Geometria sferica: sperimentazioni didattiche ed approfondimenti teorici

Erika Martini

Relatore: *Prof. Giorgio Ottaviani*

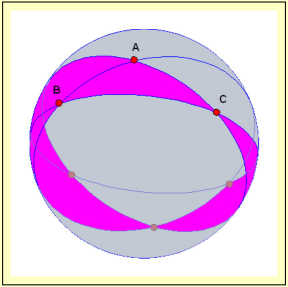
11 luglio 2007

Struttura della tesi:

- Didattica della geometria sferica
- Approfondimenti teorici

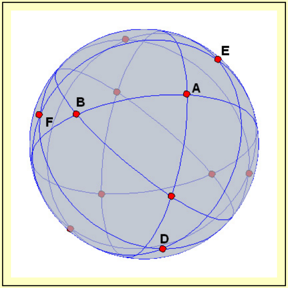
Struttura della tesi:

- Didattica della geometria sferica
- Approfondimenti teorici



Struttura della tesi:

- Didattica della geometria sferica
- Approfondimenti teorici



Suddivisione dell'attività didattica

L'attività didattica è stata svolta presso la classe IIE del Liceo classico Michelangelo grazie e sotto la supervisione della Prof.ssa Laura Gori.
Sono state svolte:

* Ascolto e di comprensione dello svolgimento delle lezioni tenute dalla Prof.ssa Gori
* Test di ingresso
* Svolgimento delle lezioni
* Verifica finale
* Questionario di valutazione dell'attività didattica

Suddivisione dell'attività didattica

L'attività didattica è stata svolta presso la classe IIE del Liceo classico Michelangelo grazie e sotto la supervisione della Prof.ssa Laura Gori.
Sono state svolte:

* Ascolto e di comprensione dello svolgimento delle lezioni tenute dalla Prof.ssa Gori
* Test di ingresso
* Svolgimento delle lezioni
* Verifica finale
* Questionario di valutazione dell'attività didattica

Suddivisione dell'attività didattica

L'attività didattica è stata svolta presso la classe IIE del Liceo classico Michelangelo grazie e sotto la supervisione della Prof.ssa Laura Gori.
Sono state svolte:

* Ascolto e di comprensione dello svolgimento delle lezioni tenute dalla Prof.ssa Gori
* Test di ingresso
* Svolgimento delle lezioni
* Verifica finale
* Questionario di valutazione dell'attività didattica

Suddivisione dell'attività didattica

L'attività didattica è stata svolta presso la classe IIE del Liceo classico Michelangelo grazie e sotto la supervisione della Prof.ssa Laura Gori.
Sono state svolte:

* Ascolto e di comprensione dello svolgimento delle lezioni tenute dalla Prof.ssa Gori
* Test di ingresso
* Svolgimento delle lezioni
* Verifica finale
* Questionario di valutazione dell'attività didattica

Suddivisione dell'attività didattica

L'attività didattica è stata svolta presso la classe IIE del Liceo classico Michelangelo grazie e sotto la supervisione della Prof.ssa Laura Gori.

Sono state svolte:

* Ascolto e di comprensione dello svolgimento delle lezioni tenute dalla Prof.ssa Gori
* Test di ingresso
* Svolgimento delle lezioni
* Verifica finale
* Questionario di valutazione dell'attività didattica

Suddivisione dell'attività didattica

L'attività didattica è stata svolta presso la classe IIE del Liceo classico Michelangelo grazie e sotto la supervisione della Prof.ssa Laura Gori.
Sono state svolte:

* Ascolto e di comprensione dello svolgimento delle lezioni tenute dalla Prof.ssa Gori
* Test di ingresso
* Svolgimento delle lezioni
* Verifica finale
* Questionario di valutazione dell'attività didattica

Obiettivi

Gli obiettivi di questa attività sono:

- ⋆ Introduzione di una nuova geometria rispetto a quella "usuale" euclidea
- ⋆ Migliorare la comprensione della geometria euclidea tramite riflessioni sulla geometria sferica
- ⋆ Aumentare la capacità di immaginazione tridimensionale geometrica
- ⋆ Mostrare i principali risultati sulle geometria sferica, anche in relazione agli analoghi in geometria euclidea
- ⋆ Appassionare la classe a questo nuovo argomento

Obiettivi

Gli obiettivi di questa attività sono:

- ⋆ Introduzione di una nuova geometria rispetto a quella "usuale" euclidea
- ⋆ Migliorare la comprensione della geometria euclidea tramite riflessioni sulla geometria sferica
- ⋆ Aumentare la capacità di immaginazione tridimensionale geometrica
- ⋆ Mostrare i principali risultati sulle geometria sferica, anche in relazione agli analoghi in geometria euclidea
- ⋆ Appassionare la classe a questo nuovo argomento

Obiettivi

Gli obiettivi di questa attività sono:

- ⋆ Introduzione di una nuova geometria rispetto a quella "usuale" euclidea
- ⋆ Migliorare la comprensione della geometria euclidea tramite riflessioni sulla geometria sferica
- ⋆ Aumentare la capacità di immaginazione tridimensionale geometrica
- ⋆ Mostrare i principali risultati sulle geometria sferica, anche in relazione agli analoghi in geometria euclidea
- ⋆ Appassionare la classe a questo nuovo argomento

Obiettivi

Gli obiettivi di questa attività sono:

- ⋆ Introduzione di una nuova geometria rispetto a quella "usuale" euclidea
- ⋆ Migliorare la comprensione della geometria euclidea tramite riflessioni sulla geometria sferica
- ⋆ Aumentare la capacità di immaginazione tridimensionale geometrica
- ⋆ Mostrare i principali risultati sulle geometria sferica, anche in relazione agli analoghi in geometria euclidea
- ⋆ Appassionare la classe a questo nuovo argomento

Obiettivi

Gli obiettivi di questa attività sono:

- ⋆ Introduzione di una nuova geometria rispetto a quella "usuale" euclidea
- ⋆ Migliorare la comprensione della geometria euclidea tramite riflessioni sulla geometria sferica
- ⋆ Aumentare la capacità di immaginazione tridimensionale geometrica
- ⋆ Mostrare i principali risultati sulle geometria sferica, anche in relazione agli analoghi in geometria euclidea
- ⋆ Appassionare la classe a questo nuovo argomento

Obiettivi

Gli obiettivi di questa attività sono:

- ⋆ Introduzione di una nuova geometria rispetto a quella "usuale" euclidea
- ⋆ Migliorare la comprensione della geometria euclidea tramite riflessioni sulla geometria sferica
- ⋆ Aumentare la capacità di immaginazione tridimensionale geometrica
- ⋆ Mostrare i principali risultati sulle geometria sferica, anche in relazione agli analoghi in geometria euclidea
- ⋆ Appassionare la classe a questo nuovo argomento

Idee per migliorare la comprensione

Per migliorare la comprensione della geometria sferica sono stati seguiti i seguenti spunti:

- Divisione della classe in gruppi
- Utilizzo di sfere bianche sulle quali poter disegnare e tracciare circonferenze massime e utilizzo di sfere colorate
- Consegna di schede contenenti lo schema della lezione svolta e degli esercizi

Idee per migliorare la comprensione

Per migliorare la comprensione della geometria sferica sono stati seguiti i seguenti spunti:

- Divisione della classe in gruppi
- Utilizzo di sfere bianche sulle quali poter disegnare e tracciare circonferenze massime e utilizzo di sfere colorate
- Consegna di schede contenenti lo schema della lezione svolta e degli esercizi

Idee per migliorare la comprensione

Per migliorare la comprensione della geometria sferica sono stati seguiti i seguenti spunti:

- Divisione della classe in gruppi
- Utilizzo di sfere bianche sulle quali poter disegnare e tracciare circonferenze massime e utilizzo di sfere colorate
- Consegna di schede contenenti lo schema della lezione svolta e degli esercizi

Idee per migliorare la comprensione

Per migliorare la comprensione della geometria sferica sono stati seguiti i seguenti spunti:

- Divisione della classe in gruppi
- Utilizzo di sfere bianche sulle quali poter disegnare e tracciare circonferenze massime e utilizzo di sfere colorate
- Consegna di schede contenenti lo schema della lezione svolta e degli esercizi

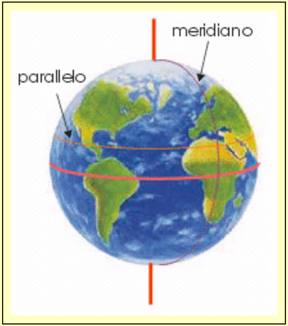
Contenuto della prima lezione:

Lezione 1:

Contenuto della prima lezione:

Lezione 1:

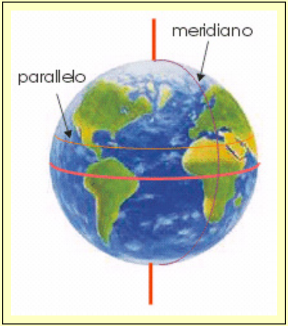
- ⋆ Introduzione alla geometria sferica ed analogie con la Terra



Contenuto della prima lezione:

Lezione 1:

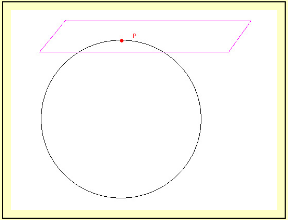
- ⋆ Introduzione alla geometria sferica ed analogie con la Terra
- ⋆ Definizione di sfera e superficie sferica



Contenuto della prima lezione:

Lezione 1:

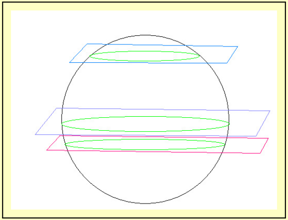
- ⋆ Introduzione alla geometria sferica ed analogie con la Terra
- ⋆ Definizione di sfera e superficie sferica
- ⋆ Intersezione tra la superficie sferica ed un piano



Contenuto della prima lezione:

Lezione 1:

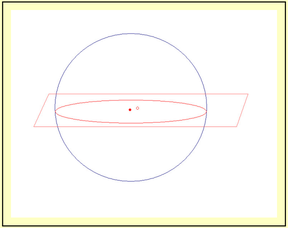
- ⋆ Introduzione alla geometria sferica ed analogie con la Terra
- ⋆ Definizione di sfera e superficie sferica
- ⋆ Intersezione tra la superficie sferica ed un piano



Contenuto della prima lezione:

Lezione 1:

- ⋆ Introduzione alla geometria sferica ed analogie con la Terra
- ⋆ Definizione di sfera e superficie sferica
- ⋆ Intersezione tra la superficie sferica ed un piano



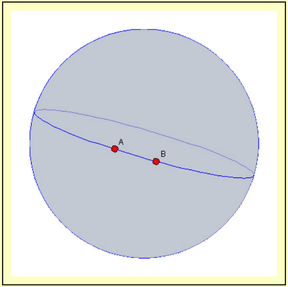
Contenuto della seconda lezione:

Lezione 2:

Contenuto della seconda lezione:

Lezione 2:

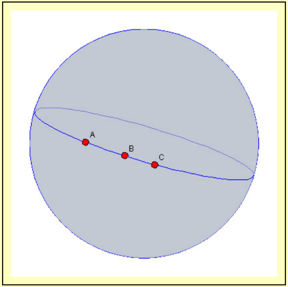
- ⋆ Definizione di retta e confronto con la retta euclidea



Contenuto della seconda lezione:

Lezione 2:

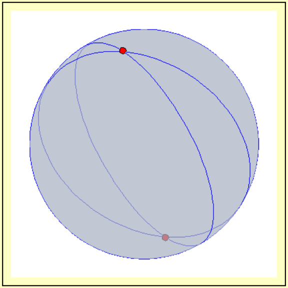
- ⋆ Definizione di retta e confronto con la retta euclidea
- ⋆ Rette passanti per due o tre punti



Contenuto della seconda lezione:

Lezione 2:

- ⋆ Definizione di retta e confronto con la retta euclidea
- ⋆ Rette passanti per due o tre punti
- ⋆ Osservazioni sull'intersezione di rette



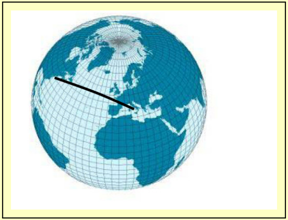
Contenuto della terza lezione

Lezione 3:

Contenuto della terza lezione

Lezione 3:

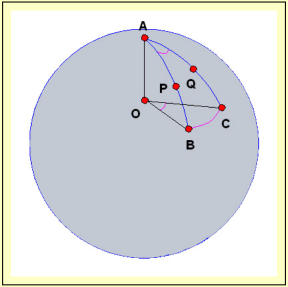
- ⋆ Distanza e geodetica



Contenuto della terza lezione

Lezione 3:

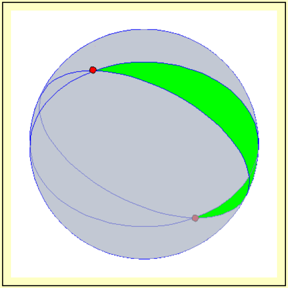
- ⋆ Distanza e geodetica
- ⋆ Misura degli angoli



Contenuto della terza lezione

Lezione 3:

- ⋆ Distanza e geodetica
- ⋆ Misura degli angoli
- ⋆ Fusi e doppi fusi sferici



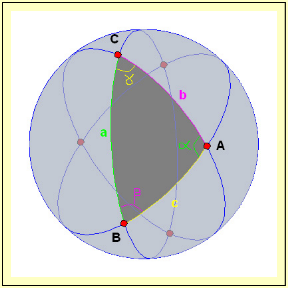
Contenuto della quarta lezione

Lezione 4:

Contenuto della quarta lezione

Lezione 4:

- ⋆ Triangolo sferico e sua area

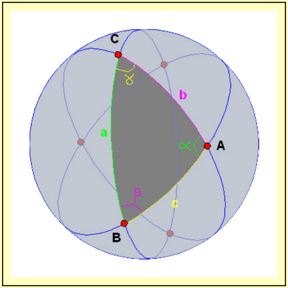


Contenuto della quarta lezione

Lezione 4:

- ⋆ Triangolo sferico e sua area

$$\boxed{A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)}$$



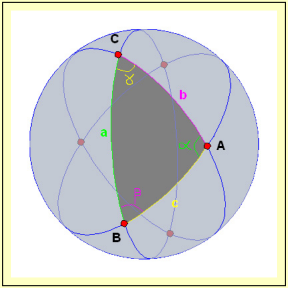
Contenuto della quarta lezione

Lezione 4:

- ⋆ Triangolo sferico e sua area

$$\boxed{A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)}$$

- ⋆ Osservazioni sull'area di un triangolo sferico



Argomenti della verifica

- concetto di sfera e di superficie sferica e loro differenze
- definizione di retta e confronto con la retta euclidea
- rette passanti per due o tre punti
- osservazioni sull'intersezione di rette
- geodetica e distanza
- formula per determinare l'area di un triangolo
- somma degli angoli interni di un triangolo

Domanda 11. Dato un triangolo con angoli interni α, β, γ, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nelle due geometrie (sf.,eucl.):

1. La somma degli angoli interni è minore di π.
2. La somma degli angoli interni è uguale a π.
3. La somma degli angoli interni è maggiore di π.

Domanda 11. Dato un triangolo con angoli interni α, β, γ, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nelle due geometrie (sf.,eucl.):

1. La somma degli angoli interni è minore di π.
2. La somma degli angoli interni è uguale a π.
3. La somma degli angoli interni è maggiore di π.

Domanda 11. Dato un triangolo con angoli interni α, β, γ, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nelle due geometrie (sf.,eucl.):

1. La somma degli angoli interni è minore di π.
   Risp. corretta: FF *Indicata da: 18/19*
2. La somma degli angoli interni è uguale a π.
3. La somma degli angoli interni è maggiore di π.

Domanda 11. Dato un triangolo con angoli interni α, β, γ, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nelle due geometrie (sf.,eucl.):

1. La somma degli angoli interni è minore di π.
   Risp. corretta: FF *Indicata da: 18/19*
2. La somma degli angoli interni è uguale a π.
3. La somma degli angoli interni è maggiore di π.

Domanda 11. Dato un triangolo con angoli interni α, β, γ, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nelle due geometrie (sf.,eucl.):

1. La somma degli angoli interni è minore di π.
   Risp. corretta: FF *Indicata da: 18/19*
2. La somma degli angoli interni è uguale a π.
   Risp. corretta: FV *Indicata da: 16/19*
3. La somma degli angoli interni è maggiore di π.

Domanda 11. Dato un triangolo con angoli interni α, β, γ, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nelle due geometrie (sf.,eucl.):

1. La somma degli angoli interni è minore di π.
   Risp. corretta: FF *Indicata da: 18/19*
2. La somma degli angoli interni è uguale a π.
   Risp. corretta: FV *Indicata da: 16/19*
3. La somma degli angoli interni è maggiore di π.

Domanda 11. Dato un triangolo con angoli interni α, β, γ, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nelle due geometrie (sf.,eucl.):

1. La somma degli angoli interni è minore di π.
   Risp. corretta: FF *Indicata da: 18/19*
2. La somma degli angoli interni è uguale a π.
   Risp. corretta: FV *Indicata da: 16/19*
3. La somma degli angoli interni è maggiore di π.
   Risp. corretta: VF *Indicata da: 16/19*

Commenti sull'esito della verifica finale: risultati inaspettati

- buona acquisizione dei concetti fondamentali
- capacità di analisi dei casi particolari
- predisposizione di un atteggiamento riflessivo e curioso verso la materia
- scarsa inclinazione allo studio delle formule

Commenti sull'esito della verifica finale: risultati inaspettati

* buona acquisizione dei concetti fondamentali
* capacità di analisi dei casi particolari
* predisposizione di un atteggiamento riflessivo e curioso verso la materia
* scarsa inclinazione allo studio delle formule

Commenti sull'esito della verifica finale: risultati inaspettati

* buona acquisizione dei concetti fondamentali
* capacità di analisi dei casi particolari
* predisposizione di un atteggiamento riflessivo e curioso verso la materia
* scarsa inclinazione allo studio delle formule

Commenti sull'esito della verifica finale: risultati inaspettati

* buona acquisizione dei concetti fondamentali
* capacità di analisi dei casi particolari
* predisposizione di un atteggiamento riflessivo e curioso verso la materia
* scarsa inclinazione allo studio delle formule

Commenti sull'esito della verifica finale: risultati inaspettati

* buona acquisizione dei concetti fondamentali
* capacità di analisi dei casi particolari
* predisposizione di un atteggiamento riflessivo e curioso verso la materia
* scarsa inclinazione allo studio delle formule

DOMANDE DI VALUTAZIONE DELL'ATTIVITÀ

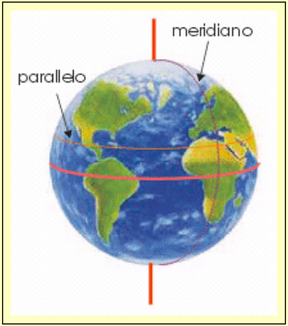
Sapevi che esistono altre geometrie oltre a quella euclidea?	4	9	3	3
Gli argomenti delle lezioni svolte sono stati interessanti?	0	0	10	9
È stato impegnativo seguire le lezioni?	1	10	6	2
Gli argomenti introdotti in ogni lezione erano proporzionati con il tempo disponibile?	0	4	8	7
Le attività svolte sono state utili per capire meglio la geometria sferica?	0	0	3	16
Pensi che questo argomento ti sarà utile per comprendere meglio la geometria?	0	4	8	7
Ci sono stati dei risultati che ti hanno affascinato o incuriosito?	0	1	13	5

Argomenti piaciuti maggiormente

- Introduzione ed analogie con la Terra $\dashrightarrow$ 5
- La retta in geometria sferica e differenze con il caso euclideo $\dashrightarrow$ 11
- Il triangolo sferico, la sua area ed osservazioni $\dashrightarrow$ 4

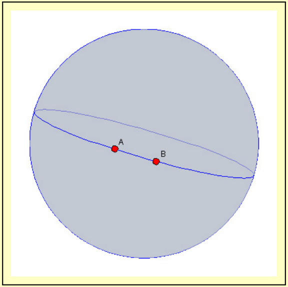
Argomenti piaciuti maggiormente

- Introduzione ed analogie con la Terra ⇢ 5
- La retta in geometria sferica e differenze con il caso euclideo ⇢ 11
- Il triangolo sferico, la sua area ed osservazioni ⇢ 4



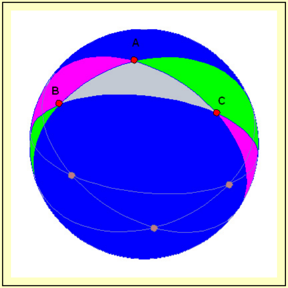
Argomenti piaciuti maggiormente

- Introduzione ed analogie con la Terra --→ 5
- La retta in geometria sferica e differenze con il caso euclideo --→ 11
- Il triangolo sferico, la sua area ed osservazioni --→ 4



Argomenti piaciuti maggiormente

- Introduzione ed analogie con la Terra --→ 5
- La retta in geometria sferica e differenze con il caso euclideo --→ 11
- Il triangolo sferico, la sua area ed osservazioni --→ 4



Triangolo polare

Consideriamo il lato $\widehat{AB}$, questo appartiene ad una circonferenza massima avente due poli: uno di essi sta dalla stessa parte del vertice rimanente (C) rispetto al lato $\widehat{AB}$. Questo polo (C') è un vertice del triangolo polare $(\widehat{A'B'C'})$.

Definizione

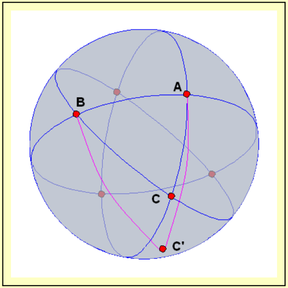
Dato il triangolo sferico $\widehat{ABC}$, il suo triangolo polare è il triangolo sferico i cui vertici sono i poli dei lati del triangolo $\widehat{ABC}$.

Triangolo polare

Consideriamo il lato $\widehat{AB}$, questo appartiene ad una circonferenza massima avente due poli: uno di essi sta dalla stessa parte del vertice rimanente (C) rispetto al lato $\widehat{AB}$. Questo polo (C') è un vertice del triangolo polare $(\widehat{A'B'C'})$.

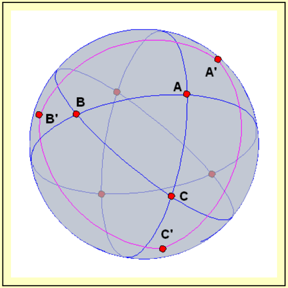
Definizione

Dato il triangolo sferico $\widehat{ABC}$, il suo triangolo polare è il triangolo sferico i cui vertici sono i poli dei lati del triangolo $\widehat{ABC}$.



Triangolo polare

Consideriamo il lato $\widehat{AB}$, questo appartiene ad una circonferenza massima avente due poli: uno di essi sta dalla stessa parte del vertice rimanente (C) rispetto al lato $\widehat{AB}$. Questo polo (C') è un vertice del triangolo polare $(\widehat{A'B'C'})$.



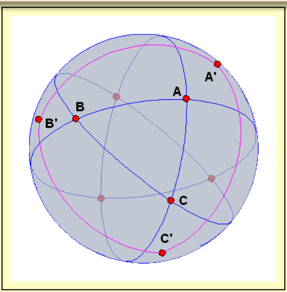
Definizione

Dato il triangolo sferico $\widehat{ABC}$, il suo triangolo polare è il triangolo sferico i cui vertici sono i poli dei lati del triangolo $\widehat{ABC}$.

Verso il Teorema di dualità polare

Proposizione

Se $\widehat{A'B'C'}$ è il triangolo polare di $\widehat{ABC}$, allora $\widehat{ABC}$ è il triangolo polare di $\widehat{A'B'C'}$.



Teorema di dualità polare

I lati e gli angoli del triangolo polare sono rispettivamente supplementari degli angoli e dei lati del triangolo sferico.

Triangolo polare
$a', b', c' \longrightarrow$ *lati*
$\alpha', \beta', \gamma' \longrightarrow$ *angoli*

$$\star \begin{cases} a' = (\pi - \alpha)R \\ b' = (\pi - \beta)R \\ c' = (\pi - \gamma)R \end{cases} \qquad \blacksquare \begin{cases} \alpha' = \pi - \frac{a}{R} \\ \beta' = \pi - \frac{b}{R} \\ \gamma' = \pi - \frac{c}{R} \end{cases}$$

Teorema di dualità polare

I lati e gli angoli del triangolo polare sono rispettivamente supplementari degli angoli e dei lati del triangolo sferico.

Triangolo polare
$a', b', c' \rightarrow$ lati
$\alpha', \beta', \gamma' \rightarrow$ angoli

$$\star \begin{cases} a' = (\pi - \alpha)R \\ b' = (\pi - \beta)R \\ c' = (\pi - \gamma)R \end{cases} \qquad \blacksquare \begin{cases} \alpha' = \pi - \frac{a}{R} \\ \beta' = \pi - \frac{b}{R} \\ \gamma' = \pi - \frac{c}{R} \end{cases}$$

Teorema di dualità polare

I lati e gli angoli del triangolo polare sono rispettivamente supplementari degli angoli e dei lati del triangolo sferico.

Triangolo sferico	*Triangolo polare*
$a, b, c \longrightarrow$ *lati*	$a', b', c' \longrightarrow$ *lati*
$\alpha, \beta, \gamma \longrightarrow$ *angoli*	$\alpha', \beta', \gamma' \longrightarrow$ *angoli*

$$\bigstar \begin{cases} a' = (\pi - \alpha)R \\ b' = (\pi - \beta)R \\ c' = (\pi - \gamma)R \end{cases} \qquad \blacksquare \begin{cases} \alpha' = \pi - \frac{a}{R} \\ \beta' = \pi - \frac{b}{R} \\ \gamma' = \pi - \frac{c}{R} \end{cases}$$

Teorema di dualità polare

I lati e gli angoli del triangolo polare sono rispettivamente supplementari degli angoli e dei lati del triangolo sferico.

Triangolo sferico	*Triangolo polare*
$a, b, c \longrightarrow$ *lati*	$a', b', c' \longrightarrow$ *lati*
$\alpha, \beta, \gamma \longrightarrow$ *angoli*	$\alpha', \beta', \gamma' \longrightarrow$ *angoli*

$$\bigstar \begin{cases} a' = (\pi - \alpha)R \\ b' = (\pi - \beta)R \\ c' = (\pi - \gamma)R \end{cases} \qquad \blacksquare \begin{cases} \alpha' = \pi - \frac{a}{R} \\ \beta' = \pi - \frac{b}{R} \\ \gamma' = \pi - \frac{c}{R} \end{cases}$$

Teorema di dualità polare

I lati e gli angoli del triangolo polare sono rispettivamente supplementari degli angoli e dei lati del triangolo sferico.

Triangolo sferico	*Triangolo polare*
$a, b, c \longrightarrow$ *lati*	$a', b', c' \longrightarrow$ *lati*
$\alpha, \beta, \gamma \longrightarrow$ *angoli*	$\alpha', \beta', \gamma' \longrightarrow$ *angoli*

$$\bigstar \begin{cases} a' = (\pi - \alpha)R \\ b' = (\pi - \beta)R \\ c' = (\pi - \gamma)R \end{cases} \qquad \blacksquare \begin{cases} \alpha' = \pi - \frac{a}{R} \\ \beta' = \pi - \frac{b}{R} \\ \gamma' = \pi - \frac{c}{R} \end{cases}$$

Corollari del Teorema di dualità

Teorema di Carnot sferico:

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right) = \cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right) \\ \cos(\beta)\sin\left(\frac{c}{R}\right)\sin\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{c}{R}\right)\cos\left(\frac{a}{R}\right) \\ \cos(\gamma)\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{b}{R}\right) = \cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right) \end{cases}$$

Teorema di Carnot polare:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{a}{R}\right)\sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma \\ \cos\left(\frac{b}{R}\right)\sin\gamma\sin\alpha = \cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{c}{R}\right)\sin\alpha\sin\beta = \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta \end{cases}$$

Corollari del Teorema di dualità

Teorema di Carnot sferico:

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right) = \cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right) \\ \cos(\beta)\sin\left(\frac{c}{R}\right)\sin\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{c}{R}\right)\cos\left(\frac{a}{R}\right) \\ \cos(\gamma)\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{b}{R}\right) = \cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right) \end{cases}$$

Teorema di Carnot polare:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{a}{R}\right)\sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma \\ \cos\left(\frac{b}{R}\right)\sin\gamma\sin\alpha = \cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{c}{R}\right)\sin\alpha\sin\beta = \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta \end{cases}$$

Corollari del Teorema di dualità

Teorema di Carnot sferico:

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right) = \cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right) \\ \cos(\beta)\sin\left(\frac{c}{R}\right)\sin\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{c}{R}\right)\cos\left(\frac{a}{R}\right) \\ \cos(\gamma)\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{b}{R}\right) = \cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right) \end{cases}$$

Teorema di Carnot polare:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{a}{R}\right)\sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma \\ \cos\left(\frac{b}{R}\right)\sin\gamma\sin\alpha = \cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{c}{R}\right)\sin\alpha\sin\beta = \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta \end{cases}$$

Corollari del Teorema di dualità

Quarto criterio di uguaglianza per i triangoli sferici

Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora sono uguali

Formula per determinare l'area di un triangolo in funzione dei soli angoli:

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Formula per determinare l'area di un triangolo in funzione dei soli lati:

$$A = R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right)}\right] + R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right)}\right] + R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{b}{R}\right)}\right] - \pi R^2$$

Formula per determinare l'area di un triangolo in funzione dei soli angoli:

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Formula per determinare l'area di un triangolo in funzione dei soli lati:

$$\begin{aligned} A = R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right)}\right] \\ + R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right)}\right] \\ + R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{b}{R}\right)}\right] - \pi R^2 \end{aligned}$$

Formula per determinare l'area di un triangolo in funzione dei soli angoli:

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Formula per determinare l'area di un triangolo in funzione dei soli lati:

$$\begin{aligned} A = {} & R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin\left(\frac{b}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right)}\right] \\ & + R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{c}{R}\right)}\right] \\ & + R^2 \arccos\left[\frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{b}{R}\right)}\right] - \pi R^2 \end{aligned}$$

Formula che lega l'area di un triangolo equilatero e l'area del suo triangolo polare:

$$A_{polare} = R^2 \left\{ 2\pi - 3 \arccos \left[\frac{\cos\left(\frac{A+\pi R^2}{3R^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{A+\pi R^2}{3R^2}\right)} \right] \right\}$$

Termine presentazione

FINE