La molteplicità di intersezione delle curve algebriche e il Teorema di Bezout

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani
Candidato: Alessia Innocenti

Università degli Studi di Firenze

4 Marzo 2015

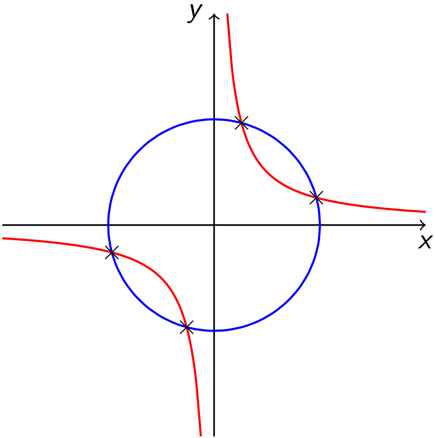
Problema

Date due curve algebriche C e D nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

- Quanti sono i punti di intersezione delle due curve.
- Come si definisce e quale ruolo ha la molteplicità di un punto di intersezione.

Perché usare il piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$?

Fissata la quadrica definita da $xy = 1$, vediamo l'intersezione su $\mathbb{C}$ con le seguenti quadriche con cui ci aspettiamo 4 punti di intersezione.

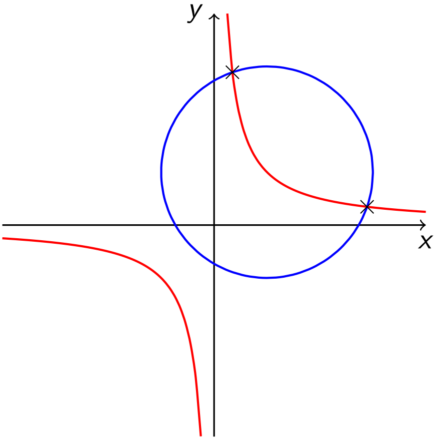


1. $x^2 + y^2 = 4$

   Le intersezioni sono:
   - $(0.518, 1.932)$
   - $(-0.518, -1.932)$
   - $(1.932, 0.518)$
   - $(-1.932, -0.518)$

Perché usare il piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$?

Fissata la quadrica definita da $xy = 1$, vediamo l'intersezione su $\mathbb{C}$ con le seguenti quadriche con cui ci aspettiamo 4 punti di intersezione.



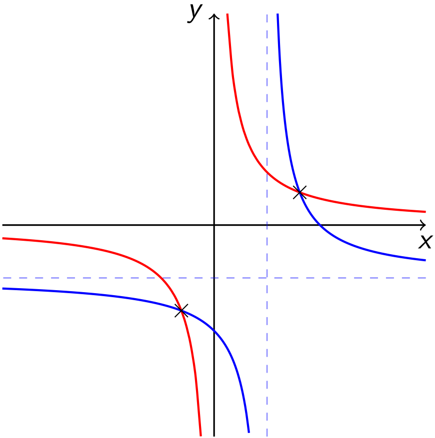
2. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

   Le intersezioni sono:

   - $(0.35, 2.89)$
   - $(2.89, 0.35)$
   - $(-0.62 + 0.79i, -0.62 - 0.79i)$
   - $(-0.62 - 0.79i, -0.62 + 0.79i)$

Perché usare il piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$?

Fissata la quadrica definita da $xy = 1$, vediamo l'intersezione su $\mathbb{C}$ con le seguenti quadriche con cui ci aspettiamo 4 punti di intersezione.



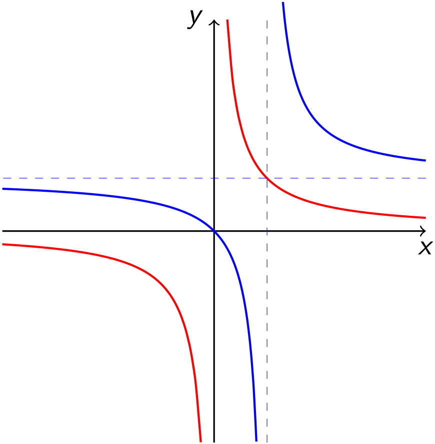
3. $(x-1)(y+1) = 1$

   Le intersezioni sono:
   - $(-0.618, -1.618)$
   - $(1.618, 0.618)$

   Le rimanenti due che ci attendevamo di trovare sono punti all'∞, per cui è necessario cambiare punto di vista e considerare $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Perché usare il piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$?

Fissata la quadrica definita da $xy = 1$, vediamo l'intersezione su $\mathbb{C}$ con le seguenti quadriche con cui ci aspettiamo 4 punti di intersezione.



4. $(x-1)(y-1) = 1$

   Le intersezioni sono:
   - $(0.5 + 0.87i, 0.5 - 0.87i)$
   - $(0.5 - 0.87i, 0.5 + 0.87i)$

   Le rimanenti due che ci attendevamo di trovare sono punti all'∞, per cui è necessario cambiare punto di vista e considerare $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Varietà proiettive

Siano (x, y, z) coordinate omogenee di un punto p in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Definizione

Siano $f_1, \dots, f_t \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinomi omogenei. L'insieme

$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_t) = \{(a, b, c) \mid f_i(a, b, c) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq t\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

si chiama varietà proiettiva definita da $f_1, \dots, f_t$. In particolare, se f è un polinomio omogeneo, $\mathbf{V}(f)$ si dice curva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Risultante

Definizione

Siano $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ due polinomi in $\mathbb{C}[x]$. Il risultante è definito come il determinante della seguente matrice:

$$Res(f,g,x) = \det \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_m & & a_0 & b_n & & b_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_m & & & b_n \end{pmatrix}$$

Lemma

Siano $f, g \in \mathbb{C}[x,y,z]$ polinomi omogenei di grado rispettivamente m, n. Se $f(0,0,1) \neq 0$ e $g(0,0,1) \neq 0$, allora il risultante $Res(f,g,z)$ è un polinomio omogeneo in x e y di grado mn.

Risultante

Definizione

Siano $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ due polinomi in $\mathbb{C}[x]$. Il risultante è definito come il determinante della seguente matrice:

$$Res(f,g,x) = \det \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_m & & a_0 & b_n & & b_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_m & & & b_n \end{pmatrix}$$

Lemma

Siano $f, g \in \mathbb{C}[x,y,z]$ polinomi omogenei di grado rispettivamente m, n. Se $f(0,0,1) \neq 0$ e $g(0,0,1) \neq 0$, allora il risultante $Res(f,g,z)$ è un polinomio omogeneo in x e y di grado mn.

Teorema di Bezout

Lemma (Forma omogenea del Teorema Fondamentale dell'Algebra)

Sia $h \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio omogeneo non nullo. Allora si può scrivere nella forma:

$$h = c(s_1x - r_1y)^{m_1} \cdots (s_kx - r_ky)^{m_k}$$

dove $c \neq 0$ in $\mathbb{C}$ e $(r_1, s_1), \ldots, (r_k, s_k)$ sono punti distinti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Oss Perché i punti di intersezione di due curve C e D siano in numero finito, le equazioni f e g che le definiscono non devono avere fattori in comune, altrimenti si avrebbe un'intersezione infinita.

Esempio Siano $C = \mathbf{V}(f)$ e $D = \mathbf{V}(g)$ dove:

$$f = x^2 - z^2 = (x-z)(x+z)$$
$$g = x^3 - yx - x^2z + yz = (x-z)(x^2-y)$$

Il punto $(1, b, 1) \in C \cap D$ per ogni $b \in \mathbb{C}$, ossia l'intersezione è infinita.

Teorema di Bezout

Lemma (Forma omogenea del Teorema Fondamentale dell'Algebra)

Sia $h \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio omogeneo non nullo. Allora si può scrivere nella forma:

$$h = c(s_1x - r_1y)^{m_1} \cdots (s_kx - r_ky)^{m_k}$$

dove $c \neq 0$ in $\mathbb{C}$ e $(r_1, s_1), \dots, (r_k, s_k)$ sono punti distinti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Oss Perché i punti di intersezione di due curve C e D siano in numero finito, le equazioni f e g che le definiscono non devono avere fattori in comune, altrimenti si avrebbe un'intersezione infinita.

Esempio Siano $C = \mathbf{V}(f)$ e $D = \mathbf{V}(g)$ dove:

$$f = x^2 - z^2 = (x - z)(x + z)$$
$$g = x^3 - yx - x^2z + yz = (x - z)(x^2 - y)$$

Il punto $(1, b, 1) \in C \cap D$ per ogni $b \in \mathbb{C}$, ossia l'intersezione è infinita.

Teorema di Bezout

Definizione

Siano C e D curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definite dalle equazioni f e g senza fattori in comune. Scegliamo le coordinate per $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ in modo che:

$$(0,0,1) \notin C \cup D \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap D} L_{pq}$$

dove L_{pq} sono le rette passanti per p e q.

Allora, preso $p = (u, v, w) \in C \cap D$, la ***molteplicità*** di p, $I_p(C, D)$, è definita dall'esponente di $(vx - uy)$ nella fattorizzazione di $Res(f, g, z)$.

Teorema (Teorema di Bezout)

Siano C e D due curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ senza fattori in comune e siano m e n i gradi rispettivi delle equazioni che definiscono le curve. Allora

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = mn$$

Teorema di Bezout

Definizione

Siano C e D curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definite dalle equazioni f e g senza fattori in comune. Scegliamo le coordinate per $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ in modo che:

$$(0,0,1) \notin C \cup D \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap D} L_{pq}$$

dove L_{pq} sono le rette passanti per p e q.
Allora, preso $p = (u, v, w) \in C \cap D$, la ***molteplicità*** di p, $I_p(C, D)$, è definita dall'esponente di $(vx - uy)$ nella fattorizzazione di $Res(f, g, z)$.

Teorema (Teorema di Bezout)

Siano C e D due curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ senza fattori in comune e siano m e n i gradi rispettivi delle equazioni che definiscono le curve. Allora

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = mn$$

Matrici compagne

Sia $I = (f_1, \dots, f_t)$ ideale zero dimensionale, ossia il sistema $f_1 = \cdots = f_t = 0$ ha un numero finito di soluzioni, e sia $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ il quoziente avente base $\{[x^\alpha] \mid x^\alpha \notin LT(I)\}$.

Definizione (Matrici compagne)

Le applicazioni lineari:

$$\begin{aligned} M_{x_i} : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I &\to \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I \\ [g] &\mapsto [gx_i] \end{aligned}$$

indotte dalla moltiplicazione per x_i sono dette matrici compagne di I. Analogamente, la matrice compagna indotta dalla moltiplicazione per $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ è definita come $M_{h(x_1,\dots,x_n)} = h(M_{x_1}, \dots, M_{x_n})$.

Decomposizione primaria

Teorema (Decomposizione Primaria)

Sia $\boldsymbol{V}(I) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Sia $h(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tale che $h(p_i)$ siano distinti. Considero per $i = 1, \ldots, k$ le applicazioni lineari

$$M_{h(x)-h(p_i)} : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$$

Posto $A_i = Ker(M_{(h(x)-h(p_i))})^\infty$ abbiamo la decomposizione diretta di sottoalgebre

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I = \oplus_{i=1}^k A_i$$

Definizione

dim A_i è detta ***molteplicità*** del punto p_i e si scrive m_i.

Decomposizione primaria

Teorema (Decomposizione Primaria)

Sia $\boldsymbol{V}(I) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. *Sia* $h(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *tale che* $h(p_i)$ *siano distinti. Considero per* $i = 1, \ldots, k$ *le applicazioni lineari*

$$M_{h(x)-h(p_i)} : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$$

Posto $A_i = Ker(M_{(h(x)-h(p_i))})^{\infty}$ *abbiamo la decomposizione diretta di sottoalgebre*

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I = \oplus_{i=1}^{k} A_i$$

Definizione

dim A_i è detta ***molteplicità*** del punto p_i e si scrive m_i.

Molteplicità di intersezione

Abbiamo dato due definizioni diverse di molteplicità di intersezione di curve algebriche. In particolare in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vale il seguente teorema:

Teorema

Siano C e D due curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ senza fattori in comune. Se $C \cap D = \{p_1, \dots, p_k\}$, allora $I_{p_i}(C, D) = m_i$,per ogni $i = 1, \dots, k$, ossia le due definizioni di molteplicità coincidono.

Esempio

Prese le due curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$C = \mathbf{V}(-x^3 + 14x^2z + y^2z - 65xz^2 - 2yz^2 + 101z^3)$$
$$D = \mathbf{V}((y-z)^3)$$

1. Calcoliamo la molteplicità secondo la prima definizione data. Osserviamo subito che sono soddisfatte le ipotesi, infatti $f(0,0,1) \neq 0 \neq g(0,0,1)$, quindi con il seguente codice di Macaulay2 calcoliamo il risultante $Res(f,g,z)$.

```
R=QQ[x,y,z]
f=-x^3+14*x^2*z+y^2*z-65*x*z^2-2*y*z^2+101*z^3
g=(y-z)^3
factor resultant(f,g,z)
```

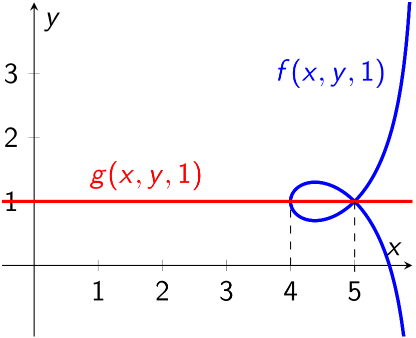
Esempio

Prese le due curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$C = \mathbf{V}(-x^3 + 14x^2z + y^2z - 65xz^2 - 2yz^2 + 101z^3)$$
$$D = \mathbf{V}((y-z)^3)$$

1. Dal codice otteniamo $Res(f,g,z) = (x-5y)^6(x-4y)^3$ e come si osserva dal grafico i punti non intersecano la retta all'∞.

$$p_1 = (5,1,1) \longrightarrow I_{p_1}(C,D) = 6$$
$$p_2 = (4,1,1) \longrightarrow I_{p_2}(C,D) = 3$$



Esempio

Prese le due curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$C = \mathbf{V}(-x^3 + 14x^2z + y^2z - 65xz^2 - 2yz^2 + 101z^3)$$
$$D = \mathbf{V}((y - z)^3)$$

2. Vediamo la molteplicità secondo la seconda definizione data con il seguente codice.

```
J=ideal(sub(f,z=>1),sub(g,z=>1))
S=QQ[x,y]
I=sub(J,S)
bb=sub(basis(S/I),S)     --dim(S/I)=9
h=x-5*y     --oppure h=x-4*y
comph=sub(contract(transpose bb,(bb_(0,0))*h%I),{x=>0,
    y=>0})
for i from 1 to 8 do
comph=comph|sub(contract(transpose bb,(bb_(0,i))*h%I),
    {x=>0,y=>0})
for i from 1 to 6 do print(i,9-(rank comph^i))
```

Esempio

Prese le due curve in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$C = \mathbf{V}(-x^3 + 14x^2z + y^2z - 65xz^2 - 2yz^2 + 101z^3)$$
$$D = \mathbf{V}((y-z)^3)$$

2. Si stampa la dimensione di $Ker(M_{x-5y})^i$ per $i = 1, \dots, 6$, e si ottiene:

$$(1,2)$$
$$(2,4)$$
$$(3,5)$$
$$(4,6)$$
$$(5,6)$$
$$(6,6)$$

Segue $m_1 = \dim Ker(M_{x-5y})^\infty = 6$.