Le quartiche di Clebsch

Candidata: Anna Galli   Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

Università degli Studi di Firenze

28 Aprile 2022

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Introduzione

- Quartiche di Clebsch: $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_4$ t.c. $f = \sum_{i=0}^{4} (\alpha_{i_0} x_0 + \alpha_{i_1} x_1 + \alpha_{i_2} x_2)^4$ o limiti di questi
- Teorema di Clebsch: $v_4(\mathbb{P}^2)$ è 5-difettiva
- Conseguenza: f è una quartica di Clebsch se e solo se $\exists g \in \mathbb{C}[\partial_0, \partial_1, \partial_2]_2$ t.c. $g \cdot f = 0$

Morfismo di Veronese

$n, d \in \mathbb{N}$ fissati, si dice Morfismo di Veronese di grado d ($\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$):

$$\begin{array}{cccc} v_d : & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & [l_0, \dots, l_n] & \longmapsto & [\dots, \prod_{i=0}^n l_i^{\alpha_i}, \dots] \end{array}$$

$\alpha_0 + \dots + \alpha_n = d, \; N = \binom{n+d}{d} - 1$

E' possibile descrivere v_d come segue:

$$\begin{array}{cccc} v_d : & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d) \\ & [l] & \longmapsto & [l^d] \end{array}$$

dove $l := l_0 x_0 + \dots + l_n x_n$

Morfismo di Veronese

Siamo interessati al caso $n = 2, d = 4 \Rightarrow N = 14$

$$\begin{array}{rccc} v_4 : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^{14} \\ & [l] & \longmapsto & [l^4] \end{array}$$

Definizione

$v_4(\mathbb{P}^2)$ è detta *4-immersione di Veronese*

Problema: $v_4(\mathbb{P}^2)$ è una varietà algebrica?

Apolarità

Poniamo

$$R_2 := \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2 \; S_2 := \mathbb{C}[\partial_0, \partial_1, \partial_2]_2$$

Sia $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_4$, la mappa

$$\begin{array}{rccc} Cat_{2,2}(f): & S_2 & \longrightarrow & R_2 \\ & \partial & \longmapsto & \partial \cdot f \end{array}$$

è detta <u>mappa cataletticante</u> associata ad f

- $Cat_{2,2}(f)$ è lineare
- $dim R_2 = dim S_2 = \binom{2+2}{2} = 6$

la matrice associata a $Cat_{2,2}(f)$ è una matrice 6×6 ed è detta <u>matrice cataletticante</u>

Apolarità

Proposizione

$\forall f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_4,\ f \in v_4(\mathbb{P}^2) \iff rank(Cat_{2,2}(f)) = 1$

Corollario

$v_4(\mathbb{P}^2)$ è una varietà algebrica.

Varietà secanti

Definizione

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una varietà proiettiva

- *Prima varietà secante*: $\sigma_1(X) := X$
- *Varietà 2-secante di* X: $\sigma_2(X) := \overline{\bigcup_{p,q \in X} < p, q >}$
- *Varietà k-secante di* X: $\sigma_k(X) := \overline{\bigcup_{p_1,\dots,p_k \in X} < p_1, \dots, p_k >}$

Definizione

$f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_4$ è detta *Quartica di Clebsch* se $f \in \sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$

Dimensione della varietà k-secante

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una varietà proiettiva, $\sigma_k(X)$ può essere descritta da $k \cdot dim(X) + (k-1)$ parametri:

$$\text{dimensione attesa } (\sigma_k(X)) = min\{k \cdot dim(X) + (k-1), N\}$$

Vale il seguente

Teorema

$dim(\sigma_k(X)) \leq$ dimensione attesa $(\sigma_k(X))$

Definizione

X è detta *k-difettiva* se $dim(\sigma_k(X)) <$ dimensione attesa $(\sigma_k(X))$

Il Teorema di Clebsch

Teorema di Clebsch (1861)

$v_4(\mathbb{P}^2)$ è 5-difettiva.

$$dim(\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))) = 13 < 5 \cdot \underbrace{dim(v_4(\mathbb{P}^2))}_{=2} + 4 = 14$$

In particolare:

$$\sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2)) = \{f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_4 \mid det(Cat_{2,2}(f)) = 0\}$$

(lavagna)

Conseguenza del Teorema di Clebsch

$f \in \sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2)) \iff det(Cat_{2,2}(f)) = 0 \iff Ker(Cat_{2,2}(f)) \neq \{0\}$

Sia $f \in \sigma_5(v_4(\mathbb{P}^2))$ t.c. $f = \sum_{i=0}^{4} l_i^4$

$l_i = \alpha_{i_0}x_0 + \alpha_{i_1}x_1 + \alpha_{i_2}x_2 \longleftrightarrow A_i = [\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}] \in \mathbb{P}^2$

Sia $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j$ una conica passante per $A_0, \dots, A_4$, definisco

$$\mathcal{C} := \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\partial_i\partial_j \in S_2 = \mathbb{C}[\partial_0, \partial_1, \partial_2]_2$$

Proposizione

$\mathcal{C} \cdot f = 0$ cioè $\mathcal{C} \in Ker(Cat_{2,2}(f))$