Teorema di Bézout e forma normale di Hesse

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani
Candidato: Arturo Cappelli

Università degli Studi di Firenze

A. A. 2020/2021

Teorema di Bezout

Molteplicità d'intersezione

Risultante di due polinomi

Punti di flesso

Fascio di Hesse

Forma normale di Hesse

Definizione (Risultante)

Siano f e $g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ due polinomi e siano $f_0 \dots, f_n, g_0, \dots, g_m \in \mathbb{C}[y, z]$ tali che

$$f = f_0 + f_1 x + \cdots + f_n x^n$$
$$g = g_0 + g_1 x + \cdots + g_m x^m$$

Si dice risultante di f e g in x il determinante

$$Res(f, g, x) := det \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_n & & & \\ & f_0 & f_1 & \dots & f_n & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & f_0 & f_1 & \dots & f_n \\ g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_m & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_m \end{bmatrix}$$

Teorema

Siano $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ omogenei di grado ≥ 1 tali che $f(1, 0, 0) \neq 0 \neq g(1, 0, 0)$. Allora $Res(f, g, x) \equiv 0$ se e solo se f e g hanno un fattore omogeneo in comune.

Teorema

Siano $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ omogenei di grado rispettivamente n e m. Allora $Res(f, g, x)$ o è identicamente nullo o è un polinomio omogeneo nelle indeterminate y e z di grado nm.

Teorema

Se $f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$ e $g(x) = (x - \mu_1) \dots (x - \mu_m)$ per qualche $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{C}$ allora

$$Res(f, g, x) = \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_j - \lambda_i)$$

In particolare, $Res(f, gh, x) = Res(f, g, x) Res(f, h, x)$ per ogni $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ e questa identità vale anche per polinomi in più indeterminate.

Teorema

Per ogni coppia di curve algebriche proiettive C, D in $\mathbb{P}^2$ esiste un'unica molteplicità d'intersezione $I_p(C, D)$ tale che:

(i) $I_p(C, D) = I_p(D, C)$

(ii) $I_p(C, D) = \infty$ se p appartiene ad una componente comune di C e D, altrimenti $I_p(C, D)$ è un intero non negativo

(iii) $I_p(C, D) = 0$ se e solo se $p \notin C \cap D$

(iv) Due rette proiettive distinte si incontrano con molteplicità 1 nel loro unico punto di intersezione

(v) Se $C_1 = V(f_1)$, $C_2 = V(f_2)$ e $C = V(f_1 f_2)$, $I_p(C, D) = I_p(C_1, D) + I_p(C_2, D)$

(vi) Se $C = V(f)$ e $D = V(g)$ e $E = V(fr + g)$ per qualche r in $\mathbb{C}[x, y, z]$ tale che $deg\ r + deg\ f = deg\ g$, $I_p(C, D) = I_p(C, E)$

Inoltre se C e D non hanno componenti comuni e si scelgono delle coordinate proiettive tali che

(a) $[1, 0, 0] \notin C \cup D$

(b) $[1, 0, 0]$ non appartiene a nessuna retta per due punti di $C \cap D$

in qualunque $p = [a, b, c] \in C \cap D$ la molteplicità d'intersezione $I_p(C, D)$ di C e D è uguale al più grande $k \in \mathbb{N}$ tale che $(bz - cy)^k$ divida il risultante $Res(f, g, x)$.

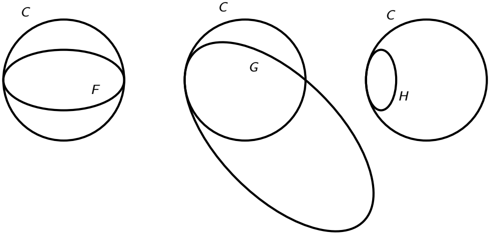

Figura: Esempi di intersezioni con diverse molteplicità: la conica $F = V(x^2 + 4y^2 - z^2)$ interseca la circoferenza unitaria C in due punti, entrambi con molteplicità 2; $G = V(5x^2 + 6xy + 5y^2 + 6yz - 5z^2)$ interseca C ancora in due punti, ma di molteplicità rispettivamente 3 e 1; per $H = V(4x^2 + y^2 + 6xz + 2z^2)$ si ha che $C \cap H$ è composta da un solo punto, di molteplicità 4.

Teorema (Teorema di Bézout)

Due curve proiettive F e G di grado rispettivamente n e m in $\mathbb{P}^2$ senza componenti comuni hanno esattamente nm intersezioni contate con le rispettive molteplicità, ovvero

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = mn$$

Teorema (Esagono mistico di Pascal)

Le coppie di lati opposti di un esagono iscritto in una conica irriducibile in $\mathbb{P}^2$ si intersecano in tre punti allineati.

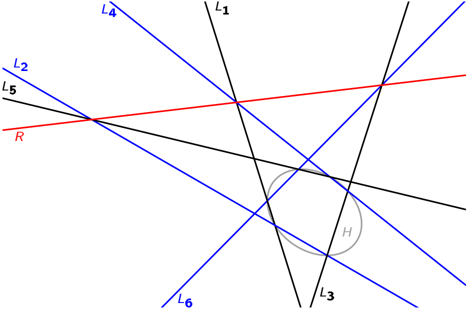

Figura: Esagono mistico di Pascal inscritto in H, definito dalle rette $L_1, \ldots, L_6$. Posto $L_i = V(l_i)$, possiamo trovare una combinazione lineare $\alpha l_1 l_3 l_5 + \beta l_2 l_4 l_6$ in modo che $C = V(\alpha l_1 l_3 l_5 + \beta l_2 l_4 l_6)$ che intersechi H in 7 punti. Per il teorema di Bézout, C ammette H come sua componente. Le intersezioni tra lati opposti appartengono a $R = C \setminus H$, che è una retta.

Definizione

Sia F una curva algebrica proiettiva definita dal polinomio omogeneo $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Un punto non singolare $[a, b, c] \in F$ si dice essere un punto di flesso di F quando

$$\mathcal{H}_f(a, b, c) = 0$$

dove $\mathcal{H}_f$ indica il determinante Hessiano della funzione $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$

Se f è omogeneo di grado d, le sue derivate seconde sono omogenee di grado $d - 2$. Per $d \geq 3$, $\mathcal{H}_f$ è un polinomio omogeneo di grado $3(d-2)$, e quindi possiamo vedere i punti di flesso di F come i punti nonsingolari per F in $F \cap V(\mathcal{H}_f)$. Questo garantisce che una curva di grado $d \geq 3$ ha al più $3d(d-2)$ flessi.

Proposizione

Se F è una curva algebrica proiettiva, p un punto di flesso per F e L la retta tangente a F in p, $I_p(F, L) \geq 3$

Il fascio di Hesse è definito come la famiglia di cubiche nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ definite da

$$E_\lambda = V(x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz)$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{P}^1$

Dato che il fascio è generato dalla cubica di Fermat $x^3 + y^3 + z^3$ e dal suo determinante Hessiano xyz i punti di flesso di una qualunque cubica nonsingolare del fascio appartengono ad ogni cubica del fascio. Questi sono (per ϵ radice terza dell'unità)

$$\begin{array}{lll} p_0 = (0,1,-1) & p_1 = (0,1,\epsilon) & p_2 = (0,1,\epsilon^2) \\ p_3 = (1,0,-1) & p_4 = (1,0,-\epsilon^2) & p_5 = (1,0,-\epsilon) \\ p_6 = (1,-1,0) & p_6 = (1,-\epsilon,0) & p_8 = (1,-\epsilon^2,0) \end{array}$$

Le cubiche nel fascio sono nonsingolari a meno che $\lambda^3 = -27$. In questi casi si può esplicitamente fattorizzare $(x^3 + y^3 + z^3) + \lambda xyz$ ottenendo rispettivamente

$$\begin{aligned} xyz &= 0 \quad (\lambda = \infty) \\ (x+y+z)(x+\epsilon y+\epsilon^2 z)(x+\epsilon^2 y+\epsilon z) &= 0 \quad (\lambda = -3) \\ (x+\epsilon^2 y+\epsilon^2 z)(x+y+\epsilon z)(x+\epsilon y+z) &= 0 \quad (\lambda = -3\epsilon) \\ (x+\epsilon y+\epsilon z)(x+\epsilon^2 y+z)(x+y+\epsilon^2 z) &= 0 \quad (\lambda = -3\epsilon^2) \end{aligned}$$

Questa configurazione di 9 punti e 12 rette è detta configurazione di Hesse.

- Ognuna di queste terne di rette è una cubica del fascio e quindi contiene tutti i punti $p_0, \ldots, p_8$.
- Ognuno dei 9 punti giace esattamente su quattro rette, e ogni retta contiene esattamente 3 punti.
- Per ogni coppia di punti di flesso p_i, p_j, la retta passante per i due punti è una delle dodici viste e quindi passa per un terzo punto di flesso p_k.

Teorema

Ogni cubica piana nonsingolare è equivalente per trasformazione proiettiva ad una curva della forma

$$x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz = 0$$

ovvero ammette una forma canonica di Hesse.

Corollario

Ogni cubica nonsingolare ha esattamente 9 punti di flesso.

Corollario (Newton)

Una retta per due punti di flesso di una cubica nonsingolare interseca la cubica in un terzo punto di flesso