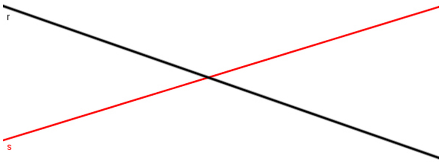
Lezione

Punti di partenza

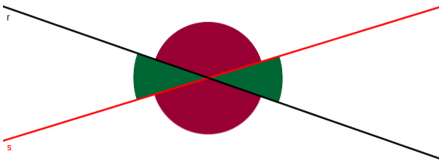
- Definizione di rette parallele
  Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto di intersezione.

- V postulato di Euclide
  Per un punto P non appartenente a una retta r si può tracciare un'unica retta parallela a r.
  Su questo punto ci siamo voluti soffermare in quanto riteniamo che sia una nozione di base facilmente comprensibile tramite dei disegni. In più il fatto che i matematici per circa 2000 anni tentarono di dimostrare l'unicità ma giunsero alla conclusione che questa proprietà non può essere dimostrata, è storicamente importante e rilevante per capire che la matematica è una scienza aperta.

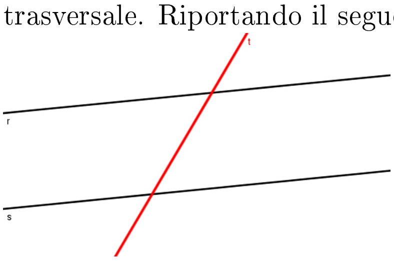
Rette parallele tagliate da una trasversale Nel test di ingresso abbiamo inserito una domanda per verificare la comprensione e la padronanza del concetto di angolo. Volendo riprendere proprio quella domanda abbiamo chiesto nuovamente agli studenti in quante parti due rette incidenti dividono il piano. Abbiamo dunque lavorato a piccoli passi per cercare di sedimentare meglio la nozione di angolo e sottolineare altri aspetti che sarebbero stati utili nel corso della lezione. Abbiamo disegnato sulla lavagna due rette incidenti



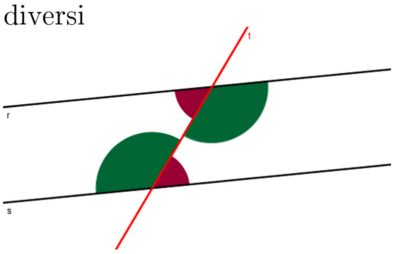
e successivamente abbiamo fatto notare loro che le zone in totale sono quattro. Ne abbiamo approfittato poi per riprendere il concetto di angoli supplementari, di angoli opposti al vertice e abbiamo concluso che queste quattro parti del piano sono a due a due uguali mettendolo in risalto con colori opportuni.



A questo punto, in modo graduale, siamo passati alla domanda successiva. Abbiamo chiesto quanti angoli formano due rette parallele tagliate da una trasversale. Riportando il seguente disegno alla lavagna



abbiamo successivamente evidenziato gli angoli di nostro interesse con colori diversi

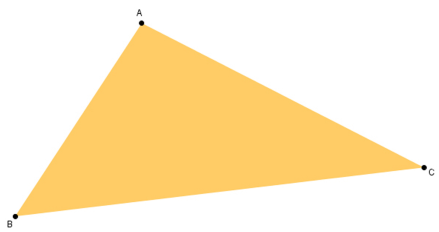


Questa figura è stata utile per evidenziare quattro degli otto angoli di nostro interesse e in più è stata utilizzata per dare la definizione di angoli alterni interni. Non abbiamo appesantito la notazione definendo anche gli altri angoli ma siamo andati avanti ad identificare gli angoli uguali a quelli che abbiamo colorato sfruttando gli angoli supplementari e opposti al vertice prima ripresi. Il passo successivo è stato quello di chiedere agli studenti quali proprietà erano evidenti dal disegno ed eventualmente farle riportare a loro. Speravamo, a questo punto, che la situazione di due sole rette nel piano potesse essere stata assimilata e riportata in questo caso. Se così non fosse avremmo ripetuto l'argomentazione riportata prima sfruttando le nozioni di angoli supplementari e opposti al vertice.

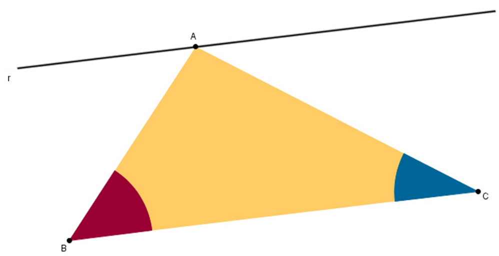
Criterio di parallelismo Una volta definiti gli angoli alterni interni, abbiamo fatto notare agli studenti che utilizzando solo la definizione di rette parallele, è difficile stabilire se due rette godono di questa proprietà oppure no. Dovremmo infatti analizzare gli infiniti punti delle due rette per capire se coincidono o no. È dunque necessario definire un criterio di parallelismo. *Due rette sono parallele se e solo se queste, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali.*
Non ci siamo soffermati ulteriormente su questo principio.

Somma degli angoli interni di un triangolo Come prima dimostrazione affrontata dai ragazzi, siamo voluti partire da qualcosa di semplice, intuitivo ma non scontato in particolare per far capire quale sia il giusto approccio per una dimostrazione in geometria.

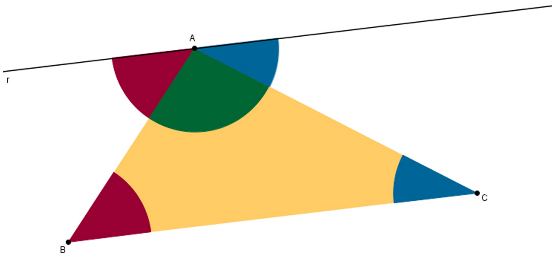
Dimostrazione Partendo da un generico triangolo ABC



tracciamo la retta parallela alla base BC e passante per il vertice A e mettiamo in evidenza i due angoli alla base, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.

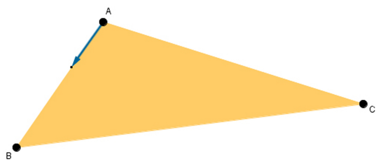


A questo punto, ricordando il criterio di parallelismo introdotto prima, sappiamo che le due rette formano angoli alterni interni congruenti. Possiamo quindi metterlo in evidenza sulla figura e osservare che, insieme all'angolo $B\hat{A}C$, questi due angoli formano un angolo piatto.

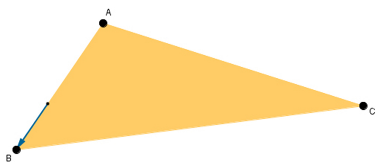


Applicazioni Ci sono diversi modi concreti per convincersi della veridicità di questa proprietà. Ne esponiamo due.

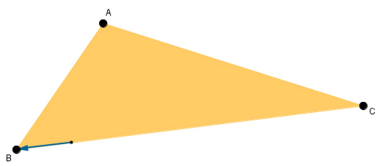
Prima applicazione Disponiamo una penna lungo il segmento AB con orientazione da A verso B. Per disegnarla in modo opportuno faremo uso di un vettore.



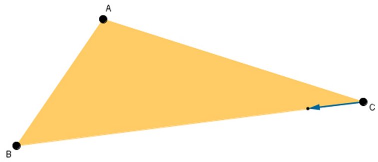
Percorriamo tutto il segmento AB fino a far coincidere la freccia del vettore con il vertice B.



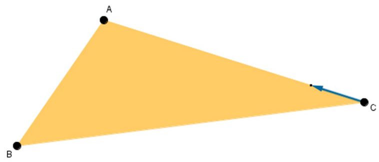
A questo punto ruotiamolo con un'ampiezza pari all'angolo $A\hat{B}C$ fino a disporlo sul segmento BC.



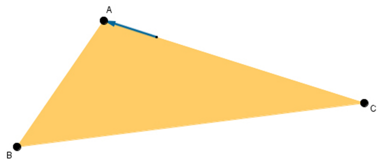
Percorriamo anche questo segmento fino a raggiungere il vertice C con la coda del vettore.



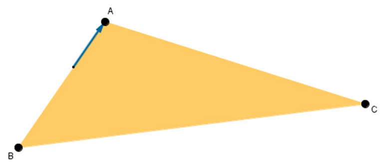
Ruotiamolo ancora ma questa volta con un'ampiezza pari a $B\hat{C}A$.



Disponiamo ora il vettore con la freccia sul vertice A dopo aver percorso il segmento CB.



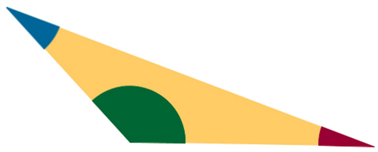
L'ultima operazione da fare è ruotare il vettore di un angolo di ampiezza $C\hat{A}B$.



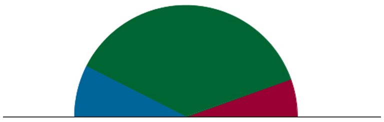
Alla fine di questo percorso si può osservare come il vettore, che all'inizio era disposto in modo tale che la coda coincidesse con il vertice A, ora sia disposto con la freccia su A. Dunque abbiamo operato sul vettore una rotazione di 180°, che corrisponde, quindi, alla somma degli angoli interni del triangolo.

Seconda applicazione Questo secondo approccio è più manuale. Abbiamo chiesto ai ragazzi di ritagliare un triangolo qualsiasi da un foglio

e di colorare di tre colori diversi gli angoli.



Una volta fatto questo, abbiamo chiesto loro di tagliare gli angoli e di disporli su un altro foglio con i lati disposti uno adiacente all'altro. Si può così osservare come effettivamente si ottenga un angolo piatto.



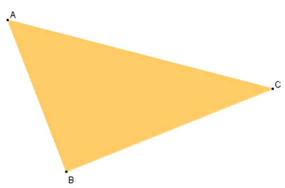
Questa seconda applicazione è importante anche perché trasmette ai ragazzi l'invarianza di questa proprietà. Indipendentemente dal triangolo che ognuno di loro ha disegnato, infatti, è sempre verificata.

Esempi Una volta affrontata la dimostrazione e cercato di convincere i ragazzi della veridicità di questa proprietà con attività pratiche, siamo passati ad esercizi per il calcolo degli angoli interni di un triangolo. Ne abbiamo affrontati tre in particolare:

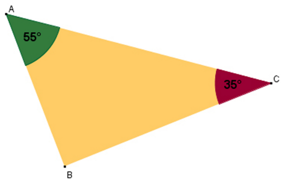
- Calcolare un angolo interno di un triangolo conoscendo gli altri due.
- Calcolare gli angoli interni di un triangolo equilatero.
- Calcolare gli angoli interni di un triangolo isoscele conoscendone solo uno.

Vediamo adesso ciascuno di questi esempi più in dettaglio.

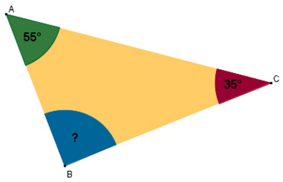
Primo esempio Siamo partiti da un generico triangolo ABC



e abbiamo detto agli studenti che gli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ misurano rispettivamente 55° e 35°.



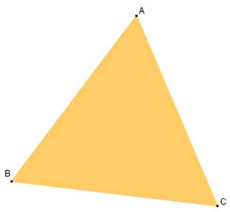
Quanto misura dunque l'angolo $C\hat{B}A$?



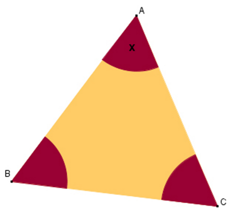
Abbiamo chiesto alla classe quale fosse il giusto approccio per affrontare questo problema e insieme siamo arrivati alla ovvia conclusione.

$$C\hat{B}A = 180° - (55° + 35°) = 90°$$

Secondo esempio Siamo dunque passati al caso del triangolo equilatero. Dopo aver ricordato con gli studenti cosa si intende per triangolo equilatero, ne abbiamo disegnato uno alla lavagna.



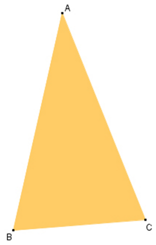
Abbiamo successivamente messo in evidenza gli angoli, osservando che sono tutti uguali



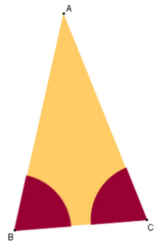
e chiesto se fosse possibile conoscerne l'ampiezza. Ancora una volta, insieme agli studenti, abbiamo messo in luce la giusta procedura.

$$x = 180° : 3 = 60°$$

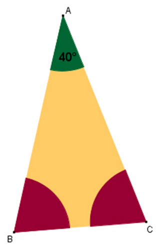
Terzo esempio L'ultimo esempio che abbiamo affrontato in classe per una completa trattazione dell'argomento, è la ricerca dell'ampiezza degli angoli interni di un triangolo isoscele. Dopo aver ricordato la definizione, abbiamo disegnato alla lavagna un triangolo isoscele.



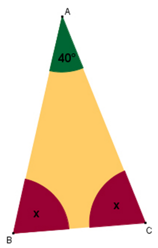
Successivamente abbiamo messo in evidenza gli angoli uguali



e posto il seguente problema:
Sapendo che l'angolo al vertice $B\hat{A}C$ misura 40°, quanto misurano gli angoli alla base?



Abbiamo chiesto a loro di affrontare il problema cercando di capire se quello che avevamo detto fino a quel momento era stato assimilato. Alcuni di loro sono stati in grado di impostare il problema nel modo corretto. Dopo aver posto uguale a x l'angolo incognito

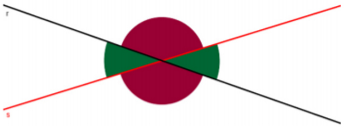


con una semplice equazione, $x = (180° - 40°) : 2 = 70°$, sono stati in grado di trovare la misura degli angoli alla base.

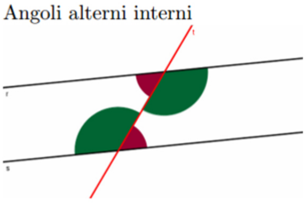
Riassunto

Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Lezione 1

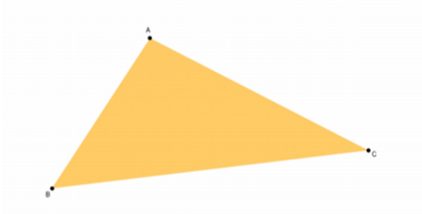
- Definizione di rette parallele
  Due rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto di intersezione.
- V postulato di Euclide
  Per un punto P non appartenente ad una retta r si può tracciare un'unica retta parallela a r.
- Angoli opposti al veritce

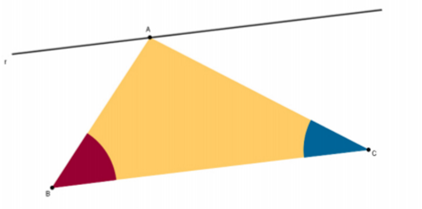
- Angoli alterni interni

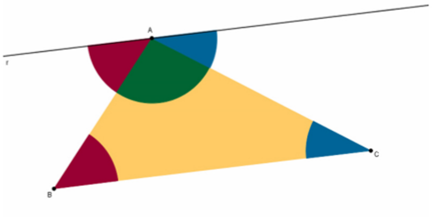
- Criterio di parallelismo
  Due rette sono parallele se e solo se queste, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali.
- La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.
  Dimostrazione. Partendo da un generico triangolo ABC

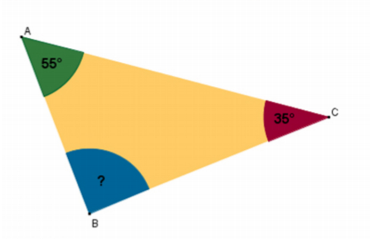
  tracciamo la retta parallela alla base BC e passante per il vertice A e mettiamo in evidenza i due angoli alla base, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.

A questo punto, ricordando il criterio di parallelismo introdotto prima, sappiamo che le due rette formano angoli alterni interni congruenti. Possiamo quindi metterlo in evidenza sulla figura e osservare che, insieme all'angolo $B\hat{A}C$, questi due angoli formano un angolo piatto.

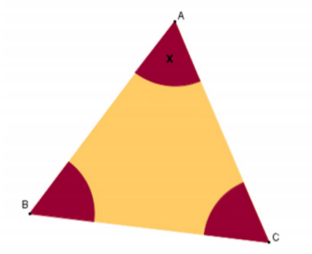


- Misura di un angolo interno conoscendo l'ampiezza degli altri due.
  Quanto misura dunque l'angolo $C\hat{B}A$?



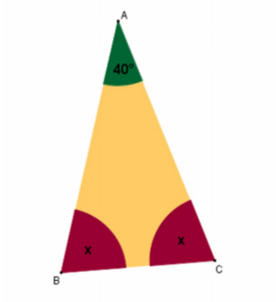
$C\hat{B}A = 180° - (55° + 35°) = 90°$

- Angoli interni di un triangolo equilatero



$x = 180° : 3 = 60°$

- Angoli interni di un triangolo isoscele.
  Sapendo che l'angolo al vertice $B\hat{A}C$ misura 40°, quanto misurano gli angoli alla base?



$x = (180° - 40°) : 2 = 70°$

Diario di bordo

La prima lezione che ho tenuto nella 2^a H del Liceo della Scienze Umane si è svolta alla prima ora del 5 aprile 2016. Gli alunni assenti erano quattro e nell'aula erano presenti anche la professoressa Baldini e le due professoresse di sostegno. L'argomento principale di questa lezione è stata la dimostrazione che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. L'approccio utilizzato per affrontare questa lezione è stato il seguente. Sono partita da argomenti basilari che sarebbero risultati utili nel seguito della lezione chiedendo ai ragazzi se ricordassero qualcosa a proposito. Ho subito apprezzato la buona predisposizione che ho osservato negli studenti. Non si sono tirati indietro, anzi sono sembrati attenti ed interessati. Approfittando di questo ho fatto dire a loro tutto quello che ricordavano intervenendo solo dove era necessario. Insieme a loro ho quindi ricordato che cosa si intende per rette parallele, ho introdotto il V postulato di Euclide e ripreso alcune domande fatte nel test di ingresso. Una volta terminata questa prima fase di riepilogo, sono passata all'argomento principale della lezione. Sapendo che questa dimostrazione sarebbe stata la prima che gli studenti avrebbero affrontato, ho proposto la questione con molta cautela cercando di esporla con chiarezza facendo riferimento solo alle cose che avevo ripreso prima. Per agevolare la comprensione ho ritenuto opportuno utilizzare dei gessi colorati per evidenziare gli angoli uguali e per rendere il tutto più intuitivo almeno a livello grafico. Per essere sicura che i ragazzi avessero ben chiari tutti i passaggi e gli strumenti utilizzati, l'ho ripetuta due volte. Conclusa la dimostrazione, siamo giunti alla fase finale in cui ho esposto i semplici esempi che si possono leggere alla fine della descrizione della prima lezione. Qui ho cercato nuovamente di coinvolgere la classe, chiedendo a una studentessa di risolvere l'esempio del triangolo isoscele alla lavagna. Dopo aver assegnato gli esercizi per casa e aver distribuito un foglio riassuntivo contenente le cose fondamentali descritte, la lezione è terminata. Questa prima esperienza è stata molto positiva per quanto mi riguarda. Era la prima volta che affrontavo un'intera ora di lezione e prepararla e gestirla è stato molto istruttivo per me.

8.2 Lezione 2

Lezione

Punti di partenza

- Idea di percorso più breve.
  Ci siamo proposti di far capire agli studenti quale fosse, dati due punti A e B, il percorso più breve per collegarli. Con l'aiuto di una semplice rappresentazione grafica, lo scopo era escludere tutte le curve che non siano il segmento di estremi A e B.

- Primo criterio di congruenza.
  Due triangoli che hanno ordinatamente congruenti **due lati** e **l'angolo tra di essi compreso** sono congruenti.

- Proprietà del piano e della retta.
  Abbiamo voluto richiamare la seguente proprietà in maniera rigorosa.
  *Un **piano** è un insieme di punti. Ogni **retta** è un sottoinsieme del piano.*

- Definizione di asse.
  Il nostro scopo era far ricordare agli studenti cosa fosse l'asse per iniziare a introdurre quello che poi sarebbe stato affrontato nella seconda parte della lezione.
  *Dato un segmento, si chiama **asse** la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio.*

- Circonferenza come luogo geometrico.
  Partendo da un punto A e considerando una certa distanza r, ci si può chiedere quali sono tutti i punti che distano da A proprio r. Questo approccio problematico lo abbiamo voluto introdurre per questa semplice proprietà in modo poi da riproporlo per gli argomenti successivi.
  La circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto dato.

Una volta affrontati questi primi punti importanti sia a livello formale che a livello logico, siamo passati all'argomento principale della lezione.

L'asse come luogo geometrico Così come abbiamo fatto per la circonferenza, abbiamo scelto di affrontare questa parte della lezione attraverso un problema proposto.

Problema *Due sindaci di città adiacenti devono trovare un accordo per costruire un nuovo centro commerciale. La nuova costruzione dovrà sorgere in un punto che dovrà essere alla stessa distanza dalle due città. Dove verrà costruito?*

Il metodo che abbiamo voluto utilizzare per affrontare il problema è il seguente. Dopo aver disegnato alla lavagna due punti, A e B, si può riproporre la domanda nel seguente modo:

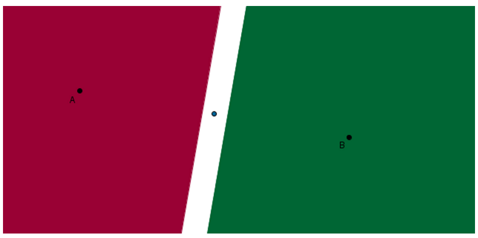
quali sono i punti più vicini alla città indicata dal punto A e quali quelli più vicini alla città B?

Si riportano dunque alla lavagna il semplice disegno dei due punti e si colorano con due colori differenti le zone che racchiudono i punti più vicini alle due città. Dopo aver evidenziato le zone più facili da individuare, si giunge ad una situazione simile a quella riportata nel seguente disegno.

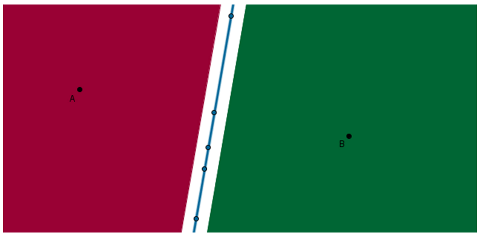
Arrivati a questo punto, è spontaneo ricordare insieme agli studenti quale sia la definizione di punto medio di un segmento.

Dato un segmento, il suo ***punto medio*** *è il punto che lo divide in due segmenti congruenti.*

Avendo sottolineato, quindi, la presenza di punti che si trovano alla stessa distanza da entrambe le città, viene utilizzato ora un nuovo colore per evidenziare tutti i punti che soddisfano questa proprietà.



Iniziando quindi dal punto medio del segmento di estremi A e B, si va avanti alla ricerca di altri punti che rispettano questa proprietà. Dopo averne individuati altri, si osserva facilmente che questi giacciono su una retta così come si può osservare nella figura successiva.

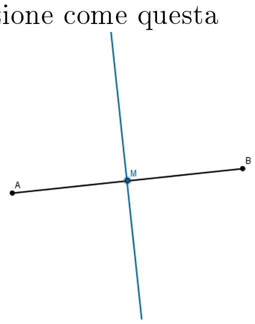


Per completare la figura si procede con l'analisi dei punti più vicini alla retta individuata giungendo a questa netta suddivisione dello spazio.

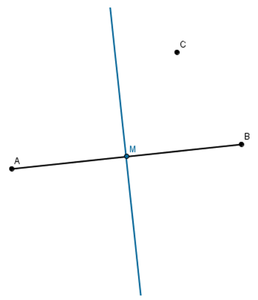
Definizione formale Completata questa prima parte visiva e intuitiva, si passa ad una fase più rigorosa in cui viene formalizzato tutto introducendo la proprietà dell'asse.

*L'**asse** è il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti assegnati.*

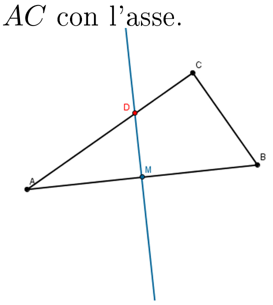
Dunque la retta trovata è l'asse del segmento di estremi A e B. Tutti i punti presenti su questa retta, quindi, sono possibili punti in cui può sorgere il centro commerciale tra le città che abbiamo considerato. Abbiamo fatto particolare attenzione a sottolineare questo concetto. Visivamente, infatti, è molto semplice capire che il punto medio del segmento di estremi A e B è equidistante da questi punti. A volte, però, si è portati a pensare che sia l'unico. Il passo successivo è dimostrare che questi punti sono gli *unici* che godono di questa proprietà. Per dimostrarlo consideriamo una rappresentazione come questa



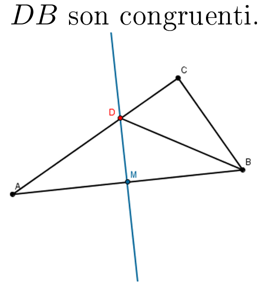
e un punto non appartenente all'asse.



La dimostrazione prosegue in questo modo. Dopo aver collegato il punto C con gli estremi A e B, chiamiamo D il punto di intersezione del segmento AC con l'asse.



Colleghiamo poi il punto D con l'estremo B e osserviamo che i segmenti AD e DB son congruenti.



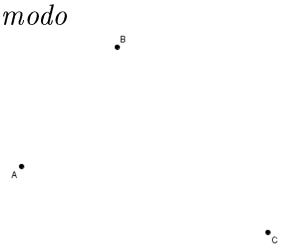
A questo punto per ottenere la tesi basta osservare che:

- $AC = AD + DC$
- $AD = BD$

e quindi $AC = BD + DC$.
Ricordando ora che un lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due, otteniamo che
$BC < BD + DC$
ovvero
$BC < AC$.
Dunque, preso un qualsiasi punto non appartenente all'asse, non è equidistante dagli estremi A e B. Pertanto tutti i punti dell'asse sono i *soli* a soddisfare questa proprietà.

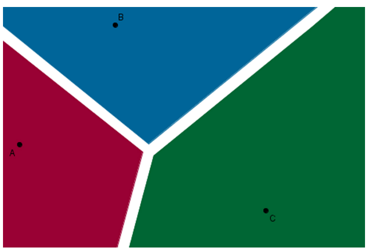
Definizione di circocentro Anche qui, siamo partiti da un problema concreto per arrivare ad una formalizzazione.

Problema *Supponiamo adesso che tre amici vivano in tre città diverse e che vogliano incontrarsi per passare insieme una serata. Per trovare un accordo che possa andar bene a tutti, decidono di incontrarsi nel punto più comodo, ovvero un cinema che si trova alla stessa distanza dalla tre città in cui vivono i tre ragazzi. Se su una cartina le tre città sono collocate in questo modo*

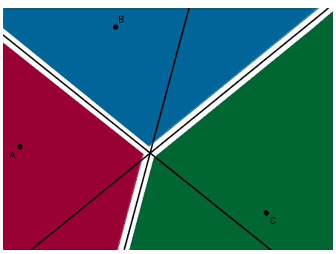


dove si trova il cinema?

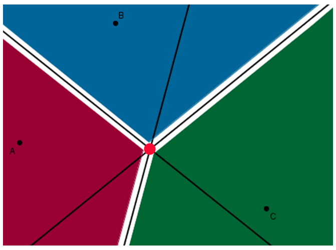
Con questo problema abbiamo voluto spostare l'attenzione su tre differenti punti e non più su due. Ripetendo le stesse argomentazioni proposte fino ad ora, coloriamo in modo diverso le zone contenenti i punti più vicini alle diverse città.



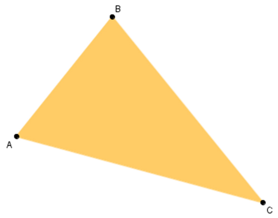
Cercando di creare un collegamento con quanto fatto fino ad ora, iniziamo a ragionare considerando due punti per volta. Attraverso il primo problema affrontato è stata messa in evidenza la proprietà fondamentale dell'asse. Considerate dunque solo le città A e B, il cinema dovrà trovarsi sull'asse del segmento con estremi i due punti presi in esame. Ripetendo il discorso per le altre coppie di punti si giunge così alla seguente figura.



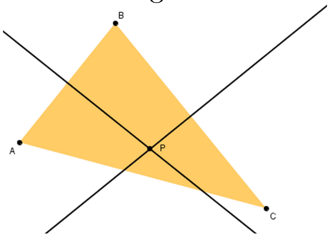
Arrivati a questo punto è evidente che le tre rette hanno un punto in comune. Questo punto è equidistante dalle tre città in cui vivono i tre ragazzi. Dunque il cinema sorge proprio lì.



Definizione formale Risolto il problema, possiamo formalizzare il tutto. Consideriamo il triangolo di vertici A, B e C



costruiamo gli assi dei lati AB e BC e chiamiamo P il loro punto di incontro.

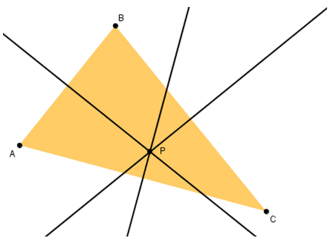


Abbiamo dunque che

- $AP = PB$
- $BP = PC$

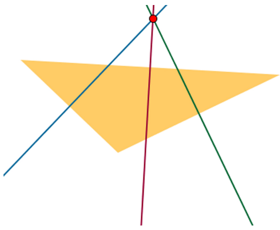
pertanto, per la proprietà transitiva, $AP = PC$.

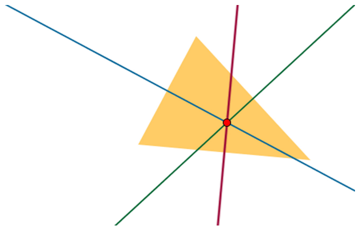
P, quindi, è un punto equidistante sia da A che da C, ovvero, l'asse del segmento AC passa per il punto P.



Gli ***assi*** *dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, detto* ***circocentro****.*

Per concludere la lezione, si può osservare che il circocentro non è sempre interno al triangolo considerato, ma può essere anche esterno.





Riassunto

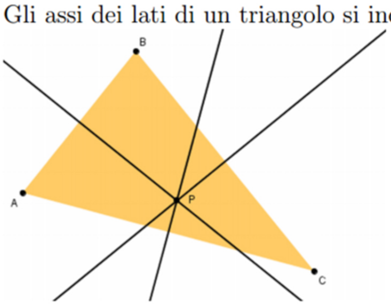
Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Lezione 2

- Primo criterio di congruenza.
  Due triangoli che hanno congruenti **due lati** e **l'angolo tra di essi compreso** sono congruenti.

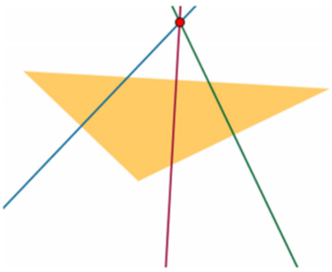
- Circonferenza come luogo geometrico.
  La circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto dato.

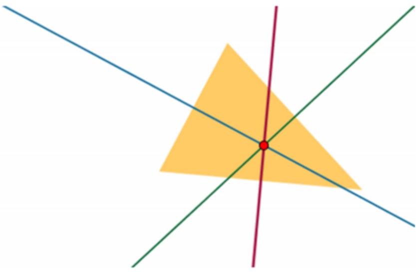
- Asse come luogo geometrico.
  L'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti assegnati.

- Proprietà degli assi.
  Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto **circocentro**.



- Il circocentro non è sempre interno al triangolo considerato ma può essere anche esterno.





Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Esercizi sul circocentro

- Dato un triangolo isoscele con angoli alla base di 30° e angolo al vertice 120°, colorare in modo differente le zone più vicine ad un determinato vertice seguendo l'esempio fatto a lezione.
- Dato un triangolo isoscele quale deve essere l'ampiezza dell'angolo al vertice affinchè il circocentro giaccia sulla base?
- Verificare che in un triangolo equilatero ogni asse di un lato passa per il vertice opposto.
- Dato un quadrato, disegnare l'asse di una diagonale. Cosa si può osservare?

Diario di bordo

La seconda lezione è stata tenuta il 6 aprile 2016. Gli assenti erano 3 e anche in questo caso sono stata assistita dalle tre professoresse. In questa lezione ho affrontato un argomento un po' più complicato rispetto alla lezione precedente ovvero ho introdotto un punto notevole dei triangoli, il circocentro. Per farlo siamo partiti dal concetto di percorso più breve per collegare due punti. Aiutati da una semplice rappresentazione grafica i ragazzi hanno subito fornito la risposta corretta. Un'altra nozione di base che abbiamo ripreso in questa prima parte della lezione è quella di asse. Sfruttando ancora la disponibilità dei ragazzi a partecipare alla lezione, ho proseguito cercando di riprendere queste conoscenze regresse coinvolgendoli il più possibile. Così, anche per la definizione di asse, ho chiesto a loro se la ricordassero. Ottenendo una risposta positiva, sono andata avanti proponendo loro il problema riportato nella descrizione della seconda lezione. Abbiamo seguito l'approccio che ci eravamo proposti e siamo arrivati alla soluzione. Uno degli obiettivi principali della lezione era dimostrare che l'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento. Dopo aver evidenziato l'asse e risolto il problema, quindi, è venuto spontaneo dimostrare che la proprietà vale per tutti i punti dell'asse. Non è stato difficile arrivarci dopo aver ricordato anche il primo criterio di congruenza dei triangoli. A questo punto, prima di dimostrare l'implicazione inversa ovvero che solo i punti dell'asse godono della proprietà descritta sopra, ho ritenuto necessario ricordare loro cosa vuol dire luogo geometrico. Per farlo ho utilizzato la circonferenza. Questa è stata la parte della lezione che ha richiesto maggiori sforzi da parte mia. Gli studenti, infatti, non avevano idea di quale fosse il profondo significato di luogo geometrico. Gli esempi concreti di circonferenza e punti interni ed esterni hanno aiutato ma comunque per questa parte della lezione ho impiegato diverso tempo. A questo punto ho affrontato la dimostrazione concludendo così che l'asse è effettivamente il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento. Subito dopo abbiamo proposto anche il secondo problema che contemplava non più solo due punti ma tre e abbiamo seguito quanto descritto nella lezione. La lezione si è conclusa con l'assegnazione del riassunto e degli esercizi. In questa seconda lezione ho avuto la possibilità di rendermi conto che, nonostante avessi organizzato tutto al meglio e pianificato la lezione nei minimi dettagli, le difficoltà che sorgono in classe sono imprevedibili e vanno affrontate sul momento. Trovo che anche questa lezione sia stata molto istruttiva per me e che mi abbia anche suggerito un approccio adatto per affrontare la lezione successiva.

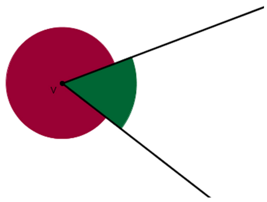
8.3 Lezione 3

Lezione

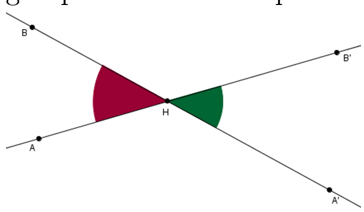
Punti di partenza

- Nozione di angolo.
  Ricordiamo la definizione di angolo.

  *Date in un piano due semirette aventi la stessa origine, si chiama **angolo** la figura costituita dalle due semirette e da una delle due parti in cui il piano è diviso dalle semirette stesse. L'origine delle due semirette si chiama **vertice** dell'angolo e le due semirette si chiamano **lati** dell'angolo.*

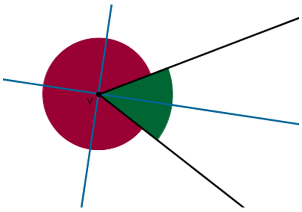
  Lo scopo non è tanto farla ricordare in modo formale ma essere sicuri che gli studenti abbiano chiaro cosa sia un angolo. In particolare abbiamo voluto far cadere i misconcetti che spesso si creano intorno a questa definizione. Un modo per indicare gli angoli è utilizzare degli archi e spesso gli studenti sono portati a credere che ad archi diversi corrispondano angoli diversi. Per essere più chiari riportiamo un disegno per sottolineare questo fatto.

  Alcuni studenti sono portati a dire che gli angoli evidenziati nella figura precedente, $A\hat{H}B$ e $A'\hat{H}B'$, siano diversi proprio perchè gli archi utilizzati sono differenti. Per eliminare questo tipo di difficoltà, quindi, abbiamo deciso di riprendere la definizione.

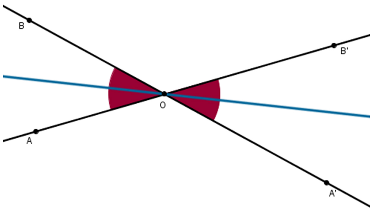
- Definizione di bisettrice.
  Il passo successivo è riprendere la definizione di bisettrice.

  *Si dice **bisettrice** di un angolo la semiretta avente origine nel vertice dell'angolo e che lo divide in due angoli congruenti.*

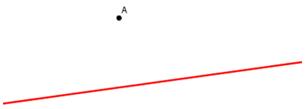


Come conseguenza si ha subito che

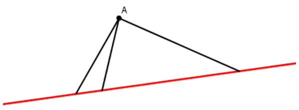
La bisettrice è la retta che divide due angoli opposti al vertice in quattro angoli congruenti.



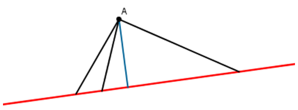
- Percorso più breve punto-retta.
  Per far vedere quale sia il percorso più breve per collegare un punto ad una retta si può partire da una figura come questa

  e procedere per tentativi in modo che un approccio grafico possa convincere gli studenti. Colleghiamo un punto qualsiasi della retta al punto A

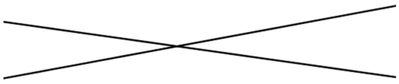
  e concludiamo affermando che il segmento che rappresenta il percorso più breve è quello evidenziato in blu nella seguente figura.

  Inoltre si osserva anche che il segmento blu è perpendicolare alla retta considerata. Dunque, il percorso più breve per collegare il punto alla retta è il segmento che ha per estremi A e il piede della perpendicolare condotta da A alla retta di partenza.

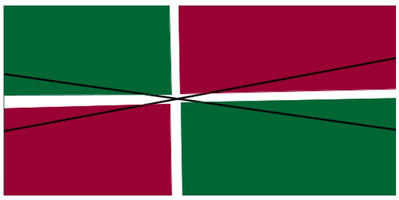
Bisettrice come luogo geometrico Anche in questa lezione abbiamo continuato ad utilizzare il metodo del problem solving. Il problema proposto è il seguente.

Problema *Supponiamo che su una cartina due autostrade si incontrino in questo modo*

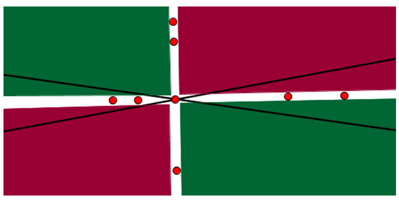


e che si debba costruire una nuova area di servizio nella zona limitrofa ad entrambe le strade. Questa nuova struttura dovrà essere utilizzata dagli automobilisti che percorreranno l'una e l'altra autostrada e, per questo motivo, la si vuole costruire in un punto che sia equidistante da tutte e due le autostrade. Dove sorgerà la nuova area di servizio?

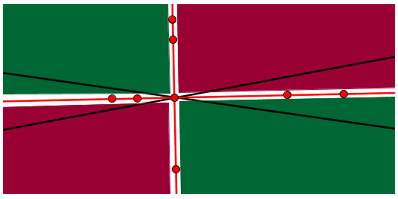
Una volta proposto questo problema, possiamo procedere come nella lezione precedente colorando in maniera diversa le zone più vicine alle due rette. Colorando quelle più evidenti si raggiunge una configurazione simile a questa.



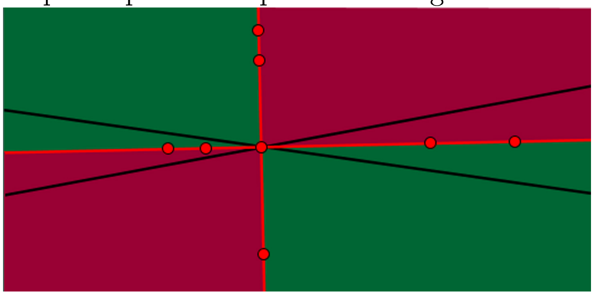
Osserviamo ora che il punto di intersezione tra le due rette è un punto particolare in quanto appartiene ad entrambe. Il punto in questione, quindi, ha la stessa distanza da entrambe queste rette. Proseguendo su questa linea si può andare avanti cercando altri punti che soddisfino questa proprietà anche se visivamente è un esercizio più complicato rispetto a quello svolto per trovare i punti dell'asse.



Anche in questo caso si osserva che i punti giacciono su delle rette.



A questo punto completare il disegno risulta semplice.



Definizione formale Evidentemente il passo successivo è asserire che le rette trovate ed evidenziate in rosso sono le bisettrici degli angoli formati dalle due rette. Dunque questa parte della lezione avrà come obiettivo dimostrare che il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo è formato dalle due bisettrici. Non è semplice né tantomeno banale.

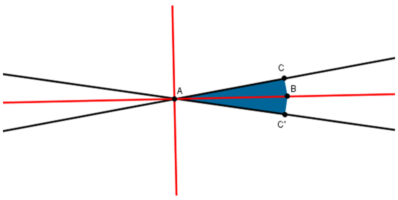
Quello che dobbiamo dimostrare, infatti, è questa doppia implicazione

Un punto appartiene ad una bisettrice $\Leftrightarrow$ È equidistante dai lati dell'angolo

Affrontiamo prima

Un punto appartiene ad una bisettrice $\Rightarrow$ È equidistante dai lati dell'angolo

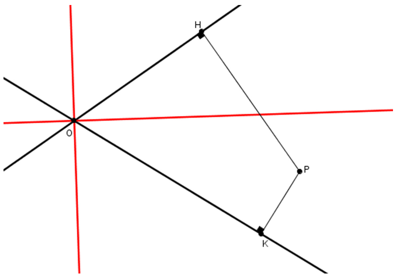
Siano A il punto di incontro delle due bisettrici, B un punto su una bisettrice e C e C' i piedi delle perpendicolari condotte da B ai lati dell'angolo.



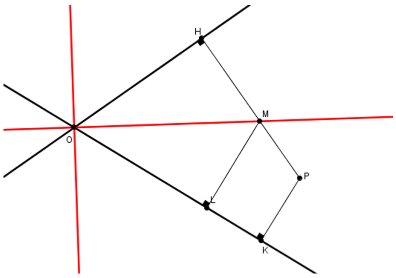
Consideriamo i triangoli ABC e ABC' e dimostriamo che questi sono congruenti. Il lato AB è in comune, $B\hat{A}C = B\hat{A}C'$ per ipotesi e inoltre $A\hat{B}C = A\hat{B}C'$ in quanto stiamo considerando due triangoli rettangoli. Dunque per il secondo criterio di congruenza, questi due triangoli sono uguali.

Pertanto si ha che $BC = BC'$. La dimostrazione si ripete in modo analogo anche per l'altra bisettrice.

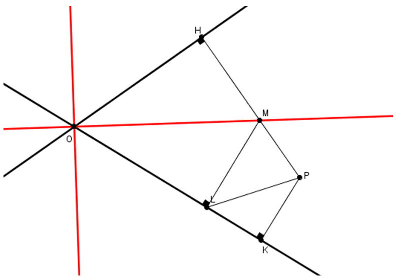
Ora, per concludere, quello che dobbiamo far vedere è che un punto non appartenente alle bisettrici non è equidistante dai lati dell'angolo. Consideriamo quindi un punto P qualsiasi e tracciamo le distanze dalle rette di partenza.



Chiamiamo M il punto di intersezione tra il segmento HP e la retta rossa e tracciamo da M la perpendicolare al lato dell'angolo.



Infine tracciamo il segmento di estremi PL.



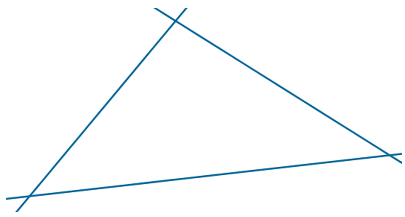
Per quanto abbiamo dimostrato prima, sappiamo che $HM = LM$. Inoltre

$$HP = HM + MP = LM + MP > PL > PK$$

La prima maggiorazione è dovuta alla disuguaglianza triangolare mentre la seconda al fatto che PL è l'ipotenusa del triangolo PKL e dunque maggiore dei due cateti. Pertanto tutti i punti che non appartengono ad una bisettrice non sono equidistanti dai lati dell'angolo. Soffermandoci ora su un solo angolo possiamo affermare che *la bisettrice è il luogo geometrico dei punti* *equidistanti dalle semirette che delimitano l'angolo* e che, quindi, la nuova area di servizio sorgerà in un punto di una delle due bisettrici.

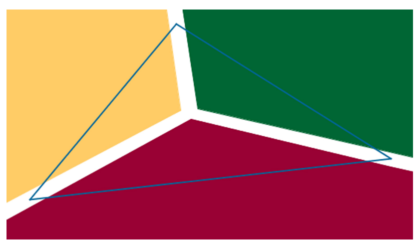
Definizione di incentro Anche per arrivare alla definizione di quest'altro punto notevole del triangolo, possiamo un problema che prenda spunto dalla vita reale.

Problema *In un villaggio tre fiumi sono disposti in questo modo*

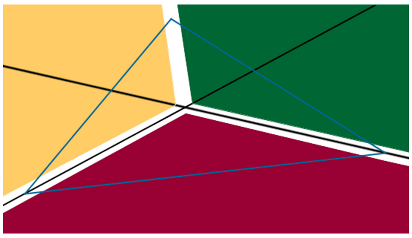


e un contadino vuole costruire un capanno degli attrezzi utili per lavorare la terra circostante. Per poter irrigare, ha a disposizione solo degli innaffiatoi e quindi la posizione più strategica è quella equidistante dai tre fiumi in modo tale che, se uno è in secca, possa prendere l'acqua da un altro. Dove costruirà il capanno il contadino?

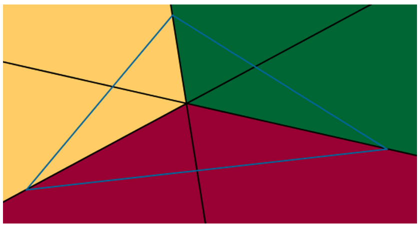
Per creare un filo conduttore con la prima parte della lezione, si può proporre agli studenti un approccio molto simile a quello utilizzato prima e quindi colorare in maniera differente le zone più vicine ad un determinato fiume. Concentriamoci sul triangolo formato dalle tre rette



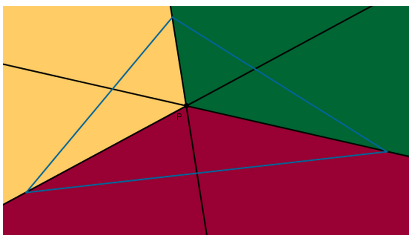
e consideriamo una coppia di lati per volta. Seguendo questo ragionamento, ricordando che la bisettrice è il luogo geometrico dei punti equidistanti da due rette, possiamo disegnare le bisettrici delle prime due coppie di lati presi in considerazione.



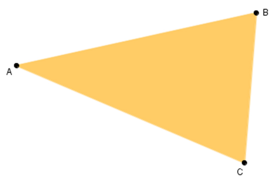
Considerando ora l'ultimo lato rimasto, otteniamo la seguente figura in cui si può osservare una netta suddivisione delle zone considerate.



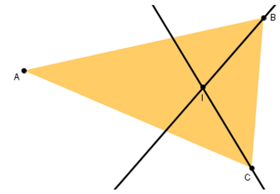
Si osserva subito che le tre bisettrici hanno un punto in comune e che questo rappresenta proprio il punto equidistante dai fiumi del villaggio. Abbiamo concluso quindi che il contadino costruirà il suo capanno degli attrezzi nel punto di intersezione delle bisettrici.



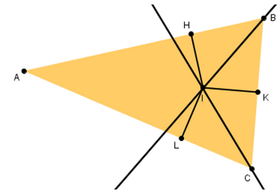
Definizione formale Cercando di formalizzare quanto detto fino ad ora, partiamo da un generico triangolo



e disegniamo le bisettrici di due angoli.



Ora è semplice far vedere che la terza bisettrice deve passare per il punti I. Facendo riferimento alla seguente figura



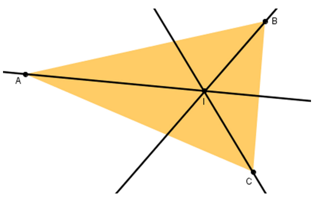
abbiamo che

- $LI = KI$

- $KI = HI$

e dunque, per la proprietà transitiva, $LI = HI$.

Pertanto il punto I è equidistante dai lati AB e AC, ovvero appartiene alla bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$. Possiamo affermare che *le **bisettrici** degli angoli interni di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto **incentro***.

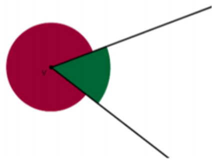


Insieme al circoncentro, l'incentro è un altro punto notevole dei triangoli. Una importante differenza è la seguente. Nella lezione precedente abbiamo visto come il circocentro possa essere sia interno che esterno ad un triangolo. L'incentro, invece, può essere solo interno.

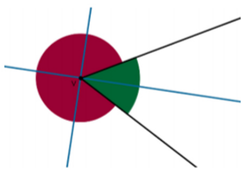
Riassunto

Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Lezione 3

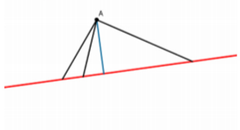
- Nozione di angolo.
  Date in un piano due semirette aventi la stessa origine, si chiama **angolo** la figura costituita dalle due semirette e da una delle due parti in cui il piano è diviso dalle semirette stesse. L'origine delle due semirette si chiama **vertice** dell'angolo e le due semirette si chiamano **lati** dell'angolo.



- Definizione di bisettrice.
  Si dice **bisettrice** di un angolo la semiretta avente origine nel vertice dell'angolo e che lo divide in due angoli congruenti.



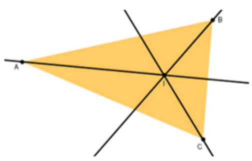
- Percorso più breve punto-retta.
  Il segmento che rappresenta il percorso più breve è quello evidenziato in blu nella seguente figura.



  Inoltre il segmento blu è perpendicolare alla retta considerata. Dunque, il percorso più breve per collegare il punto alla retta è il segmento che ha per estremi A e il piede della perpendicolare condotta da A alla retta di partenza.

- Bisettrice come luogo geometrico.
  La bisettrice è il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle semirette che delimitano l'angolo.

- Proprietà delle bisettrici.
  Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto **incentro**.



- L'incentro è sempre interno ad un triangolo.

Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Esercizi lezione 3

- Dato un triangolo equilatero dimostrare che
  1. Ogni asse è anche una bisettrice
  2. Il circocentro coincide con l'incentro
- Esercizio pagina 562 numeri 131.

Diario di bordo

La terza lezione si è tenuta martedì 12 aprile 2016. In questa lezione abbiamo affrontato, in modo analogo a quanto abbiamo fatto nella lezione precedente, un altro punto notevole dei triangoli, l'incentro. Per questa lezione, dopo aver avuto difficoltà nell'affrontare quella precedente, mi sono proposta di procedere con calma e sottolineare solo le cose necessarie. Prima di introdurre i nuovi argomenti, ho chiesto agli studenti se avessero avuto difficoltà nel risolvere gli esercizi assegnati alla fine della lezione precedente. La risposta è stata positiva e così ho corretto alla lavagna il secondo esercizio che richiedeva di determinare l'ampiezza dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele in modo tale che il circocentro giacesse sulla base del triangolo stesso. Una volta arrivati alla conclusione della correzione, ho introdotto i concetti preliminari che sarebbero poi risultati utili per la comprensione di ciò che avremmo affrontato in seguito. Ho ricordato agli studenti quale fosse la definizione di angolo, di bisettrice e successivamente ho chiesto loro quale fosse il percorso più breve per collegare un punto ad una retta non passante per il punto. Dopo aver chiarito questi punti ho proposto loro il problema riguardante l'area di servizio equidistante dalle due autostrade e per gradi abbiamo cercato una soluzione. Prima di farlo ho voluto sottolineare come questo problema fosse l'analogo del problema affrontato nella lezione precedente, solo che non stavamo più considerando due punti ma due rette. Abbiamo utilizzato anche qui dei gessetti colorati e abbiamo colorato in maniera diversa le zone che ci sembravano più vicine ad una determinata retta piuttosto che all'altra. Dopo aver diviso lo spazio in quattro zone, a due a due di colori diversi, ho fatto notare ai ragazzi che il punto di intersezione delle autostrade era un punto particolare in quanto è a distanza zero da entrambe le rette. Così ho chiesto loro se ci fossero altri punti che fossero equidistanti da entrambe le rette. Loro mi hanno subito risposto sì, i punti che si trovano sulla bisettrice. Stupita di questa risposta, ho chiesto loro se riuscissero a spiegarmi il perché di questa risposta e se lo sapessero dimostrare. Non riuscendo ad arrivare ad una conclusione, ho ritenuto opportuno intervenire e chiarire loro le idee. Ho dunque detto agli studenti che effettivamente la risposta era corretta, anzi quello che avremmo dimostrato sarebbe stato che la bisettrice è il luogo geometrico dei punti equidistanti da due rette. Quando all'inizio di questa descrizione ho detto che per questa lezione ho scelto di affrontare le nuove questioni con molta cautela mi riferivo proprio a questo punto. Per dimostrare quanto detto, infatti, avremmo dovuto affrontare due dimostrazioni. Far vedere che tutti i punti della bisettrice sono equidistanti dalle rette e che un punto non appartenente alla bisettrice non gode di questa proprietà. La prima è stata affrontata in classe in quanto semplice una volta ripreso il secondo criterio di congruenza dei triangoli. La seconda invece non l'abbiamo affrontata in classe. Conclusa quindi questa fase, sono giunta alla fine di questa lezione in quanto il tempo a mia disposizione era quasi terminato e ho dunque ritenuto opportuno riprende la lezione il giorno seguente per riportare quanto detto al caso di tre rette. Anche questa lezione ha ovviamente avuto dei riscontri positivi per la mia esperienza in quanto, analizzate le lezioni precedenti, ho dovuto fare delle scelte ponderate su quello che potesse essere veramente utile per i ragazzi.

8.4 Lezione 4

Lezione

In questa lezione il nostro obiettivo è stato quello di riassumere e fare chiarezza sui punti chiave degli argomenti affrontati nelle lezioni precedenti. In particolare abbiamo sottolineato le cose in comune ed evidenziato le differenze. Possiamo racchiudere le cose più importanti in una tabella.

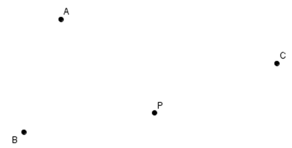
Asse	Bisettrice
Dato un segmento, si chiama asse la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio	Si dice bisettrice di un angolo la semiretta avente origine nel vertice dell'angolo e che lo divide in due angoli congruenti
L'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti da due **punti** assegnati	La bisettrice è il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle **semirette** che delimitano l'angolo
Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, detto **circocentro**	Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto **incentro**

Subito dopo aver ripreso queste nozioni introdotte in precedenza ma sulle quali abbiamo voluto porre l'attenzione, abbiamo aggiunto una importante proprietà dei due punti notevoli introdotti. Partiamo dal circocentro.

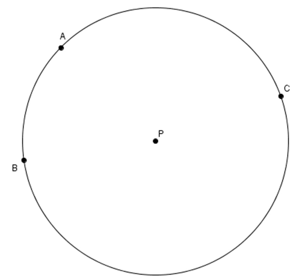
Circocentro Nella seconda lezione abbiamo osservato che questo punto notevole è equidistante dai tre vertici del triangolo. Inoltre, nel ricordare agli studenti la definizione di luogo geometrico, abbiamo fatto riferimento alla circonferenza e ricordato che questa è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto assegnato. Possiamo ora far osservare che per tre punti distinti e non allineati passa una ed una sola circonferenza. Ci possiamo avvalere dell'aiuto di alcuni disegni per convincere gli studenti di questo.

Consideriamo dunque tre punti distinti non allineati

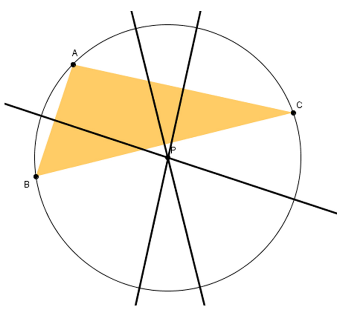
e osserviamo che esiste un punto equidistante da tutti e tre i punti A, B e C.



La proprietà di cui gode la circonferenza, ci assicura che P non è altro che il centro dell'unica circonferenza passante per A, B e C.



Per collegare quanto detto con quello che abbiamo ricordato all'inizio della lezione, consideriamo il triangolo di vertici A, B e C, gli assi dei tre lati ed evidenziamo il circocentro.

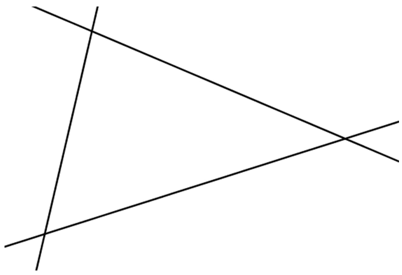


Osserviamo che il circocentro coincide con il punto P e che la circonferenza considerata prima non è altro che la circonferenza circoscritta al triangolo di vertici i tre punti dati all'inizio.

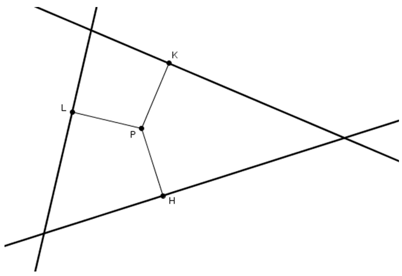
Possiamo dunque asserire che

Il ***circocentro*** *è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.*

Incentro Passiamo ora a considerare tre rette e non più tre punti.

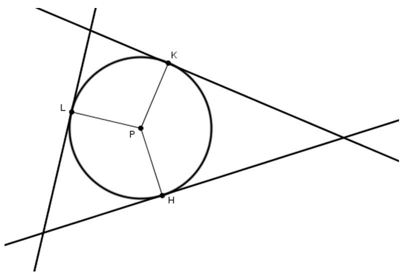


Anche qui possiamo evidenziare il punto equidistante dalle tre rette.

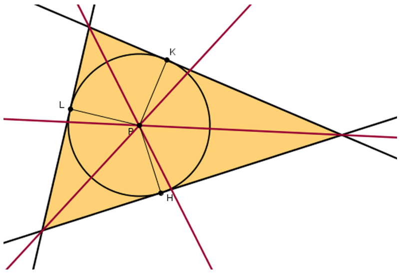


Osserviamo anche qui che P è equidistante dai punti H, K e L.

Dunque P non è altro che il centro della circonferenza passante per questi tre punti come si può osservare dalla seguente figura.



Anche qui colleghiamo quanto osservato fino ad ora alle lezioni precedenti. Lo facciamo considerando il triangolo che ha per vertici i punti di intersezione delle tre rette di partenza e le bisettrici degli angoli interni del triangolo.

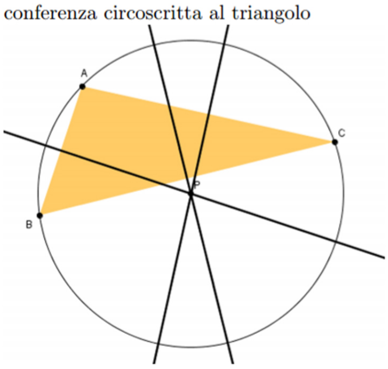
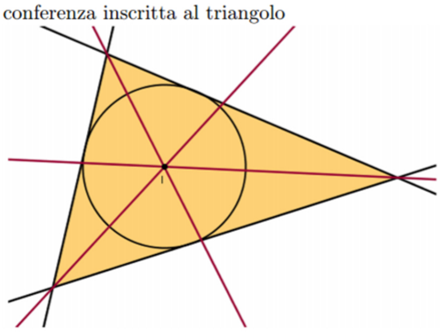


Osserviamo che il punto di incontro delle tre bisettrici, ovvero l'incentro, coincide con il punto P e che la circonferenza considerata non è altro che la circonferenza inscritta nel triangolo. Pertanto

*L'**incentro** è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.*

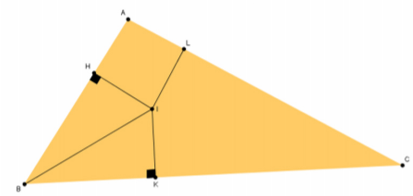
Riassunto

Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Lezione 4

Asse	Bisettrice
Dato un segmento, si chiama asse la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio	Si dice bisettrice di un angolo la semiretta avente origine nel vertice dell'angolo e che lo divide in due angoli congruenti
L'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti da due **punti** assegnati	La bisettrice è il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle **semirette** che delimitano l'angolo
Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, detto **circocentro**	Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in uno stesso punto detto **incentro**
Il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo 	L'incentro è il centro della circonferenza inscritta al triangolo 

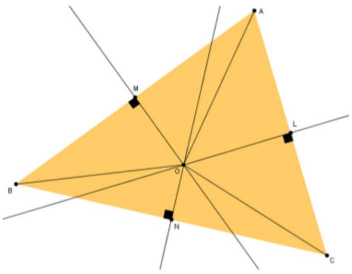
Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Esercizi lezione 4

- Dato un triangolo ABC ed il suo incentro I come in figura



dimostrare che i triangoli IHB e IKB sono congruenti.

- L, M ed N sono i punti medi dei lati del triangolo ABC riportato in figura.



Dimostrare che i triangoli COL e AOL sono congruenti.

- Esercizi pagina 556 numeri 78, 82, 86, 97 e 100.

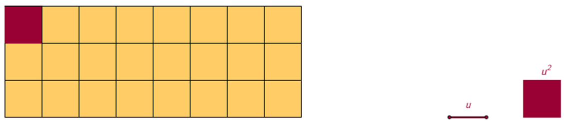
Diario di bordo

Per la quarta lezione, che ho tenuto mercoledì 13 aprile, il programma era concludere ciò che avevo iniziato il giorno precedente ed introdurre un'ulteriore proprietà del circocentro e dell'incentro. Come di consueto, però, ho iniziato chiedendo agli studenti se avessero avuto problemi con gli esercizi assegnati loro alla fine della lezione precedente. Ne ho corretto uno e per farlo ho chiamato alla lavagna una ragazza e l'ho fatto svolgere a lei. Dopo averla aiutata ad arrivare alla conclusione, ho iniziato la lezione vera e propria. Nel farlo ho chiesto ai ragazzi se ricordassero cosa avessimo dimostrato il giorno precedente. Pochi avevano ben chiara la proprietà enunciata e dimostrata per le bisettrici nella terza lezione, così per prima cosa l'ho ripresa e successivamente ho proposto loro il problema del contadino e del capanno degli attrezzi. Ho subito evidenziato che quello che richiedeva il problema era trovare il punto equidistante dai tre fiumi che avevo schematizzato alla lavagna con tre rette azzurre. Con gessetti di altri colori, abbiamo suddiviso lo spazio circostante in tre zone, ognuna più vicina ad una determinata retta. A questo punto ho chiesto loro di procedere come avevamo fatto nella lezione precedente, ovvero considerando due rette alla volta. Così facendo, abbiamo evidenziato la retta dei punti equidistanti dalle prime due rette prese in considerazione. Siamo passati allora ad un'altra coppia e anche per questa abbiamo individuato la bisettrice dell'angolo formato dai due fiumi. A questo punto mi sono soffermata per schematizzare le proprietà di questo punto. Tracciate quindi le distanze, ho chiesto agli studenti di aiutarmi nel farlo. Ho trovato che i ragazzi avessero delle difficoltà. In particolare un alunno mi ha chiesto di rispiegare perché avessi considerato i segmenti perpendicolari ai lati per tracciare le distanze. Così, una volta ricordato cosa si intendesse per cammino più breve per collegare un punto ad una retta e sottolineato che questo altro non è che la distanza, ho chiarito il suo dubbio e siamo andati avanti nello scrivere le uguaglianze a cui ero interessata. Dopo aver evidenziato quindi l'uguaglianza tra la prima distanza e la seconda e, successivamente, tra la seconda e la terza, i ragazzi hanno subito dedotto che anche qui, servendosi della proprietà transitiva, era semplice dimostrare che la prima distanza era uguale alla terza. Così, ricordando ancora una volta la proprietà fondamentale dimostrata per la bisettrice, abbiamo concluso che quel punto appartenesse anche alla bisettrice del terzo angolo. La dimostrazione del fatto che le tre bisettrici di un triangolo si incontrano in un punto era quindi conclusa. Non restava che definire quel punto, assegnargli il nome di incentro e affermare che, al contrario del circocentro, è un punto sempre interno al triangolo. Successivamente, nel poco tempo rimasto, ho cercato di spiegar loro un'altra proprietà di questi due punti notevoli studiati mettendoli ancora a confronto. Ho quindi disegnato tre punti non allineati e chiesto agli alunni quante circonferenze potessi disegnare passanti per questi tre punti. Le risposte sono state un po' confuse, sembrava che pochi stessero ragionando su quanto richiesto. Infatti qualcuno ha risposto nessuna, altri infinite, pochi una sola. Chiarito che effettivamente per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza, l'ho disegnata. Il passo successivo è stato mettere in evidenza il centro di questa circonferenza e chiedere agli studenti di quale proprietà godesse. Grazie al fatto che nelle lezioni precedenti, per spiegare cosa si intendesse per luogo geometrico, io avessi ripreso più volte la proprietà della circonferenza, hanno subito risposto nel modo corretto. Allora non mi era rimasto altro da fare se non disegnare il triangolo di vertici i tre punti iniziali e chiedere loro se conoscessero un punto con la proprietà di essere equidistante dai vertici di un triangolo. A questo punto ho notato un po' di confusione nei ragazzi che non riuscivano a rispondere nel modo corretto ma anche qui elencavano delle risposte quasi senza pensarci. Mi sono quindi soffermata pensando anche al fatto che potesse essere una mia mancanza in quanto ho sempre ricordato loro che il circocentro fosse il punto di incontro degli assi e quasi mai sottolineato in modo esplicito quest'altra proprietà. Arrivati quindi alla conclusione che quel punto fosse proprio il circocentro, ho fatto notare alla classe che quel punto era anche il centro della circonferenza circoscritta al triangolo e che è da qui che il circocentro prende il suo nome. Subito dopo sono passata a trattare in caso analogo per l'incentro. Ho pertanto disegnato un triangolo e ho considerato il punto equidistante dai tre lati. Abbiamo considerato i piedi delle perpendicolari, osservato che questi non fossero allineati, disegnato la circonferenza passante per questi tre punti e con centro il punto equidistante dai lati e osservato che questa fosse la circonferenza inscritta al triangolo. A questo punto ho chiesto agli alunni cosa rappresentasse il centro della circonferenza e hanno risposto correttamente. Anche qui ho fatto notare loro che il nome di questo punto notevole deriva proprio da questa proprietà, ovvero l'incentro non è altro che il centro della circonferenza inscritta. Conclusa così la lezione, ho distribuito tra i banchi il riassunto e gli esercizi.

8.5 Lezione 5

Lezione

Concetto di area e area del rettangolo Per introdurre il concetto di area si deve scegliere un'unità di misura, confrontare con questa la superficie che vogliamo misurare e vedere quante volte l'unità di misura è contenuta in essa. Per l'area si sceglie di solito il quadrato avente come lato il segmento che si assume come unità di misura per i segmenti. In pratica, le unità di misura più utilizzate per le superfici sono il metro quadrato e i suoi sottomultipli. Scelto quindi come unità di misura per i segmenti il segmento u e come unità di misura per le superfici il quadrato di lato u, possiamo calcolare l'area di un rettangolo.



Contando infatti le unità di misura contenute nel rettangolo possiamo concludere che l'area del rettangolo è $24u^2$. Invece di contare direttamente il numero di unità u^2 contenute nel rettangolo, per determinare l'area del rettangolo si può procedere in quest'altro modo. Lo faremo in modo indiretto, considerando le unità u contenute nelle dimensioni del rettangolo. La base contiene $8u$, mentre l'altezza $3u$. Allora si può pensare al rettangolo suddiviso in 3 rettangoli che hanno una base formata da $8u$ e di altezza u . Quindi, considerato che ognuno di questi rettangoli contiene 8 unità di superficie, il numero complessivo di unità di superficie contenute dal rettangolo è $8 \cdot 3$. Dunque l'area del rettangolo è data dal prodotto delle misure delle sue dimensioni. Ovvero

$$A = b \cdot h$$

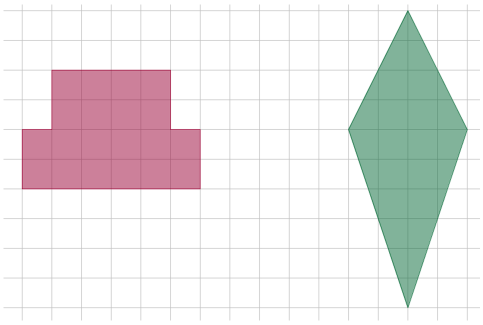
Abbiamo quindi fatto vedere come si possa ricavare la semplice formula dell'area del rettangolo che ci insegnano fin dai primi anni di scuola. Possiamo ricordare anche che il quadrato è un rettangolo particolare avente tutti i lati congruenti e dunque la formula per il calcolo dell'area per questo caso particolare risulta essere

$$A = l^2$$

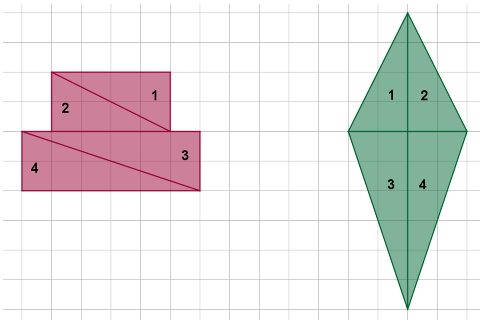
Equivalenza ed equiscomponibilità Una volta conclusa la fase introduttiva, si può iniziare a parlare di equivalenza.

Due superfici che hanno la stessa estensione si dicono ***equivalenti****.*

In particolare si può far vedere che questa è una relazione di equivalenza, ma non rientra nei nostri obiettivi. Passando ora ad analizzare una classe particolare di superfici, i poligoni, possiamo introdurre anche l'idea di equiscomponibilità. Per stabilire, infatti, se due poligoni sono tra loro equivalenti, bisogna procedere in questo modo. Consideriamo per esempio i seguenti poligoni.



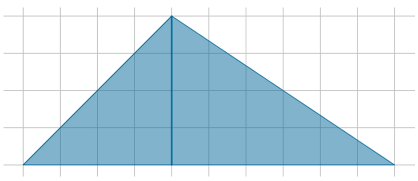
Osserviamo che questi possono essere scomposti in triangoli a due a due congruenti, come è evidente nella seguente figura.



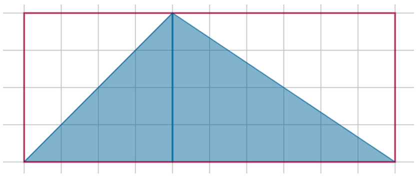
Ora sfruttando che due triangoli congruenti sono equivalenti, possiamo osservare che questi due poligoni sono formati da 4 triangoli a due a due equivalenti, e dunque hanno la stessa area. Di conseguenza possiamo concludere che

Due poligoni equiscomponibili sono anche equivalenti.

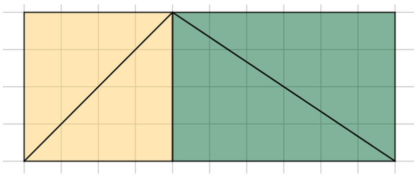
Area del triangolo Sfruttando quanto detto fino ad ora, una facile conseguenza è il calcolo dell'area del triangolo. Partiamo da un triangolo qualsiasi.



Consideriamo il rettangolo che ha stessa base e stessa altezza del triangolo.



Ora osserviamo che questo può essere suddiviso in quattro triangoli a due a due congruenti e quindi equivalenti. L'area del rettangolo, quindi, si può ottenere sommando l'area dei quattro triangoli.



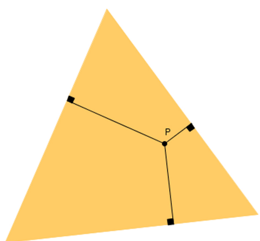
Un'altra osservazione da fare per arrivare alla conclusione è che il triangolo di partenza è formato da due di questi triangoli e quindi possiamo affermare che l'area del triangolo è la *metà* di quella del rettangolo. Pertanto per il triangolo possiamo concludere che

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

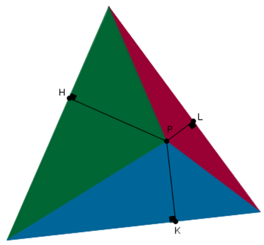
Alcune proprietà dei triangoli

Prima attività La prima proprietà che andremo a dimostrare è la seguente.

Considerato un triangolo equilatero e un punto interno P qualsiasi, la somma delle distanze di P dai lati del triangolo è pari alla sua altezza.



Per farlo, dividiamo il triangolo in tre triangoli, ognuno che ha per altezza la distanza del punto P da un determinato lato.



L'area del triangolo di partenza è, come abbiamo visto prima,

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

e in più è la somma delle aree dei tre triangoli che abbiamo evidenziato. L'area di ciascuno di questi la calcoliamo in questo modo:

- $A_1 = \dfrac{b \cdot PL}{2}$
- $A_2 = \dfrac{b \cdot PH}{2}$
- $A_3 = \dfrac{b \cdot PK}{2}$

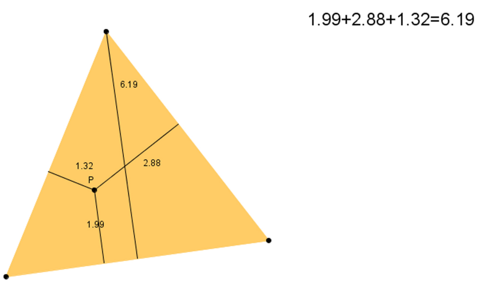
Dunque avremo che

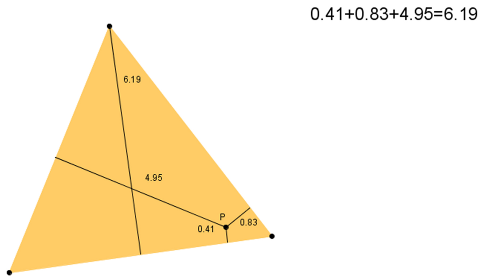
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{b \cdot PL}{2} + \frac{b \cdot PH}{2} + \frac{b \cdot PK}{2} = \frac{b}{2} \cdot (PL + PH + PK).$$

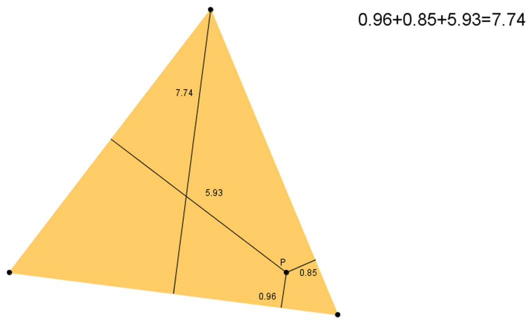
Pertanto avremo che

$$h = PL + PH + PK$$

Per far vedere meglio questa proprietà, possiamo avvalerci di un file GeoGebra in cui il punto P è libero di muoversi all'interno del triangolo equilatero e in cui può essere messa in risalto la somma delle distanze che rimane costantemente uguale all'altezza del triangolo.



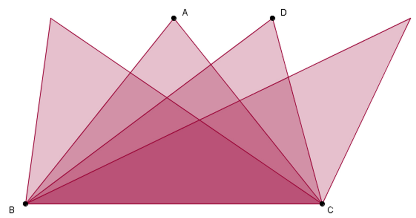




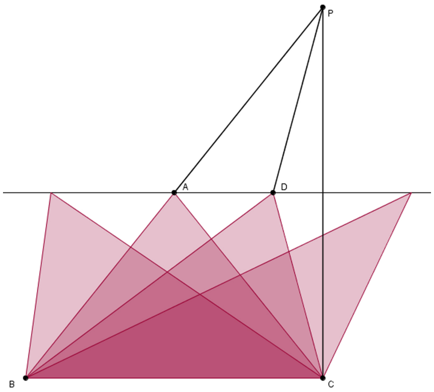
Seconda attività La seconda attività che vogliamo introdurre per concludere la lezione è la seguente.

Tra tutti i triangoli aventi uguale base ed uguale altezza, ovvero equivalenti, quello a perimetro minimo è quello isoscele.

Per dimostrarlo consideriamo dei triangoli equivalenti, aventi la stessa base e la stessa altezza. Tra questi prendiamo quello isoscele, ABC, ed un altro triangolo qualsiasi DBC.



Prendiamo ora la retta passante per A e D e consideriamo il punto P, simmetrico rispetto a questa retta del punto C.



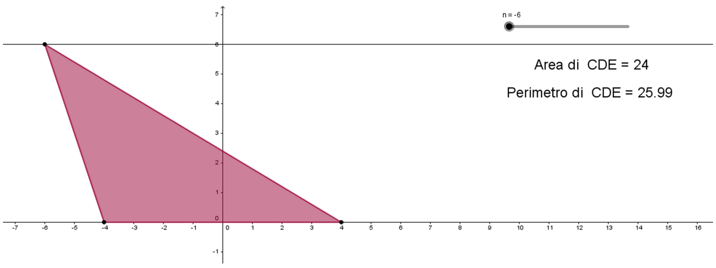
L'osservazione utile che ci servirà è la seguente: i punti B, A e P sono allineati. Poiché la base BC è comune per i triangoli, ciò che fa la differenza per il calcolo del perimetro è la somma dei lati obliqui. Si ha inoltre che

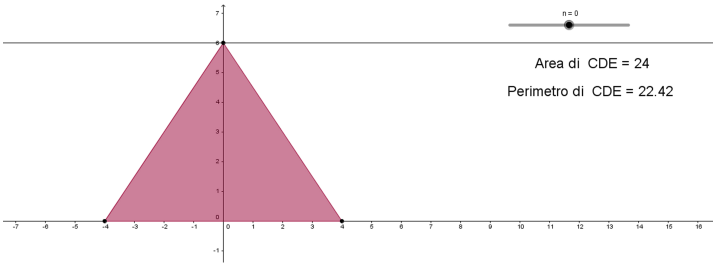
- $CA = PA$
- $CD = PD$

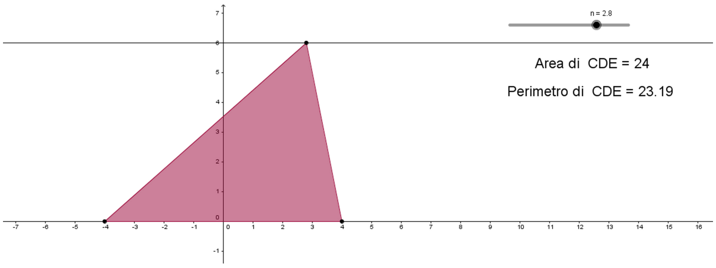
Il triangolo isoscele è dunque il triangolo a perimetro minimo perché il percorso più breve per collegare il punto B e il punto P è proprio il segmento che ha questi punti per estremi. Inoltre il segmento BP risulta essere la somma di BA e PA, cioè $BP = BA + PA = BA + CA$.

Allora $BD + CD = BD + PD > BP = BA + CA$, ovvero il triangolo isoscele è effettivamente quello a perimetro minimo.

Anche per presentare meglio questa attività, possiamo utilizzare il software GeoGebra per creare un file esplicativo usando una semplice animazione che renda subito evidente come l'area rimanga costante e il perimetro invece cresce o decresce al variare della posizione di un vertice del triangolo.



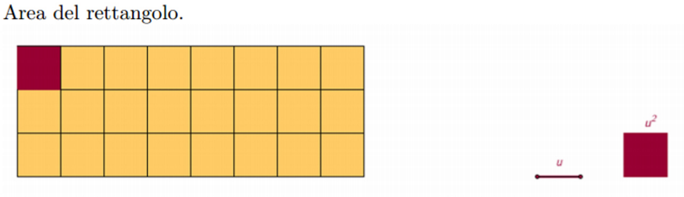

n = 0
Area di CDE = 24
Perimetro di CDE = 22.42


n = 2.8
Area di CDE = 24
Perimetro di CDE = 23.19

Riassunto

Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Lezione 5

- Area del rettangolo.

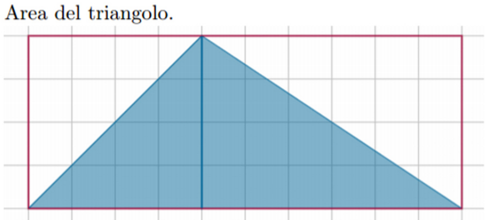


$A = b \cdot h$

- Equivalenza.
Due superfici che hanno la stessa estensione si dicono **equivalenti**.

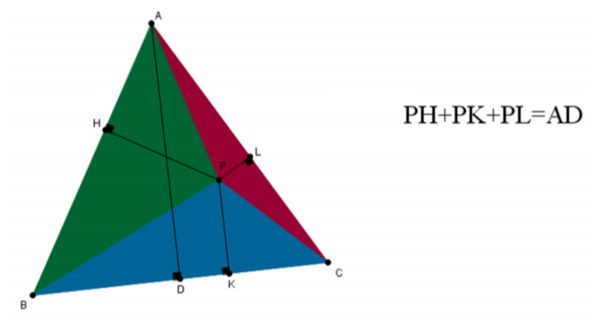
- Equiscomponibilità.
Due poligoni **equiscomponibili** sono anche equivalenti.

- Area del triangolo.



$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

- Considerato un triangolo equilatero e un punto interno P qualsiasi, la somma delle distanze di P dai lati del triangolo è pari alla sua altezza.



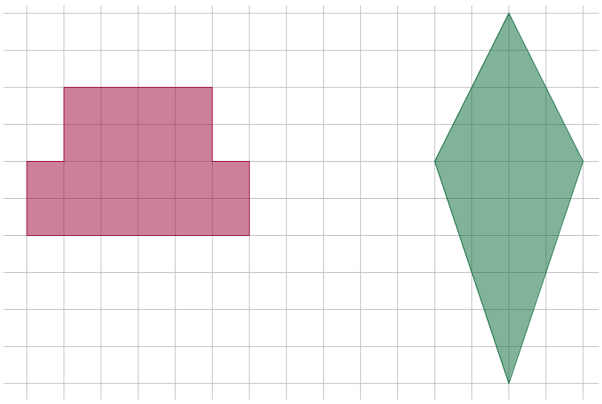
- Tra tutti i triangoli aventi uguale base ed uguale altezza, ovvero equivalenti, quello a perimetro minimo è quello isoscele.

Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Esercizi

Esercizi, volume 2, pagina 281 numeri 52, 56 (nella richiesta c. le parole rettangolo e triangolo sono scambiate), 62, 66.

Diario di bordo

La quinta lezione è stata progettata per fare da ponte tra le lezioni affrontate precedentemente e il teorema di Pitagora. Ho tenuto questa lezione sabato 23 aprile e l'argomento principale in programma è stato l'area dei poligoni. Come è avvenuto per le lezioni precedenti, siamo partiti da concetti basilari che i ragazzi avrebbero sicuramente ricordato. Abbiamo ripreso le formule delle aree dei poligoni più semplici come il rettangolo, il quadrato e il triangolo e abbiamo fatto vedere loro il perché di queste formule. Successivamente poi abbiamo illustrato due attività relative ai triangoli. Vediamo più nel dettaglio gli aspetti importanti di questa lezione. La prima cosa che ho ripreso alla lavagna è il concetto di area. Ho fatto capire ai ragazzi cosa si intenda per unità di superficie riprendendo anche il concetto di unità di misura per le lunghezze. Ho disegnato pertanto alla lavagna un rettangolo, l'ho diviso in tanti quadratini e contato quindi le unità di superficie contenute nel poligono. Così facendo ho ricordato loro cosa si intenda per area. Per spiegare il perché della formula $A = b \cdot h$ ho chiesto ai ragazzi di ragionare in questo modo. Considerata l'altezza del rettangolo, l'abbiamo suddivisa in tanti segmenti unitari e disegnato dei segmenti paralleli alla base. Così facendo abbiamo ottenuto dei rettangoli aventi altezza unitaria e base uguale a quella del rettangolo di partenza. L'area di ciascuno di questi sarà la somma delle aree delle unità di superficie, una per ogni unità di lunghezza contenute nella base. Per questo motivo, l'area del rettangolo sarà la somma delle aree dei rettangoli più piccoli che abbiamo ottenuto e quindi siamo arrivati a spiegare la semplice formula dell'area per un rettangolo qualsiasi. Una conseguenza che ho fatto notare ai ragazzi è che, considerato un quadrato come un rettangolo particolare avente i lati tutti uguali, l'area di questo poligono sarà di conseguenza $l \cdot l = l^2$. Successivamente abbiamo affrontato i concetti di equiscomponibilità ed equivalenza. Ho disegnato alla lavagna i due poligoni riportati nella seguente figura



e ho chiesto ai ragazzi di dimostrare che questi hanno la stessa area. Abbiamo così diviso questi due poligoni in quattro triangoli a due a due congruenti e chiarito il fatto che due triangoli uguali hanno anche la stessa area. Così facendo siamo giunti alla conclusione che i due poligoni sono equivalenti grazie al fatto che sono equiscomponibili, ovvero scomponibili in poligoni uguali. Affrontati questi concetti, ho ripreso la formula dell'area di un triangolo come conseguenza di quella trovata per il rettangolo. Disegnato infatti un triangolo e il rettangolo avente la stessa base e la stessa altezza, si può notare che l'area del triangolo è esattamente la metà di quella del triangolo. Questo si vede bene grazie ad una opportuna scomposizione del rettangolo in quattro triangoli a due a due equivalenti, due dei quali compongono il triangolo da cui siamo partiti. Per questo motivo per l'area del triangolo si ha che $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Le applicazioni di cui parlavamo all'inizio di questa descrizione le ho esposte a questo punto della lezione. La prima riguarda una proprietà del triangolo equilatero che va sotto di Teorema del Viviani. Preso un qualsiasi punto P interno ad un triangolo equilatero, la somma delle distanze di P dai lati questa è sempre uguale all'altezza del triangolo. Questa è una proprietà che si dimostra facilmente tenendo conto della formula dell'area per un triangolo. Infatti, dividendo il poligono in tre triangoli aventi come altezze le distanze di P dai lati, abbiamo che la somma delle aree di questi tre triangoli è uguale all'area del triangolo di partenza. Facendo quindi un po' di manipolazioni algebriche, si dimostra la proprietà enunciata. Per validare il tutto ho pensato che una animazione con il software GeoGebra potesse rendere le cose più visibili e chiare. Ho così aperto il programma sul computer in dotazione in aula collegato alla lavagna interattiva multimediale (lim) e ho spiegato loro a grandi linee di cosa si trattasse. Successivamente ho aperto il file che avevo preparato e ho fatto vedere loro che effettivamente la proprietà è vera e lo è per qualsiasi triangolo equilatero. Infatti ho sfruttato il lato dinamico di GeoGebra e modificato il triangolo per evidenziare anche la potenza del programma. Mi è sembrato che gli studenti apprezzassero l'utilizzo del computer in quanto ha reso il tutto più tangibile e più immediato. La seconda attività che abbiamo proposto ai ragazzi è la seguente. Abbiamo voluto dimostrare che tra tutti i triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza, quindi equivalenti, quello con il perimetro minimo è quello isoscele. Prima di farlo però ho voluto introdurre il mio lavoro svolto in precedenza con i tabelloni. Ho parlato agli studenti di Emma Castelnuovo, ho descritto il suo lavoro rivoluzionario e quello che con il suo impegno ha creato. Una volta descritto in cosa consistesse il mio tirocinio, ho fatto vedere loro un dispositivo costruito da Emma Castelnuovo e dai suoi allievi, ritrovato tra gli oggetti conservati nel magazzino del Liceo, che consiste in un elastico fissato in due punti a mo dì base di un triangolo e con un vertice mobile che mette proprio in evidenza diversi triangoli equivalenti. Fatto vedere questo, ho chiesto a loro di dirmi quale secondo loro fosse quello con il perimetro minimo. Qualcuno ha saputo rispondere correttamente e così, avendo ottenuto una risposta, ho dimostrato la proprietà alla lavagna. Finita questa dimostrazione, anche per questa attività ho fatto vedere loro una animazione che ha mezzo in luce come preso un triangolo di data base e altezza, spostando un vertice in modo tale che l'altezza rimanesse sempre la stessa, l'area dei triangoli ottenuti fosse sempre la stessa mentre il perimetro cambiava ed era minimo proprio per il triangolo isoscele.

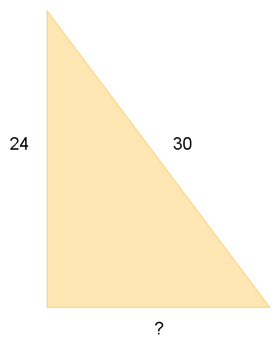
8.6 Lezione 6

Lezione

Introduzione storica Storicamente sono state ritrovate diverse testimonianze del fatto che la proprietà pitagorica fosse conosciuta ancor prima di Pitagora. Per esempio gli Egiziani nel 3000 a.C. per assicurarsi che la base delle piramidi fosse quadrata e, quindi, per costruire angoli retti usavano il seguente metodo. Prendevano una corda lunga 12 unità di lunghezza, metri per esempio, e la dividevano con dei nodi in tante parti uguali. Dopo di che li raggruppavano una parte formata da 3 nodi, una da 4 e una terza da 5. Tendevano la parte con 4 nodi tra due paletti conficcati nel terreno e tiravano le altre due parti in modo che i loro estremi coincidessero. Ottenevano così un triangolo con una proprietà molto importante, aveva un angolo retto. Un'ulteriore testimonianza del fatto che questa proprietà fosse conosciuta prima che Pitagora la dimostrasse è racchiusa in una tavoletta babilonese risalente al 2000-1800 a.C.. Un problema tratto da questa infatti è il seguente.

Un bastone lungo 30 unità è appoggiato a un muro. In alto scivola di 6 unità. Di quanto il piede del bastone si è allontanato dalla base del muro?

Il problema, scritto in caratteri cuneiformi, descrive la seguente situazione.



Nella tavoletta è anche descritta la soluzione a mo' di descrizione dei calcoli da effettuare, senza nessun tipo di spiegazione sul perché fossero necessari.

Continuando infatti si legge

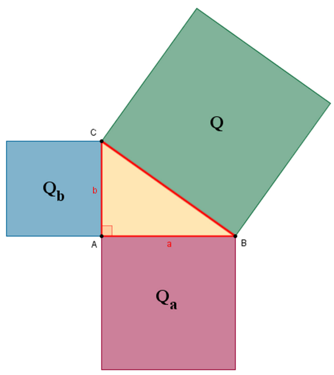
Tu farai così: dal quadrato di 30 toglierai il quadrato di 24. Otterrai così il quadrato di 18. 18 è il numero cercato: il piede del bastone si allontana dalla base del muro di 18 unità.

Come abbiamo voluto evidenziare, la proprietà pitagorica era conosciuta fin dall'antichità. Pitagora, o un suo allievo, però fu forse il primo a dimostrarla nel VI secolo a.C. ed è per questo motivo che il teorema prende il suo nome.

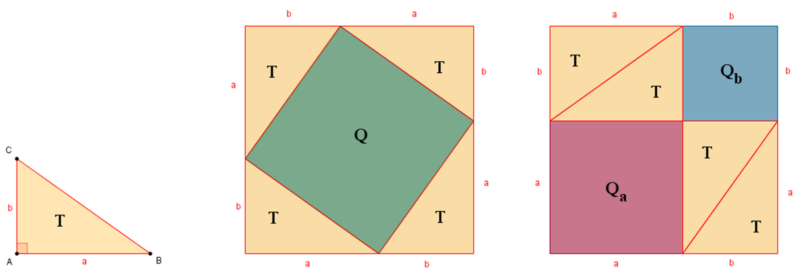
Teorema di Pitagora Il teorema di Pitagora viene affrontato fin dalla scuola media. Ci proponiamo quindi di riprenderne l'enunciato e di affrontare la dimostrazione.

Teorema. *Il **quadrato** costruito sull'**ipotenusa** di un triangolo rettangolo è equivalente alla **somma** dei **quadrati** costruiti sui **cateti**.*

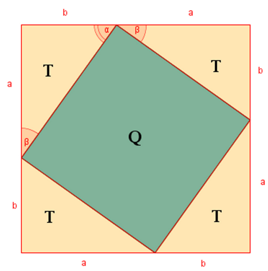
Dimostrazione. Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e i quadrati costruiti sui cateti e sull'ipotenusa.



Costruiamo ora il quadrato di lato $a+b$ e scomponiamolo in due modi diversi.

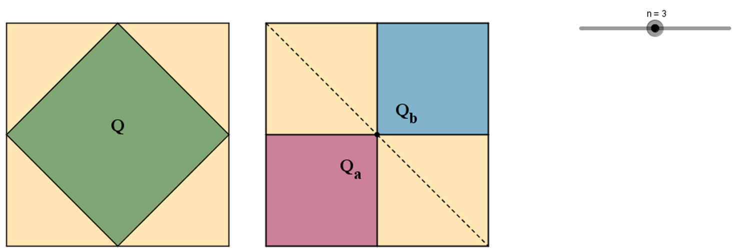


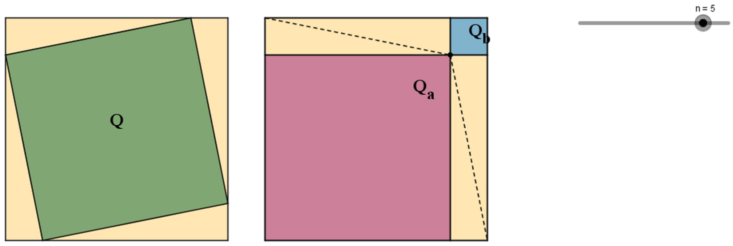
Analizziamo ora i due quadrati separatamente. Il primo come possiamo vedere è composto da quattro triangoli congruenti al triangolo di partenza e da un quadrilatero che dimostriamo essere un quadrato. Il fatto che i lati siano tutti uguali deriva dal fatto che questi non sono altro che l'ipotenusa del triangolo. Dobbiamo adesso dimostrare che i quattro angoli sono tutti retti. Questo è vero perché considerando gli angoli α e β del triangolo in alto a sinistra, questi sono complementari. Inoltre l'angolo β si trova ovviamente anche nel triangolo in alto a destra come evidenziamo in questa figura.

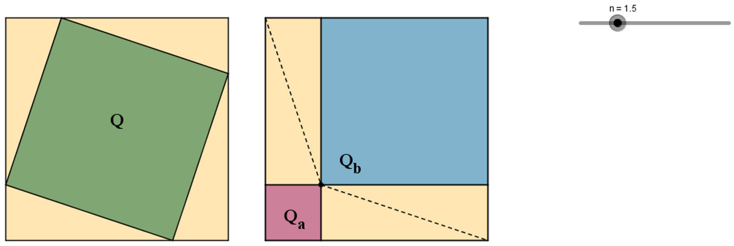


Dunque, gli angoli α e β sono complementari e formano un angolo piatto con l'angolo del quadrilatero. Pertanto questo è un angolo retto. Ripetendo gli stessi ragionamenti per gli altri tre angoli, otteniamo che effettivamente Q è un quadrato. Tornando a considerare entrambi i quadrati di lato $a+b$, abbiamo che questi sono formati da quattro triangoli congruenti, quindi equivalenti, e il primo dal quadrato Q mentre il secondo dai quadrati Q_a e Q_b. Dunque Q, che altro non è che il quadrato costruito sull'ipotenusa del triangolo ABC, deve essere equivalente alla somma dei quadrati Q_a e Q_b, quadrati costruiti rispettivamente sul cateto a e sul cateto b.

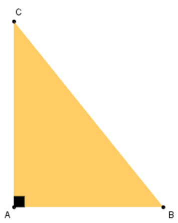
Terminata la dimostrazione, possiamo avvalerci di una animazione con GeoGebra per rendere il tutto visivamente più chiaro ma soprattutto per far capire ai ragazzi che il teorema non vale solo per un particolare triangolo rettangolo, ma per tutti.







Applicazioni del teorema di Pitagora L'applicazione più immediata è il calcolo di un lato di un triangolo rettangolo conoscendo gli altri due. Infatti dato un triangolo ABC

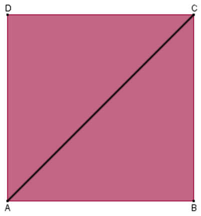


si ha che

- $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$
- $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$
- $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$

Sfruttando queste formule possiamo anche calcolare la diagonale del quadrato e l'altezza del triangolo equilatero.

Diagonale del quadrato Consideriamo il quadrato $ABCD$ e disegnamo la sua diagonale AC.

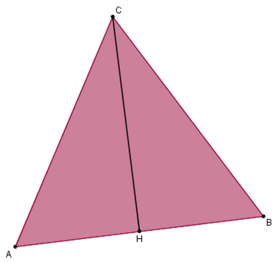


Per calcolare la lunghezza della diagonale, consideriamo il triangolo rettangolo ABC. La diagonale rappresenta l'ipotenusa di questo triangolo e quindi per calcolarla basterà utilizzare il teorema di Pitagora. Chiamato quindi l il lato del quadrato si avrà che

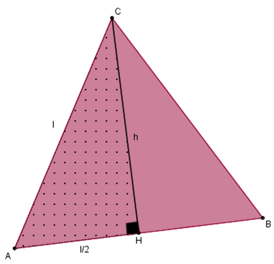
$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2 \cdot l^2} = l \cdot \sqrt{2}$$

Possiamo osservare inoltre che tracciando la diagonale abbiamo ottenuto due triangoli rettangoli isosceli. Questi hanno l'angolo al vertice retto e quindi gli angoli alla base saranno uguali a 45°. Dunque abbiamo trovato che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele è uguale al prodotto della misura di un cateto per la radice quadrata di 2.

Altezza del triangolo equilatero Consideriamo il triangolo equilatero ABC e la sua altezza CH.



Possiamo osservare che CH divide il triangolo equilatero in due triangoli rettangoli congruenti. Consideriamone quindi uno e osserviamo che l'altezza non rappresenta altro che un cateto del triangolo.



Sfruttando ancora il teorema di Pitagora, abbiamo che.

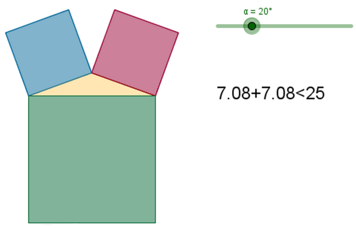
$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

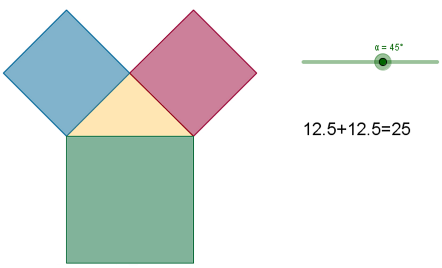
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}l^2$$

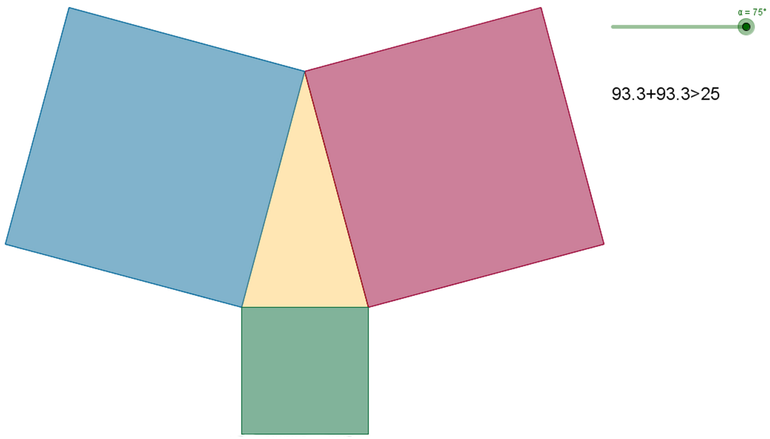
Quindi abbiamo che

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Validità del teorema di Pitagora Per concludere la lezione, si può far notare ai ragazzi che l'ipotesi che il triangolo sia rettangolo è fondamentale. Questo può essere sottolineato con un'altra animazione di GeoGebra in cui, una volta disegnato un triangolo qualsiasi che nel nostro caso sarà isoscele, può mettere in luce che l'area del quadrato costruito sulla base è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati obliqui solo quando il triangolo è rettangolo cioè, nel nostro caso specifico, quando gli angoli alla base saranno uguali a 45°



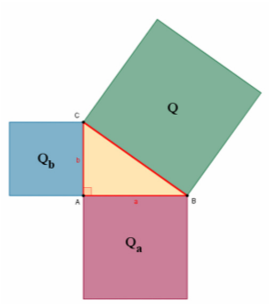



α = 75°
93.3+93.3>25

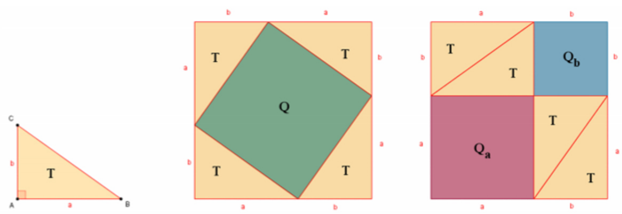
Riassunto

Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Lezione 6

- Teorema di Pitagora.
  Il **quadrato** costruito sull'**ipotenusa** di un triangolo rettangolo è equivalente alla **somma** dei **quadrati** costruiti sui **cateti**.
  Dimostrazione. Consideriamo il triangolo rettangolo ABC e i quadrati costruiti sui cateti e sull'ipotenusa.

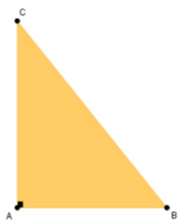


Costruiamo ora il quadrato di lato $a+b$ e scomponiamolo in due modi diversi.



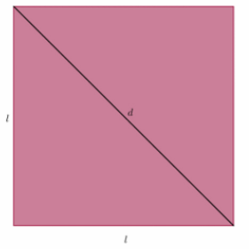
Analizzando ora i due quadrati, abbiamo che in entrambi sono presenti quattro triangoli congruenti e quindi equivalenti al triangolo di partenza. Inoltre il primo è completato dal quadrato Q, mentre il secondo dai quadrati Q_a e Q_b. Poichè i quadrati sono congruenti e quindi anche equivalenti si deve avere che Q, che altro non è che il quadrato costruito sull'ipotenusa del triangolo ABC, deve essere equivalente alla somma dei quadrati Q_a e Q_b, quadrati costruiti rispettivamente sul cateto a e sul cateto b.

- Calcolo di un lato di un triangolo rettangolo conoscendo gli altri due.



$$AB = \sqrt{CB^2 - AC^2}$$
$$AC = \sqrt{CB^2 - AB^2}$$
$$CB = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

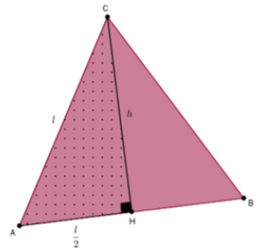
- Calcolo della diagonale del quadrato.



$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2 \cdot l^2} = l\sqrt{2}$$

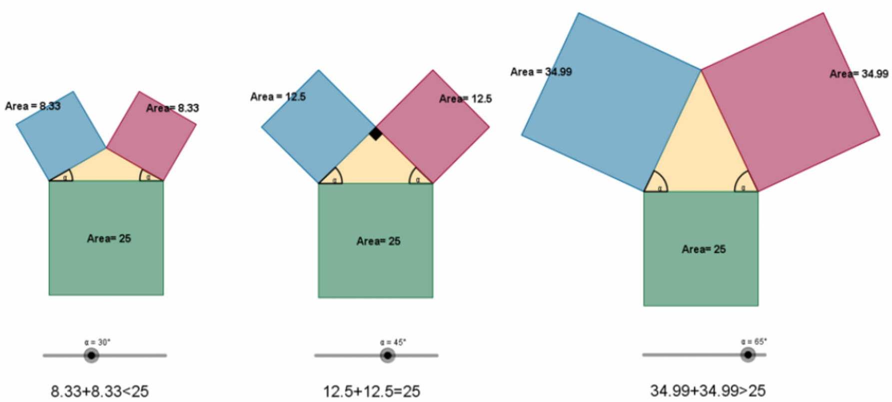
Osserviamo inoltre che tracciando la diagonale abbiamo ottenuto due triangoli rettangoli isosceli. Questi hanno l'angolo al vertice retto e quindi gli angoli alla base saranno uguali a 45°. Dunque abbiamo trovato che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele è uguale al prodotto della misura di un cateto per la radice quadrata di 2.

- Altezza del triangolo equilatero.



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot l^2} = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}$$

- Validità del teorema.
  Il teorema di Pitagora vale solo per i triangoli rettangoli.



Esercizi

Secondo volume, pagina 298 numeri 4, 9, 10.

Diario di bordo

Questa lezione l'ho tenuta il 27 aprile e rappresenta il fulcro della seconda parte del progetto che abbiamo strutturato. L'argomento principale trattato in questa giornata, infatti, è il teorema di Pitagora. Per introdurlo ho voluto usare un approccio storico per evidenziarne l'importanza e per farlo, come nella lezione precedente, ho voluto portare in classe i tabelloni introduttivi di Emma Castelnuovo a proposito del teorema. I tabelloni riguardavano in particolare la proprietà pitagorica e dell'uso che storicamente ne è stato fatto a livello pratico. Dopo aver fatto vedere loro che questa veniva utilizzata per costruire piramidi e per risolvere problemi racchiusi in una tavoletta risalente al 2000-1800 a. C., ho enunciato il teorema e dimostrato alla lavagna. É stato un po' complicato affrontare la dimostrazione. Credo che il motivo sia racchiuso sia nel fatto che la dimostrazione non fosse semplice ma anche al fatto che i ragazzi fossero spenti e poco attenti. Affrontare una lezione avendo la percezione di essere seguita poco è stato difficile perché, nonostante le mie continue domande e ripetuti stimoli, il loro silenzio era mal interpretabile. Non sapevo infatti se loro non stessero capendo i ragionamenti che stavo seguendo nella dimostrazione oppure se non li stessero seguendo affatto e, di conseguenza, non sapevo se proseguire o tornare indietro per riprendere i concetti già affrontati. Una volta terminata la dimostrazione ho pensato che fosse il momento giusto per mostrare agli studenti delle animazioni GeoGebra, per spezzare la lezione frontale e per catturare un po' di più la loro attenzione. Le animazioni erano due. La prima che ho mostrato riguarda la dimostrazione del teorema. Ho voluto infatti rendere dinamica la dimostrazione affrontata alla lavagna e sottolineare il fatto che il teorema vale per tutti i triangoli rettangoli. La seconda, invece, l'ho strutturata in modo tale che i ragazzi vedessero che il teorema vale solo per i triangoli rettangoli. Successivamente ho affrontato delle applicazioni relative al teorema. Ho fatto vedere loro come si possa calcolare la diagonale di un quadrato e l'altezza di un triangolo equilatero. Conclusa la lezione era rimasto ancora del tempo e quindi ho deciso di svolgere qualche esercizio. Alla fine ho distribuito i riassunti relativi a questa lezione ed assegnato gli esercizi per la lezione successiva.

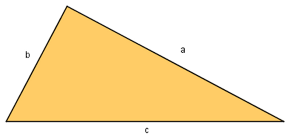
8.7 Lezione 7

Lezione

Inverso del teorema di Pitagora Nella lezione precedente abbiamo introdotto la proprietà Pitagorica e abbiamo messo in luce come gli Egiziani la utilizzassero, ancor prima che fosse dimostrata, per assicurarsi che la base delle piramidi fosse quadrata. Se osserviamo con più attenzione questo modo di procedere, è esattamente l'inverso di quello che abbiamo dimostrato nel teorema. Essi infatti, sfruttando il fatto che valesse una determinata proprietà per i lati del triangolo, erano sicuri che questo fosse rettangolo. Andiamo quindi a vedere in cosa consiste l'inverso del teorema di Pitagora e a dimostrarlo.

Teorema Dato un triangolo di lati a, b e c tali che $a^2 + b^2 = c^2$ allora il triangolo è rettangolo e c rappresenta la sua ipotenusa.

Dimostrazione Sia dunque un generico triangolo di lati a, b e c tali che $a^2 + b^2 = c^2$.

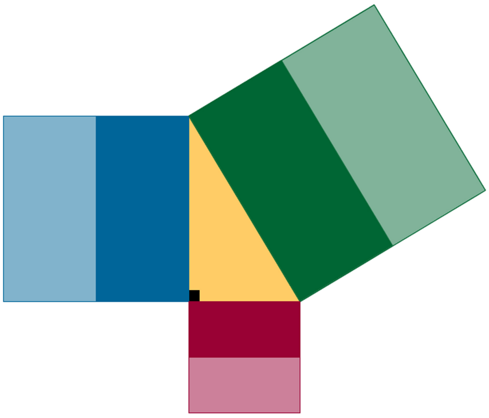


Costruiamo un triangolo rettangolo T' che abbia i cateti pari ad a e b. Usando ora il teorema di Pitagora per il triangolo T', sappiamo che l'ipotenusa di questo triangolo sarà pari a $\sqrt{a^2 + b^2}$, ovvero pari a c. I due triangoli quindi sono congruenti per il terzo principio di congruenza e dunque il triangolo di partenza è rettangolo.

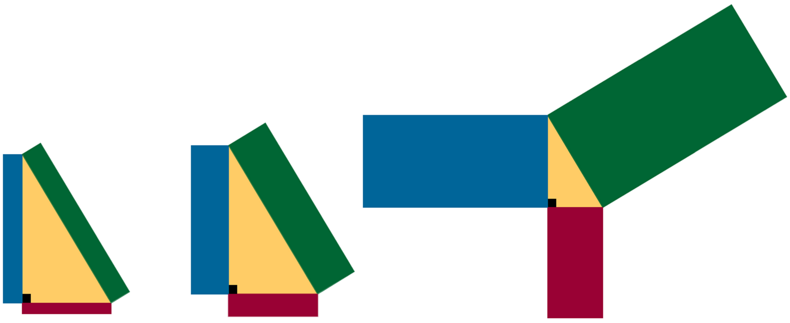
Abbiamo dunque dimostrato l'inverso del teorema di Pitagora, ovvero che se per un triangolo vale la proprietà pitagorica allora questo è rettangolo. Le terne di numeri naturali a, b e c che rappresentano le misure dei lati di un triangolo rettangolo vengono chiamate **terne pitagoriche**. Si avrà che $a < b < c$ e inoltre dovrà valere $a^2 + b^2 = c^2$. Riportiamo di seguito alcuni esempi di terne pitagoriche e alcuni loro multipli.

Terne pitagoriche	Verifica
3, 4, 5	$3^2 + 4^2 = 5^2$
9, 12, 15	$9^2 + 12^2 = 15^2$
5, 12, 13	$5^2 + 12^2 = 13^2$
7, 24, 25	$7^2 + 24^2 = 25^2$
8, 15, 17	$8^2 + 15^2 = 17^2$

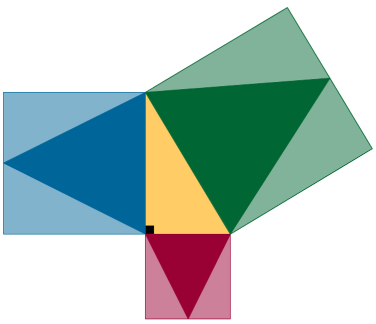
Estensioni del teorema di Pitagora Una volta completata la trattazione riguardante il teorema, possiamo considerare alcune sue estensioni. Ci potremmo chiedere infatti se il teorema, oltre a valere per i quadrati costruiti sui lati del triangolo, valga anche per altri poligoni. Un'osservazione che potremmo fare è la seguente. Se vale per i quadrati con lati i cateti e l'ipotenusa, allora vale anche sicuramente per i rettangoli che sono metà dei quadrati.



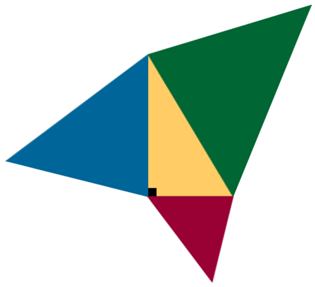
Inoltre questa proprietà è valida non solo per questi particolari rettangoli ma anche per i multipli e i sottomultipli.



Andando avanti possiamo osservare anche che il teorema di Pitagora vale per i triangoli costruiti sui lati del triangolo rettangolo, sfruttando quanto abbiamo già detto sulle aree.



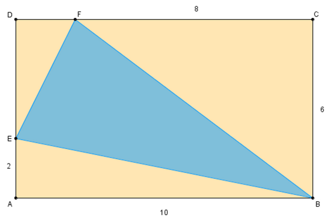
Anche qui è semplice osservare che non vale solo per questi particolari triangoli che abbiamo disegnato, ma per tutti.



Esercitazione Per una preparazione al compito ottimale, alla fine di questa lezione potrebbero essere presentati alcuni esercizi da svolgere in classe, eventualmente chiamando alla lavagna gli studenti. Riportiamo alcuni esempi di esercizi che potrebbero essere affrontati.

Esercizio 7, pagina 298, volume 2 Un quadrato è equivalente ad un rettangolo in cui le diagonali sono lunghe $3\sqrt{17}$ cm e uno dei lati è lungo 3 cm. Determina il perimetro del quadrato.

Esercizio 16, pagina 298, volume 2 Il quadrilatero $ABCD$ in figura è un rettangolo. Verificare che il triangolo BFE non è rettangolo.

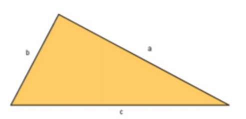


Esercizio 18, pagina 299, volume 2 In un triangolo isoscele ABC, i lati obliqui AC e BC sono lunghi 10 cm e la base AB è lunga 12 cm. Detti H, M ed N, rispettivamente, i punti medi di AB, AC e di BC, determina l'area del triangolo MHN.

Riassunto

Liceo delle Scienze Umane
Classe 2^a H
Geometria: Lezione 7

- Inverso del teorema di Pitagora.
  Dato un triangolo di lati a, b e c tali che $a^2 + b^2 = c^2$ allora il triangolo è rettangolo e c rappresenta la sua ipotenusa.
  Dimostrazione. Sia dunque un generico triangolo di lati a, b e c tali che $a^2 + b^2 = c^2$.

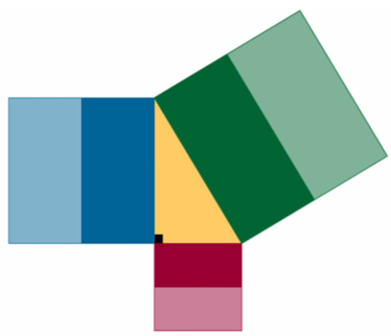


  Costruiamo un triangolo rettangolo T' che abbia i cateti pari ad a e b. Usando ora il teorema di Pitagora per il triangolo T', sappiamo che l'ipotenusa di questo triangolo sarà pari a $\sqrt{a^2 + b^2}$, ovvero pari a c. I due triangoli quindi sono congruenti per il terzo principio di congruenza e dunque il triangolo di partenza è rettangolo.

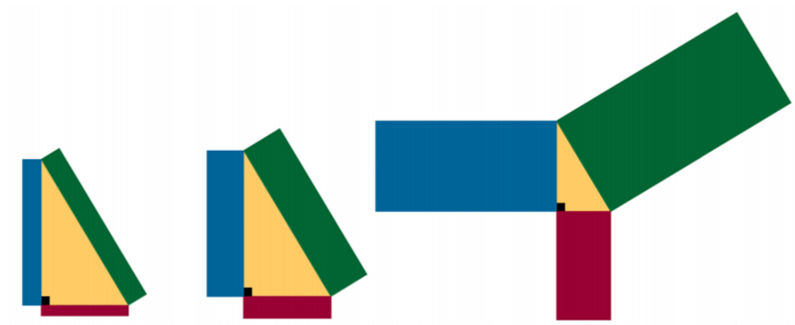
- Terne pitagoriche.

Terne pitagoriche	Verifica
3, 4, 5	$3^2 + 4^2 = 5^2$
9, 12, 15	$9^2 + 12^2 = 15^2$
5, 12, 13	$5^2 + 12^2 = 13^2$
7, 24, 25	$7^2 + 24^2 = 25^2$
8, 15, 17	$8^2 + 15^2 = 17^2$

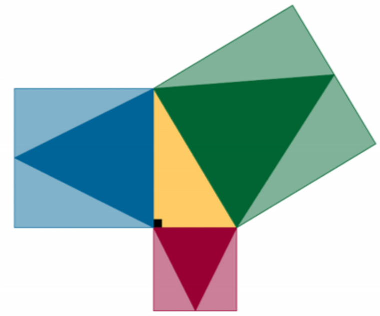
- Estensioni del teorema di Pitagora.
  Il teorema di Pitagora vale anche per i rettangoli che sono metà dei quadrati costruiti sui cateti e sull'ipotenusa.



Inoltre questa proprietà è valida non solo per questi particolari rettangoli ma anche per i multipli e i sottomultipli.



Il teorema di Pitagora vale anche per i triangoli costruiti sui lati del triangolo rettangolo aventi il vertice opposto alla base coincidente con il punto medio del lato del quadrato, ed è una conseguenza di quanto abbiamo già detto sulle aree.



- Esercizi.
  Volume 2, pagina 283 numeri 74, 76.
  Volume 2, pagina 300 numeri 28, 29 e 38.

Diario di bordo

La settima lezione l'ho tenuta il 30 aprile ed è una continuazione della sesta. Gli argomenti trattati sono strettamente legati al teorema di Pitagora ovvero, l'inverso del teorema e alcune estensioni. Prima di affrontarli però ho chiesto ai ragazzi se ci fossero problemi con gli esercizi assegnati alla fine della lezione precedente. Dopo averne corretto uno, ho iniziato la lezione enunciando l'inverso del teorema di Pitagora e dimostrandolo. I ragazzi erano più reattivi e partecipi e la dimostrazione non ha creato nessun particolare problema. Così una volta finito sono passata ad illustrare alcune tra le più semplici estensioni del teorema di Pitagora. Anche per questa parte della lezione la collaborazione dei ragazzi è stata significativa, tanto da arrivare a determinate conclusioni in autonomia. Mi ha fatto piacere vedere come gli studenti fossero reattivi e partecipi e come avessero assimilato e capito a fondo il teorema di Pitagora. Anche per questa lezione mi sono avvalsa dell'aiuto di alcuni tabelloni catalogati nella prima parte del tirocinio. Quelli che ho voluto portare in classe per questa particolare lezione spiegano le estensioni e rappresentano una sorta di "teorema di Pitagora all'infinito".

Mi sembravano significativi sia per l'argomento trattato a lezione ma anche per concludere così il ciclo di argomenti che avevamo in programma.

Capitolo 9

Compito in classe

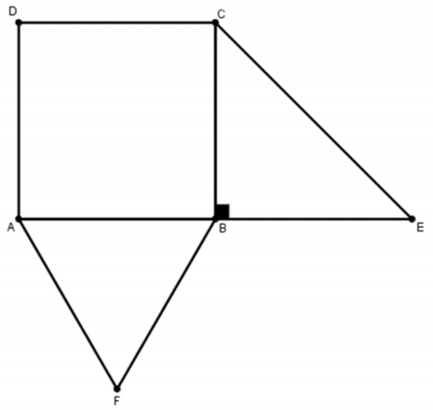
Dopo aver affrontato tutte le lezione descritte fino ad ora e dopo aver ritenuto opportuno dedicare due ulteriori ore ad una esercitazione in classe, abbiamo elaborato un compito e lo abbiamo sottoposto agli studenti. Nel compito abbiamo inserito quattro esercizi di difficoltà diversa cercando di toccare quanti più argomenti possibili e di farli interagire tra loro in modo tale da non rendere ciascun argomento una parte a sé stante. Ovviamente i ragazzi nelle ore di esercitazione sono stati abituati ad affrontare problemi di questo tipo e, a parte un esercizio con un livello di difficoltà leggermente maggiore, non ci siamo voluti discostare tanto dal tipo di esercizi già visti. Come per il test, abbiamo ritenuto opportuno creare più copie e distribuirle per file. In realtà, quindi, gli esercizi che analizzeremo saranno cinque. Inoltre per alcuni alunni affetti da problemi di apprendimento, la professoressa Baldini ha ritenuto opportuno sottoporre loro un compito facilitato, ovvero un elaborato in cui fossero presenti degli aiuti e dei punti chiave per il procedimento da seguire per la risoluzione del problema. Mentre per due ragazzi affetti da autismo le professoresse di sostegno hanno redatto un compito che hanno ritenuto adatto per loro. Anche in questo caso abbiamo voluto renderci conto dell'andamento della classe attraverso un'analisi in cui però non abbiamo tenuto conto dei ragazzi autistici. Il compito è stato svolto il 7 maggio e i ragazzi presenti erano 17, di cui 2 autistici. Nell'analisi, quindi, i dati faranno riferimento solo ad un gruppo di 15 persone. Per i 5 ragazzi assenti, poi, il voto sarebbe stato assegnato successivamente a seguito di un'interrogazione orale. Presentiamo dunque i compiti e successivamente i dati raccolti.

9.1 Elaborati

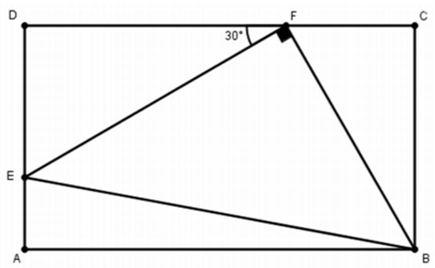
Elaborato 1

Compito di geometria
Classe 2^a H
Durata: 60 minuti

Esercizio 1 Esternamente ad un quadrato $ABCD$ costruisci sul lato AB un triangolo equilatero e sul lato BC un triangolo rettangolo e isoscele. Sapendo che il lato del quadrato misura 24 cm, calcola il perimetro e l'area dell'esagono $AFBECD$.

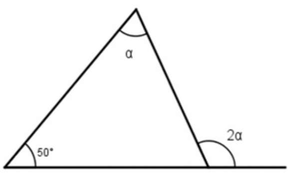


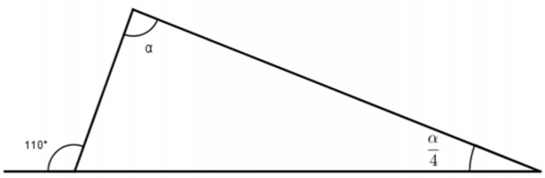
Esercizio 2 Nel rettangolo $ABCD$, siano E ed F due punti rispettivamente sui lati AD e CD tali che il triangolo BEF sia rettangolo in F.



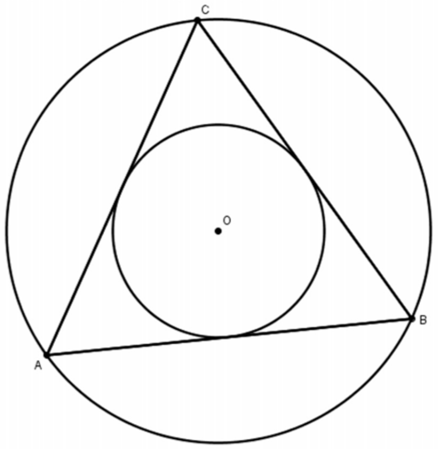
Supponendo che $FC = 2$, $EF = 6$ e che l'angolo $D\hat{F}E = 30°$ calcolare il perimetro e l'area del rettangolo $ABCD$.

Esercizio 3 Determina l'angolo α nei seguenti due casi.





Esercizio 4 Considera la circonferenza inscritta e quella circoscritta ad ABC, triangolo equilatero.

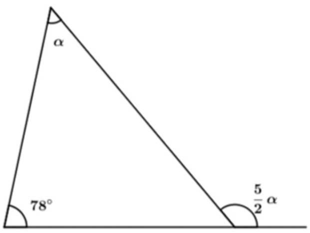


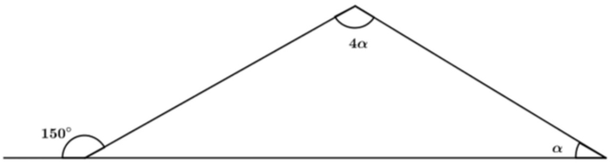
- Dimostra che, collegando il centro O con i vertici del triangolo si ottengono tre triangoli congruenti.
- Calcola il raggio della circonferenza circoscritta sapendo che il lato del triangolo è lungo 12 cm mentre il raggio della circonferenza inscritta è lungo $2\sqrt{3}$ cm.

Elaborato 1 semplificato

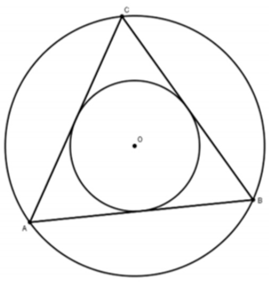
Compito di geometria
Classe 2^a H
Durata: 60 minuti

Esercizio 1 Determina l'angolo α nei seguenti due casi.



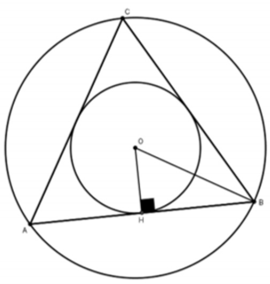


Esercizio 2 Considera la circonferenza inscritta e quella circoscritta ad ABC, triangolo equilatero.



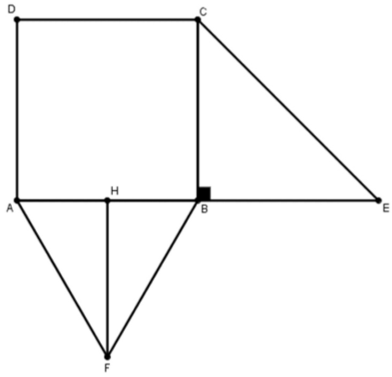
- Dimostra che, collegando il centro O con i vertici del triangolo si ottengono tre triangoli congruenti.
- Calcola il raggio della circonferenza circoscritta sapendo che il lato del triangolo è lungo 12 cm mentre il raggio della circonferenza inscritta è lungo $2\sqrt{3}$ cm.

Suggerimenti Osserva la seguente figura.



Identifica i raggi delle due circonferenze. Questi sono anche i lati del triangolo BOH.

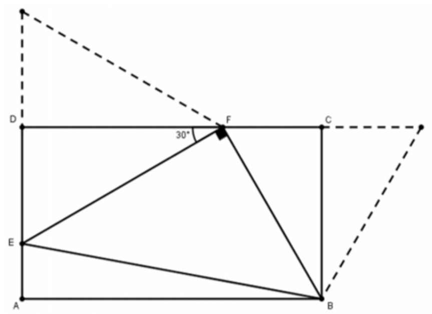
Esercizio 3 Esternamente ad un quadrato $ABCD$ costruisci sul lato AB un triangolo equilatero e sul lato BC un triangolo rettangolo e isoscele. Sapendo che il lato del quadrato misura 24 cm, calcola il perimetro e l'area dell'esagono $AFBECD$.



Suggerimenti

- Il triangolo ABF è equilatero, quindi AF e FB sono uguali a ...?
- Il triangolo BCE è isoscele e rettangolo, quindi per trovare CE quale teorema possiamo usare?
- Per trovare l'altezza FH del triangolo ABF, ricorda che questa divide la base AB in due parti uguali ed è perpendicolare ad AB.

Esercizio 4 Nel rettangolo $ABCD$, siano E ed F due punti rispettivamente sui lati AD e CD tali che il triangolo BEF sia rettangolo in F.



Supponendo che $FC = 2$, $EF = 6$ e che l'angolo $D\hat{F}E = 30°$ calcolare il perimetro e l'area del rettangolo $ABCD$.

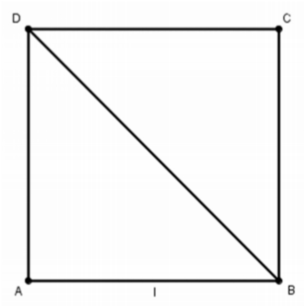
Suggerimenti

- L'angolo di 30° è la metà di un angolo di ... gradi, quindi il triangolo EFD è la metà di un triangolo ... e DF rappresenta la sua altezza.
- Se $D\hat{F}E = 30°$, $B\hat{F}E = 90°$ allora $C\hat{F}B$ =??°
- FCB è anch'esso metà di un triangolo ... e quindi FB e CB li puoi trovare di conseguenza.

Elaborato 2

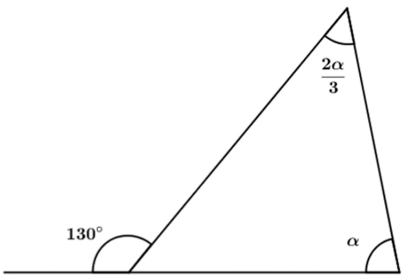
Compito di geometria
Classe 2^a H
Durata: 60 minuti

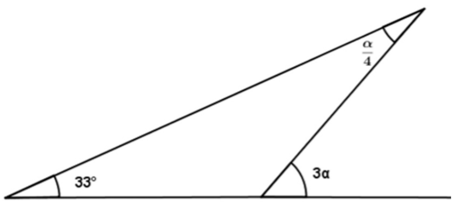
Esercizio 1 $ABCD$ è un quadrato di lato l.



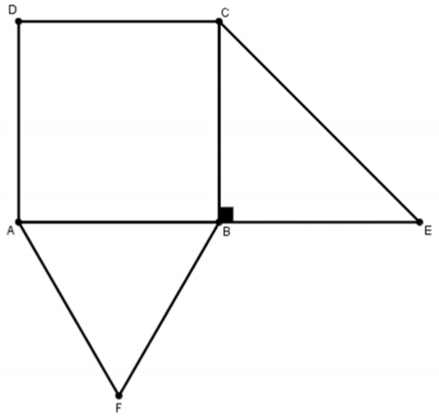
- Dimostra che la diagonale divide il quadrato $ABCD$ in due triangoli congruenti.
- Calcola in funzione di l il raggio della circonferenza circoscritta a uno di questi due triangoli.

Esercizio 2 Determina l'angolo α nei seguenti due casi.

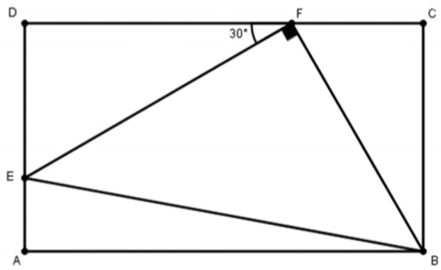




Esercizio 3 Esternamente ad un quadrato $ABCD$ costruisci sul lato AB un triangolo equilatero e sul lato BC un triangolo rettangolo e isoscele. Sapendo che il lato del quadrato misura 24 cm, calcola il perimetro e l'area dell'esagono $AFBECD$.



Esercizio 4 Nel rettangolo $ABCD$, siano E ed F due punti rispettivamente sui lati AD e CD tali che il triangolo BEF sia rettangolo in F.

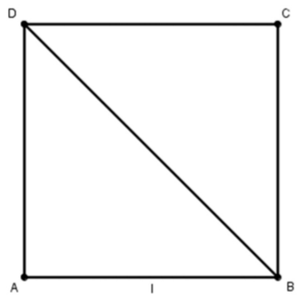


Supponendo che $FC = 2$, $EF = 6$ e che l'angolo $D\hat{F}E = 30°$ calcolare il perimetro e l'area del rettangolo $ABCD$.

Elaborato 2 semplificato

Compito di geometria
Classe 2^a H
Durata: 60 minuti

Esercizio 1 $ABCD$ è un quadrato di lato l.

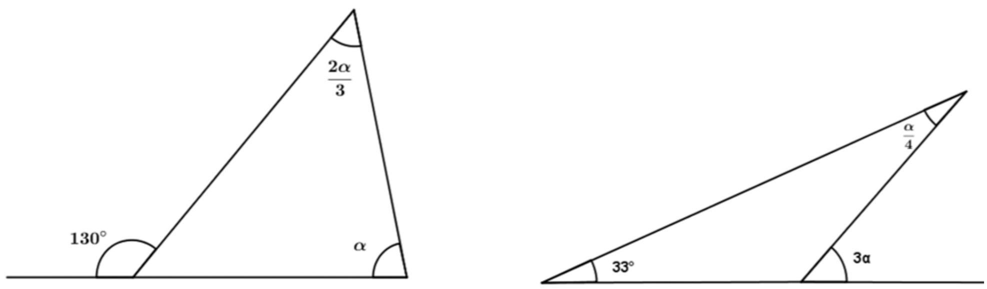


- Dimostra che la diagonale divide il quadrato $ABCD$ in due triangoli congruenti.
- Calcola in funzione di l il raggio della circonferenza circoscritta a uno di questi due triangoli.

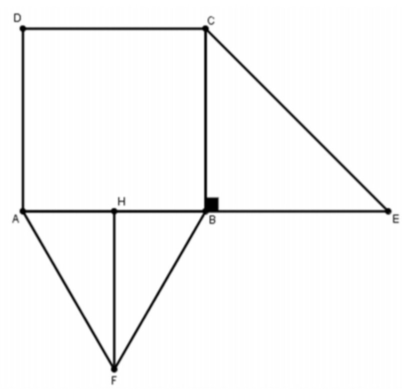
Suggerimenti

- Metà del quadrato è uguale ad un triangolo che ha quali proprietà?
  - Come sono i suoi lati?
  - Come sono i suoi angoli?
- Il diametro della circonferenza è uguale a quale lato del triangolo?
- Quale teorema possiamo usare per calcolare questo lato?

Esercizio 2 Determina l'angolo α nei seguenti due casi.



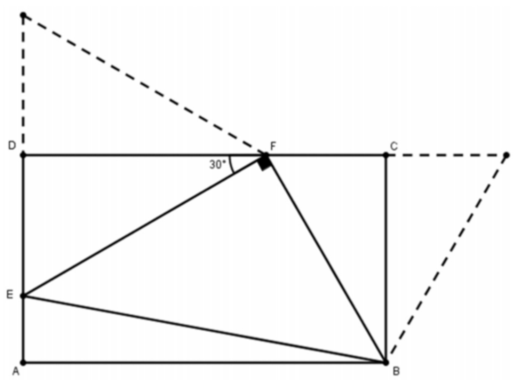
Esercizio 3 Esternamente ad un quadrato $ABCD$ costruisci sul lato AB un triangolo equilatero e sul lato BC un triangolo rettangolo e isoscele. Sapendo che il lato del quadrato misura 24 cm, calcola il perimetro e l'area dell'esagono $AFBECD$.



Suggerimenti

- Il triangolo ABF è equilatero, quindi AF e FB sono uguali a ...?
- Il triangolo BCE è isoscele e rettangolo, quindi per trovare CE quale teorema possiamo usare?
- Per trovare l'altezza FH del triangolo ABF, ricorda che questa divide la base AB in due parti uguali ed è perpendicolare ad AB.

Esercizio 4 Nel rettangolo $ABCD$, siano E ed F due punti rispettivamente sui lati AD e CD tali che il triangolo BEF sia rettangolo in F.



Supponendo che $FC = 2$, $EF = 6$ e che l'angolo $D\hat{F}E = 30°$ calcolare il perimetro e l'area del rettangolo $ABCD$.

Suggerimenti

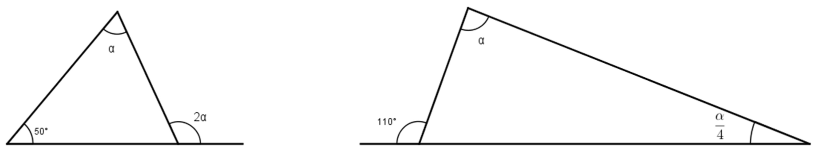
- L'angolo di 30° è la metà di un angolo di ... gradi, quindi il triangolo EFD è la metà di un triangolo ... e DF rappresenta la sua altezza.
- Se $D\hat{F}E = 30°$, $B\hat{F}E = 90°$ allora $C\hat{F}B$ =??°
- FCB è anch'esso metà di un triangolo ... e quindi FB e CB li puoi trovare di conseguenza.

9.2 Analisi

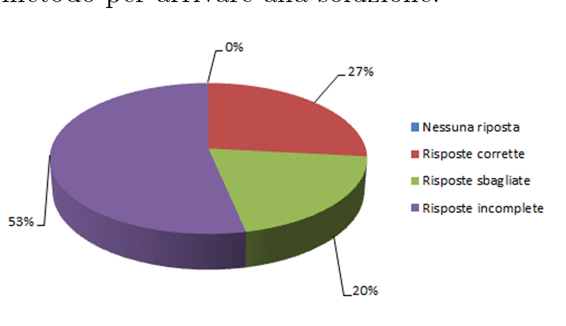
Dato che gli esercizi non sono inseriti tutti nello stesso compito, per maggiore chiarezza riprenderemo il testo dell'esercizio prima di riportare l'analisi dei dati.

Esercizio 1

Determina l'angolo α nei seguenti due casi.



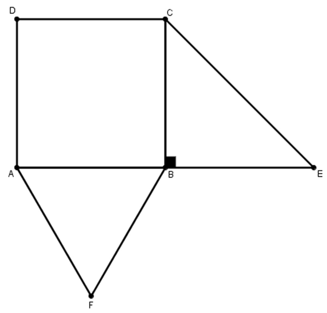
Questo esercizio è stato inserito per molteplici motivi. Il primo è per il fatto che questo argomento è stato uno dei primi trattati in classe e quindi ci sembrava giusto approfondire se il ragazzi avessero appreso o meno la semplice proprietà sulla somma degli angoli interni di un triangolo. Il secondo è che un esercizio molto simile era stato inserito nel test iniziale e volevamo avere un metro di giudizio per l'efficacia del nostro lavoro. Terzo ed ultimo perché questo esercizio è molto semplice. Dare ai ragazzi un problema in cui potevano cimentarsi senza incontrare grosse difficoltà ci sembrava opportuno per dar loro una dose di fiducia per affrontare gli altri una volta terminato questo. Nonostante questo, però, dal grafico che riporteremo dopo si vedrà facilmente che le risposte incomplete sono molteplici. Molti ragazzi, infatti, hanno trovato α solo in uno dei due casi nonostante questi fossero particolarmente simili. Altri invece si sono cimentati senza però trovare il giusto metodo per arrivare alla soluzione.



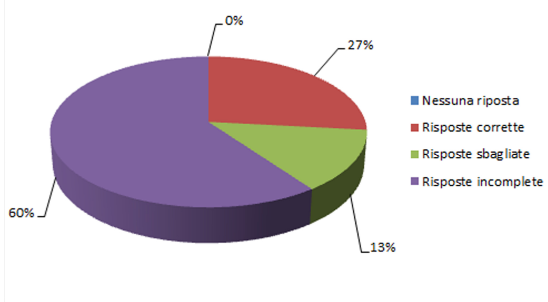
Esercizio 2

Esternamente ad un quadrato $ABCD$ costruisci sul lato AB un triangolo equilatero e sul lato BC un triangolo rettangolo e isoscele. Sapendo che il lato del quadrato misura 24 cm, calcola il perimetro e l'area dell'esagono

$AFBECD$.

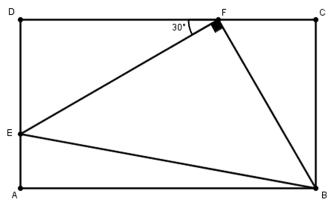


L'esercizio in questione l'abbiamo inserito per vedere come i ragazzi avrebbero affrontato un problema sul teorema di Pitagora. Non è banale e richiede un minimo di ragionamento ma, d'altro canto, abbiamo voluto affrontare un percorso di geometria anche per allenare gli studenti ad affrontare problemi di questo tipo. Molti di loro, a parte i ragazzi con difficoltà a cui era stato assegnato il problema semplificato, hanno trovato il metodo giusto per risolvere l'esercizio ma poi sono incappati in errori di calcolo. Tra quelli più gravi c'è sicuramente l'incapacità, da parte di alcuni ragazzi, di affrontare delle semplici operazioni con i radicali. Altri hanno sommato i perimetri delle tre figure convinti così di calcolare il perimetro richiesto. Questo tipo di errori è stato racchiuso nella categoria *Risposte incomplete*. Il grafico che racchiude questi dati è il seguente.



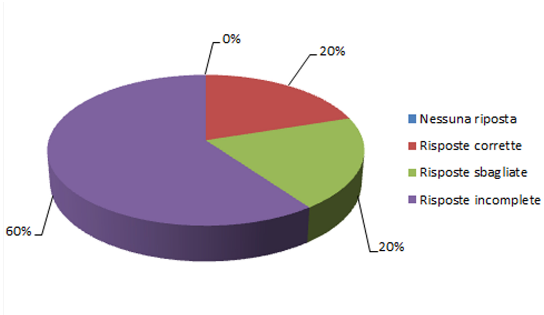
Esercizio 3

Nel rettangolo $ABCD$, siano E ed F due punti rispettivamente sui lati AD e CD tali che il triangolo BEF sia rettangolo in F.



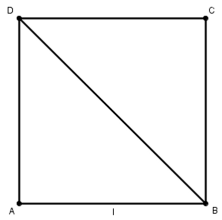
Supponendo che $FC = 2$, $EF = 6$ e che l'angolo $D\hat{F}E = 30°$ calcolare il perimetro e l'area del rettangolo $ABCD$.

Il terzo esercizio è ad un livello ancora più avanzato che mette insieme diversi argomenti trattati a lezione. In particolare, durante le esercitazioni in classe, la nostra attenzione si era soffermata tanto sul completamento di particolari triangoli rettangoli. I ragazzi, pertanto, erano abituati a ragionare completando la figura in modo da ottenere un triangolo equilatero o un quadrato. A parte alcuni errori di approssimazione, anche qui troviamo errori di calcolo con i radicali e semplificazioni non corrette. Un'altra cosa da sottolineare, purtroppo, è che in alcuni casi i ragazzi abbiano aggiunto, di loro spontanea volontà, dei dati che hanno semplificato loro il problema ma che li hanno condotti verso la soluzione sbagliata. Hanno, per esempio, imposto l'uguaglianza tra due lati anche se nè nel problema nè sulla figura era stato indicato. Nelle lezioni di esercitazione abbiamo sottolineato più volte questo aspetto, ma non tutti ne hanno tenuto conto. Altri studenti, invece, non sono stati in grado di applicare le formule nel modo corretto. Ecco il grafico riepilogativo.



Esercizio 4

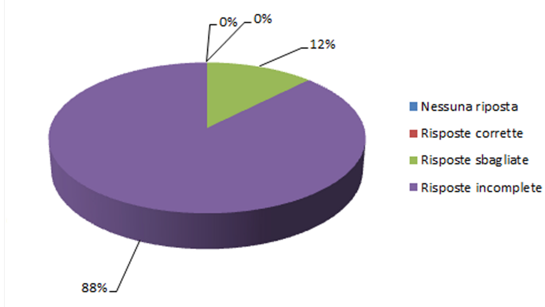
$ABCD$ è un quadrato di lato l.



- Dimostra che la diagonale divide il quadrato $ABCD$ in due triangoli congruenti.

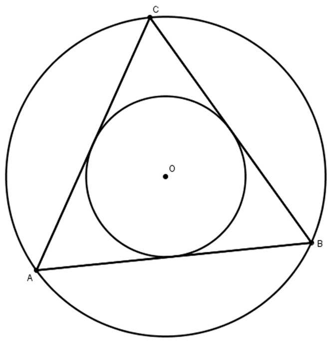
- Calcola in funzione di l il raggio della circonferenza circoscritta a uno di questi due triangoli.

Questo quarto esercizio rientra nei due esercizi più difficili del compito. In questo, infatti, vengono ripresi anche i criteri di congruenza dei triangoli, ripetuti più volte a lezione, e il concetto di circonferenza circoscritta. Sul primo punto i ragazzi non hanno avuto particolari difficoltà ma nessuno è stato in grado di risolvere il secondo e di disegnare la circonferenza. Come si vede dagli elaborati, questo problema rientra solo in uno dei compiti quindi solo alcuni alunni hanno dovuto affrontarlo. La statistica, pertanto, non è più condotta su 15 alunni ma solo su 8.



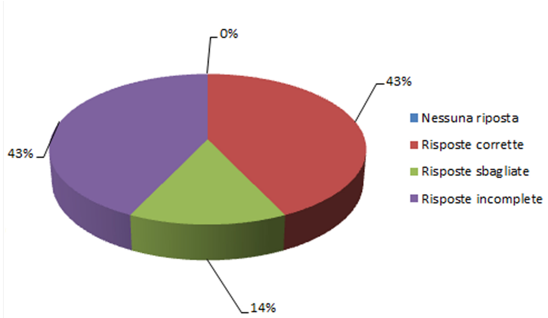
Esercizio 5

Considera la circonferenza inscritta e quella circoscritta ad ABC, triangolo equilatero.



- Dimostra che, collegando il centro O con i vertici del triangolo si ottengono tre triangoli congruenti.
- Calcola il raggio della circonferenza circoscritta sapendo che il lato del triangolo è lungo 12 cm mentre il raggio della circonferenza inscritta è lungo $2\sqrt{3}$ cm.

L'ultimo esercizio che analizziamo è più o meno dello stesso livello di difficoltà del precedente. Anche qui gli argomenti basilari sono i criteri di congruenza dei triangoli e circonferenze inscritte e circoscritte. Gli alunni che hanno affrontato questo esercizio sono 7 ma solo alcuni di loro lo hanno risolto nella maniera giusta. Alcuni errori riscontrati sono legati al teorema di Pitagora che non è stato utilizzato nel modo opportuno, altri invece sono semplici errori di calcolo. In quest'ultimo grafico riassumiamo il tutto.



Conclusioni

L'andamento complessivo della classe è stato pienamente sufficiente e quindi possiamo ritenerci più che soddisfatti. Non considerando alcuni studenti con particolari difficoltà, tutti hanno cercato in qualche modo di trovare una soluzione al problema. In molti casi con successo. Possiamo quindi affermare, senza ombra di dubbio, che la classe abbia risposto in modo positivo ma soprattutto abbia assunto lo spirito e la predisposizione giusta nei confronti di questi nuovi argomenti.

Capitolo 10

Conclusione della mia esperienza

Questa parte del tirocinio è stata un'esperienza molto formativa per me. La disponibilità da parte della professoressa Baldini ed i costanti consigli del professor Ottaviani mi hanno condotto verso la fine ma non senza dover affrontare delle difficoltà. L'aspetto che ho apprezzato maggiormente di questa avventura è stato rendermi conto di quanto lavoro sia necessario per preparare un'unica ora di lezione. Avere le idee chiare, esporre tutto in modo lineare e cercare di essere più comprensibili possibile, è qualcosa che ha bisogno di una preparazione dietro non indifferente. La soddisfazione in alcune lezione di riuscire a trasmettere qualcosa e la delusione, in altre, di non essere in grado di attirare l'attenzione sono state sensazioni nuove per me che è stato bello dover affrontare da sola senza nessun tipo di aiuto. In alcuni casi ci si può sentire demotivati ma la speranza che la lezione successiva sarebbe stata più coinvolgente mi ha spronato a fare del mio meglio per migliorare alcuni aspetti che potevano risultare noiosi. La capacità di preparare un compito equo ed equilibrato che contenesse tutto ciò che si è affrontato in classe non è stato per niente banale. Come non è stato per niente scontato dovere affrontare delle interrogazioni in cui gestire e calibrare le domande. Le cose che ho imparato in questo mese e mezzo di lezioni e attività faranno parte del mio bagaglio culturale che spero possa crescere sempre più in questo ambiente.

Bibliografia

[1] Didattica della matematica, Emma Castelnuovo, La Nuova Italia, 1982.

[2] Documenti di un'esposizione di matematica, Emma Castelnuovo, Boringhieri, 1972.

[3] Matematica nella realtà, Emma Castelnuovo e Mario Barra, Paolo Boringhieri, 1976.

[4] La via della matematica. La geometria, Emma Castelnuovo, La Nuova Italia, 1975.

[5] L'officina matematica, ragionare con i materiali, Emma Castelnuovo, edizioni la meridiana, 2008.