# EVOLUTE DI CURVE PIANE E GRADO DELLA DISTANZA EUCLIDEA

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani
Candidato: Martina Bassi

Università degli Studi di Firenze

20 Luglio 2016

### Definizione

Dato un polinomio $F \in \mathbb{R}[x, y, t]$, fissiamo un numero reale $t \in \mathbb{R}$; allora $\mathcal{V}(F_t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0\}$ e la **famiglia di curve** determinata da $F$ consiste delle varietà $\mathcal{V}(F_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

## Definizione

Dato un polinomio $F \in \mathbb{R}[x, y, t]$, fissiamo un numero reale $t \in \mathbb{R}$; allora $\mathcal{V}(F_t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0\}$ e la **famiglia di curve** determinata da $F$ consiste delle varietà $\mathcal{V}(F_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

## Inviluppo

L'inviluppo di una famiglia di curve è quella singola curva tale che in ogni suo punto è tangente ad una curva della famiglia.

Vediamo adesso di darne una caratterizzazione algebrica.

Supponiamo che l'inviluppo $C$ sia parametrizzato localmente da

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

con $f(t), g(t) \in C^\infty$

### I° Condizione

Ad ogni istante $t$ il punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ appartenga proprio alla curva $\mathcal{V}(F_t)$:

$$F(f(t), g(t), t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

### II° Condizione

All'istante $t$ l'inviluppo $C$ sia tangente alla curva $\mathcal{V}(F_t)$ in $P = (f(t), g(t))$ ossia che $\nabla F_t \cdot (\dot{f}, \dot{g}) = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(f(t), g(t), t) \cdot \dot{f} + \frac{\partial}{\partial y} F(f(t), g(t), t) \cdot \dot{g} = 0 \tag{2}$$

Infine, differenziando la (1) rispetto a $t$ e sottraendogli la (2) si trova

$$\frac{\partial}{\partial t} F(f(t), g(t), t) = 0.$$

**Definizione**

Data una famiglia $\mathcal{V}(F_t)$ di curve in $\mathbb{R}^2$, il suo inviluppo consiste di tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano alle seguenti condizioni:

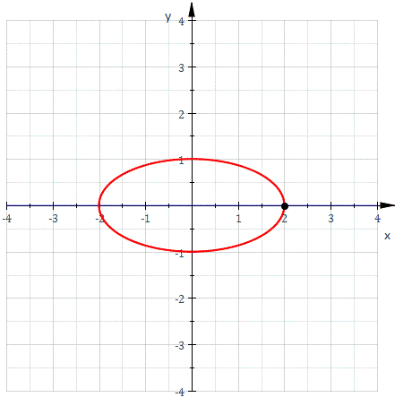
$$\begin{cases} F(x,y,t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} F(x,y,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Per ricavare l'equazione dell'inviluppo è necessario *eliminare il parametro t* dalla (3).

## Definizione

L'evoluta di una curva algebrica piana è **l'inviluppo delle sue rette normali.**




La figura mostra la costruzione dell'evoluta dell'ellisse: l'astroide.

Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}^2, \varphi \in C^\infty$ una curva piana regolare:

### Curvatura

La **curvatura** di $\varphi$ in $P = \varphi(t)$ è data da

$$k(t) = \left| \frac{x''y' - y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

## Raggio e centro di curvatura

Se $k(t) \neq 0$ allora $r(t) = \left|\frac{1}{k(t)}\right|$ è il raggio di curvatura di $\varphi$ in $P = \varphi(t)$ mentre il punto $c(t) = \varphi(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot \mathrm{n}$ è il centro di curvatura di $\varphi$ in $P$.

## Raggio e centro di curvatura

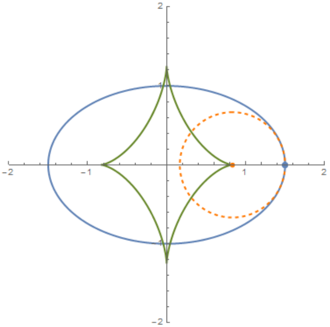
Se $k(t) \neq 0$ allora $r(t) = |\frac{1}{k(t)}|$ è il raggio di curvatura di $\varphi$ in $P = \varphi(t)$ mentre il punto $c(t) = \varphi(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot \text{n}$ è il centro di curvatura di $\varphi$ in $P$.

## Cerchio osculatore

Si definisce cerchio osculatore a $\varphi$ nel punto $P = \varphi(t)$ la circonferenza di centro c(t) e raggio r(t).

## Proposizione

***Il luogo dei centri di curvatura*** *$c(s)$ associati ad una curva piana regolare $\varphi$ di velocità unitaria rappresenta l'evoluta di $\varphi$.*




Il luogo dei centri di curvatura associati all'ellisse è dato dall' astroide.

**Problema:** *data una curva piana ed un punto* $P_1$ *fissato, quante sono le rette normali alla curva passanti per* $P_1$*?*

# Grado della Distanza Euclidea

**Problema:** *data una curva piana ed un punto $P_1$ fissato, quante sono le rette normali alla curva passanti per $P_1$?*

## Distanza al quadrato

Data una curva con rappresentazione parametrica e un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ fissato, la funzione **distanza al quadrato** di $P_1$ da un punto $P(t) = (a(t), b(t))$ qualsiasi della curva è una funzione nell'unica variabile t:

$$F(t) = (x_1 - a(t))^2 + (y_1 - b(t))^2$$

# Grado della Distanza Euclidea

**Problema:** *data una curva piana ed un punto $P_1$ fissato, quante sono le rette normali alla curva passanti per $P_1$?*

## Distanza al quadrato

Data una curva con rappresentazione parametrica e un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ fissato, la funzione **distanza al quadrato** di $P_1$ da un punto $P(t) = (a(t), b(t))$ qualsiasi della curva è una funzione nell'unica variabile t:

$$F(t) = (x_1 - a(t))^2 + (y_1 - b(t))^2$$

## Definizione

Un punto critico di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^1$ è un punto del dominio in cui la derivata si annulla oppure non è definita.

**Problema:** *data una curva piana ed un punto $P_1$ fissato, quante sono le rette normali alla curva passanti per $P_1$?*

# Grado della Distanza Euclidea

**Problema:** *data una curva piana ed un punto $P_1$ fissato, quante sono le rette normali alla curva passanti per $P_1$?*

### Proposizione

*$P(t)$ non singolare è un* ***punto critico*** *della funzione distanza al quadrato $F(t)$ $\Leftrightarrow$ il vettore $P_1 - P(t)$ è* ***normale*** *al vettore tangente alla curva in $P(t)$.*

# Grado della Distanza Euclidea

**Problema:** *data una curva piana ed un punto $P_1$ fissato, quante sono le rette normali alla curva passanti per $P_1$?*

### Proposizione

*$P(t)$ non singolare è un **punto critico** della funzione distanza al quadrato $F(t)$ $\Leftrightarrow$ il vettore $P_1 - P(t)$ è **normale** al vettore tangente alla curva in $P(t)$.*

### Soluzione del problema

Dalla proposizione segue che il numero di rette normali alla curva passanti per $P_1$ è dato dal numero di punti critici reali della funzione $F(t)$.

# Grado della Distanza Euclidea

**Definizione**

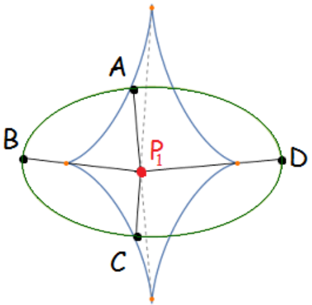
Si definisce Grado della Distanza Euclidea (EDdegree) il numero di **punti critici complessi di** $F(t)$, per $P_1$ generico.

**Importanza dell'evoluta**

L'evoluta divide il piano $\mathbb{R}^2$ in regioni connesse, in ciascuna delle quali il **numero dei punti critici reali** è **costante** e sempre $\leq$ **EDdegree**.

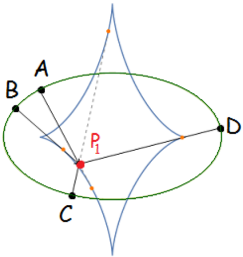
- L'EDdegree dell'Ellisse è **4**
- L'astroide divide il piano in due regioni: interna ed esterna all'evoluta.

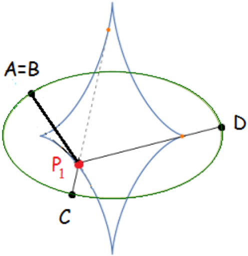
Preso un punto $P_1$ interno all'astroide, è possibile disegnare **4** rette normali all'ellisse, in accordo col fatto che tutti e 4 i punti critici della funzione $F(t)$ sono reali.



- L'EDdegree dell'Ellisse è **4**
- L'astroide divide il piano in due regioni: interna ed esterna all'evoluta.

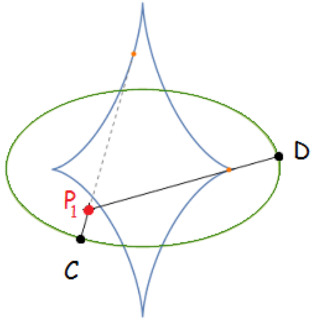
Se il punto $P_1$ giace proprio sull'astroide **2** di questi 4 punti critici reali vanno a coincidere; si ottiene un punto critico reale di molteplicità 2; dal punto $P_1$ si possono condurre **3** rette normali. Ne deriva quindi che l'evoluta è il luogo in cui si ha **molteplicità nei punti critici.**



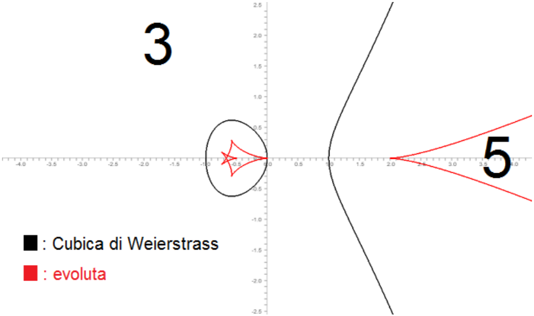



- L'EDdegree dell'Ellisse è **4**
- L'astroide divide il piano in due regioni: interna ed esterna all'evoluta.

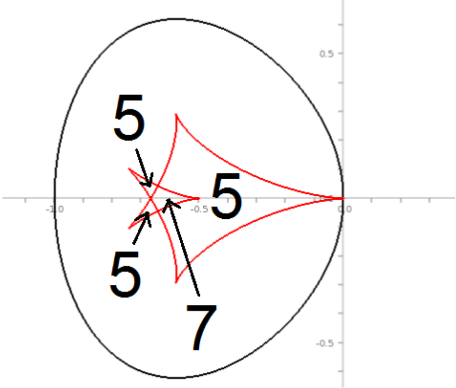
Se il punto $P_1$ è esterno all'astroide, il numero delle normali all'ellisse si riduce a 2; i due punti critici reali coincidenti sono diventati **due punti complessi coniugati.**



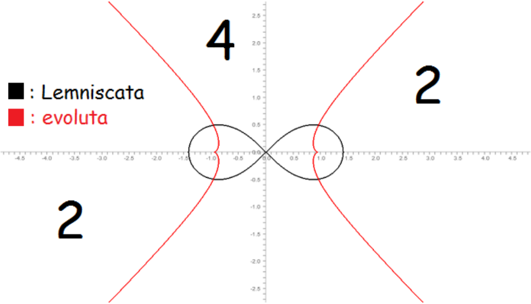
- L'EDdegree della Cubica in forma di Weierstrass è **7**
- L'evoluta divide il piano in 6 regioni.



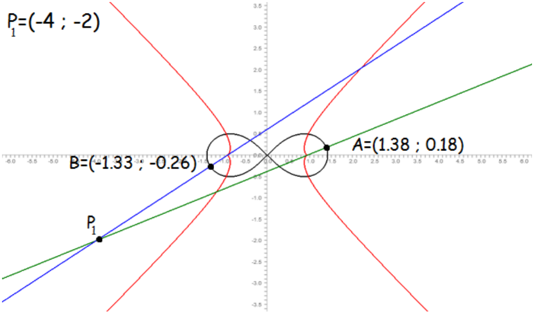
- L'EDdegree della Cubica in forma di Weierstrass è **7**
- L'evoluta divide il piano in 6 regioni.



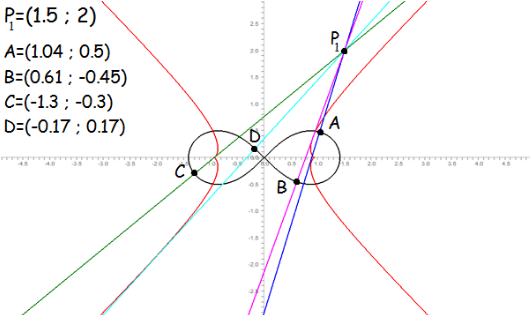
- L'EDdegree della Lemniscata di Bernoulli è **6**
- L'evoluta divide il piano in 3 regioni.



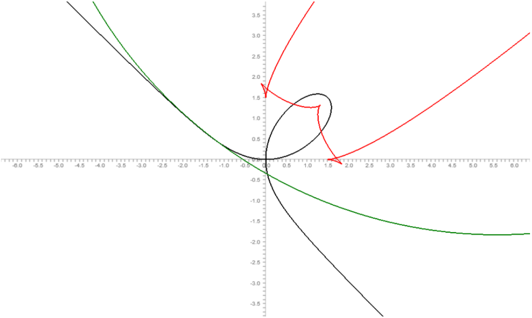
- L'EDdegree della Lemniscata di Bernoulli è **6**
- L'evoluta divide il piano in 3 regioni.



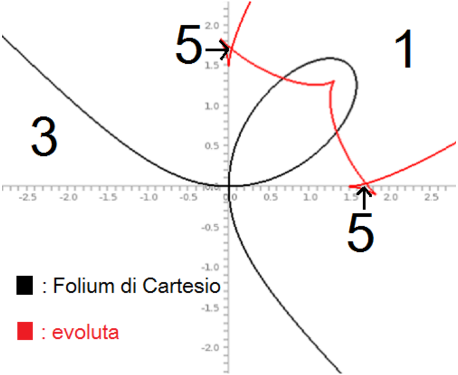
- L'EDdegree della Lemniscata di Bernoulli è **6**
- L'evoluta divide il piano in 3 regioni.



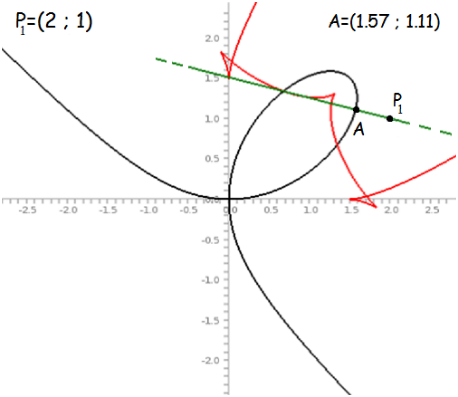
- L'EDdegree del Folium di Cartesio è **7**
- L'evoluta divide il piano in 4 regioni.



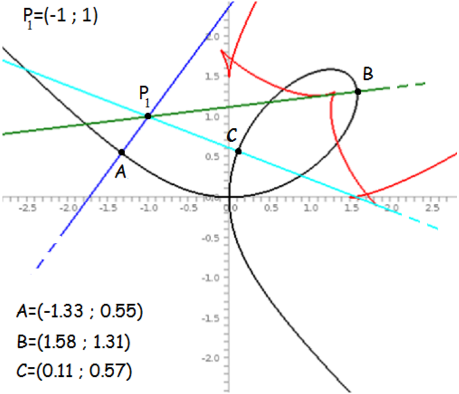
- L'EDdegree del Folium di Cartesio è **7**
- L'evoluta divide il piano in 4 regioni.



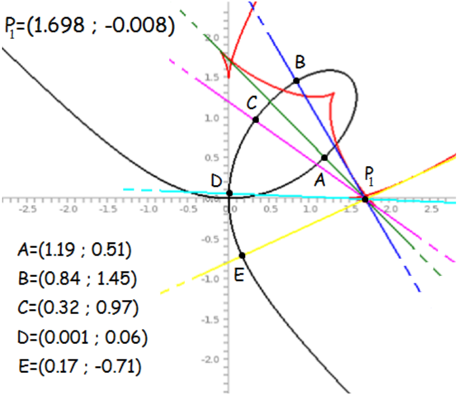
- L'EDdegree del Folium di Cartesio è **7**
- L'evoluta divide il piano in 4 regioni.



- L'EDdegree del Folium di Cartesio è **7**
- L'evoluta divide il piano in 4 regioni.



- L'EDdegree del Folium di Cartesio è **7**
- L'evoluta divide il piano in 4 regioni.



# GRAZIE PER L'ATTENZIONE!