UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÁ DI SCIENZE M.F.N.

Anno accademico 2007/2008

Tesina per la laurea triennale in Matematica
di Orazio Sapuppo

Costruzioni geometriche per la quadratura del cerchio e altri problemi classici.

relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

INTRODUZIONE

Questa tesi espone alcune costruzioni geometriche legate ai cosiddetti problemi classici dell'antichità :

- DUPLICAZIONE DEL CUBO
- TRISEZIONE DELL'ANGOLO
- QUADRATURA DEL CERCHIO

Viene prima illustrata l'impossibilità di una soluzione esatta con l'uso della riga e il compasso .

Mediante l'utilizzo di curve superiori (cissoide , concoide , quadratrice) vengono esposte soluzioni esatte relative ai problemi sopra elencati .

Il punto di partenza della tesi sono state delle note redatte durante il corso del Prof. G. MARLETTA tenuto nell'anno accademico 1941-1942 nell'Università di Catania . Negli anni 1942 - 1943 - 1944 - 1945 e 1946 , per obblighi derivanti dal servizio militare , non vi é stata alcuna possibilità di seguire il corso di studi .

Un sentito ringraziamento all' Università di Firenze , al Presidente del Corso di Laurea in Matematica Prof. RICCARDO RICCI , al relatore della tesi Prof. GIORGIO OTTAVIANI ed al Corpo Accademico Insegnante per avermi dato la possibilità del conseguimento del titolo .

Dedicato ai miei nipoti :
CARLOTTA , MATILDE , ANDREA , LEONARDO
perché possano completare i loro studi fino al raggiungimento di titoli a livello universitario .

DUPLICAZIONE DEL CUBO

1) - Impossibilità della soluzione con riga e compasso

Fu proprio EUCLIDE che per primo adoperò la riga ed il compasso per la soluzione dei problemi di 2° grado ; riga e compasso che possono anche adoperarsi per la soluzione di alcuni problemi di grado superiore al secondo, quando però tali problemi dipendono da equazioni riducibili ed anche da equazioni irriducibili a coefficienti razionali che possono risolversi mediante un numero finito di operazioni razionali ad estrazione di radici quadrate e perché ciò avvenga é necessario che il grado di tali equazioni sia una potenza di due .

Ci occuperemo in questi cenni di problemi che non possono essere risolti con il solo aiuto dei suddetti strumenti.

Il primo problema che tratteremo é quello della duplicazione del cubo (problema di DELO) . Esso consiste nel ricercare un segmento il cui cubo sia doppio del cubo di un segmento assegnato $\underline{l}$.

Lo esamineremo , prima sotto l'aspetto algebrico , ripromettendoci poi di trattarne la soluzione grafica.

2) - Sia $\underline{l}$ la misura di un segmento assegnato , si vuole determinare un altro segmento y il cui cubo sia uguale al doppio del segmento $\underline{l}$,cioé :

$$y^3 = 2\, l^3$$

Assumendo come unità di misura il segmento $\underline{l}$ l'equazione precedente diventa

$$x^3 - 2 = 0 \qquad (1)$$

dove abbiamo indicato con x il rapporto di $\underline{y}$ ad $\underline{l}$. Nel campo dei numeri razionali la (1) é irriducibile .

Infatti se in tale campo di numeri essa fosse riducibile , dovrebbe potersi porre sotto la forma :

$$(x - \alpha) (x^2 + \beta x + \gamma) = 0$$

Cioé come prodotto di due fattori a coefficienti razionali . Ed allora la radice razionale $x = \alpha$ dovrebbe essere una delle tre soluzioni della (prima) , cioé dovrebbe essere :

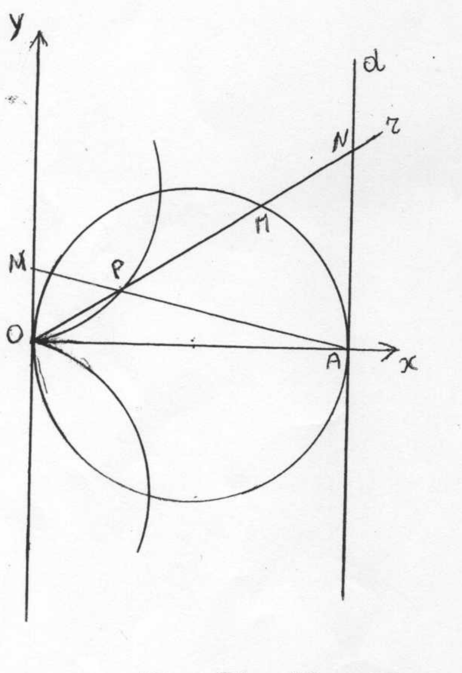
$$\alpha^3 = 2$$

Ciò é assurdo perche nessun numero razionale ha per cubo 2 . Possiamo quindi affermare, osservando che la (1) é irriducibile ed anche di 3° grado (cioé di grado non potenza di 2) , che il problema della duplicazione del cubo non é risolvibile facendo uso soltanto di riga e compasso .

3) - Metodo della CISSOIDE

Passiamo ora a risolvere il problema graficamente . Pertanto giova presentare la CISSOIDE di DIOCLE , di cui ci serviamo per la soluzione del problema.

Sia assegnato un cerchio e su di esso sia fissato un punto O .



Sia d la retta tangente al cerchio nel punto A , diametralmente opposto da O . Sia r una retta uscente da O e siano M , N i punti in cui essa incontra rispettivamente il cerchio e la tangente d . Fatto $\overline{OP} = \overline{MN}$, il punto P , al variare di r descrive la curva cercata . Determiniamo la sua equazione in coordinate polari ; pertanto assumiamo O come polo , $\overline{OA}$ come asse polare, ponendo $\overline{OA} = a$; $\overline{OP} = \rho$ ed $A\hat{O}N = \varphi$ si ha : $\overline{OA} = a = \overline{ON} \cos\varphi$ e $\overline{OM} = \overline{OA} \cos\varphi$

quindi : $\rho = \overline{OP} = \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = \dfrac{a}{\cos\varphi} - a \cos\varphi$ di cui

$$\rho = \frac{a - a\cos^2\varphi}{\cos\varphi} \equiv \frac{a\,(1 - \cos^2\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$\text{quindi} \quad \rho = \frac{a\,\text{sen}^2\varphi}{\cos\varphi} \qquad (2)$$

Da questa assumendo come origine di un sistema di assi Carte=

siani ortogonali il punto O , come asse delle ascisse la retta x di OA , e come asse delle ordinate la perpendicolare ad x nel punto O , e per le formule di trasformazione :

$$x = \rho \cos\varphi \qquad e \qquad y = \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

si passa a : $x (x^2 + y^2) - ay^2 = 0$ (3)

che é l'equazione della CISSOIDE in coordinate cartesiane ortogonali. La (3) mostra che la CISSOIDE é una curva di 3° ordine , simmetrica rispetto all'asse delle x ,passante per l'origine , ove ha un punto doppio (cuspide) e quindi di genere O , cioé é una cubica razionale . Pertanto secando tale curva con una retta uscente da O , si possono ricavare le sue equazioni parametriche . Infatti nella (3) facendo y = tx si ha :

$$x^3 + t^2x^3 - a\,t^2x^2 = 0,$$

$$x^3 (t^2 + 1) - at^2x^2 = 0$$

$$x^2 \left[x (t^2 + 1) - at^2 \right] = 0$$

$x^2 = 0$ ci dà le due intersezioni della retta y = tx con l'origine , mentre l'ulteriore intersezione é data da :

$$x (1 + t^2) = a\,t^2 \qquad \text{da cui}$$

$$x = \frac{a\,t^2}{1 + t^2} \qquad \text{e quindi} \qquad y = \frac{a\,t^3}{1 + t^2} \qquad (4)$$

che sono le equazioni parametriche cercate.

Da queste ultime equazioni si deduce una proprietà della cissoide per la sua applicazione al classico problema della duplicazione del cubo.

Sia r la retta di equazione y = tx e P un punto in cui essa incontra la cissoide . Proiettiamo tale punto P da A su y e sia N_1 il punto di incontro di $\overline{AP}$ con y . Ponendo $\overline{ON_1} = t_1$ ed assumendo $\overline{OA}$ come unità di misura , cioé facendo a = 1 , sarà $\overline{AN} = t$.

Facilmente si vedrà che $t_1 = t^3$
infatti essendo A = (1,0) e N_1 = (0,t) la retta AN_1 avrà l'equazione : $t_1 x + y - t_1 = 0$

$$t_1 = \frac{y}{1 - x}$$

sostituendo ad x e y le espressioni (4) coordinate di P , dove però si é supposto $a = 1$ si ha :

$$t_1 = \frac{\dfrac{t^3}{1+t^2}}{1 - \dfrac{t^2}{1+t^2}} = \frac{\dfrac{t^3}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}} = t^3$$

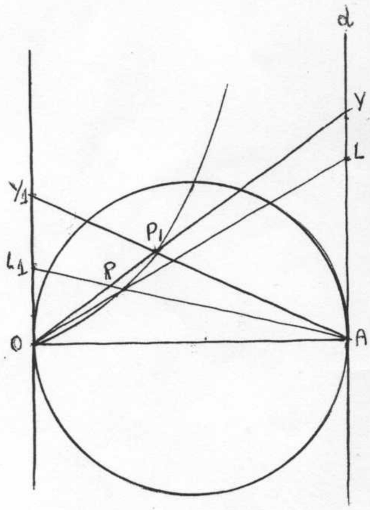
e quindi $t_1 = t^3$

c.v.d.

In base a tale proprietà la CISSOIDE ci servirà a costruire il segmento y che risolve il problema

$$y^3 = 2\, l^3$$

A tale fine riprendiamo la CISSOIDE ed assumiamo il diametro $\overline{OA}$ del cerchio generatore come unità di lunghezza , cioé sia $a = 1$. Sia $\overline{AL} = l$ il segmento dato , si riporti sulla tangente



d ; congiunto L con O , sia P il punto in cui la $\overline{OL}$ intersechi la cissoide e si proietti P da A nell'asse y in L_1 . Raddoppiando $\overline{OL_1}$ in $\overline{OY_1}$, si congiunga Y_1 con A e sia P_1 , il punto in cui la Y_1A intersechi la cissoide . Poi si proietti P_1 da O in d e sia y tale proiezione . Il segmento $\overline{AY}$ é il segmento cercato . Infatti siano l ed y le misure dei segmenti $\overline{AL}$ e $\overline{AY}$ rispetto all'unità $\overline{OA}$, per la proprietà sopra dimostrata sarà

$$OL_1 = AL^3 = l^3$$

$$OY_1 = AY^3 = Y^3$$

e poiché $OY_1 = 2\, OL_1$,sarà quindi

$$y^3 = 2\, l^3$$

c.v.d.

METODO DI MENECMO

Dimostreremo che se si possono costruire due segmenti x , y tali da soddisfare alla seguente progressione geometrica

$$a : x : y : b \qquad (1)$$

dove a e b sono due segmenti assegnati , si potrà duplicare il cubo.

Infatti la (1) si può scrivere :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b}{y}$$

da cui $\frac{x}{a} = \frac{y}{x}$; $\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$ infine

$x^2 = ay$ e $x = \frac{ab}{y}$

e moltiplicando membro a membro si ha :

$$x^3 = a^2 b \qquad (2)$$

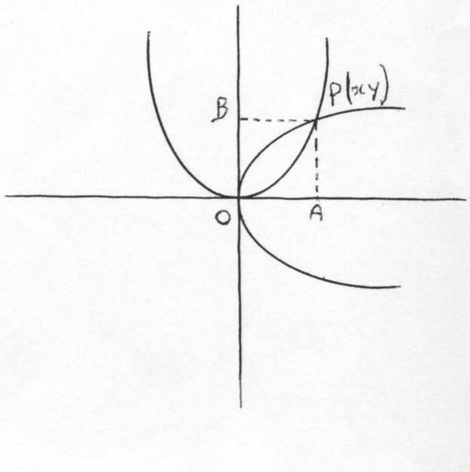
la (2) ci dice che il segmento x é lo spigolo di un cubo equivalente ad un romboide rettangolo , di cui due dimensioni sono uguali al segmento a e la terza al segmento b ; se quindi in particolare é b = 2a la (2) diventa :

$$x^3 = 2\,a^3$$

cioé x rappresenta lo spigolo del cubo , doppio di quello avente per spigolo a .

Andiamo a vedere come si possono costruire i due segmenti x ed y , tali da soddisfare a una certa progressione aventi per estremi a e b .

Si costruiscono due parabole , aventi lo stesso vertice , assi perpendicolari e parametri rispettivamente a e b .



Le loro equazioni saranno :
$y^2 = bx \qquad x^2 = ay$

Se P é il punto reale comune alle due parabole , oltre l'origine , le coordinate di esso sono i due segmenti x ed y richiesti.

Infatti siccome P appartiene alle

due parabole , le sue coordinate soddisfano contemporaneamente le equazioni delle due parabole, si verificano le due seguenti relazioni :

$$\overline{OA}^2 = a \cdot \overline{OB} \qquad \overline{OB}^2 = b \cdot \overline{OA} \quad \text{da cui}$$

$$a : \overline{OA} = \overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB} : b \quad \text{cioé}$$

$$a : x = x : y = y : b \quad \text{quindi}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b}{y} \qquad (1)$$

c.v.d.

(1) nota : x , y corrispondono a 2 suoni intermedi tra i suoni con frequenze a , b .

TRISEZIONE DELL' ANGOLO

IMPOSSIBILITA' DELLA SOLUZIONE CON RIGA E COMPASSO

Trisecare un angolo dato φ , significa costruire la sua terza parte, cioé $\frac{\varphi}{3}$, faremo vedere che in generale il problema non é risolvibile con il solo aiuto della riga e del compasso , mentre se l'angolo é $\frac{2\pi}{n}$ con n intero non divisibile per 3 , esso si può dividere facendo uso soltanto della riga e del compasso

Infatti si consideri l'equazione indeterminata di 1° grado

$$nx - 3y = 1 \qquad (1)$$

essa poiché n e 3 sono primi tra di loro , ammette infinite soluzioni intere positive; se x_1 e y_1 sono una di queste , si ha :

$$nx_1 - 3y_1 = 1 \qquad (2)$$

Moltiplicando il 1° e 2° membro della (2) per 2π e dividendo per $3n$ si ha :

$$\frac{2\pi}{3} x_1 - \frac{2\pi}{n} y_1 = \frac{1}{3} \frac{2\pi}{n}$$

Questa relazione ci dimostra che per costruire la terza parte dell'angolo $\frac{2\pi}{n}$, basta sottrarre dall'angolo di 120° preso x_1 volte , y_1 volte l'angolo dato .

Passiamo ora al caso generale , cioé al caso in cui l'angolo da trisecare non é del tipo $\frac{2\pi}{n}$ con n non divisibile per 3 . Osserviamo che con riga e compasso se si può costruire $\frac{\varphi}{3}$ sarà anche possibile costruire tang $\frac{\varphi}{3}$ e viceversa .

Il problema si riduce al seguente :
dato un numero $a = \text{tang}\,\varphi$ trovare

$$x = \text{tang}\,\frac{\varphi}{3}$$

Dalla trigonometria risulta :

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{3\,\text{tang}\,\frac{\varphi}{3} - \text{tang}^3\,\frac{\varphi}{3}}{1 - 3\,\text{tang}^2\,\frac{\varphi}{3}}$$

sostituendo $\text{tang}\,\varphi = a$ e $\text{tang}\,\frac{\varphi}{3} = x$ si ha :

$$a = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

che ridotta in forma intera ed eguagliata a zero diventa :

$$x^3 - 3 a x^2 - 3 x + a = 0 \qquad (1)$$

Quindi trisecare un angolo equivale a risolvere una equazione cubica del tipo (1) , la quale , in generale , é irriducibile (cioé il suo primo membro non si può scomporre in fattori i cui coefficienti siano funzioni razionali dei coefficienti dell'equazione data , nel nostro caso funzione di <u>a</u>). Infatti se fosse riducibile per qualunque valore di <u>a</u> , lo sarebbe anche per $a = 3K$; con K intero non divisibile per 3 , ma allora , essendo tutti i coefficienti , tranne il 1° divisibile per 3 , e l'ultimo non divisibile per 9 ; ciò sarebbe in contraddizione col criterio di EISENSTEIN (*) .

Osserviamo che il grado della (1) non é una potenza del n. 2, essa quindi non può risolversi per radicali quadratici . E' dunque impossibile trisecare un angolo generico soltanto con la riga e il compasso .

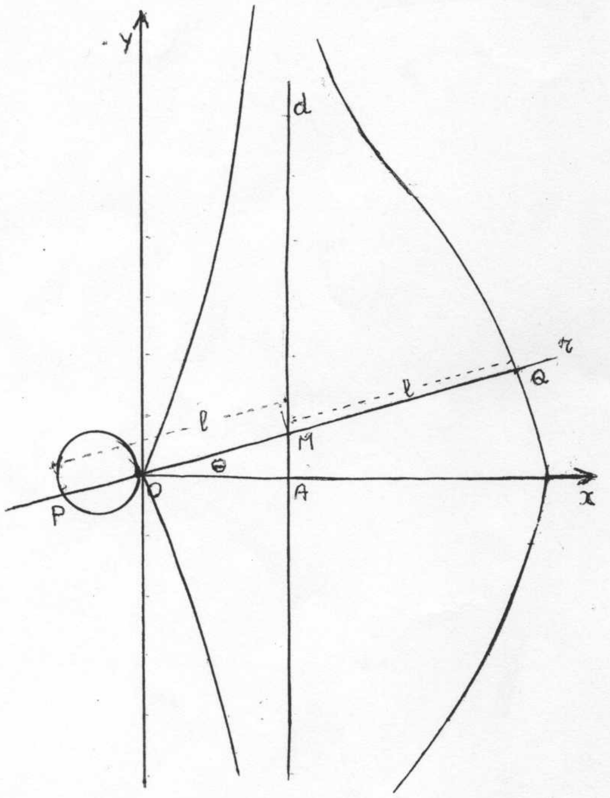
(*) - CRITERIO DI EISENSTEIN

Se si ha : $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n = 0$ e i coefficienti a_0 , a_1, a_2 , a_3 ; a_4 ,............., a_n sono numeri interi , tutti divisibili per il numero primo p , tranne a_0 , e l'ultimo a_n non é divisibile per p^2 , allora l'equazione $f(x) = 0$ é irriducibile . -

TRISEZIONE DELL'ANGOLO MEDIANTE LA CONCOIDE DI NICOMEDE

Dati un punto O (polo) e una retta <u>d</u>(base) e condotta per O una retta arbitraria <u>r</u> che incontri d in M , si portino dall'una e dall'altra parte di r rispetto a M , due segmenti $\overline{MP}$ e $\overline{MQ}$ ugua li ad un segmento dato (intervallo) . Il luogo dei punti P e Q al variare di r é la Concoide di Nicomede .

Più in generale si dà il nome di concoide alle curve generate nel modo predetto in relazione ad una base curvilinea qualunque ; ed é appunto con riferimento alla natura della base che la Concoide di Nicomede dicesi anche CONCOIDE DI RETTA .



Assunta la perpendicolare condotta da O alla base come asse x di un sistema cartesiano ortogonale di origine O , se con A si indichi il punto d'incontro di tale asse x con la base d , posto : $\overline{OA} = a \quad (a>0)$, $\overline{OM} = \rho$ e $A\hat{O}M = \theta$, e se $\overline{PM} = \overline{QM} = l$ sarà l'intervallo , l'equazione polare della curva , osservando che $\overline{OM} = \frac{a}{\cos\theta}$ sarà $\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm l$.

Ricordando che dalle formule di trasformazione si ha :

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e sostituendo nella (1)

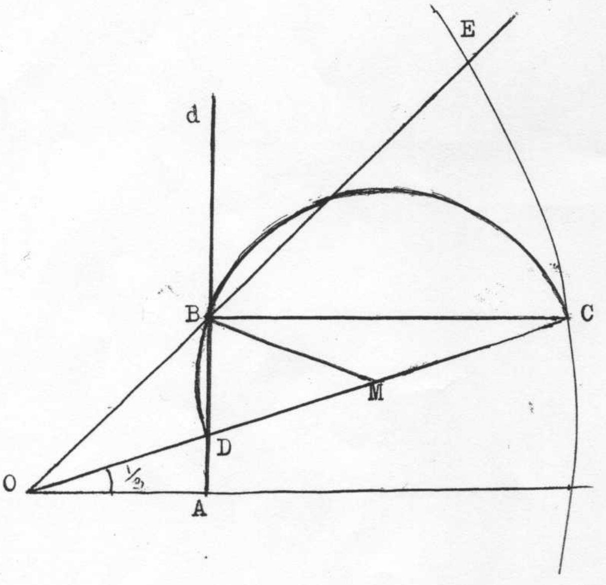
$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{x} \pm l$ da cui $x\sqrt{x^2+y^2} - a\sqrt{x^2+y^2} = \pm lx$

$(x - a) \sqrt{x^2 + y^2} = \pm lx$

quadrando ed uguagliando a zero $(x^2 + y^2) (x - a)^2 = l^2 x^2$ che é l'equazione cartesiana della CONCOIDE . Essa é una quartica con un punto doppio nell'origine .

Il problema della trisezione dell'angolo si risolve mediante la seguente costruzione .

Da un punto B scelto sopra uno dei lati dell'angolo (supposto acuto , perché la trisezione di un angolo ottuso può sempre ridursi alla trisezione di un angolo acuto , decomponendolo nella somma di un angolo retto , trisecabile elementarmente e di un angolo acuto) si conduce la perpendicolare $\overline{BA}$ all'altro lato , poi assunta questa perpendicolare d , come base , il vertice O dell'angolo come polo e come intervallo il doppio del segmento $\overline{OB}$, si immagini tracciato il ramo della concoide che sta rispetto a d , da banda opposta ad O .



Sia poi C il punto dove la parallela per B alla $\overline{OA}$ incontra la curva , congiungendo C con O si avrà :

$\widehat{COA} = 1/3\ \widehat{BOA}$

Infatti per la proprietà della Concoide di Nicomede si ha essendo D l'intersezione di $\overline{OC}$ con d e M il punto medio di $\overline{DC}$:

$$\overline{DC} = \overline{BE} = 2\overline{OB} \quad \text{e quindi}$$

$$\overline{DM} = \overline{MC} = \overline{OB}$$

Inoltre essendo l'angolo $D\widehat{B}C$ retto , esso potrà considerarsi inserito nel cerchio di centro M e raggio $\overline{MB}$.

Peftanto si ha :

$$\overline{BM} = \overline{DM} = \overline{MC} = \overline{OB}$$

Quindi i triangoli OBM e BMC sono isosceli .

Pertanto si ha :

$$B\hat{O}M = B\hat{M}O = 2\, B\hat{C}M$$

ma poiché $B\hat{C}M = C\hat{O}A$ allora sarà :

$$B\hat{O}M = 2\, C\hat{O}A \quad \text{ed infine}$$

$$C\hat{O}A = 1/3\, B\hat{O}A$$

c.v.d.

QUADRATURA DEL CERCHIO

Equivalenza dei problemi della quadratura del cerchio e della rettificazione della circonferenza

Se con riga e compasso si sapesse quadrare il cerchio , con gli stessi si saprebbe rettificare la circonferenza ; infatti basterebbe trasformare il quadrato , equiesteso del cerchio , in un triangolo avente per altezza il raggio , base di questo triangolo sarebbe la circonferenza rettificata . Viceversa se si sapesse rettificare la circonferenza con riga e compasso , basterebbe convertire il triangolo avente per base la detta circonferenza in un quadrato che risulterà equiesteso del cerchio . Quindi i due problemi sono equivalenti .

Per la rettificazione della circonferenza assumiamo come unità di misura il diametro , cioé si faccia $2r = 1$, quindi per la soluzione di tali problemi disponiamo del segmento 1 e dobbiamo trovare il segmento uguale a π .

Se si costruiscono curve algebriche , partendo sempre dal segmento 1 , si avranno equazioni a coefficienti interi oppure provenienti da equazioni a coefficienti interi , cioé a coefficienti algebrici .

Poiché un numero che é radice di equazioni a coefficienti algebrici (anche non interi purché algebrici) é sempre algebrico , ne viene che da curve algebriche , partendo da 1 , non si può mai pervenire ad un numero che non sia algebrico ; ma siccome π (LINDEMANN) é trascendente , perciò non algebrico , possiamo affermare che nessuna curva algebrica può farci pervenire ad un segmento uguale a π . E poiché il cerchio e la retta sono curve algebriche possiamo affermare che non é possibile rettificare la circonferenza con riga e compasso .

METODO DI COSTRUZIONE DI SPECHT

Ricorrendo all'uso della riga e del compasso si può rettificare e quadrare il cerchio con buona approssimazione , cioé con una lieve differenza trascurabile per gli usi comuni .

Ecco un metodo di costruzione ideato da SPECHT , mediante il quale si può rettificare il cerchio con una approssimazione di meno un milionesimo di diametro .

RETTIFICAZIONE DEL CERCHIO APPROSSIMATA

Dato il cerchio di centro O e di raggio r si tiri la tangente in un punto qualunque M , e si faccia $\overline{MN} = 2r + \frac{r}{5} = \frac{11\,r}{5}$. Di seguito si porti il segmento $\overline{NP} = \frac{2\,r}{5}$. Quindi $\overline{MP} = \frac{11r}{5} + \frac{2r}{5}$ $MP = \frac{13\,r}{5}$.

Si congiunga O con N e con P . Sul diametro che passa in M si stacchi $\overline{MQ} = \overline{ON}$ e da Q si tiri $\overline{QR}$ parallela ad $\overline{OP}$.

Il segmento $\overline{MR}$ differisce dal cerchio rettificato per meno di un milionesimo del diametro .

Infatti dai triangoli simili $Q\hat{M}R$ e $O\hat{M}P$ si ha :

$$\overline{MR} : \overline{MQ} = \overline{MP} : \overline{MO} \qquad (1)$$

Essendo $\overline{MQ} = \overline{ON}$ per costruzione , si avrà ;

$$\overline{ON} = \sqrt{\overline{MO}^2 + \overline{MN}^2} = \sqrt{r^2 + (\frac{11}{5}\,r)^2} = \sqrt{r^2 + \frac{121}{25}\,r^2} = \frac{r}{5}\sqrt{146}$$

Sostituendo i valori alla (1) si ha

$$\overline{MO} \,.\, \overline{MR} = \overline{MQ} \,.\, \overline{MP} \quad \text{da cui}$$

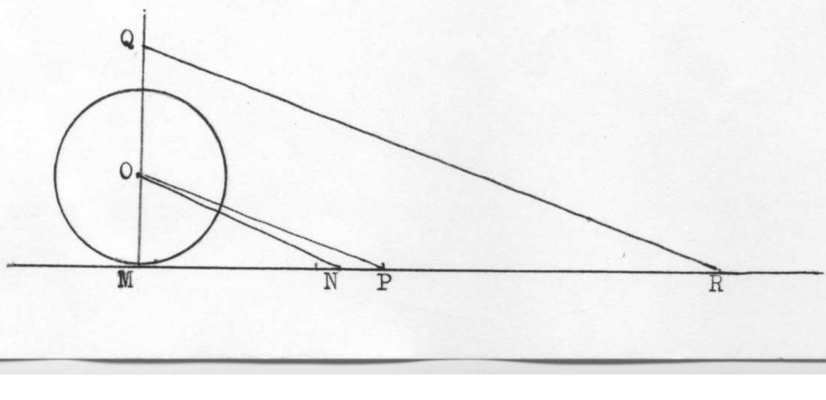
$$r\,\overline{MR} = \frac{r}{5}\sqrt{146} \,.\, \frac{13\,r}{5} = \frac{13\,r^2}{25}\sqrt{146}$$

$$\overline{MR} = \frac{13}{25}\,r\sqrt{146} = 2r\,\frac{13}{50}\sqrt{146}$$

$$L_1 = \overline{MR} = 2r\,(\,3,1415919\,\ldots\ldots\,)$$

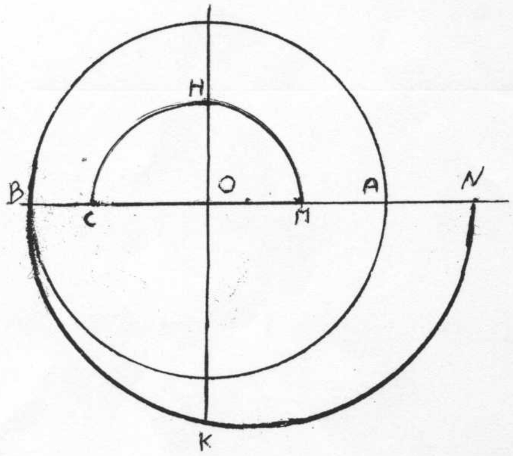
$$L = 2\,r\pi = 2r\,(\,3,1415926\,\ldots.)$$

$$\text{con } L > L_1 \text{ e con differenza} < \frac{2\,r}{1.000.000}$$



QUADRATURA DEL CERCHIO APPROSSIMATA

Una costruzione di un quadrato la cui area differisce pochissimo da quella del cerchio é la seguente :
si divide il raggio $\overline{OB}$ in 5 parti e si faccia $\overline{OC} = \frac{3}{5}\,\overline{r}$. se M é il punto medio di $\overline{OA}$ si faccia $\overline{AN} = \overline{AM}$ e indi si descrivono due semicerchi aventi $\overline{CM}$ e $\overline{BN}$ per diametri, da parti opposte rispetto alla retta $\overline{AB}$. Il segmento $\overline{HK}$ perpendicolare su O ad $\overline{AB}$ ed avente gli estremi su questi due semicerchi ha , sul lato del quadrato equiesteso , un eccesso minore di $\frac{2}{100.000}$ del raggio .



Infatti essendo $\overline{OH}$ medio proporzionale fra $\overline{OC}$ e $\overline{OM}$, ed $\overline{OK}$ medio proporzionale tra $\overline{OB}$ e $\overline{ON} = \frac{3r}{2}$ si ha $\overline{OH} = \sqrt{\frac{3}{5}r \cdot \frac{1}{2}r} = r\sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{r}{10}\sqrt{30}$

e quindi $\overline{OK} = \sqrt{r(\frac{3}{2}r)} = r\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{r\sqrt{6}}{2} = \frac{r\sqrt{6 . 25}}{2 . 5} =$

$r\,\frac{\sqrt{150}}{10}$.

Poiché $\overline{HK} = \overline{OH} + \overline{OK}$ si ha :

$\overline{HK} = r\,\frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10} = r\ (1,7724674.......)$

Ma la superficie del cerchio é $r^2\pi$, quindi il lato del quadrato equiesteso é $\sqrt{r^2\pi} = r\sqrt{\pi} = r\ (1,7724538 ......\ )$

Pertanto $\overline{HK}$ supera il suddetto lato di meno di $\frac{2}{100.000}$ del raggio .

QUADRATURA DI DINOSTRATO

I matematici Greci , non riuscendo a rettificare la circonferenza e a quadrare il cerchio con riga e compasso , fecero ricorso a curve trascendenti , fra queste é la quadratrice di Dinostrato.

Siano $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ due raggi perpendicolari di un cerchio ; due punti mobili descrivono L , M con moto uniforme rispettivamente la circonferenza ed il diametro $\overline{OB}$ in modo che essi , partendo contemporaneamente da A e da O , giungano insieme in B ; il luogo del punto P , in cui la parallela ad $\overline{OA}$ condotta da M sega il raggio $\overline{OL}$, é la quadratrice . Detti ρ e φ le coordinate polari di P rispetto al polo O ed all'asse polare $\overline{OA}$; posto $y=\rho \operatorname{sen}\varphi$ si ha $\rho = \frac{2}{\pi} \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$ che é l'equazione polare della quadratrice . Ricordando le formule di trasformazione :

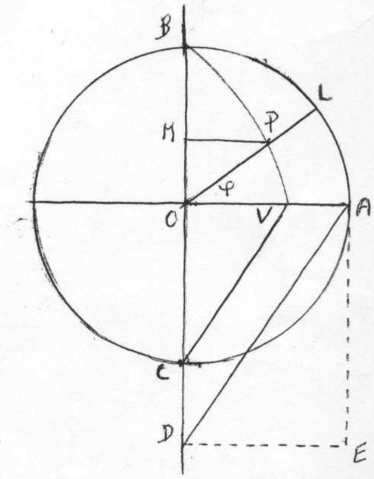
$$y = \rho \operatorname{sen}\varphi \qquad \text{e} \qquad x = \rho \cos\varphi$$

e quindi $\frac{y}{x} = \frac{\rho \operatorname{sen}\varphi}{\rho \cos\varphi} = \operatorname{tang}\varphi$ ed essendo $\varphi = \frac{\pi y}{2}$

si ha l'equazione cartesiana :

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \frac{\pi y}{2} \qquad (1)$$

L'intersezione della curva con l'asse x non é determinata dalle definizioni ; ed infatti dalla (1) per y = 0 darebbe un valore indeterminato per x, ma ove si osservi che :



$$\lim_{\varphi \to 0} \rho = \lim_{\varphi \to 0} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{2}{\pi}$$

perché $\lim_{\varphi \to 0} \frac{\rho}{\operatorname{sen}\varphi} = 1$

si vede che é naturale identificarla con il punto V di ascissa $\frac{2}{\pi}$. Chiamando quindi con ξ tale ascissa cioé facendo $\xi = \frac{2}{\pi}$ se ne deduce che :

$\frac{\pi \xi}{2} = 1$ cioé ha luogo la proporzione :

$$\xi : 1 = 1 : \frac{\pi}{2}$$

Vuol dire che $\frac{\pi}{2}$ é la terza proporzionale dopo ξ e il raggio della circonferenza assunto come unità di misura . Pertanto si può prolungare la curva simmetricamente al di sotto dell'asse x , considerando il passaggio dei due punti mobili attraverso alle posizioni O , A anziché come inizio , come una fase intermedia del movimento .

Se si congiunge V con C e da A si tira la parallela a $\overline{VC}$ si avrà il segmento $\overline{CD} = \frac{\pi}{2}$ uguale al quadrante rettificato .

Infatti dai due triangoli simili VOC e AOD si ha :

$$\overline{OV} : \overline{OC} = \overline{OA} : \overline{OD} \qquad (1)$$

ed essendo :

$$\overline{OV} = \frac{2}{\pi} \qquad e \quad \overline{OC} = \overline{OA} = 1$$

sostituendo i valori nella (1) , avremo

$$\frac{2}{\pi} : 1 = 1 : \overline{OD} \quad \text{quindi} \quad \overline{OD} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \quad \text{da cui}$$

$$\overline{OD} = \frac{1}{\frac{2}{\pi}} \qquad \text{ed infine} \qquad \overline{OD} = \frac{\pi}{2}$$

L'area del rettangolo OAED di lati $\overline{OA}$ e $\overline{OD}$, anch'essa misurata da $\frac{\pi}{2}$, coincide con quella del semicerchio CAB .

c.v.d.

B I B L I O G R A F I A

G. MARLETTA
Note del corso di "Matematiche Complementari", Università di Catania, anno acc. 1941/42.

L. CRESCI
LE CURVE CELEBRI, MUZZIO, Padova 1988

F. GHERARDELLI
L. ROSATI
G. TOMASSINI
Lezioni di Geometria.
CEDAM, Padova, 1978

I N D I C E

QUADRATRICE