Università degli Studi di Firenze
Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
C.d.L. Magistrale in Matematica

A. A. 2013-2014
Tesi di Laurea

COMPLESSITÀ DELL'ALGORITMO DI STRASSEN PER IL PRODOTTO DI MATRICI. UN APPROCCIO TENSORIALE

Candidato:
Luca Simi

Relatore:
Prof. Giorgio Ottaviani

Algoritmo di Strassen

Problema

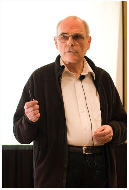
$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n} \end{bmatrix}$$

Algoritmo "righe per colonne"

Complessità: $O(n^3)$

Nel caso 2×2 impiega 8 prodotti.

Algoritmo di Strassen (1969)



Complessità: $O(n^{2.71})$

Nel caso 2×2 impiega solo 7 prodotti.

Algoritmo di Strassen

Problema

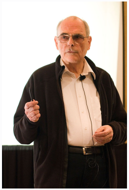
$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n} \end{bmatrix}$$

Algoritmo "righe per colonne"

Complessità: $O(n^3)$

Nel caso 2×2 impiega 8 prodotti.

Algoritmo di Strassen (1969)



Complessità: $O(n^{2.71})$

Nel caso 2×2 impiega solo 7 prodotti.

Algoritmo di Strassen

Problema

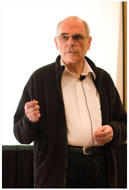
$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n} \end{bmatrix}$$

Algoritmo "righe per colonne"

Complessità: $O(n^3)$

Nel caso 2×2 impiega 8 prodotti.

Algoritmo di Strassen (1969)



Complessità: $O(n^{2.71})$

Nel caso 2×2 impiega solo 7 prodotti.

Algoritmo di Strassen

Problema

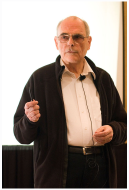
$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n} \end{bmatrix}$$

Algoritmo "righe per colonne"

Complessità: $O(n^3)$

Nel caso 2×2 impiega 8 prodotti.

Algoritmo di Strassen (1969)



Complessità: $O(n^{2.71})$

Nel caso 2×2 impiega solo 7 prodotti.

Algoritmo di Strassen

Problema

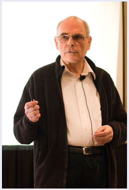
$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n} \end{bmatrix}$$

Algoritmo "righe per colonne"

Complessità: $O(n^3)$

Nel caso 2×2 impiega 8 prodotti.

Algoritmo di Strassen (1969)



Complessità: $O(n^{2.71})$

Nel caso 2×2 impiega solo 7 prodotti.

Algoritmo di Strassen

Problema

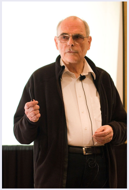
$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n} \end{bmatrix}$$

Algoritmo "righe per colonne"

Complessità: $O(n^3)$

Nel caso 2×2 impiega 8 prodotti.

Algoritmo di Strassen (1969)



Complessità: $O(n^{2.71})$

Nel caso 2×2 impiega solo 7 prodotti.

Prodotti tensoriali

Notazioni

- Sia $\mathbb{K}$ un campo (algebricamente chiuso);
- Sia $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$;
- Siano $V_1, \dots, V_n$ spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$.

Definizione

Il **prodotto tensoriale di** $V_1, \dots, V_n$ è l'insieme

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \left\{ T : V_1^* \times \ldots \times V_n^* \longrightarrow \mathbb{K},\ T \text{ multilineare} \right\}$$

I suoi elementi si dicono **tensori**.

Definizione

Un tensore $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ si dice **decomponibile** se esistono $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ tali che

$$T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1(v_1) \cdot \ldots \cdot \alpha_n(v_n) \qquad \forall \alpha_1 \in V_1^*, \dots, \alpha_n \in V_n^*$$

Indichiamo T con la notazione $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$.

Prodotti tensoriali

Notazioni

- Sia $\mathbb{K}$ un campo (algebricamente chiuso);
- Sia $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$;
- Siano $V_1, \ldots, V_n$ spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$.

Definizione

Il **prodotto tensoriale di** $V_1, \ldots, V_n$ è l'insieme

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \left\{ T : V_1^* \times \ldots \times V_n^* \longrightarrow \mathbb{K},\ T \text{ multilineare} \right\}$$

I suoi elementi si dicono **tensori**.

Definizione

Un tensore $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ si dice **decomponibile** se esistono $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ tali che

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1(v_1) \cdot \ldots \cdot \alpha_n(v_n) \qquad \forall \alpha_1 \in V_1^*, \ldots, \alpha_n \in V_n^*$$

Indichiamo T con la notazione $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$.

Prodotti tensoriali

Notazioni

- Sia $\mathbb{K}$ un campo (algebricamente chiuso);
- Sia $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$;
- Siano $V_1, \ldots, V_n$ spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$.

Definizione

Il **prodotto tensoriale di** $V_1, \ldots, V_n$ è l'insieme

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \left\{ T : V_1^* \times \ldots \times V_n^* \longrightarrow \mathbb{K},\ T \text{ multilineare} \right\}$$

I suoi elementi si dicono **tensori**.

Definizione

Un tensore $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ si dice **decomponibile** se esistono $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ tali che

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1(v_1) \cdot \ldots \cdot \alpha_n(v_n) \qquad \forall \alpha_1 \in V_1^*, \ldots, \alpha_n \in V_n^*$$

Indichiamo T con la notazione $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$.

Il rango

Teorema

Sia $\{v_1^{(k)}, \ldots, v_{d_k}^{(k)}\}$ una base di V_k per $1 \leq k \leq n$. Allora una base di $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ è data da

$$\left\{ v_{j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes v_{j_n}^{(n)} \right\}_{1 \leq j_1 \leq d_1, \ldots, 1 \leq j_n \leq d_n}$$

Definizione

Sia $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Il **rango** di T è il minimo intero R per cui T è esprimibile come somma di R tensori decomponibili. Indichiamo il rango di T con $R(T)$.

Fatto

Determinare il rango di un tensore è un problema NP-completo.

Il rango

Teorema

Sia $\{v_1^{(k)}, \dots, v_{d_k}^{(k)}\}$ una base di V_k per $1 \leq k \leq n$. Allora una base di $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ è data da

$$\left\{ v_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes v_{j_n}^{(n)} \right\}_{1 \leq j_1 \leq d_1, \dots, 1 \leq j_n \leq d_n}$$

Definizione

Sia $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Il **rango** di T è il minimo intero R per cui T è esprimibile come somma di R tensori decomponibili. Indichiamo il rango di T con $R(T)$.

Fatto

Determinare il rango di un tensore è un problema NP-completo.

Il rango

Teorema

Sia $\{v_1^{(k)}, \dots, v_{d_k}^{(k)}\}$ una base di V_k per $1 \leq k \leq n$. Allora una base di $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ è data da

$$\left\{ v_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes v_{j_n}^{(n)} \right\}_{1 \leq j_1 \leq d_1, \dots, 1 \leq j_n \leq d_n}$$

Definizione

Sia $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Il **rango** di T è il minimo intero R per cui T è esprimibile come somma di R tensori decomponibili. Indichiamo il rango di T con $R(T)$.

Fatto

Determinare il rango di un tensore è un problema NP-completo.

Il rango

Teorema

Sia $\{v_1^{(k)}, \ldots, v_{d_k}^{(k)}\}$ una base di V_k per $1 \leq k \leq n$. Allora una base di $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ è data da

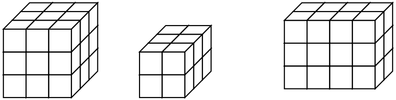
$$\left\{ v_{j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes v_{j_n}^{(n)} \right\}_{1 \leq j_1 \leq d_1, \ldots, 1 \leq j_n \leq d_n}$$

Definizione

Sia $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Il **rango** di T è il minimo intero R per cui T è esprimibile come somma di R tensori decomponibili. Indichiamo il rango di T con $R(T)$.

Fatto

Determinare il rango di un tensore è un problema NP-completo.



Prodotti tensoriali

Definizione

Sia $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Il **flattening di** T **lungo** V_i è l'applicazione lineare

$$T_{V_i} : V_1^* \otimes \ldots \otimes V_{i-1}^* \otimes V_{i+1}^* \otimes \ldots \otimes V_n^* \longrightarrow V_i \simeq V_i^{**}$$

definita da

$$T_{V_i}\left(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_{i-1} \otimes \alpha_{i+1} \otimes \ldots \otimes \alpha_n\right)(\alpha_i) = T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$$

per $\alpha_i \in V_i^*$

Teorema

Sia $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, allora $\operatorname{rk}(T_{V_i}) \leq R(T)$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Prodotti tensoriali

Definizione

Sia $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Il **flattening di T lungo V_i** è l'applicazione lineare

$$T_{V_i} : V_1^* \otimes \ldots \otimes V_{i-1}^* \otimes V_{i+1}^* \otimes \ldots \otimes V_n^* \longrightarrow V_i \simeq V_i^{**}$$

definita da

$$T_{V_i}\left(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_{i-1} \otimes \alpha_{i+1} \otimes \ldots \otimes \alpha_n\right)(\alpha_i) = T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$$

per $\alpha_i \in V_i^*$

Teorema

Sia $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, allora $\mathrm{rk}(T_{V_i}) \leq R(T)$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Prodotti tensoriali

Definizione

Sia $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Il **flattening di T lungo V_i** è l'applicazione lineare

$$T_{V_i} : V_1^* \otimes \ldots \otimes V_{i-1}^* \otimes V_{i+1}^* \otimes \ldots \otimes V_n^* \longrightarrow V_i \simeq V_i^{**}$$

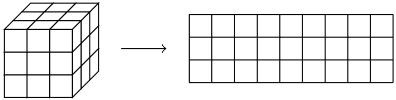
definita da

$$T_{V_i}(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_{i-1} \otimes \alpha_{i+1} \otimes \ldots \otimes \alpha_n)(\alpha_i) = T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

per $\alpha_i \in V_i^*$

Teorema

Sia $T \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, allora $\mathrm{rk}(T_{V_i}) \leq R(T)$ per ogni $1 \leq i \leq n$.



Prodotti tensoriali

Definizione

Sia $T \in U \otimes V \otimes W$, il **flattening di Koszul** di T è l'applicazione lineare definita da

$$T_U^{\wedge} : U \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{Id}_U \otimes T_{U \otimes W}} U \otimes U \otimes W \xrightarrow{\pi_U \otimes \mathrm{Id}_W} \Lambda^2 U \otimes W$$

Teorema

Sia $T \in U \otimes V \otimes W$, allora $\mathrm{rk}(T_U^{\wedge}) \leq R(T) \cdot (\dim(U) - 1)$.

Caso interessante

Se $\dim(U) = 4$ otteniamo

$$\mathrm{rk}(T_U^{\wedge}) \geq 16 \implies R(T) \geq 6$$

Prodotti tensoriali

Definizione

Sia $T \in U \otimes V \otimes W$, il **flattening di Koszul** di T è l'applicazione lineare definita da

$$T_U^\wedge : U \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{Id}_U \otimes T_{U \otimes W}} U \otimes U \otimes W \xrightarrow{\pi_U \otimes \mathrm{Id}_W} \Lambda^2 U \otimes W$$

Teorema

Sia $T \in U \otimes V \otimes W$, allora $\mathrm{rk}(T_U^\wedge) \leq R(T) \cdot (\dim(U) - 1)$.

Caso interessante

Se $\dim(U) = 4$ otteniamo

$$\mathrm{rk}(T_U^\wedge) \geq 16 \implies R(T) \geq 6$$

Prodotti tensoriali

Definizione

Sia $T \in U \otimes V \otimes W$, il **flattening di Koszul** di T è l'applicazione lineare definita da

$$T_U^\wedge : U \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{Id}_U \otimes T_{U \otimes W}} U \otimes U \otimes W \xrightarrow{\pi_U \otimes \mathrm{Id}_W} \Lambda^2 U \otimes W$$

Teorema

Sia $T \in U \otimes V \otimes W$, allora $\mathrm{rk}(T_U^\wedge) \leq R(T) \cdot (\dim(U) - 1)$.

Caso interessante

Se $\dim(U) = 4$ otteniamo

$$\mathrm{rk}(T_U^\wedge) \geq 16 \implies R(T) \geq 6$$

Varietà proiettive

Definizione

Una **varietà proiettiva** in $\mathbb{P}^n$ è il luogo degli zeri di una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ di polinomi omogenei

$$Z(\mathcal{F}) = \left\{[P] \in \mathbb{P}^n \text{ t.c. } f(P) = 0 \text{ per ogni } f \in \mathcal{F}\right\}$$

Definizione

Le varietà proiettive soddisfano gli assiomi per insiemi chiusi. Definiamo la **Topologia di Zariski** come l'unica topologia su $\mathbb{P}^n$ i cui chiusi sono esattamente le varietà proiettive.

Varietà proiettive

Definizione

Una **varietà proiettiva** in $\mathbb{P}^n$ è il luogo degli zeri di una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ di polinomi omogenei

$$Z(\mathcal{F}) = \left\{ [P] \in \mathbb{P}^n \text{ t.c. } f(P) = 0 \text{ per ogni } f \in \mathcal{F} \right\}$$

Definizione

Le varietà proiettive soddisfano gli assiomi per insiemi chiusi. Definiamo la **Topologia di Zariski** come l'unica topologia su $\mathbb{P}^n$ i cui chiusi sono esattamente le varietà proiettive.

Le varietà di Segre

Definizione

L'**embedding di Segre** è l'applicazione

$$\mathrm{Seg} : \mathbb{P}V_1 \times \ldots \times \mathbb{P}V_n \longrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$$

definita ponendo

$$\mathrm{Seg}([v_1], \ldots, [v_n]) = [v_1 \otimes \ldots \otimes v_n]$$

L'immagine dell'embedding di Segre viene chiamata **varietà di Segre**.

Definizione

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva. La **k-esima secante a X** è la varietà

$$\sigma_k(X) = \overline{\bigcup_{\substack{[P_1],\ldots,[P_k]\in X \\ \text{in posizione generale}}} \langle [P_1], \ldots, [P_k] \rangle}$$

Le varietà di Segre

Definizione

L'**embedding di Segre** è l'applicazione

$$\text{Seg} : \mathbb{P}V_1 \times \ldots \times \mathbb{P}V_n \longrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$$

definita ponendo

$$\text{Seg}([v_1], \ldots, [v_n]) = [v_1 \otimes \ldots \otimes v_n]$$

L'immagine dell'embedding di Segre viene chiamata **varietà di Segre**.

Definizione

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva. La **k-esima secante a X** è la varietà

$$\sigma_k(X) = \overline{\bigcup_{\substack{[P_1], \ldots, [P_k] \in X \\ \text{in posizione generale}}} \langle [P_1], \ldots, [P_k] \rangle}$$

Il rango-bordo

Osservazione

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, allora

$$X = \sigma_1(X) \subseteq \sigma_2(X) \subseteq \ldots \subseteq \sigma_k(X) = \mathbb{P}^n$$

Definizione

Sia $X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}V_1 \times \ldots \times \mathbb{P}V_n)$, sia $[T] \in \mathbb{P}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$. Il **rango-bordo** di T è il minimo intero $\underline{R}$ tale che $[T] \in \sigma_{\underline{R}}(X)$. Indichiamo il rango-bordo di T con $\underline{R}(T)$.

Il rango-bordo

Osservazione

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, allora

$$X = \sigma_1(X) \subseteq \sigma_2(X) \subseteq \ldots \subseteq \sigma_k(X) = \mathbb{P}^n$$

Definizione

Sia $X = \mathrm{Seg}(\mathbb{P}V_1 \times \ldots \times \mathbb{P}V_n)$, sia $[T] \in \mathbb{P}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$. Il **rango-bordo** di T è il minimo intero $\underline{R}$ tale che $[T] \in \sigma_{\underline{R}}(X)$. Indichiamo il rango-bordo di T con $\underline{R}(T)$.

Il lemma di Terracini

Lemma (di Terracini)

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva. Siano $[P_1], \dots, [P_k] \in X, [P] \in \sigma_k(X)$ punti generali tali che $[P] \in \langle [P_1], \dots, [P_k] \rangle$. Allora

$$T_{[P]}\sigma_k(X) = \left\langle T_{[P_1]}X, \dots, T_{[P_k]}X \right\rangle$$

Proposizione

Siano U, V, W spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Siano $u \in U, v \in V, w \in W$, allora

$$T_{[u \otimes v \otimes w]}\mathrm{Seg}\left(\mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W\right) = \mathbb{P}\left(U \otimes v \otimes w + u \otimes V \otimes w + u \otimes v \otimes W\right)$$

Il lemma di Terracini

Lemma (di Terracini)

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva. Siano $[P_1], \dots, [P_k] \in X, [P] \in \sigma_k(X)$ punti generali tali che $[P] \in \langle [P_1], \dots, [P_k] \rangle$. Allora

$$T_{[P]}\sigma_k(X) = \left\langle T_{[P_1]}X, \dots, T_{[P_k]}X \right\rangle$$

Proposizione

Siano U, V, W spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Siano $u \in U, v \in V, w \in W$, allora

$$T_{[u \otimes v \otimes w]}\text{Seg}\,(\mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W) = \mathbb{P}\,(U \otimes v \otimes w + u \otimes V \otimes w + u \otimes v \otimes W)$$

Prodotto di matrici

Notazioni

Siano $m, n, l \in \mathbb{N}$. Siano

$$A = \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K})$$
$$B = \mathcal{M}(n \times l, \mathbb{K})$$
$$C = \mathcal{M}(m \times l, \mathbb{K})$$

Definizione

Il tensore **prodotto di matrici** $m \times n \times l$ è l'applicazione bilineare

$$\Psi_{\langle m,n,l \rangle} : A \times B \longrightarrow C$$

definita da

$$\Psi_{\langle m,n,l \rangle}(X, Y) = XY$$

Osservazione

Possiamo vedere $\Psi_{\langle m,n,l \rangle} \in A^* \otimes B^* \otimes C$.

Prodotto di matrici

Notazioni

Siano $m, n, l \in \mathbb{N}$. Siano

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K}) \\ B &= \mathcal{M}(n \times l, \mathbb{K}) \\ C &= \mathcal{M}(m \times l, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

Definizione

Il tensore **prodotto di matrici** $m \times n \times l$ è l'applicazione bilineare

$$\Psi_{\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{l} \rangle} : A \times B \longrightarrow C$$

definita da

$$\Psi_{\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{l} \rangle}(X, Y) = XY$$

Osservazione

Possiamo vedere $\Psi_{\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{l} \rangle} \in A^* \otimes B^* \otimes C$.

Prodotto di matrici

Notazioni

Siano $m, n, l \in \mathbb{N}$. Siano

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K}) \\ B &= \mathcal{M}(n \times l, \mathbb{K}) \\ C &= \mathcal{M}(m \times l, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

Definizione

Il tensore **prodotto di matrici** $m \times n \times l$ è l'applicazione bilineare

$$\Psi_{\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l} \rangle} : A \times B \longrightarrow C$$

definita da

$$\Psi_{\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l} \rangle}(X, Y) = XY$$

Osservazione

Possiamo vedere $\Psi_{\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{l} \rangle} \in A^* \otimes B^* \otimes C$.

L'algoritmo "righe per colonne"

- Se $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j}, \{\beta_{i,j}\}_{i,j}, \{c_{j,i}\}_{i,j}$ sono le basi canoniche rispettivamente su A^*, B^*, C la decomposizione associata all'algoritmo "righe per colonne" è

$$\Psi_{\langle m,n,l\rangle} = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j} \otimes \beta_{j,k} \otimes c_{k,i}$$

- Equivalentemente possiamo pensare $\Psi_{\langle m,n,l\rangle}$ come l'applicazione trilineare

$$\Psi_{\langle m,n,l\rangle} : (X, Y, Z) \longmapsto \mathrm{Tr}(XYZ)$$

Osservazione

$\Psi_{\langle m,n,l\rangle}$ è invariante rispetto ai cambi di base in $\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^l$:

$$\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}\left(H^{-1}(XYZ)H\right) = \mathrm{Tr}\left((H^{-1}XK)(K^{-1}YM)(M^{-1}ZH)\right)$$

per ogni $H \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $K \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{K})$.

L'algoritmo "righe per colonne"

- Se $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j}, \{\beta_{i,j}\}_{i,j}, \{c_{j,i}\}_{i,j}$ sono le basi canoniche rispettivamente su A^*, B^*, C la decomposizione associata all'algoritmo "righe per colonne" è

$$\Psi_{\langle m,n,l\rangle} = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j} \otimes \beta_{j,k} \otimes c_{k,i}$$

- Equivalentemente possiamo pensare $\Psi_{\langle m,n,l\rangle}$ come l'applicazione trilineare

$$\Psi_{\langle m,n,l\rangle} : (X, Y, Z) \longmapsto \mathrm{Tr}(XYZ)$$

Osservazione

$\Psi_{\langle m,n,l\rangle}$ è invariante rispetto ai cambi di base in $\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^l$:

$$\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}\left(H^{-1}(XYZ)H\right) = \mathrm{Tr}\left((H^{-1}XK)(K^{-1}YM)(M^{-1}ZH)\right)$$

per ogni $H \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $K \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{K})$.

L'algoritmo "righe per colonne"

- Se $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j}, \{\beta_{i,j}\}_{i,j}, \{c_{j,i}\}_{i,j}$ sono le basi canoniche rispettivamente su A^*, B^*, C la decomposizione associata all'algoritmo "righe per colonne" è

$$\Psi_{\langle m,n,l\rangle} = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j} \otimes \beta_{j,k} \otimes c_{k,i}$$

- Equivalentemente possiamo pensare $\Psi_{\langle m,n,l\rangle}$ come l'applicazione trilineare

$$\Psi_{\langle m,n,l\rangle} : (X, Y, Z) \longmapsto \mathrm{Tr}(XYZ)$$

Osservazione

$\Psi_{\langle m,n,l\rangle}$ è invariante rispetto ai cambi di base in $\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^l$:

$$\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}\left(H^{-1}(XYZ)H\right) = \mathrm{Tr}\left((H^{-1}XK)(K^{-1}YM)(M^{-1}ZH)\right)$$

per ogni $H \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $K \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{K})$.

L'algoritmo "righe per colonne"

- Se $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j}, \{\beta_{i,j}\}_{i,j}, \{c_{j,i}\}_{i,j}$ sono le basi canoniche rispettivamente su A^*, B^*, C la decomposizione associata all'algoritmo "righe per colonne" è

$$\Psi_{\langle m,n,l\rangle} = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j} \otimes \beta_{j,k} \otimes c_{k,i}$$

- Equivalentemente possiamo pensare $\Psi_{\langle m,n,l\rangle}$ come l'applicazione trilineare

$$\Psi_{\langle m,n,l\rangle} : (X, Y, Z) \longmapsto \mathrm{Tr}(XYZ)$$

Osservazione

$\Psi_{\langle m,n,l\rangle}$ è invariante rispetto ai cambi di base in $\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^l$:

$$\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}\left(H^{-1}(XYZ)H\right) = \mathrm{Tr}\left((H^{-1}XK)(K^{-1}YM)(M^{-1}ZH)\right)$$

per ogni $H \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $K \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{K})$.

L'algoritmo di Strassen

L'algoritmo di Strassen corrisponde alla seguente decomposizione:

$$\begin{aligned}\Psi_{\langle 2,2,2\rangle} = {} & (\alpha_{1,1}+\alpha_{2,2})\otimes(\beta_{1,1}+\beta_{2,2})\otimes(c_{1,1}+c_{2,2})\\ & +\alpha_{1,1}\otimes(\beta_{1,2}-\beta_{2,2})\otimes(c_{2,1}+c_{2,2})\\ & +\alpha_{2,2}\otimes(\beta_{2,1}-\beta_{1,1})\otimes(c_{1,2}+c_{1,1})\\ & +(\alpha_{2,1}+\alpha_{2,2})\otimes\beta_{1,1}\otimes(c_{1,2}-c_{2,2})\\ & +(\alpha_{1,2}+\alpha_{1,1})\otimes\beta_{2,2}\otimes(c_{2,1}-c_{1,1})\\ & +(-\alpha_{1,1}+\alpha_{2,1})\otimes(\beta_{1,1}+\beta_{1,2})\otimes c_{2,2}\\ & +(-\alpha_{2,2}+\alpha_{1,2})\otimes(\beta_{2,2}+\beta_{2,1})\otimes c_{1,1}\end{aligned}$$

La decomposizione è costituita da 7 addendi di rango 1, corrispondenti ai 7 prodotti dell'algoritmo di Strassen.

L'algoritmo di Strassen

L'algoritmo di Strassen corrisponde alla seguente decomposizione:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\langle 2,2,2\rangle} = & (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2}) \otimes (\beta_{1,1} + \beta_{2,2}) \otimes (c_{1,1} + c_{2,2}) \\
& + \alpha_{1,1} \otimes (\beta_{1,2} - \beta_{2,2}) \otimes (c_{2,1} + c_{2,2}) \\
& + \alpha_{2,2} \otimes (\beta_{2,1} - \beta_{1,1}) \otimes (c_{1,2} + c_{1,1}) \\
& + (\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2}) \otimes \beta_{1,1} \otimes (c_{1,2} - c_{2,2}) \\
& + (\alpha_{1,2} + \alpha_{1,1}) \otimes \beta_{2,2} \otimes (c_{2,1} - c_{1,1}) \\
& + (-\alpha_{1,1} + \alpha_{2,1}) \otimes (\beta_{1,1} + \beta_{1,2}) \otimes c_{2,2} \\
& + (-\alpha_{2,2} + \alpha_{1,2}) \otimes (\beta_{2,2} + \beta_{2,1}) \otimes c_{1,1}
\end{aligned}$$

La decomposizione è costituita da 7 addendi di rango 1, corrispondenti ai 7 prodotti dell'algoritmo di Strassen.

Qualche strumento per la stima del rango

Teorema

Sia $\Psi_{\langle n,n,n\rangle} = \sum_{r=1}^{R} \alpha_r \otimes \beta_r \otimes c_r$ tale che $\mathrm{rk}(\alpha_r) = \mathrm{rk}(\beta_r) = \mathrm{rk}(c_r) = 1$ per ogni r, allora $R \geq n^3$.

Lemma

Siano $Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tali che $rk(Y) = rk(Z) = 1$.

1. Se lo spazio righe di Y non è ortogonale allo spazio colonne di Z allora esistono $H, K, M \in GL_2(\mathbb{C})$ tali che
$$K^{-1}YM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{-1}ZH = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
2. Se lo spazio righe di Y è ortogonale allo spazio colonne di Z allora esistono $H, K, M \in GL_2(\mathbb{C})$ tali che
$$K^{-1}YM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{-1}ZH = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qualche strumento per la stima del rango

Teorema

Sia $\Psi_{\langle n,n,n\rangle} = \sum_{r=1}^{R} \alpha_r \otimes \beta_r \otimes c_r$ tale che $\mathrm{rk}(\alpha_r) = \mathrm{rk}(\beta_r) = \mathrm{rk}(c_r) = 1$ per ogni r, allora $R \geq n^3$.

Lemma

Siano $Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tali che $rk(Y) = rk(Z) = 1$.

1. Se lo spazio righe di Y non è ortogonale allo spazio colonne di Z allora esistono $H, K, M \in GL_2(\mathbb{C})$ tali che
$$K^{-1}YM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{-1}ZH = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
2. Se lo spazio righe di Y è ortogonale allo spazio colonne di Z allora esistono $H, K, M \in GL_2(\mathbb{C})$ tali che
$$K^{-1}YM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{-1}ZH = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il prodotto di matrici $2 \times 2 \times 2$ ha rango 7

Teorema

$R(\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle}) = 7$.

La disuguaglianza $\leq$ è una conseguenza della decomposizione corrispondente all'algoritmo di Strassen, mentre per provare $\geq$ useremo il seguente scheletro:

1. Consideriamo una decomposizione di $\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle}$ con $R = R(\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle})$ addendi decomponibili. Tra questi uno almeno, diciamo $x \otimes y \otimes z$, deve essere di tipo diverso da $(1,1,1)$. Sia $T = \Psi_{\langle 2,2,2 \rangle} - x \otimes y \otimes z$.
2. Usando i flattening di Koszul stimiamo il rango di T per ogni caso possibile di $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$. Proveremo che $R(T) \geq 6$. Pertanto, poiché $R(T) \leq R - 1$, potremo concludere che $R \geq 7$.

Il prodotto di matrici $2 \times 2 \times 2$ ha rango 7

Teorema

$R(\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle}) = 7$.

La disuguaglianza $\leq$ è una conseguenza della decomposizione corrispondente all'algoritmo di Strassen, mentre per provare $\geq$ useremo il seguente scheletro:

1. Consideriamo una decomposizione di $\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle}$ con $R = R(\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle})$ addendi decomponibili. Tra questi uno almeno, diciamo $x \otimes y \otimes z$, deve essere di tipo diverso da $(1,1,1)$. Sia $T = \Psi_{\langle 2,2,2 \rangle} - x \otimes y \otimes z$.
2. Usando i flattening di Koszul stimiamo il rango di T per ogni caso possibile di $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$. Proveremo che $R(T) \geq 6$. Pertanto, poiché $R(T) \leq R - 1$, potremo concludere che $R \geq 7$.

Il prodotto di matrici $2 \times 2 \times 2$ ha rango 7

Teorema

$R(\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle}) = 7$.

La disuguaglianza $\leq$ è una conseguenza della decomposizione corrispondente all'algoritmo di Strassen, mentre per provare $\geq$ useremo il seguente scheletro:

1. Consideriamo una decomposizione di $\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle}$ con $R = R(\Psi_{\langle 2,2,2 \rangle})$ addendi decomponibili. Tra questi uno almeno, diciamo $x \otimes y \otimes z$, deve essere di tipo diverso da $(1, 1, 1)$. Sia $T = \Psi_{\langle 2,2,2 \rangle} - x \otimes y \otimes z$.
2. Usando i flattening di Koszul stimiamo il rango di T per ogni caso possibile di $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$. Proveremo che $R(T) \geq 6$. Pertanto, poiché $R(T) \leq R - 1$, potremo concludere che $R \geq 7$.

Il prodotto di matrici $2 \times 2 \times 2$ ha rango 7

Teorema

$R(\Psi_{\langle 2,2,2\rangle}) = 7$.

La disuguaglianza $\leq$ è una conseguenza della decomposizione corrispondente all'algoritmo di Strassen, mentre per provare $\geq$ useremo il seguente scheletro:

1. Consideriamo una decomposizione di $\Psi_{\langle 2,2,2\rangle}$ con $R = R(\Psi_{\langle 2,2,2\rangle})$ addendi decomponibili. Tra questi uno almeno, diciamo $x \otimes y \otimes z$, deve essere di tipo diverso da $(1,1,1)$. Sia $T = \Psi_{\langle 2,2,2\rangle} - x \otimes y \otimes z$.
2. Usando i flattening di Koszul stimiamo il rango di T per ogni caso possibile di $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$. Proveremo che $R(T) \geq 6$. Pertanto, poiché $R(T) \leq R - 1$, potremo concludere che $R \geq 7$.

Casi possibili

I casi possibili per $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$ sono i seguenti:

- $(2, 2, *)$: possiamo supporre
$$x = \mathrm{Id}_2 \qquad y = \mathrm{Id}_2$$
- $(2, *, 2)$ e $(*, 2, 2)$: analogo al precedente
- $(2, 1, 1)$: per i due lemmi visti possiamo studiare due forme particolari per y e z:
  1. $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  2. Oppure
  $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 2)$: analogo al precedente.

Casi possibili

I casi possibili per $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$ sono i seguenti:

- $(2, 2, *)$: possiamo supporre
$$x = \mathrm{Id}_2 \qquad y = \mathrm{Id}_2$$
- $(2, *, 2)$ e $(*, 2, 2)$: analogo al precedente
- $(2, 1, 1)$: per i due lemmi visti possiamo studiare due forme particolari per y e z:
  1. $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  2. Oppure
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 2)$: analogo al precedente.

Casi possibili

I casi possibili per $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$ sono i seguenti:

- $(2, 2, *)$: possiamo supporre
$$x = \mathrm{Id}_2 \qquad y = \mathrm{Id}_2$$
- $(2, *, 2)$ e $(*, 2, 2)$: analogo al precedente
- $(2, 1, 1)$: per i due lemmi visti possiamo studiare due forme particolari per y e z:
  1. $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  2. Oppure
  $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 2)$: analogo al precedente.

Casi possibili

I casi possibili per $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$ sono i seguenti:

- $(2, 2, *)$: possiamo supporre
$$x = \mathrm{Id}_2 \qquad y = \mathrm{Id}_2$$
- $(2, *, 2)$ e $(*, 2, 2)$: analogo al precedente
- $(2, 1, 1)$: per i due lemmi visti possiamo studiare due forme particolari per y e z:
  1. $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  2. Oppure
  $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 2)$: analogo al precedente.

Casi possibili

I casi possibili per $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$ sono i seguenti:

- $(2, 2, *)$: possiamo supporre
$$x = \mathrm{Id}_2 \qquad y = \mathrm{Id}_2$$
- $(2, *, 2)$ e $(*, 2, 2)$: analogo al precedente
- $(2, 1, 1)$: per i due lemmi visti possiamo studiare due forme particolari per y e z:
  1. $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  2. Oppure
  $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 2)$: analogo al precedente.

Casi possibili

I casi possibili per $(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y), \mathrm{rk}(z))$ sono i seguenti:

- $(2, 2, *)$: possiamo supporre
$$x = \mathrm{Id}_2 \qquad y = \mathrm{Id}_2$$
- $(2, *, 2)$ e $(*, 2, 2)$: analogo al precedente
- $(2, 1, 1)$: per i due lemmi visti possiamo studiare due forme particolari per y e z:
  1. $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  2. Oppure
  $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 2)$: analogo al precedente.

Utilizzo del software Macaulay2

Il calcolo del rango è un'operazione complessa da un punto di vista simbolico. I flattening in questione sono matrici 16×24, ad esempio:

$$\left|\begin{matrix}
b & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a+1 & 0 & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a+1 & -b & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -a+1 & -b & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right|$$

flattening

$$\left|\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & -b & -a+1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right|$$

una sottomatrice di rango 16 quando $a = 1$.

$$\left|\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & b & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & -a+1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & -b & -a+1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right|$$

una sottomatrice di rango 16 quando $a \neq 1$.

Grazie per l'attenzione.