UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Le quartiche di Clebsch

Candidata:

Anna Galli

Relatore:

Prof. Giorgio Ottaviani

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1 Introduzione

Le quartiche di Clebsch sono definite come le quartiche che appartengono alla varietà 5-secante della varietà di Veronese $v_4(\mathbb{P}^2)$ ovvero i polinomi di grado 4 che si possono scrivere come somma di cinque quarte potenze di forme lineari o limiti di queste: $f = \sum_{i=0}^{4} l_i^4$ o $f = lim_{t\to 0} \sum_{i=0}^{4} l_i^4(t)$. Nel 1861 Clebsch dimostrò che queste possono essere descritte equivalentemente come le quartiche che hanno un operatore differenziale del secondo ordine che le annulla. Come conseguenza si ha che $v_4(\mathbb{P}^2)$ è 5- difettiva, cioè la varietà 5-secante di $v_4(\mathbb{P}^2)$ è una varietà algebrica di dimensione minore della dimensione attesa (=14); si dimostra infatti che questa è un'ipersuperficie in $\mathbb{P}^{14}$, quindi ha dimensione 13.

2 Morfismo di Veronese

Siano $n, d \in \mathbb{N}_{>0}$, si definisce la *morfismo di Veronese* di grado d:

$$\begin{array}{rccc} v_d : & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & [x_0, \dots, x_n] & \longmapsto & [\dots, x^I, \dots] \end{array}$$

dove x^I varia tra tutti i monomi di grado d in $x_0, \dots, x_n$. Si verifica che il numero di monomi in $n+1$ variabili di grado d è $\binom{n+d}{d}$, quindi $N = \binom{n+d}{d} - 1$.
Si può considerare anche un'altra descrizione del morfismo di Veronese:
Sia $P \in \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ P=$[l_0, \dots, l_n]$, posso interpretare le coordinate di P come coefficienti di una forma lineare $l = \sum_{i=0}^n l_i x_i \in \mathbb{C}^{n+1}$.
Considero $l^d \in Sym^d(\mathbb{C}^{n+1})$ polinomio omogeneo di grado d in $n+1$ variabili, allora

$$l^d = \sum_{\alpha t.c. |\alpha| = d} \binom{d}{\alpha} l^\alpha x^\alpha$$

dove $x^\alpha := x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}, \alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| := \sum_{i=0}^n \alpha_i$, $\binom{d}{\alpha} := \frac{d!}{\alpha_0! \dots \alpha_n!}$,
$l^\alpha := l_0^{\alpha_0} \cdots l_n^{\alpha_n}$
I termini del polinomio l^d sono, a meno di scalari, tutti i monomi di grado d in $n+1$ variabili, quindi sono esattamente $\binom{n+d}{d}$. Con questa notazione definisco il *morfismo di Veronese* di grado d:

$$\begin{array}{rccc} v_d : & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & [l] & \longmapsto & [l^d] \end{array}$$

dove $N := \binom{n+d}{d} - 1$. Possiamo pensare quindi il morfismo di Veronese come la parametrizzazione delle d-esime potenze di forme lineari. Inoltre questa descrizione di v_d è utile perchè si nota che il morfismo di Veronese è $GL_{n+1}(\mathbb{C})$-equivariante, ovvero $\forall g \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$, $\forall l \in \mathbb{C}^{n+1}$

$$v_d(g \cdot [l]) = g \cdot v_d([l])$$

dove l'azione di $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ su $\mathbb{P}(Sym^d(\mathbb{C}^{n+1}))$ è definita come segue: $\forall g \in GL_{n+1}(\mathbb{C}), \forall f(x_0, \dots, x_n) \in Sym^d(\mathbb{C}^{n+1})$:

$$g \cdot [f] := [f(g \cdot (x_0, \dots, x_n))]$$

La seguente proposizione mostra che il morfismo di Veronese è un embedding cioè è un isomorfismo con l'immagine.

Proposizione 2.1: $v_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$ è un embedding.
dim: v_d è ben definita:
Sia $P \in \mathbb{P}^n$, $P = [l_0, \dots, l_n]$, dualmente corrisponde alla forma lineare $l = \sum_{i=0}^n l_i x_i \in \mathbb{C}^{n+1}$.
Osservo che $l \neq 0$ perchè $\exists i \in \{0, \dots, n\}$ t.c. $l_i \neq 0$. Le coordinate di $v_d(P)$ sono i coefficienti del polinomio l^d. Siccome $l \neq 0 \Rightarrow l^d \neq 0 \Rightarrow$ le coordinate di $v_d(P)$ sono non tutte nulle, quindi v_d è ben definita.
v_d è iniettiva:
Siano $P, Q \in \mathbb{P}^n$ t.c. $P \neq Q$, $l_P, l_Q \in \mathbb{C}^{n+1}$ le forme lineari corrispondenti. Le coordinate di $v_d(P)$ e $v_d(Q)$ sono i coefficienti di l_P^d e l_Q^d rispettivamente. $P \neq Q \Rightarrow l_P \neq l_Q \Rightarrow l_P^d \neq l_Q^d \iff v_d(P) \neq v_d(Q)$ quindi v_d è iniettiva.
Resta da dimostrare che il rango della matrice jacobiana è costante uguale a n. Sia

$$\mathcal{J}(x_0,\ldots,x_n) = (\frac{\partial (v_d)_i}{\partial x_j} \mid_{\mathbf{x}=x_0,\ldots,x_n})_{i=0,\ldots,N j=0,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{(N+1)\times(n+1)}$$

la matrice jacobiana calcolata nel punto $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n$, è sufficiente dimostrare che $\mathcal{J}$ ha rango massimo in un punto: sfruttando la $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ - equivarianza di v_d questo è equivalente a dimostrare che $\mathcal{J}$ ha rango massimo in ogni punto di $\mathbb{P}^n$. Sia $\mathbf{x} = [1,0,\ldots,0] \in \mathbb{P}^n$, gli unici coefficienti di $\mathcal{J}$ che si non si annullano sono:

$$\frac{\partial x_0^d}{\partial x_0} \mid_{\mathbf{x}=[1,0,\ldots,0]}= d,\ \frac{\partial x_0^{d-1}x_1}{\partial x_1} \mid_{\mathbf{x}=[1,0,\ldots,0]}= 1,\ \ldots,\frac{\partial x_0^{d-1}x_n}{\partial x_n} \mid_{\mathbf{x}=[1,0,\ldots,0]}= 1$$

$\Rightarrow$ a meno di riordinare le colonne

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} d & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango $n+1$.

Esempi

$\bullet n = 1 \Rightarrow N = \binom{d+1}{d} - 1 = d$

$$\begin{array}{cccc} v_d: & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^d \\ & [l] & \longmapsto & [l^d] \end{array}$$

In coordinate $v_d([x_0,x_1]) = [x_0^d, x_0^{d-1}x_1,\ldots,x_0x_1^{d-1},x_1^d]$. $v_d(\mathbb{P}^1)$ è detta curva razionale normale.

• Un caso particolare della curva razionale normale è la cubica gobba ($d = 3$):

$$\begin{array}{cccc} v_3: & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & [x_0,x_1] & \longmapsto & [x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3] \end{array}$$

$\bullet n = 2\ d = 2 \to N = \binom{4}{2} - 1 = 5$

$$\begin{array}{cccc} v_2: & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ & [x_0,x_1,x_2] & \longmapsto & [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2] \end{array}$$

$v_2(\mathbb{P}^2)$ è detta superficie di Veronese

Dal punto di vista geometrico il morfismo di Veronese è caratterizzato dal fatto che le ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}^n$ sono esattamente le sezioni di $v_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ con iperpiani: sia $H \subseteq \mathbb{P}^N$ l'iperpiano definito dall'equazione $\sum_{i=0}^N l_i y_i = 0 \Rightarrow H \cap v_d(\mathbb{P}^n) = v_d(X)$ dove $X := \{a \in \mathbb{P}^n \mid \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} l^\alpha x^\alpha = 0\}$. Viceversa sia $X = V(f)$ l'ipersuperficie associata al polinomio $f = \sum_{|\alpha|=d} l^\alpha x^\alpha \Rightarrow X \cong v_d(X) = H \cap v_d(\mathbb{P}^n)$ dove H è l'iperpiano $\sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} l^\alpha y_\alpha = 0 \subseteq \mathbb{P}^N$.

Siamo interessati al caso $n = 2, d = 4 \Rightarrow N = 14$:

$$\begin{array}{cccc} v_4: & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^{14} \\ & [l] & \longmapsto & [l^4] \end{array}$$

In coordinate:
$v_4([l_0,l_1,l_2]) = [l_0^4, 4l_0^3l_1, 4l_0^3l_2, 6l_0^2l_1^2, 6l_0^2l_2^2, 12l_0^2l_1l_2, 4l_0l_1^3, 4l_0l_2^3, 12l_0l_1^2l_2, 12l_0l_1l_2^2, l_1^4, 4l_1^3l_2, 6l_1^2l_2^2, 4l_1l_2^3, l_2^4]$

Definizione 2.1: $v_4(\mathbb{P}^2)$ è detta <u>*4-immersione di Veronese*</u> di $\mathbb{P}^2$.

3 Apolarità

L'obiettivo è dimostrare che la 4-immersione di Veronese è una varietà algebrica, per farlo si introduce il metodo dell'apolarità. Questa teoria sarà utile anche in seguito nel calcolo del rango di un polinomio e della dimensione delle varietà secanti della varietà di Veronese.
Siano

$$R := \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \quad S := \mathbb{C}[\partial_0, \partial_1, \partial_2]$$

∂_i $i = 0, 1, 2$ sono operatori differenziali che agiscono sulle variabili come una base duale (ovvero $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ $\forall i, j = 0, 1, 2$), quindi S è l'anello degli operatori differenziali polinomiali.
R e S sono anelli graduati:

$$S = \oplus_{e\geq 0} S_e \quad R = \oplus_{d\geq 0} R_d$$

dove $S_e :=< \partial_0^e, \partial_0^{e-1}\partial_1, \partial_0^{e-1}\partial_2, \ldots, \partial_2^e >$ e $R_d :=< x_0^d, x_0^{d-1}x_1, x_0^{d-1}x_2, \ldots, x_2^d >$

Considero la funzione $S_e \times R_d \longrightarrow R_{d-e}$ che applica ad un polinomio omogeneo di grado d un operatore differenziale di grado e. Questa è una funzione bilineare. Sono interessata al caso $e = 2$, $d = 4$: $S_2 \times R_4 \longrightarrow R_2$
Quindi fisso la seconda componente $f \in R_4$ e considero la funzione

$$\begin{array}{rccc} Cat_{2,2}(f): & S_2 & \longrightarrow & R_2 \\ & \partial & \longmapsto & \partial \cdot f \end{array}$$

$dim(S_2) = dim(R_2) = \binom{2+2}{2} = 6 \Rightarrow Cat_{2,2}(f)$ è una matrice 6×6 di scalari che dipende linearmente dai coefficienti di f, è detta <u>*matrice cataletticante*</u>.

Proposizione 3.1: $rank(Cat_{2,2}(f)) = 1 \iff f \in v_4(\mathbb{P}^2)$

Corollario 3.1: $v_4(\mathbb{P}^2)$ è una varietà algebrica.

<u>*dim*</u>(Corollario 3.1): Le equazioni che definiscono $v_4(\mathbb{P}^2)$ sono i minori 2×2 della matrice $Cat_{2,2}(f)$.

<u>*dim*</u>(Proposizione 3.1): "$\Leftarrow$"
Sia $f \in v_4(\mathbb{P}^2) \Rightarrow f = l^4$ $\exists l \in \mathbb{P}^2 \Rightarrow$
$\partial_i f = \partial_i(l^4) = 4l^3(\partial_i l) \Rightarrow \partial_i^2(l^4) = 12l^2(\partial_i l)^2 \in < l^2 > \subseteq Sym^2(\mathbb{C}^3) \cong R_2$ (osservo che $\partial_i l \in \mathbb{C}$ $\forall i = 0, 1, 2$).
$\Rightarrow Im(Cat_{2,2}(f)) \subseteq < l^2 >, dim(< l^2 >) = 1 \Rightarrow Im(Cat_{2,2}(f)) =< l^2 > \Rightarrow rank(Cat_{2,2}(f)) = 1$.

"$\Rightarrow$"
$Im(Cat_{2,2}(f)) =< q >$ $\exists q \in R_2$. Per il Teorema di Sylvester a meno di cambiare le coordinate, si verifica uno dei seguenti 3 casi:

$$(a)q = x_0^2 \text{ o } (b)q = x_0^2 + x_1^2 \text{ o } (c)q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$$

(a) $Im(Cat_{2,2}(f)) =< x_0^2 >$, $f \in R_4 \Rightarrow f = \sum_{i=0}^{14} \alpha_i w_i$ dove $\{w_0, \dots, w_{14}\}$ è una base dello spazio dei polinomi omogenei di grado 4 in 3 incognite, posso supporre $w_0 = x_0^4$. Per assurdo: $\exists \alpha_i \neq 0 \exists i \in \{1, \dots, 14\} \Rightarrow f$ contiene almeno un termine in cui compare un'incognita x_j con $j \neq 0 \Rightarrow \exists \partial \in S_2$ t.c. $\partial f \notin < x_0^2 >$ assurdo. Quindi $\alpha_i = 0\ \forall i \in \{1, \dots, 14\} \Rightarrow f = \alpha_0 w_0 = (\sqrt[4]{\alpha_0} x_0)^4 = v_4(\sqrt[4]{\alpha_0} x_0) \Rightarrow f \in v_4(\mathbb{P}^2)$
Dimostro che i casi (b) e (c) non si possono verificare:
(b): Per assurdo $Im(Cat_{2,2}(f)) =< x_0^2 + x_1^2 > \Rightarrow \forall \partial \in S_2\ \partial f$ è un multiplo di $x_0^2 + x_1^2$.

$f = f_{400}x_0^4 + f_{310}x_0^3x_1 + f_{301}x_0^3x_2 + f_{220}x_0^2x_1^2 + f_{202}x_0^2x_2^2 + f_{211}x_0^2x_1x_2 + f_{130}x_0x_1^3 + f_{103}x_0x_2^3 + f_{121}x_0x_1^2x_2 + f_{112}x_0x_1x_2^2 + f_{040}x_1^4 + f_{031}x_1^3x_2 + f_{022}x_1^2x_2^2 + f_{013}x_1x_3^3 + f_{044}x_2^4$

$\partial_0^2 f = 12f_{400}x_0^2 + 6f_{310}x_0x_1 + 6f_{301}x_0x_2 + 2f_{220}x_1^2 + 2f_{202}x_2^2 + 2f_{211}x_1x_2$,
$\partial_0^2 f \in < x_0^2 + x_1^2 > \Rightarrow 6f_{400} = f_{220}$ e tutti gli altri coefficienti che compaiono nell'espressione sopra sono nulli.

$\partial_1^2 f = 2f_{220}x_0^2 + 6f_{130}x_0x_1 + 2f_{121}x_0x_2 + 12f_{040}x_1^2 + 6f_{031}x_1x_2 + 2f_{022}x_2^2$,
$\partial_1^2 f \in < x_0^2 + x_1^2 > \Rightarrow 6f_{040} = f_{220} = 6f_{400}$ e tutti gli altri coefficienti che compaiono nell'espressione sopra sono nulli.

$\partial_2^2 f = 6f_{103}x_0x_2 + 2f_{112}x_0x_1 + 6f_{013}x_1x_2 + 12f_{004}x_2^2 \in < x_0^2 + x_1^2 > \Rightarrow$ tutti i coefficienti sono nulli.
$f = f_{400}(x_0^4 + 6x_0^2x_1^2 + x_1^4) \Rightarrow \partial_0\partial_1 f = f_{400}\partial_0(12x_0^2x_1 + 12x_1^2) = 24f_{400}x_0x_1 \Rightarrow$
$\partial_0\partial_1 f = Cat_{2,2}(f)(\partial_0\partial_1) \notin < x_0^2 + x_1^2 >= Im(Cat_{2,2}(f))$ assurdo.

(c): Per assurdo $Im(Cat_{2,2}(f)) =< x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 >$

$\partial_0^2 f = 12f_{400}x_0^2 + 6f_{310}x_0x_1 + 6f_{301}x_0x_2 + 2f_{220}x_1^2 + 2f_{202}x_2^2 + 2f_{211}x_1x_2$,
$\partial_0^2 f \in < x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 > \Rightarrow 6f_{400} = f_{220} = f_{202}$ e tutti gli altri coefficienti sono nulli.

$\partial_1^2 f = 2f_{220}x_0^2 + 6f_{130}x_0x_1 + 2f_{121}x_0x_2 + 12f_{040}x_1^2 + 6f_{031}x_1x_2 + 2f_{022}x_2^2$,
$\partial_1^2 f \in < x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 > \Rightarrow f_{022} = 6f_{040} = f_{220} = 6f_{400}$ e tutti gli altri coefficienti sono nulli.

$\partial_2^2 f = 2f_{202}x_0^2 + 6f_{103}x_0x_2 + 2f_{112}x_0x_1 + 2f_{022}x_1^2 + 6f_{013}x_1x_2 + 12f_{004}x_2^2$, $\partial_2^2 f \in < x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 > \Rightarrow 6f_{004} = f_{202} = f_{220} = 6f_{400}$ e tutti gli altri coefficienti sono nulli.
$\Rightarrow f = f_{400}(x_0^4 + 6x_0^2x_1^2 + 6x_1^2x_2^2 + x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + x_2^4) \Rightarrow$
$\partial_0\partial_1 f = f_{400}\partial_0(4x_1^3 + 12x_0^2x_1 + 12x_1x_2^2) = 24f_{400}x_0x_1 \Rightarrow \partial_0\partial_1 f = Cat_{2,2}(f)(\partial_0\partial_1) \notin$
$< x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 >= Im(Cat_{2,2}(f))$ assurdo.

4 Varietà secanti

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ una varietà proiettiva, la <u>*prima varietà secante*</u> è la varietà stessa:

$$\sigma_1(X) := X$$

La <u>*varietà 2-secante*</u> di X è definita come:

$$\sigma_2(X) := \overline{\bigcup_{p,q \in X} < p, q >}$$

$\bigcup_{p,q \in X} < p, q >$ è l'unione di tutte le rette secanti alla varietà, di questa unione si considera la chiusura per la topologia di Zariski quindi $\sigma_2(X)$ è l'insieme dei punti appartenenti alle rette secanti e tangenti alla varietà , infatti: $\forall p \in X$, ogni retta tangente in p ad X si ottiene come limite delle rette secanti $< x_n, p >$ per $x_n \longrightarrow p$.
In generale la *k-esima varietà secante* di X è la chiusura dell'unione di tutti gli spazi generati da k punti di X:

$$\sigma_k(X) := \overline{\bigcup_{p_1,\ldots,p_k \in X} < p_1, \ldots, p_k >}$$

e contiene tutti i punti della forma $p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \ \exists p_i \in X,\ \lambda_i \in \mathbb{C}$ o limiti di questi.
Sia $p \in \mathbb{P}(V)$, si dice *rango* di p il più piccolo $k \in \mathbb{N}$ t.c. $p \in < p_1, \ldots, p_k > \exists p_1, \ldots, p_k \in X$. Ovvero $rango(p) = k \iff p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \ \exists p_i \in X,\ \exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ e k è minimale rispetto a questa proprietà. Questa definizione rappresenta una generalizzazione del concetto di rango definito per le matrici:

Proposizione 4.1: $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ha rango $k \iff \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{A}_i \ \exists \mathbb{A}_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrici di rango 1 e k è minimale rispetto a questa proprietà
dim: "$\Rightarrow$"
$rank(\mathbb{A}) = k$. Siano $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ le colonne di $\mathbb{A}$, suppongo che $v_1, \ldots, v_k$ siano lineramente indipendenti e

$$v_i = a_{i,1}v_1 + \ldots + a_{i,k}v_k \ \forall i = k+1, \ldots, n$$

Definisco le matrici $\mathbb{A}_j := [0, \ldots, v_j, \ldots, 0, a_{k+1,j}v_j, \ldots, a_{n,j}v_j] \ \forall j = 1, \ldots, k \Rightarrow$
$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + \ldots + \mathbb{A}_k$
Se per assurdo esistesse $r < k$ t.c. $\mathbb{A}$ si può scrivere come somma di r matrici di rango 1 ($\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{A}_i$), per la subadditività del rango $rank(\mathbb{A}) \le r < k$ assurdo $\Rightarrow k$ è il minimo numero di matrici di rango 1 la cui somma sia uguale ad $\mathbb{A}$.
"$\Leftarrow$"
$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{A}_i \Rightarrow$ per la subadditività del rango $rank(\mathbb{A}) = rank(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{A}_i) \le \sum_{i=1}^{k} rank(\mathbb{A}_i) = k$. Se per assurdo $rank(\mathbb{A}) = r < k$ allora, analogamente a quanto visto per dimostrare l'implicazione "$\Rightarrow$", si trovano r matrici di rango 1 la cui somma è $\mathbb{A}$ in contraddizione con la minimalità di $k \Rightarrow \mathbb{A}$ ha rango esattamente k.

Si dice *rango bordo* di p il più piccolo $k \in \mathbb{N}$ t.c. $p \in \sigma_k(X)$. Equivalentemente, detto $\sigma_k^0(X)$ l'insieme dei punti $p \in \mathbb{P}(V)$ di rango k:

$$\sigma_k^0(X) := \{p \in \sigma_k(X) \mid p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \ \exists p_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{C}\}$$

allora $\forall p \in \mathbb{P}(V)$ $rangobordo(p) = k \iff \exists \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma_k^0(X)$ t. c. $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Dalle definizioni di rango e rangobordo segue che $\forall p \in X$:

$$rangobordo(p) \le rango(p)$$

La seguente proposizione dimostra che per le matrici rango e rango bordo coincidono sempre:

Proposizione 4.2: $\forall M \in \mathbb{C}^{n\times n}, rank(M) = rangobordo(M)$
dim: Siano $r := rangobordo(M)$ e $R := rank(M)$, per le definizioni di rango e rangobordo vale $r \le R$.

$r = rangobordo(M) \iff \exists \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ successione di matrici di rango $rank(M_n) \leq r$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tali che $\lim_{n\to\infty} M_n = M$.
$rank(M_n) \leq r \ \forall n \in \mathbb{N} \iff$ ogni minore $(r+1)\times(r+1)$ di M_n è nullo $\forall n \in \mathbb{N}$. I determinanti sono polinomi $\Rightarrow$ funzioni continue $\Rightarrow$ al limite ogni minore $(r+1)\times(r+1)$ di M si annulla $\Rightarrow R = rank(M) \leq r \Rightarrow$ vale l'uguaglianza.

4.1 Varietà secanti della varietà di Veronese

Considero ora la varietà $X := v_d(\mathbb{P}^n)$. Come dimostrato in precedenza, i punti che appartengono all'immagine della Veronese sono le potenze d-esime di forme lineari quindi $\sigma_1(X) = X$ contiene tutti i polinomi della forma $l_1^d \ \exists l_1 \in \mathbb{P}^n$
$\bullet \sigma_2(X)$ contiene tutti i polinomi che sono somma di due potenze d-esime di forme lineari o limiti di questi $(\overline{\{l_1^d + l_2^d \mid l_1, l_2 \in \mathbb{P}^n\}})$.
$\bullet \sigma_k(X)$ contiene tutti i polinomi che sono somma di k potenze d-esime di forme lineari o limiti di questi $(\overline{\{l_1^d + \ldots + l_k^d \mid l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{P}^n\}})$.
Quindi per ogni polinomio $f \in \mathbb{P}(Sym^d(\mathbb{C}^{n+1})) \cong \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ il rango di f è il più piccolo $k \in \mathbb{N}$ t.c. f si scrive come somma di k potenze d-esime di forme lineari.

Esempio 4.1.1: Varietà secanti della varietà di Veronese di grado 2
Considero

$$\begin{aligned} v_2 : \quad \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ [l] &\longmapsto [l^2] \end{aligned}$$

la 2-immersione di Veronese dove $N = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$. In questo caso si dimostra che la varietà k-secante di $X := v_2(\mathbb{P}^n)$ coincidono con l'insieme delle matrici simmetriche $(n+1)\times(n+1)$ di rango $\leq k$: $\forall f \in Sym^2(\mathbb{C}^{n+1})$ forma quadratica esiste $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ la matrice simmetrica $(n+1)\times(n+1)$ associata ad f, cioè

$$f(x_0, \ldots, x_n) = x^T \mathbb{A} x \ \forall x \in \mathbb{C}^{n+1}$$

Per prima cosa dimostro che la matrice cataletticante $Cat_{1,1}(f)$ è un multiplo della matrice $\mathbb{A}$:
Sia $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$, considero la funzione cataletticante $Cat_{11}(f) : S_1 \longrightarrow R_1$ che applica al polinomio di grado due f un operatore differenziale di grado 1.
$\partial_i f = 2a_{ii}x_i + \sum_{j\neq i, j=0}^{n} 2a_{ij}x_j \ \forall i = 1, \ldots n$ quindi la matrice cataletticante associata è

$$Cat_{1,1}(f) = \begin{pmatrix} 2a_{00} & \cdots & \cdots & 2a_{0n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 2a_{0n} & \cdots & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} = 2\mathbb{A}$$

Suppongo quindi che f sia un polinomio in $v_2(\mathbb{P}^n) \Rightarrow f = l^2$ dove $l = a_0x_0 + \ldots + a_nx_n$.
$\partial_i f = 2(\partial_i l)l = 2(\partial_i l)(a_0x_0 + \ldots + a_nx_n) \ \forall i = 0, \ldots, n$ quindi

$$Cat_{1,1}(f) = \begin{pmatrix} a_0a_0 & a_1a_0 & \cdots & a_na_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0a_n & a_1a_n & \cdots & a_na_n \end{pmatrix}$$

che ha rango 1. In questo modo ho dimostrato che

$$v_2(\mathbb{P}^n) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} \mid \mathbb{A}^T = \mathbb{A}, rank(\mathbb{A}) = 1\}$$

Per definizione $\sigma_k(v_2(\mathbb{P}^n)) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} \mid rangobordo(\mathbb{A}) \leq k\}$, per la proposizione 4.2 $rangobordo(\mathbb{A}) = rango(\mathbb{A}) \Rightarrow \sigma_k(v_2(\mathbb{P}^n)) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} \mid rango(\mathbb{A}) \leq k\}$

Mentre per i polinomi di grado due rango e rangobordo coincidono, per polinomi di grado $d \geq 3$ può valere la disuguaglianza stretta $rango < rangobordo$

Esempio 4.1.2:
Considero la cubica gobba:

$$\begin{array}{rccc} v_3: & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & [l] & \longmapsto & [l^3] \end{array}$$

In coordinate $v_3([l_0, l_1]) = [l_0^3, l_0^2 l_1, l_0 l_1^2, l_1^3]$, $X := v_3(\mathbb{P}^2)$
Sia $x^2y \in Sym^3(\mathbb{C}^2)$, $x^2y \notin X$. $x^2y = \lim_{t\to 0} \frac{(x+ty)^3 - x^3}{3t} \Rightarrow x^2y \in \sigma_2(X) \Rightarrow rangobordo(x^2y) = 2$.
Dimostro che $rango(x^2y) = 3$:

$$(x+y)^3 - (x-y)^3 = 6x^2y + 2y^3 \Rightarrow x^2y = \frac{1}{6}((x+y)^3 - (x-y)^3) - \frac{1}{3}y^2$$

$\Rightarrow rango(x^2y) \leq 3$. Se per assurdo $rango(x^2y) = 2 \Rightarrow x^2y = l_1^3 + l_2^3 \ \exists l_1, l_2 \in \mathbb{C}^2$
$x^2y = (ax+by)^3 + (cx+dy)^3 \ \exists a, b, c, d, \in \mathbb{C}$
Considero la funzione cataletticante $Cat_{2,1}(x^2y) : S_2 \longrightarrow R_1$ dove $S_2 =< \partial_x^2, \partial_x\partial_y, \partial_y^2 >$ e $R_1 =< x, y >$ e calcolo la matrice associata:
$\partial_x^2(x^2y) = 2y$
$\partial_x\partial_y(x^2y) = 2x$
$\partial_y^2(x^2y) = 0$

$$Cat_{2,1}(x^2y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Ker(Cat_{2,1}(x^2y)) =< \partial_y^2 >\subseteq S_2$
Osservo che $(b\partial_x - a\partial_y)(d\partial_x - c\partial_y)(x^2y) = (b\partial_x - a\partial_y)(d\partial_x - c\partial_y)((ax+by)^3 + (cx+dy)^3) = 0$
$\Rightarrow (b\partial_x - a\partial_y)(d\partial_x - c\partial_y) \in Ker(Cat_{2,1}(x^2y)) \Rightarrow (b\partial_x - a\partial_y)(d\partial_x - c\partial_y)$ è un multiplo di $\partial_y^2 \Rightarrow b = d = 0 \Rightarrow x^2y = a^3x^3 + c^3x^3 = x^3(a^3 + c^3) assurdo.$
$\Rightarrow rango(x^2y) = 3 > 2 = rangobordo(x^2y)$

4.2 Dimensione delle varietà secanti

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ varietà proiettiva e $\sigma_k(X)$ la varietà k-secante di X, questa può essere descritta da $k \cdot dim(X) + (k-1)$ parametri infatti un punto di $\sigma_k(X)$ si ottiene scegliendo k punti $p_1, \dots, p_k \in X$ e un punto in $< p_1, \dots, p_k >$ che ha dimensione $k - 1$. La quantità $min\{k \cdot dim(X) + (k-1), N\}$ prende il nome di dimensione attesa, il seguente teorema mostra che $min\{k \cdot dim(X) + (k-1), N\}$ è la dimensione massima possibile di $\sigma_k(X)$.

Teorema 4.2.1:[**2**] Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$, allora $dim(\sigma_k(X)) \leq$ dimensione attesa(X).

Se vale $dim(\sigma_k(X)) <$ dimensione attesa (X), X è detta <u>*k- difettiva*</u>.

5 Il Teorema di Clebsch

Considero ora la varietà di Veronese $v_4(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^{14}$ e la sua varietà 5-secante $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$, la sua dimensione attesa è $5 \cdot (2+1) - 1 = 14$. Nel 1861 Clebsch dimostrò che $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2)) \subsetneq \mathbb{P}^{14}$ e quindi la sua dimensione (=13) è minore della dimensione prevista (=14). Inoltre trovò la condizione che devono soddisfare gli elementi di $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$ cioè l'equazione dell'ipersuperficie $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$: questa corrisponde al determinante di una certa matrice cataletticante. Prima di dimostrare il Teorema di Clebsch è necessario richiamare la definizione di rango di una funzione e il teorema di rango costante che saranno utili in seguito.

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ di classe $C^1(U)$, sia $\mathcal{J}_F(x)$ la matrice jacobiana di F, allora il suo rango è una funzione di $x \in U$. Se $\exists a \in U$ t.c. $rank(\mathcal{J}_F(a)) = k$ allora esiste almeno un minore di ordine k di $\mathcal{J}_F(x)$ che non si annulla in a. Siccome il determinante è una funzione continua, esiste $V \subseteq U$ intorno di a in cui il minore di ordine k è non nullo quindi $rank(\mathcal{J}_F(x)) \geq k \ \forall x \in V$. Se $k = min(m, n) \Rightarrow rank(\mathcal{J}_F(x)) = k \ \forall x \in V$. Fissato $x \in U$ il rango di $rank(\mathcal{J}_F(x))$ è detto <u>*rango di F in x*</u>. Diremo che F ha rango k in un insieme U se $rank(J_F(x)) = k \ \forall x \in U$. Vale il seguente teorema:

Teorema 5.1: [**3**] Siano $A_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti, $F : A_0 \longrightarrow B_0$ una funzione di classe $C^r(A_0)$ di rango costante k in A_0, $a \in A_0$ $b := F(a)$, allora esistono $A \subseteq A_0$ e $B \subseteq B_0$ intorni di a e b rispettivamente e $G : A \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $H : B \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ diffeomorfismi t.c. $H \circ F \circ G^{-1}(U) \subseteq V$ e

$$H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

Il teroema afferma che se F è una funzione di rango costante k, localmente in un opportuno sistema di coordinate è della forma:

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

cioè si comporta come la composizione della proiezione $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ e dell'immersione
$\mathbb{R}^k \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Osservazione: Se $F : A_0 \longrightarrow B_0$ è una funzione polinomiale, sia $k := max\{rank\mathcal{J}_F(x) \mid x \in A_0\}$ e sia $a \in A_0$ t.c. $rank\mathcal{J}_F(a) = k$, allora esiste almeno una sottomatrice di $\mathcal{J}_F(x)$ $k \times k$ con determinante non nullo in a. Questo determinante è un polinomio (perchè ottenuto facendo somme e prodotti di polinomi) $\Rightarrow$ ha un numero finito di zeri $\Rightarrow$ la matrice jacobiana di $\mathcal{J}_F(x)$ ha rango costante k in ogni punto di A_0 eccetto un numero finito di punti. Applicando il teorema precedente si conclude che se $F : A_0 \longrightarrow B_0$ è una funzione polinomiale allora $F(A_0)$ è localmente diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^k$ dove k è definito come sopra.

Proposizione 5.2 (Teorema di Clebsch): $v_4(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^{14}$ è 5-difettiva. In particolare $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$ è un'ipersuperficie di grado 6.
<u>*dim*</u>: E' sufficiente dimostrare che

$$\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2)) = \{f \in \mathbb{P}(Sym^4(\mathbb{C}^3)) \mid det(Cat_{2,2}(f)) = 0\}$$

infatti $det(Cat_{2,2}(f))$ è un polinomio di grado 6 essendo $Cat_{2,2}(f)$ una matrice 6×6. Poniamo $X := v_4(\mathbb{P}^2)$.

"$\subseteq$"

Sia $f \in \sigma_5(X)$, distinguo due casi:

(i) se $rank(f) \leq 5$ (cioè $f \in \sigma_5^0(X)$) $\Rightarrow \exists l_1, \dots, l_5 \in \mathbb{P}^2$ t.c. $f = \sum_{i=0}^4 l_i^4$, allora

$$Cat_{2,2}(f) = \textstyle\sum_{i=0}^4 Cat_{2,2}(l_i^4)$$

perchè $Cat_{2,2}(f)$ dipende linearmente dai coefficienti di f.

$$rank(Cat_{2,2}(f)) = rank(\textstyle\sum_{i=0}^4 Cat_{2,2}(l_i^4)) \leq \textstyle\sum_{i=0}^4 rank(Cat_{2,2,}(l_i^4)) = 5$$

$\Rightarrow det(Cat_{2,2}(f)) = 0 \Rightarrow f \in \{f \in \mathbb{P}(Sym^4(\mathbb{C}^3)) \mid det(Cat_{2,2}(f)) = 0\}$

(ii) se $rank(f) > 5$ (cioè $f \in \sigma_5(X) \setminus \sigma_5^0(X)$) $\Rightarrow \exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \sigma_5^0(X)$ t.c. $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Per quanto dimostrato nel caso precedente $rank(Cat_{2,2}(f_n)) \leq 5$ $\forall n \in \mathbb{N}$, analogamente a quanto visto nella dimostrazione della 4.2 si conclude che

$$rank(Cat_{2,2}(f)) = rank(\lim_{n\to\infty} Cat_{2,2}(f_n)) \leq 5$$

$\Rightarrow det(Cat_{2,2}(f)) = 0 \Rightarrow f \in \{f \in \mathbb{P}(Sym^4(\mathbb{C}^3)) \mid det(Cat_{2,2}(f)) = 0\}$

"$\supseteq$"

Per l'inclusione precedente $dim(\sigma_5(X)) \leq 13 = dim(\{f \in \mathbb{P}(Sym^4(\mathbb{C}^3)) \mid det(Cat_{2,2}(f)) = 0\})$. Se dimostro che $dim(\sigma_5(X)) = 13$ ho concluso. Per farlo dimostro che $dim(\sigma_5^0(X)) = 13$

Definisco la funzione:

$$\mathcal{T}\colon \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^{15}$$

$\mathcal{T}((\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \dots, (\alpha_5, \beta_5, \gamma_5)) := \sum_{i=1}^5 (\alpha_i x_0 + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2)^4$ dove identifico i vettori di $\mathbb{C}^{15}$ con i polinomi in $Sym^4(\mathbb{C}^3)$ scritti nella base monomiale $\{x_0^4, x_0^3 x_1, x_0^3 x_1, \dots, x_2^4\}$ quindi in coordinate:

$\mathcal{T}((\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \dots, (\alpha_5, \beta_5, \gamma_5)) = (\sum_{i=1}^5 \alpha_i^4, 4\sum_{i=1}^5 \alpha_i^3 \beta_i, \dots, \sum_{i=1}^5 \gamma_i^4) = (\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{15})$

Osservo che $\sigma_5^0(X)$ è l'immagine di $\mathcal{T}$ proiettivizzata, quindi per quanto detto sopra $dim(Im\mathcal{T}) \leq 14$ ($\sigma_5^0(X) \subseteq \sigma_5(X)$ e $dim(\sigma_5(X)) \leq 13$).

Sia $\mathcal{J}$ la matrice Jacobiana di $\mathcal{T}$, allora $\mathcal{J} \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ e le sue entrate sono polinomi di grado 3 nelle indeterminate $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Siccome $\mathcal{T}$ è una funzione polinomiale, per il teorema del rango

$$dim(Im\mathcal{T}) = max\{rank(\mathcal{J}(v_1, \dots, v_5)) \mid v_1, \dots, v_5 \in \mathbb{C}^3\}$$

$\Rightarrow$ il rango di $\mathcal{J}$ non è mai massimo ma è sempre ≤ 14. Calcolo il rango di $\mathcal{J}$ nel punto

$$v_1 = (1,0,0)\ v_2 = (0,1,0)\ v_3 = (0,0,1)\ v_4 = (1,1,1)\ v_5 = (P,Q,R)$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{T}_1}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \mathcal{T}_1}{\partial \gamma_5} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{T}_{15}}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \mathcal{T}_{15}}{\partial \gamma_5} \end{pmatrix}$$

Calcolo quindi la dimensione dello spazio lineare generato dalle colonne della matrice $\mathcal{J}$, per comodità identifico i vettori colonna di 15 componenti con polinomi in $Sym^4(\mathbb{C}^3)$.
Le prime 3 colonne sono:

$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_0^4$

$\frac{\partial}{\partial\beta_1}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_0^3x_1$

$\frac{\partial}{\partial\gamma_1}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_0^3x_2$

Quindi le successive 6 colonne:

$\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_0x_1^3$

$\frac{\partial}{\partial\beta_2}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_1^4$

$\frac{\partial}{\partial\gamma_2}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_1^3x_2$

$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_0x_2^3$

$\frac{\partial}{\partial\beta_3}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_1x_2^3$

$\frac{\partial}{\partial\gamma_3}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_2^4$

Detto $I :=< x_0^4, x_0^3x_1, x_0^3x_2, x_0x_1^3, x_1^4, x_1^3x_2, x_0x_2^3, x_1x_2^3, x_2^4 >$ lo spazio lineare generato dalle prime 9 colonne, questo è un sottospazio di $Sym^4(\mathbb{C}^3)$ di dimensione 9.
Considero le successive 6 colonne:

$\frac{\partial}{\partial\alpha_4}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_0(x_0+x_1+x_2)^3=$

$=\underbrace{(x_0^4+x_0x_1^3+x_0x_2^3+3x_0^3x_1+3x_0^3x_2)}_{p_1}+(3x_0^2x_1^2+3x_0x_1^2x_2+3x_0^2x_2^2+3x_0x_1x_2^2+6x_0^2x_1x_2)$

$p_1\in I$

$\frac{\partial}{\partial\beta_4}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=$

$=\underbrace{(x_0^3x_1+x_1^4+x_1x_2^3+3x_0x_1^3+3x_1^3x_2)}_{p_2}+(3x_0^2x_1^2+3x_0^2x_1x_2+6x_0x_1^2x_2+3x_0x_1x_2^2+3x_1^2x_2^2)$

$p_2\in I$

$\frac{\partial}{\partial\gamma_4}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=$

$=\underbrace{(x_0^3x_2+x_1^3x_2+x_2^4+3x_1x_2^3+3x_0x_2)}_{p_3}+(3x_0^2x_2^2+3x_0^2x_1x_2+3x_0x_1^2x_2+6x_0x_1x_2^2+3x_1^2x_2^2)$

$p_3\in I$

$\frac{\partial}{\partial\alpha_5}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_0(Px_0+Qx_1+Rx_2)^3=$

$=\underbrace{(P^3x_0^4+Q^3x_0x_1^3+R^3x_0x_2^3+3P^2Qx_0^3x_1+3P^2Rx_0^3x_2)}_{p_4}+$

$+(3Q^2Px_0^2x_1^2+3R^2Px_0^2x_2^2+6PQRx_0^2x_1x_2+3Q^2Rx_0x_1^2x_2+3R^2Qx_0x_1x_2^2)$, $p_4\in I$

$\frac{\partial}{\partial\beta_5}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_1(Px_0+Qx_1+Rx_2)^3=$

$=\underbrace{(P^3x_0^3x_1+Q^3x_1^4+R^3x_1x_2^3+3PQ^2x_0x_1^3+3Q^2Rx_1^3x_2)}_{p_5}+$

$+(3P^2Qx_0^2x_1^2+3P^2Rx_0^2x_1x_2+6PQRx_0x_1^2x_2+3R^2Px_0x_1x_2^2+3R^2Qx_1^2x_2^2)$, $p_5\in I$

$\frac{\partial}{\partial\gamma_5}(\sum_{i=1}^5(\alpha_i x_0+\beta_i x_1+\gamma_i x_2)^4)\mid_{\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_5)}=x_2(Px_0+Qx_1+Rx_2)^3=$

$$= \underbrace{(P^3x_0^3x_2 + Q^3x_1^3x_2 + R^3x_2^4 + 3QR^2x_1x_2^3 + 3PR^2x_0x_2^3)}_{p_6} +$$
$$+(3P^2Rx_0^2x_2^2 + 3P^2Qx_0^2x_1x_2 + 3Q^2Px_0x_1^2x_2 + 6PQRx_0x_1x_2^2 + 3Q^2Rx_1^2x_2^2),\ p_6 \in I$$

Considero quindi le riduzioni modulo I degli ultimi 6 polinomi e ottengo i polinomi $f_1 + I, \ldots, f_6 + I \in Sym^4(\mathbb{C}^3)/I$ dove $f_1, \ldots, f_5$ sono:

$$\begin{aligned}
f_1 &:= 3x_0^2x_1^2 + 3x_0x_1^2x_2 + 3x_0^2x_2^2 + 3x_0x_1x_2^2 + 6x_0^2x_1x_2\\
f_2 &:= 3x_0^2x_1^2 + 3x_0^2x_1x_2 + 6x_0x_1^2x_2 + 3x_0x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2^2\\
f_3 &:= 3x_0^2x_2^2 + 3x_0^2x_1x_2 + 3x_0x_1^2x_2 + 6x_0x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2^2\\
f_4 &:= 3Q^2Px_0^2x_1^2 + 3R^2Px_0^2x_2^2 + 6PQRx_0^2x_1x_2 + 3Q^2Rx_0x_1^2x_2 + 3R^2Qx_0x_1x_2^2\\
f_5 &:= 3P^2Qx_0^2x_1^2 + 3P^2Rx_0^2x_1x_2 + 6PQRx_0x_1^2x_2 + 3R^2Px_0x_1x_2^2 + 3R^2Qx_1^2x_2^2\\
f_6 &:= 3P^2Rx_0^2x_2^2 + 3P^2Qx_0^2x_1x_2 + 3Q^2Px_0x_1^2x_2 + 6PQRx_0x_1x_2^2 + 3Q^2Rx_1^2x_2^2
\end{aligned}$$

L'obiettivo è calcolare la dimensione di $< f_1 + I, \ldots, f_6 + I >$ sottospazio di $Sym^4(\mathbb{C}^3)/I$ infatti:

$$rank(\mathcal{J}) = \underbrace{dim(I)}_{=9} + dim(< f_1 + I, \ldots, f_6 + I >)$$

Siccome $Sym^4(\mathbb{C}^3)/I$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 6 con base $< x_0^2x_1^2, x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0x_1^2x_2, x_0x_1x_2^2, x_1^2x_2^2 >$, posso identificare i polinomi $f_1, \ldots, f_6$ con vettori di $\mathbb{C}^6$ tramite l'isomorfismo

$$ax_0^2x_1^2 + bx_0^2x_2^2 + cx_0^2x_1x_2 + dx_0x_1^2x_2 + ex_0x_1x_2^2 + fx_1^2x_2^2 \longmapsto (a, b, c, d, e, f)$$

quindi mi sono ricondotta a calcolare la dimensione di

$$< \begin{pmatrix}3\\3\\6\\3\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\\6\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\3\\6\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3PQ^2\\3PR^2\\6PQR\\3Q^2R\\3QR^2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3P^2Q\\0\\3P^2R\\6PQR\\3PR^2\\3QR^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3P^2R\\3P^2Q\\3PQ^2\\6PQR\\3Q^2R\end{pmatrix} >\subseteq \mathbb{C}^6$$

cioè il rango di

$$\begin{pmatrix}
3 & 3 & 0 & 3PQ^2 & 3P^2Q & 0\\
3 & 0 & 3 & 3PR^2 & 0 & 3P^2R\\
6 & 3 & 3 & 6PQR & 3P^2R & 3P^2Q\\
3 & 6 & 3 & 3Q^2R & 6PQR & 3PQ^2\\
3 & 3 & 6 & 3QR^2 & 3PR^2 & 6PQR\\
0 & 3 & 3 & 0 & 3QR^2 & 3Q^2R
\end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & PQ^2 & P^2Q & 0\\
1 & 0 & 1 & PR^2 & 0 & P^2R\\
2 & 1 & 1 & 2PQR & P^2R & P^2Q\\
1 & 2 & 1 & Q^2R & 2PQR & PQ^2\\
1 & 1 & 2 & QR^2 & PR^2 & 2PQR\\
0 & 1 & 1 & 0 & QR^2 & Q^2R
\end{pmatrix} = 3\mathbb{M}$$

Per quanto dimostrato sopra $rank(\mathcal{J}) = 9 + rank(\mathbb{M})$
Considero il punto $(P, Q, R) = (1, 2, 3)$, si ottiene la matrice

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0\\
1 & 0 & 1 & 9 & 0 & 3\\
2 & 1 & 1 & 12 & 3 & 2\\
1 & 2 & 1 & 12 & 12 & 4\\
1 & 1 & 2 & 18 & 9 & 12\\
0 & 1 & 1 & 0 & 18 & 12
\end{pmatrix}$$

che ha rango 5 $\Rightarrow$ per $(P, Q, R) = (1, 2, 3)$ $\mathcal{J}$ ha rango $9 + 5 = 14 \Rightarrow$ per il Teorema 5.1 nel punto generale $rank(\mathcal{J}(v_1, \dots, v_5)) = 14 \Rightarrow dim(\sigma_5^0(X)) = 14 - 1 = 13$ quindi è dimostrata anche l'inclusione "$\supseteq$".

In particolare è possibile trovare tutti i punti $[P, Q, R] \in \mathbb{P}^2$ in cui $\mathcal{J}$ non ha rango 14, vale la seguente proposizione:

Proposizione 5.3: Siano $v_1 = [1, 0, 0], v_2 = [0, 1, 0], v_3 = [0, 0, 1], v_4 = [1, 1, 1], v_5 = [P, Q, R]$ allora

$$rank(\mathcal{J}(v_1, \dots, v_5)) = \begin{cases} 12 & \text{se } [P, Q, R] \in \{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], [1,1,1]\} \\ 13 & \text{se } [P, Q, R] \in \{[1,1,0], [1,0,1], [0,1,1]\} \\ 14 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

<u>*dim*</u>: per quanto dimostrato nel Teorema di Clebsch $rank(\mathcal{J}(x_1, \dots, x_5)) = 9 + rank(\mathbb{M})$. Applicando il metodo di eliminazione di Gauss a $\mathbb{M}$ si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & PQ^2 & P^2Q & 0 \\ 0 & -1 & 1 & PR^2 - PQ^2 & -PQ^2 & P^2R \\ 0 & 0 & 0 & 2PQR - PR^2 - PQ^2 & P^2R - P^2Q & P^2Q - P^2R \\ 0 & 0 & 2 & Q^2R - 2PQ^2 + PR^2 & 2PQR - 2P^2Q & PQ^2 + P^2R \\ 0 & 0 & 0 & QR^2 - Q^2R + PQ^2 - PR^2 & PR^2 + P^2Q - 2PQR & 2PQR - PQ^2 - P^2R \\ 0 & 0 & 0 & PQ^2 - Q^2R & QR^2 + P^2Q - 2PQR & Q^2R - PQ^2 \end{pmatrix}$$

Nelle prime tre colonne i posti $1, 2, 4$ formano una matrice invertibile. Rimane una matrice 3×3:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2PQR - PR^2 - PQ^2 & P^2R - P^2Q & P^2Q - P^2R \\ QR^2 - Q^2R + PQ^2 - PR^2 & PR^2 + P^2Q - 2PQR & 2PQR - PQ^2 - P^2R \\ PQ^2 - Q^2R & QR^2 + P^2Q - 2PQR & Q^2R - PQ^2 \end{pmatrix}$$

Quindi $rank(\mathbb{M}) = 3 + rank(\mathbb{A}) \Rightarrow rank(\mathcal{J}(v_1, \dots, v_5)) = 12 + rank(\mathbb{A})$. Per il Teorema di Clebsch $rank(\mathcal{J}) \leq 14 \Rightarrow rank(\mathbb{A}) \leq 2$. Mi sono ricondotta a studiare il rango della matrice 3×3 $\mathbb{A}$:

(i)$\mathbb{A}$ ha rango 0 $\iff$ $[P, Q, R] \in \{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], [1,1,1]\}$:
<u>*dim*</u>: "$\Leftarrow$"
Calcolando la matrice nei punti $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], [1,1,1]$ si verifica che tutti i coefficienti si annullano
"$\Rightarrow$"
Sia $[P, Q, R]$ un punto in cui $\mathbb{A}$ ha rango 0 $\Rightarrow$ l'elemento di posto $(1, 1)$ si annulla: $P(Q-R)^2 = 0 \Rightarrow P = 0$ o $Q = R$.
Se $P \neq 0 \Rightarrow R = Q \Rightarrow$ gli elementi di posto $(1, 2), (1, 3), (2, 1)$ sono nulli per ogni scelta di P. Imponendo che si annullino tutti gli altri coefficienti si ottengono le equazioni:

$(2, 2), (2, 3) : PR(R - P) = 0$
$(3, 1), (3, 3) : R^2(P - R) = 0$
$(3, 2) : R(P - R)^2 = 0$

Queste si annullano se $R = 0$ o $R = P$, nel primo caso $[P, Q, R] = [1, 0, 0]$ nel secondo $[P, Q, R] = [1, 1, 1]$.

Se $P = 0$ i coefficienti di posto $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)$ si annullano per ogni scelta di Q, R. Imponendo che si annullino tutti gli altri coefficienti si ottengono le equazioni:

$(2, 1) : QR(R - Q) = 0$
$(3, 1), (3, 3) : Q^2R = 0$
$(3, 2) : QR^2 = 0$
Questi si annullano simultaneamente se $Q = 0$ o $R = 0$ nel primo caso $[P, Q, R] = [0, 0, 1]$ nel secondo $[P, Q, R] = [0, 1, 0]$.

$rank(\mathcal{J}(v_1, \ldots, v_5)) = 12 \iff rank(\mathbb{A}) = 0 \iff v_5 = [P, Q, R] \in \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1], [1, 1, 1]\}$

(ii) La matrice $\mathbb{A}$ ha rango 1 $\iff [P, Q, R] \in \{[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 1]\}$:

<u>*dim*</u>: $\mathbb{A}$ ha rango 1 $\iff$ tutti i minori 2×2 si annullano. I 9 minori 2×2 di $\mathbb{A}$ sono:
$(1) : P^2R(Q - R)^2(P + Q - R)$
$(2) : PQR(Q - R)(P - R)(P + Q - R)$
$(3) : QR^2(P - Q)(P - R)(P + Q - R)$
$(4) : P^2Q(Q - R)^2(P - Q + R)$
$(5) : PQ^2(Q - R)(P - R)(P - Q + R)$
$(6) : RQ^2(P - R)(P - Q)(P - Q + R)$
$(7) : P^3(Q - R)^2(P - Q - R)$
$(8) : P^2Q(Q - R)(P - R)(P - Q - R)$
$(9) : PQR(P - R)(P - Q)(P - Q - R)$
"$\Leftarrow$"
Calcolando le espressioni $(1), \ldots, (9)$ nei punti $[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 1]$ si verifica che queste si annullano
"$\Rightarrow$"
Considero la (1), questa si annulla se $P = 0$, $R = 0$, $R = Q$, $R = P + Q$
•$P = 0$: $(2), (4), (5), (7), (8), (9)$ si annullano per ogni scelta di Q, R. Ponendo uguale a 0 i minori (3) e (6) si ottengono le equazioni:

$(3) : Q^2R^3(Q - R) = 0$
$(6) : R^2Q^3(R - Q) = 0$

Se $R = 0 \Rightarrow [P, Q, R] = [0, 1, 0]$, se $Q = 0 \Rightarrow [P, Q, R] = [0, 0, 1]$, se $Q = R \Rightarrow [P, Q, R] = [0, 1, 1]$

•$R = Q$: $(2), (4), (5), (7), (8)$ si annullano per ogni scelta di P. Ponendo uguale a 0 i minori $(3), (6), (9)$ si ottengono le equazioni:

$(3), (6) : PR^3(P - R)^2 = 0$
$(9) : PR^2(P - R)^2(P - 2R) = 0$

Se $R = 0 \Rightarrow [P, Q, R] = [1, 0, 0]$, se $P = 0 \Rightarrow [P, Q, R] = [0, 1, 1]$, se $P = R \Rightarrow [P, Q, R] = [1, 1, 1]$

•$R = 0$: $(2), (3), (6), (9)$ si annullano per ogni scelta di P, Q. Ponendo uguale a 0 i minori $(4), (5), (7), (8)$ si ottengono le equazioni:

$(4),(5)$: $P^2Q^3(P-Q)=0$
$(7),(8)$: $P^3Q^2(P-Q)=0$

Se $Q=0 \Rightarrow [P,Q,R]=[1,0,0]$, se $P=0 \Rightarrow [P,Q,R]=[0,1,0]$, se $P=Q \Rightarrow [P,Q,R]=[1,1,0]$

•$R=P+Q$: $(2),(3)$ si annullano per ogni scelta di P,Q. Ponendo uguale a 0 i minori $(4),(5),(6),(7),(8),(9)$ si ottengono le equazioni:

$(4),(7): 2P^5Q=0$
$(5): P^3Q^3=0$
$(6): 2PQ^3R(Q-P)=0$
$(8): 2P^4Q^2=0$
$(9): 2P^2Q^2R(P-Q)=0$

Se $P=0 \Rightarrow R=Q \Rightarrow [P,Q,R]=[0,1,1]$, se $Q=0 \Rightarrow R=P \Rightarrow [P,Q,R]=[1,0,1]$

$rank(\mathcal{J}(v_1,\dots,v_5))=13 \iff rank(\mathbb{A})=1 \iff v_5=[P,Q,R]\in\{[1,1,0],[0,1,1],[1,0,1]\}$
Nei punti $[P,Q,R]\in\mathbb{P}^2\setminus\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,1],[1,1,0],[0,1,1],[1,0,1]\}$ la matrice $\mathbb{A}$ ha rango $2 \Rightarrow \mathcal{J}=12+2=14$

Definizione 5.1: $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$ è detta *Ipersuperficie di Clebsch*, si chiama *Quartica di Clebsch* una quartica in $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$.

6 Nucleo della mappa cataletticante

Per il teorema precente, una quartica $f\in Sym^4(\mathbb{C}^3)$ è una quartica di Clebsch $\iff$ il nucleo della mappa cataletticante $Cat_{2,2}(f)$ è non banale ovvero se esiste un operatore differenziale del secondo ordine (detto *conica apolare*) che annulla f. Nel caso delle quartiche di Clebsch è possibile descivere gli elementi di $Ker(Cat_{2,2}(f))$:

Proposizione 6.1 Sia $f\in\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$ t.c. $rank(f)\le 5$ cioè $f=\sum_{i=0}^4 l_i^4$ $\exists l_i\in\mathbb{C}^3$ $l_i=\alpha_{i_0}x_0+\alpha_{i_1}x_1+\alpha_{i_2}x_2$ $\forall i=0,\dots,4$. A queste forme lineari corrispondono dualmente i punti $A_i=(\alpha_{i_0},\alpha_{i_1},\alpha_{i_2})\in\mathbb{C}^3$ $\forall i=0,\dots 4$. Sia $\mathcal{C}$ una conica passante per $A_0,\dots,A_4$, scritta in coordinate duali $\mathcal{C}=\sum_{i,j=0}^2 a_{ij}\partial_i\partial_j$, allora $\mathcal{C}\cdot f=0$

dim: Sia $k\in\{0,\dots,4\}$, $(\partial_i\partial_j)\cdot(l_k^4)=\partial_i(4l_k^3(\partial_j l_k))=12l_k^2\partial_j(l_k)\partial_i(l_k)$. Osservo che posso pensare il prodotto $\partial_j(l_k)\partial_i(l_k)$ come il polinomio $(\partial_i\partial_j)$ valutato in l_k cioè $(\partial_i\partial_j)(l_k)$. Quindi ho dimostrato che

$$(\partial_i\partial_j)\cdot(l_k^4)=12l_k^2(\partial_i\partial_j)(l_k)\ \forall i,j=0,1,2$$

per linearità $\mathcal{C}\cdot l_k^4=12l_k^2\mathcal{C}(l_k)=12l_k^2\sum_{i,j=0}^2 a_{ij}\alpha_{k_i}\alpha_{k_j}=0$ perchè $\mathcal{C}$ è la conica passante per $A_0,\dots,A_4 \Rightarrow \mathcal{C}\cdot l_k^4=0\ \forall k=0,\dots,4 \Rightarrow \mathcal{C}\cdot f=0$

Osservazione: La Proposizione 6.1 rappresenta una dimostrazione alternativa della 5-difettività di $v_4(\mathbb{P}^2)$: comunque scelta una quartica di Clebsch, è sempre possibile trovare un operatore differenziale non nullo nel nucleo di $Cat_{2,2}(f) \Rightarrow det(Cat_{2,2}(f))=0 \Rightarrow dim(\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2)))\le 13$. In particolare si dimostra che lo spazio delle coniche passanti per

$A_0, \ldots, A_4$ è contenuto nel nucleo della mappa cataletticante, di seguito alcuni esempi in cui si analizza in quali casi questa inclusione è un'uguaglianza e quando invece è un'inclusione stretta:

Esempio 6.1 Considero il caso in cui 4 dei 5 punti siano in posizione generale, a meno di cambiare le coordinate posso supporre $A_0 = [1,0,0], A_1 = [0,1,0], A_2 = [0,0,1], A_3 = [1,1,1]$ e studio il rango della cataletticante al variare del quinto punto $A_4 = [p,q,r]$:

Proposizione 6.2: Se $A_0 = [1,0,0], A_1 = [0,1,0], A_2 = [0,0,1], A_3 = [1,1,1], A_4 = [p,q,r]$ allora

$$rank(Cat_{2,2}(f)) = \begin{cases} 4 & \text{se } [p,q,r] \in \{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,1]\} \\ 5 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

<u>*dim*</u>: in questo caso

$$f = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + (x_0 + x_1 + x_2)^4 + (px_0 + qx_1 + rx_2)^4$$

la corrispondente matrice cataletticante è

$$Cat_{2,2}(f) = \begin{pmatrix} 2+p^4 & 1+p^3q & 1+p^3r & 1+p^2q^2 & 1+p^2qr & 1+p^2r^2 \\ 1+p^3q & 1+p^2q^2 & 1+p^2qr & 1+pq^3 & 1+pq^2r & 1+pqr^2 \\ 1+p^3r & 1+p^2qr & 1+p^2r^2 & 1+pq^2r & 1+pqr^2 & 1+pr^3 \\ 1+p^2q^2 & 1+pq^3 & 1+pq^2r & 2+q^4 & 1+q^3r & 1+q^2r^2 \\ 1+p^2qr & 1+pq^2r & 1+pqr^2 & 1+q^3r & 1+q^2r^2 & 1+qr^3 \\ 1+p^2r^2 & 1+pqr^2 & 1+pr^3 & 1+q^2r^2 & 1+qr^3 & 2+r^4 \end{pmatrix}$$

Considero i minori 5×5 di $Cat_{2,2}(f)$ non nulli:
$(1) : p^2(q-r)^2$
$(2) : pq(-pq + pr + qr - r^2)$
$(3) : pr(-pq + q^2 + pr - qr)$
$(4) : q^2(p-r)^2$
$(5) : qr(p^2 - pq - pr + qr)$
$(6) : r^2(p-q)^2$

Sia $[p,q,r]$ un punto in cui si annullano tutti i minori 5×5 (ovvero in cui la matrice ha rango ≤ 4), in particolare si annulla la $(1) \Rightarrow p = 0$ o $q = r$.
Se $p = 0 \Rightarrow (2),(3)$ si annullano per ogni scelta di q, r, le altre 3 equazioni diventano: $(4),(5),(6) : q^2r^2 = 0$. Se $q = 0 \Rightarrow [p,q,r] = [0,0,1] = A_2$, se $r = 0 \Rightarrow [p,q,r] = [0,1,0] = A_1$
Se $q = r \Rightarrow (2),(3)$ si annullano per ogni scelta di p, le altre 3 equazioni diventano: $(4),(5),(6) : q^2(p-q)^2$. Se $q = 0 \Rightarrow [p,q,r] = [1,0,0] = A_0$, se $p = q \Rightarrow [p,q,r] = [1,1,1] = A_3$
Se $[p,q,r] \notin \{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,1]\}$ il rango di $Cat_{2,2}(f)$ è 5. Se $[p,q,r] \in \{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,1]\}$ allora $rank(Cat_{2,2}(f)) \leq 4$. In realtà in questi punti il rango è esattamente 4: considero il minore 4×4 ottenuto togliendo le righe $3, 5$ e le colonne $2, 3$:

$$\begin{vmatrix} 2+p^4 & 1+p^2q^2 & 1+p^2qr & 1+p^2r^2 \\ 1+p^3q & 1+pq^3 & 1+pq^2r & 1+pqr^2 \\ 1+p^2q^2 & 2+q^4 & 1+q^3r & 1+q^2r^2 \\ 1+p^2r^2 & 1+q^2r^2 & 1+qr^3 & 2+r^4 \end{vmatrix}$$
$$= -p^4 + p^3q + pq^3 - q^4 + p^2qr - 4pq^2r + q^3r + pqr^2 + qr^3 - r^4 - 1$$

questo non si annulla in nessuno dei quattro punti $[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,1]$ quindi in questi punti $rank(Cat_{2,2}(f))=4$.

Esempio 6.2: Se 4 dei 5 punti assegnati sono allineati allora esistono infinite coniche, sono coniche riducibili date dall'unione della retta per i 4 punti allineati e una qualsiasi retta per il quinto punto. A meno di cambiare le coordinate posso supporre che i quattro punti siano allineati sulla retta $x_2=0$: $A_0=[1,0,0], A_1=[0,1,0], A_2=[1,1,0], A_3=[1,t,0]$ e $A_4=[0,0,1]$

Proposizione 6.3: Se $A_0=[1,0,0], A_1=[0,1,0], A_2=[1,1,0], A_3=[1,t,0], A_4=[0,0,1]$ allora

$$rank(Cat_{2,2}(f))=\begin{cases} 3 & \text{se } t\in\{i,-i,1+i,1-i\} \\ 4 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

dove $i=\sqrt{-1}$

<u>*dim*</u>: in questo caso

$$f=x_0^4+x_1^4+(x_0+x_1)^4+(x_0+tx_1)^4+x_2^4$$

la corrispondente matrice cataletticante è

$$Cat_{2,2}(f)=\begin{pmatrix} 3 & 1+t & 0 & 1+t^2 & 0 & 0 \\ 1+t & 1+t^2 & 0 & 1+t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+t^2 & 1+t^3 & 0 & 2+t^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'unico minore 4×4 non nullo è $(t^2+1)(t^2-2t+2)$ quindi esclusi i valori di t per cui questo polinomio si annulla (cioè $\{i,-i,1+i,1-i\}$), la matrice $Cat_{2,2}(f)$ ha rango 4. Nei punti $\{i,-i,1+i,1-i\}$ la matrice $Cat_{2,2}(f)$ ha rango ≤ 3, in realtà in questi punti ha rango esattamente 3 perchè si dimostra che non esistono valori di t per cui $Cat_{2,2}(f)$ abbia rango ≤ 2. Considero il minore 3×3 ottenuto togliendo le colonne $1,3,5$ e le righe $3,4,5$:

$$\begin{vmatrix} 1+t & 1+t^2 & 0 \\ 1+t^2 & t^3+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=t^3-2t^2+t=t(t-1)^2$$

questo si annulla per $t=0$ o $t=1$. Considero il minore 3×3 ottenuto togliendo le colonne $3,5,6$ e le righe $3,5,6$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1+t & 1+t^2 \\ 1+t & 1+t^2 & 1+t^3 \\ 1+t^2 & 1+t^3 & 2+t^4 \end{vmatrix}=(t^2+1)(t^2-2t+2)$$

questo non si annulla nè per $t=0$ nè per $t=1$. In questo modo ho dimostrato che non esistono valori di t per cui tutti i minori 3×3 di $Cat_{2,2}(f)$ siano identicamente nulli quindi $rank(Cat_{2,2}(f))\geq 3$.

Come conseguenza di questa proposizione si ha che se $t\neq i,-i,1+i,1-i$ allora lo spazio delle coniche passanti per $A_0,\ldots,A_4$ coincide con il nucleo della cataletticante: per questi

valori di t infatti la cataletticante ha rango 4 quindi il suo nucleo ha dimensione 2; le coniche per $A_0, \ldots, A_4$ formano uno spazio di dimensione 2 che per la Proposizione 6.1 è contenuto in $Ker(Cat_{2,2}(f))$ quindi necessariamente questa inclusione è un'uguaglianza.
Se invece $t \in \{i, -i, 1+i, 1-i\}$ il rango della matrice cataletticante $Cat_{2,2}(f)$ si abbassa a $3 \Rightarrow dim(Ker(Cat_{2,2}(f))) = 3$:

•$t = i$ il nucleo di $Cat_{2,2}(f)$ è generato dalle coniche

$$\partial_0\partial_2,\ \partial_1\partial_2,\ 2i\partial_0^2 - 3(i+1)\partial_0\partial_1 + 2\partial_1^2 = (i\partial_0 - (1+i)\partial_1)(2\partial_0 - (1-i)\partial_1)$$

queste si intersecano nei punti $[0,0,1], [1-i,1,0], [1-i,2,0]$ quindi $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$ t.c.

$$f = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + (x_0 + x_1)^4 + (x_0 + ix_1)^4 = ax_2^4 + b((1-i)x_0 + x_1)^4 + c((1-i)x_0 + 2x_1)^4$$

da cui si ricava $a = 1, b = -1, c = \frac{1}{4}$:

$$f = x_2^4 - ((1-i)x_0 + x_1)^4 + \tfrac{1}{4}((1-i)x_0 + 2x_1)^4$$

quindi $rank(f) \leq 3$. In realtà $rank(f) = 3$ infatti $rank(f) \geq rank(Cat_{2,2}(f)) = 3$

• $t = -i$ il nucleo di $Cat_{2,2}(f)$ è generato dalle coniche

$$\partial_0\partial_2,\ \partial_1\partial_2,\ 2i\partial_0^2 - 3(i-1)\partial_0\partial_1 - 2\partial_1^2 = (i\partial_0 - (i-1)\partial_1)(2\partial_0 - (1+i)\partial_1)$$

queste si intersecano nei punti $[0,0,1], [1+i,1,0], [1+i,2,0]$ quindi $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$ t.c.

$$f = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + (x_0 + x_1)^4 + (x_0 - ix_1)^4 = ax_2^4 + b((1+i)x_0 + x_1)^4 + c((1+i)x_0 + 2x_1)^4$$

da cui si ricava $a = 1, b = -1, c = \frac{1}{4}$:

$$f = x_2^4 - ((1+i)x_0 + x_1)^4 + \tfrac{1}{4}((1+i)x_0 + 2x_1)^4$$

quindi $rank(f) \leq 3$. Come prima si conclude che il rango di f è esattamente 3.

• $t = i + 1$ il nucleo di $Cat_{2,2}(f)$ è generato dalle coniche

$$\partial_0\partial_2,\ \partial_1\partial_2,\ (i-1)\partial_0^2 - (1+3i)\partial_0\partial_1 + 2\partial_1^2 = ((i-1)\partial_0 - (i+1)\partial_1)(\partial_0 - (1-i)\partial_1)$$

queste si intersecano nei punti $[0,0,1], [-i,1,0], [1-i,1,0]$ quindi $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$ t.c.

$$f = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + (x_0 + x_1)^4 + (x_0 + (i+1)x_1)^4 = ax_2^4 + b(-ix_0 + x_1)^4 + c((1-i)x_0 + x_1)^4$$

da cui si ricava $a = 1, b = c = -1$:

$$f = x_2^4 - (-ix_0 + x_1)^4 - ((1-i)x_0 + x_1)^4$$

quindi $rank(f) = 3$.

• $t = 1 - i$ il nucleo di $Cat_{2,2}(f)$ è generato dalle coniche

$$\partial_0\partial_2,\ \partial_1\partial_2,\ -(i+1)\partial_0^2 + (3i-1)\partial_0\partial_1 + 2\partial_1^2 = (-(i+1)\partial_0 + (i-1)\partial_1)(\partial_0 - (1+i)\partial_1)$$

queste si intersecano nei punti $[0,0,1], [i,1,0], [1+i,1,0]$ quindi $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$ t.c.

$$f = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + (x_0 + x_1)^4 + (x_0 + (1-i)x_1)^4 = ax_2^4 + b(ix_0 + x_1)^4 + c((1+i)x_0 + x_1)^4$$

da cui si ricava $a = 1, b = c = -1$:

$$f = x_2^4 - (ix_0 + x_1)^4 - ((1+i)x_0 + x_1)^4$$

quindi $rank(f) = 3$.

Esempio 6.3 Suppongo che 3 punti siano allineati, sia $\mathcal{C}$ una conica passante per $A_0, \ldots, A_4$ e r la retta passante per i 3 punti allineati. La retta r interseca la conica $\mathcal{C}$ in almeno 3 punti. I punti di $r \cap \mathcal{C}$ sono zeri di un polinomio di secondo grado, se questo ha 3 zeri distinti allora è il polinomio nullo $\Rightarrow$ tutta la retta r è contenuta in $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}$ è la conica riducibile data dall'unione della retta r e della retta passante per gli altri due punti. Di nuovo posso supporre che i tre punti siano allineati sulla retta $x_2 = 0$: $A_0 = [1,0,0], A_1 = [0,1,0], A_2 = [1,1,0], A_3 = [0,0,1], A_4 = [t,1,1]$:

Proposizione 6.4: Se $A_0 = [1,0,0], A_1 = [0,1,0], A_2 = [1,1,0], A_3 = [0,0,1], A_4 = [t,1,1]$ allora $rank(Cat_{2,2}(f)) = 5$
dim: per questa scelta di $A_0, \ldots, A_4$

$$f = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + (x_0 + x_1)^4 + (tx_0 + x_1 + x_2)^4$$

la corrispondente matrice cataletticante è

$$Cat_{2,2}(f) = \begin{pmatrix} 2+t^4 & 1+t^3 & t^3 & 1+t^2 & t^2 & t^2 \\ 1+t^3 & 1+t^2 & t^2 & 1+t & t & t \\ t^3 & t^2 & t^2 & t & t & t \\ 1+t^2 & 1+t & t & 3 & 1 & 1 \\ t^2 & t & t & 1 & 1 & 1 \\ t^2 & t & t & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della sottomatrice 5×5 che si ottiene eliminando la terza riga e la terza colonna è 1 quindi la matrice ha rango 5 per ogni valore di $t \Rightarrow$ il nucleo di $Cat_{2,2}(f)$ ha dimensione 1 ed è generato dall' unica conica apolare passante per $A_0, \ldots, A_4$

Osservazione Per come è definita la varietà 5-secante, non tutte le quartiche in $\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$ hanno rango 5. Considero quindi il caso di una quartica di Clebsch $f \in \sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$ di rango $> 5 \Rightarrow f \in \sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2)) \setminus \sigma_5^0(v_4(\mathbb{P}^2)) \Rightarrow f$ ha rangobordo $5 \Rightarrow f$ si può scrivere come limite della somma di 5 quarte potenze di forme lineari

$$f = \lim_{t \to 0} \sum_{i=0}^{4} l_i^4(t), \text{ dove } l_i(t) = \alpha_{i_0}(t)x_0 + \alpha_{i_1}(t)x_1 + \alpha_{i_2}(t)x_2$$

Definisco $A_i(t) = (\alpha_{i_0}(t), \alpha_{i_1}(t), \alpha_{i_2}(t))$ e considero un caso particolare:$A_i(t) \equiv A_i$ $i = 0, \ldots, 3$ e $\lim_{t \to 0} A_4(t) = A_3$. Posso pensare questo caso come un caso degenere del precedente: il nucleo di $Cat_{2,2}(f)$ è generato dalle coniche passanti per $A_0, \ldots, A_4$ dove A_4 tende ad A_3. Questo equivale ad imporre che la conica passi per A_0, A_1, A_2, A_3 e in più che in A_3 sia tangente ad una retta assegnata. Si verifica che anche in questo caso la conica apolare è unica.

Per una descrizione completa delle varietà k-secanti della varietà di Veronese $v_4(\mathbb{P}^2)$ si rimanda a [**4**] dove è dimostrata la seguente proposizione

Proposizione 6.5: Definito l'insieme

$$\sigma_{b,r}(v_4(\mathbb{P}^2)) = \{f \in \sigma_b(v_4(\mathbb{P}^2)) \setminus \sigma_{b-1}(v_4(\mathbb{P}^2)) \mid rank(f) = r\},$$

allora:
•$\sigma_2(v_4(\mathbb{P}^2)) \setminus v_4(\mathbb{P}^2) = \sigma_{2,2}(v_4(\mathbb{P}^2)) \cup \sigma_{2,4}(v_4(\mathbb{P}^2))$
•$\sigma_3(v_4(\mathbb{P}^2)) \setminus \sigma_2(v_4(\mathbb{P}^2)) = \sigma_{3,3}(v_4(\mathbb{P}^2)) \cup \sigma_{3,5}(v_4(\mathbb{P}^2)) \cup \sigma_{3,7}(v_4(\mathbb{P}^2))$
•$\sigma_4(v_4(\mathbb{P}^2)) \setminus \sigma_3(v_4(\mathbb{P}^2)) = \sigma_{4,4}(v_4(\mathbb{P}^2)) \cup \sigma_{4,6}(v_4(\mathbb{P}^2)) \cup \sigma_{4,7}(v_4(\mathbb{P}^2))$
•$\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2)) \setminus \sigma_4(v_4(\mathbb{P}^2)) = \sigma_{5,5}(v_4(\mathbb{P}^2)) \cup \sigma_{5,6}(v_4(\mathbb{P}^2)) \cup \sigma_{5,7}(v_4(\mathbb{P}^2))$

Riferimenti bibliografici

[1] J. Harris. *Algebraic geometry: a first course*, Springer Science & Business Media, New York, 1992.

[2] J. M. Landsberg. *Tensors: Geometry and Applications*, AMS, Providence, 2011.

[3] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1975.

[4] A. Bernardi, A. Gimigliano, M. Idà. *Computing symmetric rank for symmetric tensors*, Journal of Symbolic Computation 46, (2011), 34-53

[5] A. Clebsch. *Ueber Curven vierter Ordnung*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, Bd. 59 (1861), 125-145