UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÁ DI SCIENZE M.F.N
Anno accademico 2006/2007

Tesina per la laurea triennale in Matematica

di Nadia Ricchetti

Frazioni continue e sezione aurea

relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

Ponendo $\alpha = a'_1$, definiamo $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, la parte intera di α. Perciò si ha che

$$\alpha = a_1 + r_1 \ .$$

Se $r_1 \neq 0$, allora il resto r_1 è compreso fra 0 e 1 (esclusi), cioè sarà del tipo $r_1 = \frac{1}{a'_2}$, con $a'_2 > 1$; quindi, definendo $a_2 = \lfloor a'_2 \rfloor$, possiamo scrivere

$$a'_2 = a_2 + r_2 \ .$$

In generale se $r_{i-1} \neq 0$, allora $r_i = \frac{1}{a'_i}$, con $a'_i > 1$; ponendo dunque $a_i = \lfloor a'_i \rfloor$, per $r_i = a'_i - a_i \neq 0$ prenderemo $a'_{i+1} = \frac{1}{a'_i - a_i}$, in modo da scrivere a'_i nella forma

$$a'_i = a_i + \frac{1}{a'_{i+1}} \ .$$

Quindi lo sviluppo di α in frazione continua sarà:

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}\,, \quad a_i \geq 1, \;\; \forall i > 1$$

che denotiamo anche

$$\alpha = [a_1, a_2, a_3, \ldots] = \left[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a'_{i+1}\right],$$

dove gli a_i sono detti **quozienti parziali** e $a'_{i+1} = [a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \ldots]$ è detto **quoziente completo** dello sviluppo di α.

Definizione

Sia $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a'_{i+1}]$ *lo sviluppo di* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Si definisce* ***ridotta*** *o* ***convergente*** *i-sima ad* α *la frazione*

$$c_i = \frac{p_i}{q_i} = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i] \ , \qquad \forall i \geq 1.$$

Ovvero si avranno:

$$c_1 = a_1, \qquad c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, \qquad c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \qquad \ldots$$

Teorema

I numeratori p_i e i denominatori q_i delle ridotte c_i della frazione continua $\left[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a'_{i+1}\right]$, soddisfano le uguaglianze

$$p_i = a_i\, p_{i-1} + p_{i-2}\ , \qquad q_i = a_i\, q_{i-1} + q_{i-2} \qquad (\forall\ i \geq 1), \tag{1}$$

dove abbiamo posto come valori inziali

$$p_{-1} = 0\ ,\quad p_0 = 1\ ,\quad q_{-1} = 1\ ,\quad q_0 = 0\ .$$

Se p_i e q_i soddisfano la (1), allora $\forall i \geq 0$ vale

$$p_i\, q_{i-1} - p_{i-1}\, q_i = (-1)^i.$$

Inoltre numeratori e denominatori di ciascuna convergente sono ridotti ai minimi termini.

Osservazione

Possiamo scrivere α anche con la seguente notazione, che segue per induzione usando il Teorema precedente:

$$\alpha = \frac{a'_{i+1}\, p_i + p_{i-1}}{a'_{i+1}\, q_i + q_{i-1}}$$

Teorema

Sia α irrazionale e siano $\frac{p_i}{q_i}$ e $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ due sue ridotte consecutive. Allora $\forall\, i \geq 2$ vale la relazione

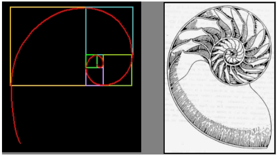
$$\frac{1}{2\, {q_{i+1}}^2} < \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{{q_i}^2}$$

Utilizzando lo sviluppo in frazione continua, calcoliamo la radice positiva dell'equazione $x^2 = x + 1$:

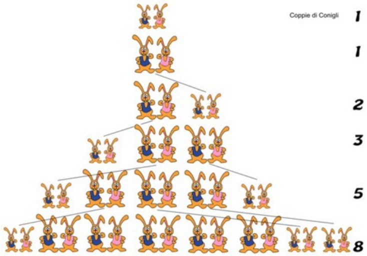
$$x = 1 + \frac{1}{x}, \qquad x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}, \qquad \dots$$

Troviamo, così, lo sviluppo in frazione continua del **numero aureo**

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1, 1, 1, \dots] = [\bar{1}]$$



Numeri di Fibonacci



$$F_1 = 1 = F_2$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}\,, \qquad \forall\, i > 2\,.$$

Le ridotte di ϕ sono: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \ldots$.
Ogni convergente è il rapporto di due numeri di Fibonacci consecutivi!

'Il numero aureo è l'irrazionale che si approssima peggio'?!!

Definizione

Due numeri α e β si dicono ***equivalenti*** *($\alpha \equiv \beta$) se*
$\exists$ a,b,c,d $\in \mathbb{Z}$ tali che

$$\alpha = \frac{a\,\beta + b}{c\,\beta + d}\ , \quad con \quad a\,d - b\,c = \pm 1.$$

Teorema

Due numeri α e β sono equivalenti se e solo se
$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_n, g_1, g_2, \ldots]$ *e* $\beta = [b_1, b_2, \ldots, b_m, g_1, g_2, \ldots]$,
cioè se i quozienti di α dopo l'n-simo coincidono con quelli di β dopo l'm-simo.

Teorema di Hurwitz (1891)

Ogni irrazionale α ha una infinità di approssimazioni razionali $\frac{p}{q}$ che soddisfano la disuguaglianza

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}\,.$$

Il numero $\sqrt{5}$ è il migliore possibile: l'affermazione sarebbe falsa se a $\sqrt{5}$ si sostituisse un qualsiasi numero maggiore.

Teorema

Se α è diverso da $\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (o un suo equivalente), allora ammette infinite approssimazioni razionali $\frac{p}{q}$ che soddisfano la disuguaglianza

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2\sqrt{2}\, q^2}$$

- J.F.Koksma, *Diophantische Approximationen*, in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin 1936, pp.29 e seguenti.
- C.D. Olds, *Frazioni continue*, Zanichelli, Bologna 1968.
- G.H. Hardy, E.M. Wright, *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, Oxford 1979.
- M. Livio, *La sezione aurea*, Rizzoli, Milano 2003.
- M. Abate, *Il Girasole di Fibonacci*, convegno *Matematica e Cultura*, Venezia 2006, in Springer, 2006.
- N. Ricchetti, *La Sezione Aurea*, in *Il Paradosso*, Firenze 2006, pp. 4-7.