



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

**Scuola di Scienze
Matematiche,
Fisiche e Naturali**

Corso di Laurea
Triennale in
Matematica

Teorema di Bézout e forma normale di Hesse

Candidato:

Arturo Cappelli

Relatore:

Prof. Giorgio Ottaviani

Indice

| | | |
|----------|--------------------------------------|-----------|
| 1 | Varietà algebriche proiettive | 2 |
| 2 | Curve algebriche proiettive | 4 |
| 3 | Cubiche e punti di flesso | 13 |

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è di presentare il teorema di Bézout per curve algebriche nel piano proiettivo e alcune sue semplici applicazioni. Lo strumento fondamentale per dimostrarlo è la definizione di molteplicità d'intersezione tra curve algebriche piane, che rende possibile un conteggio esatto del numero di intersezioni. La definizione di molteplicità utilizzata è quella riportata in [1] e [3], che fa uso del concetto di risultante. Nella seconda parte si sfruttano questi strumenti per lo studio delle cubiche e dei loro punti di flesso. Si presenta una nota forma normale in cui è rappresentabile a meno di trasformazione proiettiva ogni cubica nonsingolare, che ci permette di dimostrare facilmente delle proprietà interessanti dei flessi di una cubica.

Capitolo 1

Varietà algebriche proiettive

Spazio proiettivo

Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{K}^n di dimensione n su campo \mathbb{K} .

Definizione 1.1 (Spazio proiettivo). Si definisce spazio proiettivo di dimensione n su \mathbb{K} lo spazio quoziente $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ dove $\forall u, v \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, $u \sim v \Leftrightarrow \exists 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $u = \lambda v$.

Indicheremo la classe di equivalenza di (a_0, \dots, a_n) con $[a_0, \dots, a_n]$; con coordinate omogenee ci riferiremo alla tupla a_0, \dots, a_n .

Sia $U_i := \{[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid a_i \neq 0\}$ per un $i \in \{0, \dots, n\}$. Dato che ogni $[a_0, \dots, a_n] \in U_i$ ammette un unico rappresentante della forma $[\frac{a_0}{a_i}, \dots, 1, \dots, \frac{a_n}{a_i}]$, possiamo definire un omeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{K}^n &\rightarrow U_i \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto [a_1, \dots, a_i, 1, a_{i+1}, \dots, a_n] \end{aligned} \tag{1.1}$$

identificando U_i con l'immersione dello spazio affine \mathbb{K}^n nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dotato della topologia quoziente.

Analogamente, definito $H_i := \{[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n \mid a_i = 0\}$, la corrispondenza biunivoca $[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow [a_1, \dots, a_i, 0, a_{i+1}, \dots, a_n]$ immerge $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Ideali omogenei e varietà proiettive

Poichè $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è un anello graduato, ogni $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ammette un'unica decomposizione come somma di polinomi omogenei $f_0 + \dots + f_d$. Possiamo quindi definire

Definizione 1.2 (Ideale omogeneo). Un ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ si dice omogeneo se $\forall f \in I$, ogni componente omogenea f_i di f appartiene ad I .

Alternativamente, possiamo definire un ideale omogeneo come un ideale generato da ideali omogenei. Non è difficile mostrare che le due definizioni sono equivalenti; nella pratica utilizzeremo questa seconda caratterizzazione.

Definizione 1.3 (Varietà algebrica proiettiva). Sia $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ideale omogeneo. Definiamo varietà algebrica proiettiva

$$V(I) := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0 \forall f \in I\}$$

Il luogo degli zeri in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ di un generico polinomio non è ben definito, dipendendo dalla scelta del rappresentante. Se invece si richiede che f sia omogeneo, l'identità $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$ (dove $d = \deg f$) garantisce una buona definizione. In questa tesi utilizzeremo spesso varietà definite come luogo degli zeri di un ideale principale. In questo caso scriveremo $V(f)$ in luogo di $V(I)$ per $I = (f)$.

Definizione 1.4 (Trasformazione proiettiva). Si dice trasformazione proiettiva di \mathbb{P}^n una biezione $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ tale che $[a_0, \dots, a_n] \mapsto [\alpha(a_0, \dots, a_n)]$ per qualche endomorfismo α dello spazio vettoriale \mathbb{K}^{n+1} .

Capitolo 2

Curve algebriche proiettive

Definizione 2.1 (Curva algebrica proiettiva). Sia $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinomio omogeneo di grado ≥ 1 . Si definisce curva algebrica proiettiva F definita da f la varietà algebrica

$$F := \{[a, b, c] \in \mathbb{P}^2 \mid f(a, b, c) = 0\}$$

Diremo che una curva F ha grado k se k è il grado del polinomio f che la definisce, che F è irriducibile se lo è f e chiameremo componente di F una curva Q definita da un fattore irriducibile q di f . Inoltre definiamo retta proiettiva un curva algebrica proiettiva di grado 1.

Definizione 2.2 (Punto singolare). Sia F curva algebrica proiettiva definita da $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$. $p = [a, b, c]$ si dice punto singolare di F quando

$$f(a, b, c) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)$$

Una curva è detta nonsingolare quando nessun suo punto è singolare. Se $p = [a, b, c]$ è un punto nonsingolare di $V(f)$, la retta tangente a $V(f)$ in p è definita da

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) + y \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + z \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

Risultante

Definizione 2.3 (Risultante). Sia R un UFD. Dati $f_0, \dots, f_n, g_0, \dots, g_m \in R$ con $f_n, g_m \neq 0$, siano

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n, \\ g &= g_0 + g_1x + \dots + g_mx^m, \end{aligned}$$

Molteplicità d'intersezione e Teorema di Bézout

Teorema 2.7. Per ogni coppia di curve algebriche proiettive F, G in \mathbb{P}^2 esiste un'unica molteplicità d'intersezione $I_p(F, G)$ tale che:

- (i) $I_p(F, G) = I_p(G, F)$
- (ii) $I_p(F, G) = \infty$ se p appartiene ad una componente comune di F e G , altrimenti $I_p(F, G)$ è un intero non negativo
- (iii) $I_p(F, G) = 0$ se e solo se $p \notin F \cap G$
- (iv) Due rette proiettive distinte si incontrano con molteplicità 1 nel loro unico punto di intersezione
- (v) Se F_1 e F_2 sono curve algebriche proiettive definite rispettivamente da f_1, f_2 omogenei in $\mathbb{C}[x, y, z]$ e F è definita da $f = f_1 f_2$, $I_p(F, G) = I_p(F_1, G) + I_p(F_2, G)$
- (vi) Se F e G sono definite rispettivamente da f, g omogenei in $\mathbb{C}[x, y, z]$ e E è una curva algebrica proiettiva definita da $fr + g$ per qualche r in $\mathbb{C}[x, y, z]$ omogeneo tale che $\deg r + \deg f = \deg g$, $I_p(F, G) = I_p(F, E)$

Inoltre se F e G non hanno componenti comuni e si scelgono delle coordinate proiettive tali che

- (a) $[1, 0, 0] \notin F \cup G$
- (b) $[1, 0, 0]$ non appartiene a nessuna retta per due punti di $F \cap G$

in qualunque $p = [a, b, c] \in F \cap G$ la molteplicità d'intersezione $I_p(F, G)$ di F e G è uguale al più grande $k \in \mathbb{N}$ tale che $(bz - cy)^k$ divida il risultante $\text{Res}(f, g, x)$.

Dimostrazione. Mostriamo che (i)-(vi) garantiscono l'unicità di $I_p(F, G)$.

Dato che (i)-(vi) sono invarianti per trasformazioni proiettive, possiamo scegliere le coordinate in maniera da avere $p = [0, 0, 1]$; da (ii) e (iii) segue che se $p \notin F \cap G$ o p giace in una componente comune alle due curve, $I_p(F, G)$ è univocamente determinata; (i) e (v) garantiscono che possiamo scrivere $I_p(F, G)$ come somma di molteplicità d'intersezione in p delle componenti irriducibili di F e G . Supponiamo quindi senza perdere di generalità che F e G siano curve irriducibili e che $I_p(F, G) = k \in \mathbb{N}$.

Si considerino $f(x, 0, 1)$ e $g(x, 0, 1)$ polinomi nella sola variabile x di grado rispettivamente n e m , supponendo per (i) che $n \leq m$. Si distinguono due casi:

Caso $n = 0$. In queste ipotesi $f(x, 0, 1) \equiv f(0, 0, 1) \equiv 0$ ed essendo $f(x, y, z)$ omogeneo, anche $f(x, 0, z) \equiv 0$. Questo ci permette di scrivere

$$f(x, y, z) = yr(x, y, z)$$

per un qualche r polinomio omogeneo. Per quanto riguarda g possiamo separare i termini in cui compare la y da quelli in cui non compare scrivendo

$$g(x, y, z) = g(x, 0, z) + ys(x, y, z) = x^q t(x, z) + ys(x, y, z)$$

per un qualche s polinomio omogeneo, $t \in \mathbb{C}[x, z]$ tale che $t(0, 1) \neq 0$ e q intero positivo, in quanto $x^q t(y, z) = q(x, y, z) - ys(x, y, z)$ si annulla in $(0, 0, 1)$. Adesso abbiamo che

$$\begin{aligned} I_p(F, G) &\stackrel{(v)}{=} I_p(V(y), G) + I_p(V(r), G) \stackrel{(i)}{=} I_p(G, V(y)) + I_p(G, V(r)) \stackrel{(vi)}{=} \\ &\stackrel{(vii)}{=} I_p(V(y), V(x^q t)) + I_p(G, V(r)) \stackrel{(v)}{=} I_p(V(y), V(x^q)) + I_p(V(y), V(t)) + \\ &\quad + I_p(G, V(r)) \stackrel{(v)}{=} qI_p(V(x), V(y)) + I_p(G, V(r)) = I_p(G, V(r)) + q \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza è dovuta al fatto che $p = [0, 0, 1] \notin V(t)$.

Se per ipotesi induttiva supponiamo che ogni molteplicità algebrica strettamente minore di k possa essere determinata utilizzando (i)-(vi), ricordando che $q > 0$, possiamo determinare univocamente $I_p(G, V(r))$ e quindi anche $I_p(F, G) = I_p(G, V(r)) + q$.

Caso $n > 0$. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tali che $\alpha f(x, 0, 1)$ e $\beta g(x, 0, 1)$ siano polinomi monici in x . Si consideri il polinomio omogeneo (nonnullo in quanto f e g sono irriducibili e distinti)

$$s(x, y, z) = z^{m-n+\deg f} \beta g(x, y, z) - x^{m-n} z^{\deg g} \alpha f(x, y, z)$$

costruito in maniera che

$$s(x, 0, 1) = \beta g(x, 0, 1) - x^{m-n} \alpha f(x, 0, 1)$$

abbia grado in x strettamente minore di m e che

$$\begin{aligned} I_p(F, V(s)) &\stackrel{(vi)}{=} I_p(F, V(z^{\deg f+m-n} g)) \stackrel{(v)}{=} I_p(F, V(z^{\deg f+m-n})) + I_p(F, G) \stackrel{(iii)}{=} \\ &\stackrel{(iii)}{=} I_p(F, G) \end{aligned}$$

Ripetendo questo processo un numero finito di volte ci si riconduce al caso $n = 0$, provando quindi l'unicità.

Per provare l'esistenza definiamo $I_p(F, G)$ come segue e mostriamo che soddisfa le condizioni (i)-(vi).

- Se p appartiene ad una componente comune di F e G , $I_p(F, G) = \infty$
- Se $p \notin F \cap G$, $I_p(F, G) = 0$
- Se p appartiene a $F \cap G$ e non appartiene a nessuna componente comune di F e G allora si rimuovono da F e G le componenti comuni e si scelgono coordinate proiettive tali che siano soddisfatte le condizioni (a) e (b). Siano, nelle nuove coordinate, $p = [a, b, c]$ e f, g i polinomi omogenei che definiscono rispettivamente F e G . Posto $\tilde{f} := \frac{f}{MCD(f, g)}$ e $\tilde{g} := \frac{g}{MCD(f, g)}$ Si definisce $I_p(F, G)$ il più grande intero k tale che $(by - cz)^k$ divida $Res(\tilde{f}, \tilde{g}, x)$.

Abbiamo che:

- (i) è soddisfatta in quanto se $p \notin F \cap G$ o p è in una componente comune a F e G , $I_p(F, G) = I_p(G, F)$ per definizione; altrimenti $Res(\tilde{f}, \tilde{g}, x)$ e $Res(\tilde{g}, \tilde{f}, x)$ sono determinanti di matrici aventi le stesse righe in diverso ordine e quindi $Res(\tilde{f}, \tilde{g}, x) = \pm Res(\tilde{g}, \tilde{f}, x)$.

- (ii) se p appartiene a una componente comune di F e G , $I_p(F, G) = \infty$ per definizione. Se $p \notin F \cap G$ si ha $I_p(F, G) = 0$ mentre se $p \in F \cap G$ e p non appartiene ad una componente comune alle due curve, $Res(\tilde{f}, \tilde{g}, x)$ non è identicamente nullo e quindi la massima potenza di $(by - cz)$ che lo divide esiste ed è un intero non negativo.
- (iii) se $p = [a, b, c] \notin F \cap G$, $I_p(F, G) = 0$ per definizione. Se $p \in F \cap G$ allora p giace in una componente comune a F e G e $I_p(F, G) = \infty$ o p non appartiene a nessuna componente comune di F e G . Nel secondo caso $\tilde{f}(x, b, c)$ e $\tilde{g}(x, b, c)$ hanno una radice comune a , ovvero $Res(\tilde{f}(x, b, c), \tilde{g}(x, b, c)) = 0$. Dato che le coordinate proiettive scelte soddisfano (a), per il Teorema 2.4 si ha che $Res(\tilde{f}, \tilde{g}, x)(b, c) = Res(\tilde{f}(x, b, c), \tilde{g}(x, b, c)) = 0$, cioè $Res(\tilde{f}, \tilde{g}, x)(y, z)$ si annulla in (b, c) . Dato che \tilde{f} e \tilde{g} sono coprimi, dal Teorema 2.5 segue che $Res(\tilde{f}, \tilde{g}, x)(y, z)$ è omogeneo di grado positivo e quindi divisibile per $bz - cy$, da cui segue $I_p(F, G) > 0$.
- (iv) Per il Teorema 2.5 il risultante di due polinomi lineari non associati (che non si dividono a vicenda) ha grado 1. Per (iii), nell'unico punto di intersezione p si ha $I_p(F, G) > 0$ che forza $I_p(F, G) = 1$.
- (v) dalla definizione segue che $I_p(F, G) = 0$ se e solo se $I_p(F_1, G) = I_p(F_2, G) = 0$ e che $I_p(F, G) = \infty$ se e solo se $I_p(F_1, G) = \infty$ o $I_p(F_2, G) = \infty$. Nel terzo caso dal Teorema 2.6 segue che il massimo k intero tale che $(bz - cy)^k$ divide $Res(\tilde{f}, \tilde{g}, x)$ è la somma dei massimi k_1 e k_2 interi tali che $(bz - cy)^{k_1}$ divide $Res(\tilde{f}_1, \tilde{g}, x)$ e che $(bz - cy)^{k_2}$ divide $Res(\tilde{f}_2, \tilde{g}, x)$.
- (vi) $I_p(F, G) = \infty$ se e solo se $I_p(F, G) = \infty$ in quanto i fattori comuni di f e $fr + g$ sono gli stessi di f e g . Analogamente si ha che $F \cap E = G \cap E$. Nel terzo caso è sufficiente osservare che la matrice di Sylvester (a_{ij}) associata a \tilde{f} e $\tilde{f}r + \tilde{g}$ si ottiene a partire da combinazioni lineari delle righe della matrice di Sylvester (b_{ij}) associata a \tilde{f} e \tilde{g} . Infatti posto $r = r_0(y, z) + r_1(y, z)x + \dots + r_{n-m}(y, z)x^{n-m}$ si ha che per ogni $i = 1, \dots, m$ il coefficiente del termine di grado i di $\tilde{f}r$ è dato da $\sum_{k=0}^i \tilde{f}_k(y, z)r_{i-k}(y, z)$ e che quindi

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{se } i \leq m \\ b_{ij} + \sum_{k=i-m}^{i-n} r_{i-n-k} b_{kj} & \text{se } i > m \end{cases}$$

Ne segue che i due risultanti sono uguali

Questo conclude la dimostrazione. \square

Osservazione. Se un punto nello spazio affine $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ annulla due polinomi coprimi $f(x, y)$ e $g(x, y)$, allora $Res(f, g, y)(a) = 0$ e $Res(f, g, x)(b) = 0$ (dove $Res(f, g, \cdot)$ ha grado positivo, a meno che f o g non siano polinomi in una sola variabile). Da questo segue facilmente che l'intersezione $V(f) \cap V(g) \subseteq \mathbb{C}^2$ è finita ¹. Dato che possiamo ricoprire \mathbb{P}^2 con due immersioni di \mathbb{C}^3 distinte,

¹In particolare, i punti sono in numero minore o uguale al prodotto dei gradi dei due polinomi. Questo risultato è noto come forma debole del Teorema di Bézout

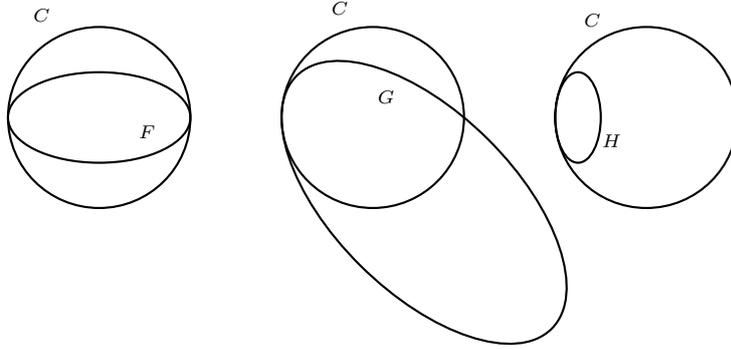


Figura 2.1: Esempi di intersezioni con diverse molteplicità: la conica $F = V(x^2 + 4y^2 - z^2)$ interseca la circonferenza unitaria C in due punti, entrambi con molteplicità 2; $G = V(5x^2 + 6xy + 5y^2 + 6yz - 5z^2)$ interseca C ancora in due punti, ma di molteplicità rispettivamente 3 e 1; per $H = V(4x^2 + y^2 + 6xz + 2z^2)$ si ha che $C \cap H$ è composta da un solo punto, di molteplicità 4.

restringendo le curve alle immersioni si prova che anche l'intersezione di due curve algebriche proiettive senza componenti comuni è finita. Questo implica che una qualunque scelta di coordinate proiettive soddisfa (a) e (b) con probabilità 1.

Teorema 2.8 (Teorema di Bézout). Due curve proiettive F e G di grado rispettivamente n e m in \mathbb{P}^2 senza componenti comuni hanno esattamente nm intersezioni contate con le rispettive molteplicità, ovvero

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = mn$$

Dimostrazione. Si scelgano coordinate proiettive soddisfacenti le condizioni (a) e (b) del Teorema 2.7, e siano f e g in $\mathbb{C}[x, y, z]$ i polinomi omogenei che definiscono le curve F e G in queste coordinate. Per i Teoremi 2.4 e 2.5 $\text{Res}(f, g, x)$ è un polinomio omogeneo di grado nm in due variabili, e quindi può essere fattorizzato come prodotto di nm fattori lineari, ovvero per $i = 1, \dots, k$ esistono $b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $e_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $e_1 + \dots + e_k = nm$ e

$$\text{Res}(f, g, x)(y, z) = \prod_{i=1}^k (b_i z - c_i y)^{e_i}$$

dove (b_i, c_i) non è un multiplo scalare di (b_j, c_j) quando $i \neq j$.

Analogamente al Teorema 2.7 per ogni $(b, c) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $(bz - cy)$ è un fattore di $\text{Res}(f, g, x)$ se e solo se $0 = \text{Res}(f, g, x)(b, c) = \text{Res}(f(x, b, c), g(x, b, c), x)$

ovvero se e solo se $\exists a \in \mathbb{C}$ tale che $f(a, b, c) = g(a, b, c) = 0$, ovvero se e solo se $\exists a \in \mathbb{C}$ tale che $[a, b, c] \in F \cap G$. Ora, se esistessero $[\alpha, \beta, \gamma], [a, b, c] \in F \cap G$ distinti tali che $(\beta z - \gamma y)$ sia un multiplo scalare di $(bz - cy)$, $[\alpha, \beta, \gamma], [a, b, c]$ e $[1, 0, 0]$ appartenerebbero tutti alla retta proiettiva definita da $bz = cy$, contraddicendo (b). Ne segue che per ogni fattore $(b_i z - c_i y)$ esiste un unico a_i tale che $[a_i, b_i, c_i] \in F \cap G$, ovvero esistono unici $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ tali che

$$F \cap G = \{[a_i, b_i, c_i] \mid 1 \leq i \leq k\}$$

La tesi segue dal fatto che in queste ipotesi $I_{p_i}(F, G) = e_i \forall i = 1, \dots, k$, \square

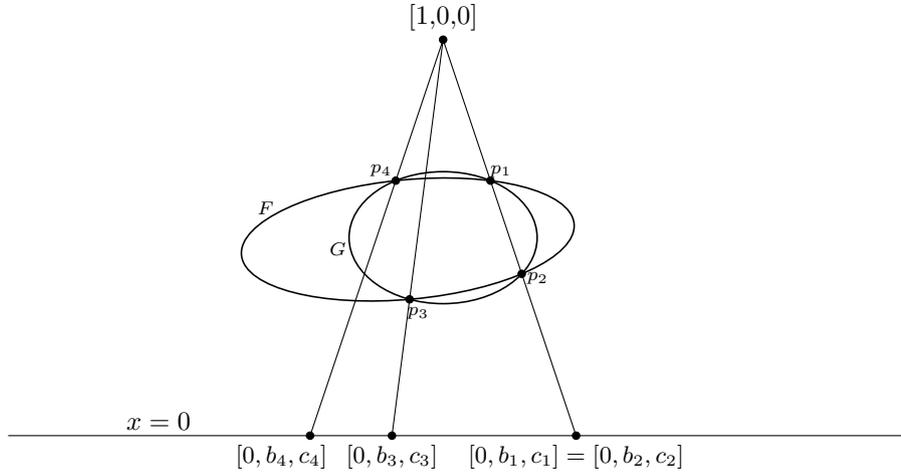


Figura 2.2: Rappresentazione dell'esempio 2.9

Esempio 2.9. L'ipotesi (b) nel teorema 2.7 non è esplicitamente necessaria per soddisfare (i)-(vi), ma serve a garantire la corrispondenza univoca tra punti nell'intersezione e fattori del risultante. Si considerino, ad esempio, le due coniche $F = V(f)$ e $G = V(g)$ nella figura 2.2. L'intersezione $F \cap G$ è composta dai 4 punti p_1, p_2, p_3, p_4 e per quanto appena dimostrato ci aspettiamo che $I_{p_i}(F, G) = 1 \forall i$. Posto $p_i = [a_i, b_i, c_i]$, dato che p_1, p_2 e $[1, 0, 0]$ giacciono sulla stessa retta proiettiva, si ha che i due corrispondenti fattori di $Res(f, g, x)(y, z)$, $(c_1 y - b_1 z)$ e $(c_2 y - b_2 z)$, sono uno multiplo scalare dell'altro. A causa di questo, fattorizzando $Res(f, g, x)$ per determinare le molteplicità d'intersezione, si ottiene $I_{p_1}(F, G) = I_{p_2}(F, G) = 2$, che è assurdo.

Una semplice e celebre applicazione del Teorema di Bézout è la seguente:

Teorema 2.10 (Esagono mistico di Pascal). Le coppie di lati opposti di un esagono iscritto in una conica irriducibile in \mathbb{P}^2 si intersecano in tre punti allineati.

Dimostrazione. Sia h il polinomio che definisce la conica irriducibile H in cui è iscritto l'esagono e siano l_1, \dots, l_6 i polinomi lineari che definiscono i lati dell'esagono. Siano F e G le curve definite rispettivamente da $f = l_1 l_3 l_5$ e $g = l_2 l_4 l_6$, e si consideri un punto $[a, b, c] \in H \setminus (F \cap G)$. Ora, posto $\lambda = g(a, b, c)$ e $\mu = f(a, b, c)$ se si considera la curva C definita dal polinomio

$$\lambda f - \mu g$$

si ha che C interseca H nei 6 punti di $F \cap G$ (in cui f e g valgono 0) e in $[a, b, c]$ (in cui $\lambda f = \mu g$). Per il Teorema di Bézout, dato che $C \cap H$ contiene più punti del prodotto dei loro gradi, C e H hanno una componente comune che, essendo H irriducibile, è H stessa. Possiamo quindi scrivere

$$\lambda f - \mu g = rh$$

per $r \in \mathbb{C}[x, y, z]$ omogeneo lineare. Adesso è sufficiente osservare che se $[u, v, w] \in F \cap G$, allora si deve avere $h(u, v, w) = 0$ oppure $r(u, v, w) = 0$, ovvero i 3 punti che costituiscono l'intesezione tra le triplette di lati non contigui dell'esagono giacciono tutti sulla stessa retta proiettiva. \square

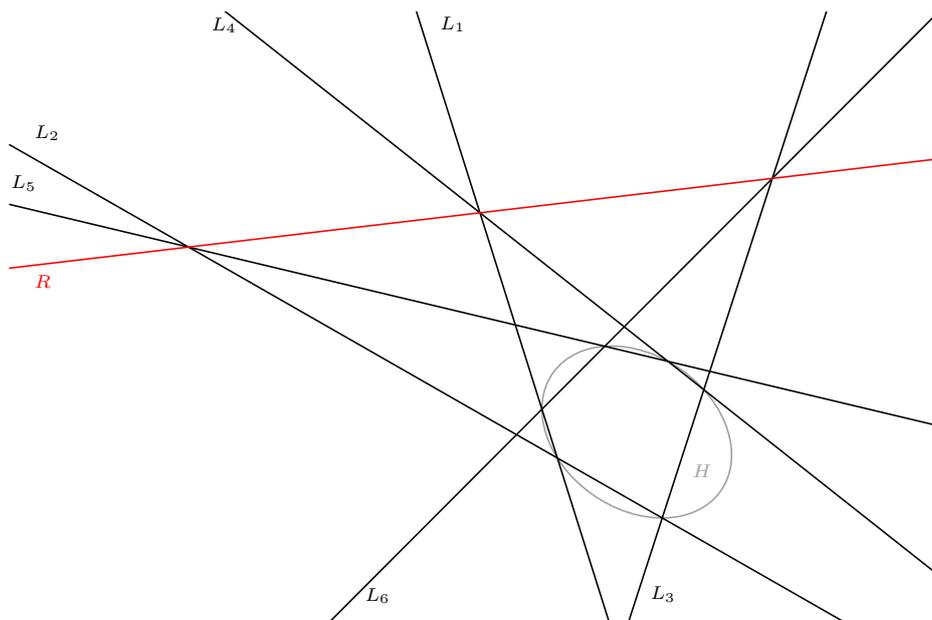


Figura 2.3: Esagono mistico di Pascal inscritto in H , definito dalle rette L_1, \dots, L_6

Il teorema vale anche in casi "degeneri": non è infatti necessario ai fini della dimostrazione che i lati dell'esagono connettano punti consecutivi sulla conica. Possiamo costruire, invece di un esagono, una spezzata chiusa per 6 punti della conica e la dimostrazione rimane valida senza alcuna modifica, a patto di considerare come opposte le opportune coppie di rette. Con dei piccoli accorgimenti si può mostrare che il risultato continua a valere facendo coincidere due vertici adiacenti dell'esagono, considerando la tangente alla conica così ottenuta come un lato dell'esagono.

Capitolo 3

Cubiche e punti di flesso

Definizione 3.1. Sia F una curva algebrica proiettiva definita dal polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Un punto non singolare $[a, b, c] \in F$ si dice essere un punto di flesso di F quando

$$\mathcal{H}_f(a, b, c) = 0$$

dove \mathcal{H}_f indica il determinante Hessiano della funzione $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$

Se f è un polinomio omogeneo, sono omogenee anche le sue derivate; in particolare, per $d = \deg f$, \mathcal{H}_f è omogeneo di grado $3(d-2)$. Se F è la curva algebrica definita da f , i punti di flesso di F corrispondono ai punti non singolari di $F \cap V(\mathcal{H}_f)$. Questa caratterizzazione garantisce per curve nonsingolari di grado $d \geq 3$ l'esistenza di almeno un punto di flesso e per curve di grado $d \geq 2$ che i punti di flesso siano al più $3d(d-2)$.

Vogliamo mostrare che la retta tangente ad una curva per un punto di flesso interseca la curva con molteplicità almeno 3. Per fare ciò abbiamo bisogno di due lemmi particolarmente tecnici:

Lemma 3.2. Se $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ è un polinomio omogeneo di grado $d > 1$,

$$z^2 \mathcal{H}_f = (d-1)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x, y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y, x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \left(\frac{d}{d-1}\right)f \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Si sommi la prima riga moltiplicata per x e la seconda moltiplicata per y alla terza moltiplicata per z e si sfrutti la relazione di Eulero $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = df$. La tesi segue ripetendo il processo sulle colonne. \square

Lemma 3.3. Siano $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ con $\deg g = 1$. Posto $g = \alpha x + \beta y + \gamma z$, se $\alpha \neq 0$, $\text{Res}(f, g, x) = \alpha^{\deg f} f\left(-\frac{\beta y + \gamma z}{\alpha}, y, z\right)$

Dimostrazione. Per induzione su $d = \deg f$. Si ponga $f = a_0(y, z) + \dots + a_d(y, z)x^d$. Se $d = 1$ si ha che

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, g, x) &= \begin{vmatrix} a_0(y, z) & a_1(y, z) \\ \beta y + \gamma z & \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \alpha a_0(y, z) - (\beta y + \gamma z)a_1(y, z) = \alpha f\left(-\frac{\beta y + \gamma z}{\alpha}, y, z\right) \end{aligned}$$

Sia $d > 1$. Sviluppando il determinante sull'ultima colonna si ha che

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, g, x) &= \begin{vmatrix} a_0(y, z) & a_1(y, z) & \dots & a_{d-1}(y, z) & a_d(y, z) \\ \beta y + \gamma z & \alpha & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \beta y + \gamma z & \alpha & \\ & & & \beta y + \gamma z & \alpha \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^d a_d(y, z) \begin{vmatrix} \beta y + \gamma z & \alpha & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \alpha & \\ & & & \beta y + \gamma z & \end{vmatrix} + \\ &+ \alpha \begin{vmatrix} a_0(y, z) & a_1(y, z) & \dots & a_{d-1}(y, z) \\ \beta y + \gamma z & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta y + \gamma z & \alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Applicando l'ipotesi induttiva a $a_0(y, z) + \dots + a_{d-1}(y, z)x^{d-1}$ si trova che

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, g, x) &= a_d(y, z)(\beta y + \gamma z)^d + \\ &+ \alpha^d (a_0(y, z) + \dots + a_{d-1}(y, z)) \left(-\frac{\beta y + \gamma z}{\alpha}\right)^{d-1} = \alpha^d f\left(-\frac{\beta y + \gamma z}{\alpha}, y, z\right) \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.4. Se F è una curva algebrica proiettiva, p un punto di flesso per F e L la retta tangente a F in p , $I_p(F, L) \geq 3$

Dimostrazione. Si scelgano delle coordinate proiettive tali che $p = [0, 0, 1]$ e le ipotesi (a) e (b) del teorema 2.7 siano soddisfatte. Siano $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tali che in queste coordinate si abbia $F = V(f)$ e $L = V(\alpha x + \beta y + \gamma z)$. Poichè da $[0, 0, 1] \in L$ segue subito $\gamma = 0$ e p è un punto nonsingolare, si deve avere $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Se $\alpha \neq 0$, in un intorno di $[0, 0, 1]$ possiamo parametrizzare L come $\Gamma(y) = (-\frac{\beta}{\alpha}y, y, 1)$ al variare di $y \in \mathbb{C}$. Considerando lo sviluppo di Taylor di $f(\Gamma(y))$ in $y = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(\Gamma(y)) &= f(\Gamma(0)) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(0))\beta - \frac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(0))\alpha \right] y + \\ &\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Gamma(0))\beta^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\Gamma(0))\alpha\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Gamma(0))\alpha^2 \right] y^2 + O(y^3) \end{aligned}$$

Dalla definizione di retta tangente sia ha $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1)$ e $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 1)$, ovvero il coefficiente di y nello sviluppo è nullo. Per il lemma 3.2, il coefficiente di y^2 corrisponde a $z^2 \mathcal{H}_f(0, 0, 1)$ ed è quindi nullo a sua volta.

Per quanto appena visto $f(\Gamma(y))$ ha uno zero di molteplicità 3 in $y = 0$, ovvero y^3 divide $f(-\frac{\beta}{\alpha}y, y, 1)$. Omogeneizzando in z si ottiene che y^3 divide $f(-\frac{\beta}{\alpha}y, y, z)$, che per il lemma 3.3 divide il risultante, provando la tesi.

Se $\alpha = 0$ poichè p è nonsingolare si deve avere $\beta \neq 0$; in questo caso la dimostrazione è analoga scambiando il ruolo assunto da x e y sia nella parametrizzazione che nel calcolo del risultante. \square

Nel caso in cui p non sia un flesso abbiamo comunque provato

Corollario 3.5. Se F è una curva algebrica proiettiva e L la retta tangente a F in p , $I_p(F, L) \geq 2$

Fascio di Hesse

Il fascio di Hesse è definito come la famiglia di cubiche nel piano proiettivo \mathbb{P}^2 definite da

$$E_\lambda = V(x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz)$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{P}^1$ (ovvero con $E_\infty := V(xyz)$)

Dato che la famiglia è generata dalla cubica $x^3 + y^3 + z^3$ e dal suo determinante Hessiano $216xyz$, i 9 punti di flesso di E_0 (ϵ indica una radice terza dell'unità)

$$\begin{array}{lll} p_0 = (0, 1, -1) & p_1 = (0, 1, \epsilon) & p_2 = (0, 1, \epsilon^2) \\ p_3 = (1, 0, -1) & p_4 = (1, 0, -\epsilon^2) & p_5 = (1, 0, -\epsilon) \\ p_6 = (1, -1, 0) & p_7 = (1, -\epsilon, 0) & p_8 = (1, -\epsilon^2, 0) \end{array}$$

appartengono ad ogni cubica della famiglia. In particolare, dato che \mathcal{H}_f è uguale per ogni $\lambda \neq \infty$ e che una cubica ha al più 9 punti di flesso, p_0, \dots, p_8 sono tutti e soli i punti di flesso di ogni cubica nonsingolare nel fascio.

I valori di λ per cui E_λ contiene delle singolarità si trovano direttamente: per $\lambda = \infty$, $V(xyz)$ è evidentemente singolare; per $\lambda \neq 0$, se $[x_0, y_0, z_0]$ è un punto singolare soddisfa

$$\begin{cases} 3x_0^2 + \lambda y_0 z_0 = 0 \\ 3y_0^2 + \lambda x_0 z_0 = 0 \\ 3z_0^2 + \lambda x_0 y_0 = 0 \end{cases}$$

dove possiamo supporre $z_0 = 1$ (se $z_0 = 0$ si ha $x_0 = y_0 = z_0 = 0$)

$$\begin{cases} 3x_0^2 + \lambda y_0 = 0 \\ 3y_0^2 + \lambda x_0 = 0 \\ 3 + \lambda x_0 y_0 = 0 \end{cases}$$

da cui $3x_0^3 + \lambda x_0 y_0 = 0 \Rightarrow x_0^3 = 1 \Rightarrow x_0 = \epsilon^k$ per $k = 0, 1, 2$. Esplicitando y_0 nella terza equazione e sostituendo nella seconda si ha $3\frac{9}{\lambda^2 \epsilon^{2k}} + \lambda \epsilon^k = 0$ da

cui $\lambda^3 = -27$, ovvero $\lambda \in \{-3, -3\epsilon, -3\epsilon^2\}$. In questi casi si può esplicitamente fattorizzare $(x^3 + y^3 + z^3) + \lambda xyz$ ottenendo rispettivamente

$$\begin{aligned} xyz &= 0 & (\lambda = \infty) \\ (x + y + z)(x + \epsilon y + \epsilon^2 z)(x + \epsilon^2 y + \epsilon z) &= 0 & (\lambda = -3) \\ (x + \epsilon^2 y + \epsilon^2 z)(x + y + \epsilon z)(x + \epsilon y + z) &= 0 & (\lambda = -3\epsilon) \\ (x + \epsilon y + \epsilon z)(x + \epsilon^2 y + z)(x + y + \epsilon^2 z) &= 0 & (\lambda = -3\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Possiamo direttamente provare che:

- Ognuna di queste terne di rette è una cubica del fascio e quindi contiene tutti i punti p_0, \dots, p_8 .
- Ognuno dei 9 punti giace esattamente su quattro rette, e ogni retta contiene esattamente 3 punti.
- Per ogni coppia di punti di flesso p_i, p_j , la retta passante per i due punti è descritta in (3.2) e quindi passa per un terzo punto di flesso p_k .

Questa configurazione di 9 punti e 12 rette è detta configurazione di Hesse.

Il seguente risultato permette di estendere le osservazioni appena fatte a tutte le cubiche nonsingolari.

Teorema 3.6. Ogni cubica piana nonsingolare è equivalente per trasformazione proiettiva ad una curva della forma

$$x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz = 0$$

ovvero ammette una forma canonica di Hesse.

Dimostrazione. Sia E una cubica nonsingolare in \mathbb{P}^2 , p e q due punti di flesso per E ¹. Sia r l'intersezione tra le tangenti a E in p e q . Si scelgano delle coordinate proiettive tali che $p = [1, 0, 0]$, $q = [0, 1, 0]$, $r = [0, 0, 1]$, in modo da avere che le rette tangenti a E in $[1, 0, 0]$ e in $[0, 1, 0]$ siano rispettivamente definite da $y = 0$ e $x = 0$. Sia $f(x, y, z)$ il polinomio che definisce E in queste coordinate. Poichè la tangente per un flesso interseca E con molteplicità almeno 3, l'intersezione è unica. Possiamo quindi imporre che il sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ammetta un'unica soluzione, ottenendo che $f(0, y, z) = (\alpha y + \beta z)^3$ per un qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Valutando in $[0, 1, 0]$ otteniamo $\alpha = 0$, ovvero che per un qualche g_1 polinomio di secondo grado si abbia

$$f(x, y, z) = \beta^3 z^3 + y g_1(x, y, z)$$

Analogamente con la tangenza a $y = 0$ in $[1, 0, 0]$ si prova che $g_1 = x g_2(x, y, z)$ per un qualche g_2 polinomio lineare.

¹Una cubica nonsingolare non può avere un solo punto di flesso. Portandoci in coordinate in cui la tangente di flesso è descritta da $x = 0$ si può mostrare che se E e la curva descritta dalla sua Hessiana si incontrano in un solo punto con molteplicità 9 allora E ammette almeno un punto singolare

Abbiamo provato quindi che in queste coordinate E è definita da un polinomio della forma

$$f(x, y, z) = xy(ax + by + cz) + dz^3$$

per qualche $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Per $c = 0$ si ha che $ab \neq 0$, altrimenti E ammette almeno una singolarità. In questo caso $xy(ax + by)$ è un polinomio omogeneo di terzo grado in due indeterminate privo di radici multiple. Dato che le tre radici sono in posizione generale² in \mathbb{P}^1 , possiamo trovare una trasformazione proiettiva φ che mappi le radici di $xy(ax + by)$ nelle radici di $x^3 + y^3$ [5]. Applicando φ alle prime due componenti e riscaldando la terza opportunamente otteniamo la tesi.

Supponiamo allora $c \neq 0$. Possiamo riscaldare la terza coordinata per ottenere $c = 3$. In questo caso, indicando con ϵ una radice terza dell'unità, possiamo definire delle nuove coordinate ponendo

$$ax + z = \epsilon u + \epsilon^2 v \quad by + z = \epsilon^2 u + \epsilon v$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} abf(x, y, z) &= (\epsilon u + \epsilon^2 v - z)(\epsilon^2 u + \epsilon v - z)(-u - v + z) + dz^3 = \\ &= -u^3 + v^3 + (d + 1)z^3 - 3uvz \end{aligned}$$

Dato che E è nonsingolare, possiamo supporre $d \neq -1$. Riscaldando nuovamente l'ultima coordinata otteniamo la tesi. \square

Abbiamo quindi ottenuto direttamente i seguenti risultati:

Corollario 3.7. Ogni cubica nonsingolare ha esattamente 9 punti di flesso.

Corollario 3.8. Una retta per due punti di flesso di una cubica nonsingolare interseca la cubica in un terzo punto di flesso

² t punti in uno spazio di dimensione proiettiva n sono in posizione generale se $n + 1$ tra essi, comunque scelti, sono linearmente indipendenti

Bibliografia

- [1] KIRWAN, F., *Complex Algebraic Curves*, Cambridge University Press, 1992.
- [2] FULTON, W., *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, Addison-Wesley, 1989.
- [3] COX, D., LITTLE, J., AND O'SHEA, D., *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] ARTEBANI, M., AND DOLGACHEV I.V., The Hesse pencil of plane cubic curves. *L'Enseignement Mathématique*. **55**, 235-273, 2009.
- [5] SERNESI, E., *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.