Corrispondenza tra geometria sintetica e geometria analitica

Candidato: Teresa Carli
Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

Università degli Studi di Firenze
Scuola di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

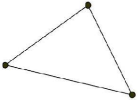
29 Aprile 2015

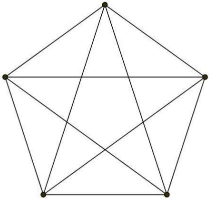
Il percorso

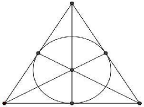
1. La geometria sintetica
2. La geometria analitica
3. La corrispondenza

Assiomatizzazione di Hilbert

- L'aspetto logico ha la precedenza sul contenuto esperenziale -



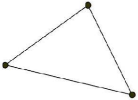


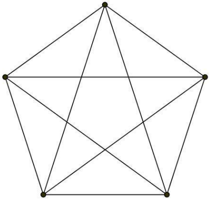


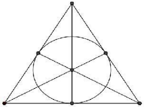
- Assiomi di Incidenza e Assioma delle Parallele
- Assiomi di Collocamento
- Assiomi di Congruenza
- Assioma per le intersezioni
- Assioma di Archimede e Assioma di Dedekind

Assiomatizzazione di Hilbert

- L'aspetto logico ha la precedenza sul contenuto esperenziale -



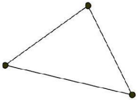


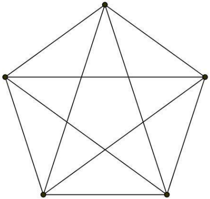


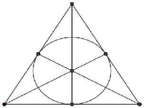
- Assiomi di Incidenza e Assioma delle Parallele
- Assiomi di Collocamento
- Assiomi di Congruenza
- Assioma per le intersezioni
- Assioma di Archimede e Assioma di Dedekind

Assiomatizzazione di Hilbert

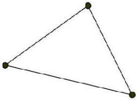
- L'aspetto logico ha la precedenza sul contenuto esperenziale -

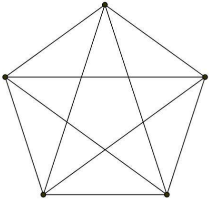


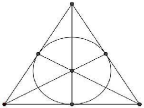




- Assiomi di Incidenza e Assioma delle Parallele
- Assiomi di Collocamento
- Assiomi di Congruenza
- Assioma per le intersezioni
- Assioma di Archimede e Assioma di Dedekind



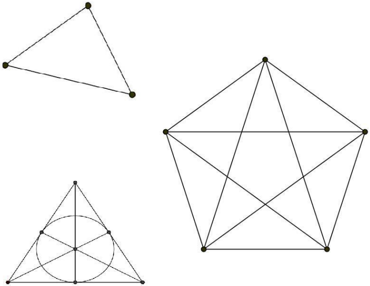




- Assiomi di Incidenza e Assioma delle Parallele
- Assiomi di Collocamento
- Assiomi di Congruenza
- Assioma per le intersezioni
- Assioma di Archimede e Assioma di Dedekind

Assiomatizzazione di Hilbert

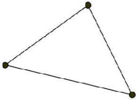
- L'aspetto logico ha la precedenza sul contenuto esperenziale -

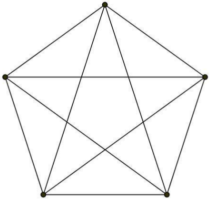


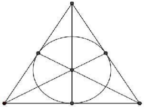
- Assiomi di Incidenza e Assioma delle Parallele
- Assiomi di Collocamento
- Assiomi di Congruenza
- Assioma per le intersezioni
- Assioma di Archimede e Assioma di Dedekind

Assiomatizzazione di Hilbert

- L'aspetto logico ha la precedenza sul contenuto esperenziale -





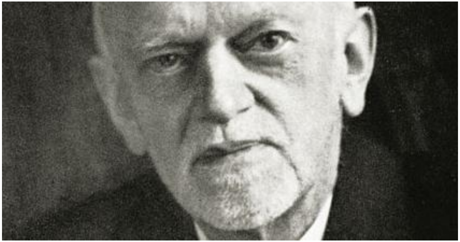


- Assiomi di Incidenza e Assioma delle Parallele
- Assiomi di Collocamento
- Assiomi di Congruenza
- Assioma per le intersezioni
- Assioma di Archimede e Assioma di Dedekind

Piano di Hilbert

Definizione

Un **piano di Hilbert** è un insieme costituito da punti da sottoinsiemi detti rette, munito di nozioni primitive di collocamento, congruenza tra segmenti e congruenza tra angoli, che verifica gli assiomi di Incidenza, Collocamento e Congruenza.



Piano cartesiano su un campo - Π_F

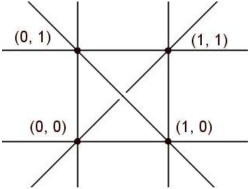
Definizione

Il **piano Cartesiano sul campo** F è l'insieme F^2 di coppie ordinate di elementi di F. Chiamiamo *punti* tali coppie e *rette* i sottoinsiemi definiti da un'equazione lineare:

$$ax + by + c = 0,$$

con a, b e $c \in F$ e a, b non entrambi nulli.

$$F = \{0, 1\}$$



Proprietà di F e verifica degli assiomi in Π_F

Sia F un *campo*

Il piano Cartesiano Π_F soddisfa gli assiomi di Incidenza e l'assioma delle Parallele

Proprietà di F e verifica degli assiomi in Π_F

Sia F un *campo ordinato*

$$\Downarrow$$

Il piano Cartesiano Π_F soddisfa gli assiomi di Incidenza e l'assioma delle Parallele ed è possibile definire una relazione di collocamento che soddisfa gli assiomi di Collocamento.

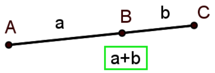
Proprietà di F e verifica degli assiomi in Π_F

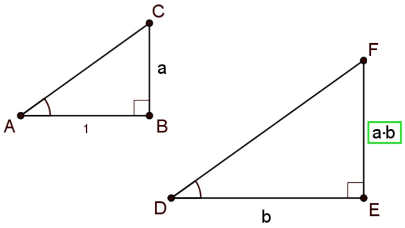
Sia F un *campo ordinato Pitagorico*

Il piano Cartesiano Π_F soddisfa gli assiomi di Incidenza e l'assioma delle Parallele; è possibile definire una relazione di collocamento, una relazione di congruenza per segmenti ed una per angoli in modo che Π_F soddisfi gli assiomi di Collocamento e di Congruenza.

Il campo ordinato dei segmenti aritmetici

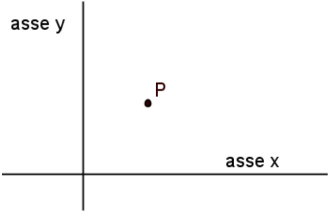
In un piano di Hilbert che soddisfa l'assioma delle Parallele la relazione di congruenza tra segmenti è una relazione di equivalenza.
Scelta arbitrariamente la classe dei segmenti unitari, definiamo due operazioni: addizione e moltiplicazione.





$\Rightarrow$ esiste il campo dei segmenti aritmetici.

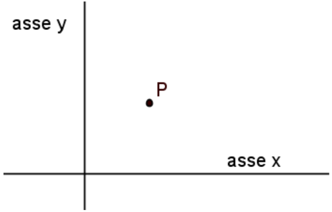
Il piano di Hilbert (Π) e il piano cartesiano sul campo dei segmenti (F^2) sono isomorfi



$$\begin{aligned} \varphi \colon \Pi &\to F^2 \\ P &\mapsto (\pm a, \pm b) \end{aligned}$$

Π e F^2 sono isomorfi.

Il piano di Hilbert (Π) e il piano cartesiano sul campo dei segmenti (F^2) sono isomorfi

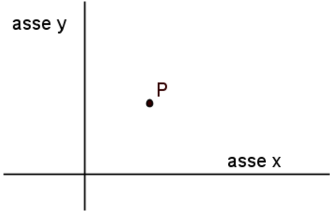


$$\begin{aligned}\varphi\colon \Pi &\to F^2\\ P &\mapsto (\pm a, \pm b)\end{aligned}$$

- $L \subseteq \Pi$ è una retta se e solo se $\varphi(L) \subseteq F^2$ è una retta.
- In Π vale $A * B * C$ se e solo se in F^2 risulta $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$.
- $AB \cong CD$ se e solo se $\varphi(A)\varphi(B) \cong \varphi(C)\varphi(D)$.
- $\alpha \cong \beta$ se e solo se $\varphi(\alpha) \cong \varphi(\beta)$.

Π e F^2 sono isomorfi.

Il piano di Hilbert (Π) e il piano cartesiano sul campo dei segmenti (F^2) sono isomorfi



$$\varphi\colon \Pi \to F^2$$
$$P \mapsto (\pm a, \pm b)$$

- $L \subseteq \Pi$ è una retta se e solo se $\varphi(L) \subseteq F^2$ è una retta.
- In Π vale $A * B * C$ se e solo se in F^2 risulta $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$.
- $AB \cong CD$ se e solo se $\varphi(A)\varphi(B) \cong \varphi(C)\varphi(D)$.
- $\alpha \cong \beta$ se e solo se $\varphi(\alpha) \cong \varphi(\beta)$.

Π e F^2 sono isomorfi.