Invarianti per il Teorema di Poncelet

Giada Giuliani

16 Luglio 2008

Indice

Introduzione

Il *Teorema di Poncelet* è un risultato classico della geometria proiettiva sul piano. Nella figura che segue vediamo un pentagono inscritto nell'ellisse $\mathcal{D}$ e circoscritto all'ellisse $\mathcal{C}$. Il pentagono può essere pensato come una traiettoria chiusa, percorsa periodicamente da un punto. Il teorema afferma che partendo da un qualunque punto di $\mathcal{D}$, la traiettoria corrispondente si chiude ancora dopo 5 passi. In generale, questo vale per poligoni di n lati, con $n \geq 3$ qualunque. Il pentagono tratteggiato rappresenta un'altra traiettoria.

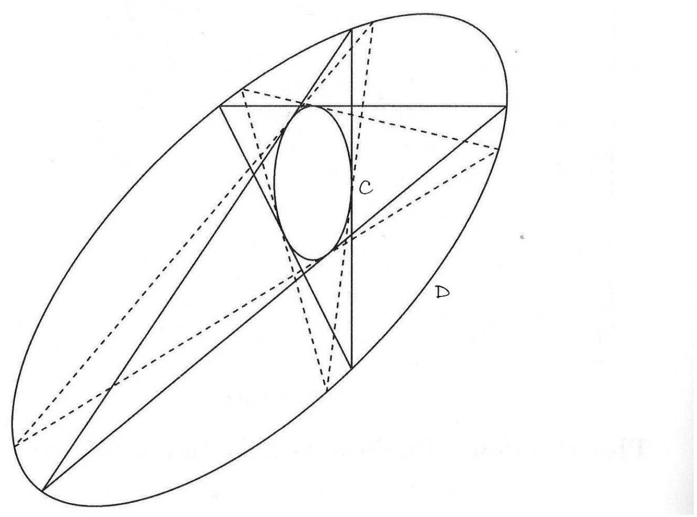

Figura 1: Il Teorema di Poncelet

Tutte le dimostrazioni note del teorema esulano dagli strumenti classici della geometria piana. Sono note dimostrazioni che usano proprietà degli integrali (crf. [FT]), oppure considerazioni fisiche sull'attrazione gravitazionale. In questa tesi dimostriamo il teorema nell'ambito della *geometria algebrica* utilizzando alcune proprietà delle curve ellittiche, in particolare dei loro automorfismi.

Il punto di vista che abbiamo scelto per inquadrare il teorema è quello della *teoria degli invarianti*. Infatti, la condizione per cui esista un pentagono come nella figura precedente è una condizione sulla coppia di coniche $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Questa condizione è invariante per il gruppo $SL(3)$ che agisce sul piano proiettivo.

Gli invarianti delle coppie di coniche descritte da matrici A e B sono generati, grazie a un teorema fondamentale di teoria degli invarianti (crf. [Dolga1]), dai coefficienti che appaiono nell'equazione

$$\det(A + tB) = \Delta + t\Theta + t^2\Theta' + t^3\Delta'.$$

Qui $\Delta = \det(A)$ e $\Delta' = \det(B)$ hanno un significato geometrico ben noto (coniche singolari). Studiamo nel primo capitolo il significato geometrico degli altri invarianti Θ e Θ', che è legato al concetto di *apolarità tra coniche*. Questo ci ha dato lo spunto per un richiamo su apolarità e polarità. Abbiamo verificato in particolare un teorema sui triangoli autopolari, che ha uno spirito simile al teorema di Poncelet.

Gli invarianti che intervengono nel teorema di Poncelet sono più complessi e sono espressioni polinomiali in Δ, Δ', Θ e Θ', che determiniamo per $n \leq 4$. La nostra dimostrazione è originale e segue una via diversa da quella esposta per $n = 3$ in [Dolga2]. Il grado di questi invarianti vale $\frac{1}{2}T(n)$ rispetto a $\mathcal{C}$ e $\frac{1}{4}T(n)$ rispetto a $\mathcal{D}$, dove $T(n)$ è il numero di punti di n-torsione primitivi di una curva ellittica. Ad esempio, $T(3) = 8$ e $T(4) = 12$. La dimostrazione di questa formula per i gradi necessita lo studio di una versione in $\mathbb{P}^3$ del teorema di Poncelet per le quadriche. Per questo abbiamo utilizzato l'articolo espositivo di W.Barth e Th.Bauer (crf. [BB]).

Usando la teoria degli invarianti ci riconduciamo a semplici situazioni geometriche con poligoni (triangoli e rettangoli) contemporaneamente inscritti e circoscritti a ellissi.

Il significato invariante delle equazioni ci permette di dare delle applicazioni a due formule classiche, rispettivamente dovute a Eulero e Chapple per i triangoli e a Fuss per i quadrilateri. Le dimostrazioni che diamo di queste formule sono originali e illustrano la forza della teoria degli invarianti. Per permettere un confronto riportiamo anche le dimostrazioni classiche di queste due formule, prese da [Dorrie], che sono senz'altro più laboriose.

Capitolo 1

Polarità e Apolarità

1.1 Polarizzazione e restituzione

Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K e supponiamo che $\dim E = n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Indichiamo con $Pol_m(E)$ lo spazio delle funzioni polinomiali omogenee di grado m su E.

Definizione 1.1.1. ***(Definizione di polinomio omogeneo indipendente dalle coordinate)*** *Un'applicazione $P : E \to K$ è una funzione polinomiale omogenea di grado m se le seguenti proprietà sono soddisfatte:*

i. $P(tv) = t^m P(v), \forall t \in K$;

ii. la funzione $pol(P) : E^m \to K$ definita da

$$pol(P)(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,m\}} (-1)^{m-\sharp I} P\left(\sum_{i \in I} v_i\right) \tag{1.1}$$

è multilineare.

Possiamo osservare immediatamente che la funzione $\mathrm{pol}(P)$ è una forma multilineare simmetrica. Inoltre P può essere ricostruito da $\mathrm{pol}(P)$ mediante la formula

$$m!P(v) = \mathrm{pol}(P)(v, \ldots, v). \tag{1.2}$$

Infatti

$$\mathrm{pol}(P)(v, \ldots, v) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,m\}} (-1)^{m-\sharp I} P\left(\sum_{i \in I} v\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P\left(\sum_{k=1}^{m} v\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^m P(v) = m! P(v),$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato la seguente formula combinatoria per il fattoriale:

Proposizione 1.1.1.

$$m! = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^m$$

Dimostrazione. $m!$ conta il numero di funzioni biunivoche da un insieme di cardinalità m a un insieme di cardinalità m, cioè

$$m! = \sharp\{f : M \to N : |M|, |N| = m \text{ e } |Imf| = m\}.$$

Poniamo $A_i = \{f : M \to N : i \notin Imf\}$ allora

$$m! = m^m - \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right|.$$

Per il principio di inclusione-esclusione abbiamo

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \binom{m}{m-k} (m-k)^m$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k} k^m,$$

dove, a parte l'ultimo banale cambio di variabili, abbiamo utilizzato il fatto che l'intersezione $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ contava il numero di funzioni da un insieme di cardinalità m in un insieme di $m-k$ elementi. Pertanto

$$m! = m^m + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^m = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^m.$$

□

La forma multilineare simmetrica $\mathrm{pol}(P)$ è chiamata *polarizzazione di* P.

Definizione 1.1.2. *Sia* $F : E^m \to K$ *una forma multilineare simmetrica. La funzione* $res(F) : E \to K$ *definita da*

$$res(F)(v) = F(v, \dots, v) \tag{1.3}$$

è chiamata restituzione *di* F.

Con passaggi analoghi a quelli fatti per ricavare la formula (1.2), si può dimostrare la formula

$$\mathrm{pol}(\mathrm{res}(F))(v, \dots, v) = m!F(v, \dots, v).$$

Applicando poi il teorema che segue riusciamo anche a ricavare

$$\mathrm{pol}(\mathrm{res}(F))(v_1, \dots, v_m) = m!F(v_1, \dots, v_m). \tag{1.4}$$

Abbiamo quindi che $\mathrm{res}(F)$ soddisfa le proprietà (i) e (ii) della definizione 1.1.1, cioè che $\mathrm{res}(F) \in Pol_m(E)$. Prima di dimostrare il teorema che porta alla formula (1.4) osserviamo che lavorando spesso con campi di caratteristica zero lo spazio $Pol_m(E)$ si può identificare con S^mE, ossia con lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado m.

Teorema 1.1.1. *Siano* $F, G : E^m \to K$ *due forme multilineari simmetriche. Se* $F(v, \dots, v) = G(v, \dots, v)$ $\forall v \in E$ *allora* $F = G$.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $F(v, \dots, v) = 0$ $\forall v \in E$ allora $F = 0$. Consideriamo l'insieme delle potenze m-esime di polinomi lineari, cioè

$$W = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i l_i^m \mid \lambda_i \in K, l_i \in E \right\} = \langle l^m \mid l \in E \rangle.$$

Ovviamente si ha che $W \subseteq S^mE$. In realtà dimostreremo che vale proprio l'uguale in questa inclusione.
Se per assurdo $W \subsetneqq S^mE$ allora esisterebbe un iperpiano che contiene W. Indichiamo con $\{x_0^m, x_0^{m-1}x_1, \dots\}$ la base di S^mE. Allora l'equazione di questo iperpiano è

$$\sum_{i_0+\dots+i_n=m} a_{i_0\dots i_n} \partial x_0^{i_0} \dots \partial x_n^{i_n} = 0,$$

con $i_0 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n$. Sia $l = \sum_{i=0}^n c_i x_i$, quindi

$$l^m = \sum_{j_0+\ldots+j_n=m} c_0^{j_0} \ldots c_n^{j_n} x_0^{j_0} \ldots x_n^{j_n}.$$

In particolare sappiamo però che l'iperpiano contiene l^m e questo significa che

$$\sum a_{i_0 \ldots i_n} c_0^{j_0} \ldots c_n^{j_n} = 0, \quad \forall c_i.$$

L'unica possibilità è che tutti gli a_{i_k}, con $k = 0 \ldots n$, siano nulli, ma questa è una contraddizione. Quindi abbiamo che $W = S^m E$. Poiché vale quest'ultima uguaglianza possiamo concludere la dimostrazione osservando che

$$F\left(\sum_i \lambda_i l_i^m\right) = \sum_i \lambda_i F(l_i^m) = 0,$$

infatti $F(l_i^m) = F(l_i, \ldots, l_i)$ è zero per ipotesi.

$\square$

Se $\mathrm{char}(K) = 0$, otteniamo che ogni $P \in Pol_m(E)$ è uguale alla restituzione di un'unica forma m-multilineare simmetrica, e precisamente

$$\mathrm{res}\left(\frac{1}{m!}\mathrm{pol}(P)\right) = P. \tag{1.5}$$

Vediamo a questo punto alcuni esempi, in cui scegliamo $\dim E = 2$ per semplificare i calcoli.

Esempio 1.1.1. *Siano $v = (x_0, x_1)$, $w = (y_0, y_1) \in E$ e sia $P \in Pol_2(E)$ una forma quadratica in due variabili*

$$P = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2.$$

Dalla formula (1.1) abbiamo che

$$pol(P)(v, w) = P(v+w) - P(v) - P(w) = 2a_0 x_0 y_0 + 2a_1 x_0 y_1 + 2a_1 x_1 y_0 + 2a_2 x_1 y_1,$$

che è proprio una forma bilineare simmetrica. Inoltre si verifica facilmente che vale la formula (1.2), cioè $2P(v) = pol(P)(v, v)$.

Esempio 1.1.2. *Prendiamo ora* $m = 3$. *Per* $P \in Pol_3(E)$ *e* $v_1 = (x_0, x_1)$, $v_2 = (y_0, y_1), v_3 = (z_0, z_1) \in E$ *abbiamo dalla (1.1)*

$$pol(P)(v_1, v_2, v_3) = P(v_1)+P(v_2)+P(v_3)-P(v_1+v_2)-P(v_2+v_3)-P(v_1+v_3)$$

$$+P(v_1 + v_2 + v_3).$$

Scegliamo

$$P = x_0^3 + x_0^2 x_1;$$

con un pò di semplici calcoli si ricava

$$pol(P)(v_1, v_2, v_3) = 6x_0y_0z_0 + 2x_0y_0z_1 + 2x_1y_0z_0 + 2x_0y_1z_0,$$

forma trilineare simmetrica su E. *Consideriamo ora* $F : E \times E \times E \to K$, *forma trilineare simmetrica definita come*

$$F(v_1, v_2, v_3) = x_0y_1z_1 + x_1y_0z_1 + x_1y_1z_0,$$

e applichiamo la formula (1.3); otteniamo

$$res(F)(v_1) = F(v_1, v_1, v_1) = 3x_0x_1^2 \ \in Pol_3(E).$$

Osserviamo che

$$pol(res(F))(v_1, v_2, v_3) = 6x_0y_1z_1 + 6x_1y_0z_1 + 6x_1y_1z_0 = 3!F(v_1, v_2, v_3),$$

che è proprio la formula (1.4). Per concludere osserviamo che vale l'uguaglianza (1.5); infatti, utilizzando il polinomio P *precedente abbiamo*

$$res\left(\frac{1}{6}pol(P)\right)(v_1) = res\left(x_0y_0z_0 + \frac{1}{3}x_0y_0z_1 + \frac{1}{3}x_1y_0z_0 + \frac{1}{3}x_0y_1z_0\right)(v_1)$$

$$= x_0^3 + x_0^2x_1 = P(v_1).$$

Supponiamo che P sia uguale al prodotto di m forme lineari, $P = L_1 \dots L_m$. Allora abbiamo

$$\mathrm{pol}(P)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{I \subset \{1,\dots,m\}} (-1)^{m-\sharp I} L_1 \dots L_m \left(\sum_{i \in I} v_i\right)$$

$$= \sum_{I\subset\{1,\ldots,m\}} (-1)^{m-\sharp I} L_1\left(\sum_{i\in I} v_i\right)\ldots L_m\left(\sum_{i\in I} v_i\right)$$

$$= \sum_{I\subset\{1,\ldots,m\}} (-1)^{m-\sharp I} \left(\sum_{i\in I} L_1(v_i)\right)\ldots\left(\sum_{i\in I} L_m(v_i)\right)$$

$$= \sum_{\sigma\in\Sigma_m} L_1(v_{\sigma(1)})\ldots L_m(v_{\sigma(m)}) = \sum_{\sigma\in\Sigma_m} L_{\sigma(1)}(v_1)\ldots L_{\sigma(m)}(v_m).$$

Sia $(\xi_0,\ldots,\xi_n)$ una base di E e $(t_0,\ldots,t_n)$ una base di $E^\vee$. Ogni $v\in E$ può essere scritto in modo unico come $v=\sum_{i=0}^n t_i(v)\xi_i$. Sia $Sym_m(E)$ lo spazio vettoriale delle forme m-multilineari simmetriche su E^m. $\forall v_1,\ldots,v_m\in E$ e $\forall F\in Sym_m(E)$ abbiamo

$$F(v_1,\ldots,v_m) = F\left(\sum_{i=0}^n t_i(v_1)\xi_i,\ldots,\sum_{i=0}^n t_i(v_m)\xi_i\right)$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^n t_{i_1}(v_1)\ldots t_{i_m}(v_m)F(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_m}).$$

Prendendo $v_1=\ldots=v_m=v$, otteniamo che

$$\mathrm{res}(F)(v) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^n t_{i_1}(v)\ldots t_{i_m}(v)F(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_m})$$

$$= \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^n a_{i_1\ldots i_m} t_{i_1}\ldots t_{i_m}\right)(v),$$

dove abbiamo posto $a_{i_1\ldots i_m}=F(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_m})$. Quindi ogni $P\in Pol_m(E)$ può essere scritto in modo unico come somma di monomi della forma $t_{i_1}\ldots t_{i_m}$. E questa è proprio la **definizione di polinomio omogeneo dipendente dalle coordinate**.

Inoltre, tramite la funzione polarizzazione possiamo definire gli isomorfismi

$$Pol_m(E)^\vee \cong Pol_m(E^\vee) \text{ e } Pol_m(E^\vee)^\vee \cong Pol_m(E).$$

1.2 Polarità

Sia $\mathcal{C}$ una conica liscia in $\mathbb{P}^2(E)$ di equazione $x^tAx = 0$, dove A è una matrice simmetrica 3×3 e $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Sia $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(E)$.

Definizione 1.2.1. *La* polare *del punto y rispetto a $\mathcal{C}$ è la retta r_y di equazione*

$$y^tAx = 0$$

e y si chiama polo *di r_y.*

Osservazione 1.2.1.

$$y \in r_y \Leftrightarrow y^tAy = 0 \Leftrightarrow y \in \mathcal{C}$$

e in tal caso r_y è la tangente in y a $\mathcal{C}$.

Infatti: preso un punto $x \in \mathbb{P}^2(E)$, la retta s tra x e y la posso parametrizzare con $y + \lambda x$; $s \cap \mathcal{C}$ è l'insieme dei punti di s determinati dai valori di λ tale che

$$(y + \lambda x)^tA(y + \lambda x) = 0,$$

cioè

$$y^tAy + 2\lambda x^tAy + \lambda^2x^tAx = 0.$$

Poiché vogliamo come unica soluzione $\lambda = 0$, si ottiene $x^tAy = 0$, cioè y appartiene alla polare r_y.
Abbiamo visto che se $y \in \mathcal{C}$ la polare di y è proprio la retta tangente; vediamo come è fatta la polare di un punto y qualsiasi.

Proposizione 1.2.1. *Siano z_1 e z_2 i punti in cui le tangenti da y a $\mathcal{C}$ incontrano $\mathcal{C}$. Allora la retta per z_1 e z_2 è la polare di y.*

Dimostrazione.

$$y \in \text{polare di } z_1 \Rightarrow y^tAz_1 = 0$$

e

$$y \in \text{polare di } z_2 \Rightarrow y^tAz_2 = 0,$$

quindi $y^tAx = 0$ ha come soluzioni combinazioni lineari di z_1 e z_2.

□

Teorema 1.2.1. *(Legge di reciprocità polare)*

$$y \in \textit{polare di } z \Leftrightarrow z \in \textit{polare di } y.$$

Come immediata conseguenza di questo teorema si ha che data una retta l esiste uno ed un solo punto y che sia polo di l: infatti tutte le polari dei punti di l si incontrano in un solo punto.

1.2.1 Il punto di vista moderno

- *Grado 2*
  Nel caso $m = 2$ sappiamo dall'algebra lineare che data $F : E \times E \to K$ forma bilineare simmetrica, la forma quadratica Q associata a F è definita da
  $$Q(v) = F(v, v), \text{ con } v \in E.$$
  Viceversa se $Q : E \to K$ è una forma quadratica, l'applicazione $F : E \times E \to K$ definita dalla formula
  $$F(u, v) = Q(u + v) - Q(u) - Q(v), \; u, v \in E \tag{1.6}$$
  è una forma bilineare simmetrica.

  Definizione 1.2.2. *La* polare *del punto u rispetto a F è $F(v, u) = 0$.*

Ricordiamo che in alcuni testi di algebra lineare nella formula (1.6) si trova un fattore $\frac{1}{2}$ a moltiplicare. Abbiamo preferito eliminare questo fattore uniformandoci alle notazioni di [Dolga1], altrimenti nella formula (1.4) dovremmo togliere il fattore $m!$. Si tratta solo di una convenzione, infatti nell'ambiente proiettivo due polinomi che differiscono a meno di una costante moltiplicativa possono essere identificati.

- *Grado m*
  Generalizzando gli esempi 1.1.1 e 1.1.2 posso associare, in maniera unica, ad ogni polinomio omogeneo P di grado m una forma simmetrica multilineare $F : E^m \to K$, tramite la funzione polarizzazione di P, cioè
  $$pol(P)(v_1, \ldots, v_m) = F(v_1, \ldots, v_m), \; v_i \in E.$$
  Viceversa, ad ogni forma simmetrica multilineare F posso associare un polinomio omogeneo $P \in Pol_m(E)$ tramite la funzione restituzione di F,
  $$\mathrm{res}(F)(v) = P(v), \; v \in E.$$

Definizione 1.2.3. $F(\underbrace{v,\dots,v}_{m-1},u)=0$ *è la* 1° polare *del punto u rispetto a F. La* 2° polare *di u è* $F(\underbrace{v,\dots,v}_{m-2},u,u)=0$*, e così via fino alla* (m-1)-esima polare.

Analogamente al caso di grado 2 vale il **teorema di reciprocità polare**:

$$y \in \text{i-esima polare di } z \Leftrightarrow z \in \text{(m-i)-esima polare di } y$$

e entrambe corrispondono a $F(\underbrace{z,\dots,z}_{m-i},\underbrace{y,\dots,y}_{i})=0$.

1.2.2 Notazioni classiche

Sia $x \in \mathbb{P}^n(E)$. Indichiamo $F(x,\dots,x)=f(x)$. Preso un punto $p \in \mathbb{P}^n(E)$ definiamo l'operatore $\triangle_p^s = \left(\sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{(s)}$, dove l'apice (s) significa composto s volte con se stesso.

Definizione 1.2.4. *La* 1° polare *di p è* $\triangle_p f(x) = \left(\sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)=0$*. In generale l'* s-esima polare *di p è* $\triangle_p^s = \left(\sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{(s)} f(x)=0$.

Consideriamo $n=2$. Sia $\deg(f)=k$ e siano $x=\frac{x_1}{x_0}$ e $y=\frac{x_2}{x_0}$. Allora

$$f(x_0,x_1,x_2)=x_0^k f(1,x,y).$$

Calcoliamo le derivate di f rispetto alle 3 coordinate:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = x_0^{k-1}\left[kG(x,y)-\left(\frac{\partial G}{\partial x}x+\frac{\partial G}{\partial y}y\right)\right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_0^{k-1}\frac{\partial G}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_0^{k-1}\frac{\partial G}{\partial y},$$

dove $G(x,y)=f(1,x,y)$. Sia $p=(p_0,p_1,p_2)=p_0(1,\widetilde{x},\widetilde{y})$ con $\widetilde{x}=\frac{p_1}{p_0}$ e $\widetilde{y}=\frac{p_2}{p_0}$. Allora la 1° polare di p è $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x)p_0+\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)p_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)p_2=0$. Sostituendo i valori ottenuti per le derivate e facendo semplici calcoli otteniamo la seguente equazione della 1° polare:

$$p_0 x_0^{k-1}\left[kG(x,y)+\left(\frac{\partial G}{\partial x}(x-\widetilde{x})+\frac{\partial G}{\partial y}(y-\widetilde{y})\right)\right]=0.$$

Quindi, come conclusione abbiamo che la 1° polare di p, se p appartiene alla cubica, coincide proprio con lo sviluppo di Taylor di $G(x,y)$ arrestato al 1° ordine.

Con queste notazioni possiamo riscrivere il **teorema di reciprocità polare** nel modo seguente:

$$\frac{1}{s!}\triangle_p^s f(q)=\frac{1}{(k-s)!}\triangle_q^{k-s}f(p).$$

1.3 Apolarità e conica duale

Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione 3 e $V^\vee$ lo spazio duale. Sia A la matrice simmetrica associata ad una conica non singolare $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}(V)$. Possiamo definire la *conica duale* $\mathcal{C}^\vee$ di $\mathcal{C}$ come una nuova conica in $\mathbb{P}(V^\vee)$ costituita dalle rette tangenti alla conica $\mathcal{C}$. In generale si può parlare di curva duale, ma solo nel caso delle coniche in $\mathbb{P}(V)$, la curva duale è ancora una conica in $\mathbb{P}(V^\vee)$. Possiamo dimostrarlo sinteticamente, provando che ogni retta in $\mathbb{P}(V^\vee)$ interseca $\mathcal{C}^\vee$ esattamente in due punti: infatti una retta in $\mathbb{P}(V^\vee)$ corrisponde ad un punto in $\mathbb{P}(V)$, e tra tutte le rette passanti per questo punto solo due sono le tangenti a $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}(V)$. Inoltre possiamo osservare che la conica duale ha come matrice associata proprio la matrice A^{-1}. Per vederlo, sia $\mathcal{C}$ di equazione $x^tAx=0$ e $x=(x_0,x_1,x_2)$ un punto su $\mathcal{C}$. La retta tangente al punto x è

$$\{y=(y_0,y_1,y_2)\in\mathbb{P}(V): x^tAy=0\}.$$

Sia $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$ tale che $\alpha^t=x^tA$; allora la retta tangente può essere scritta in forma esplicita come

$$\{y: y_0\alpha_0+y_1\alpha_1+y_2\alpha_2=0\}.$$

Possiamo così concludere che α è il punto in $\mathbb{P}(V^\vee)$ che corrisponde alla retta tangente. Quindi per verificare che A^{-1} è la matrice associata alla conica duale basta provare che $\alpha^tA^{-1}\alpha=0$; e infatti

$$\alpha^tA^{-1}\alpha=x^tAA^{-1}A^tx=x^tAx=0.$$

Inoltre, l'operatore del secondo ordine

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2)A^{-1}\begin{pmatrix}\partial_0\\ \partial_1\\ \partial_2\end{pmatrix}$$

non dipende dal cambio di coordinate. Sia $\mathbf{x} = g\mathbf{x}'$ in $\mathbb{P}(V)$, con $g \in SL(3)$, allora la matrice A', nelle nuove coordinate, è

$$A' = g^t A g;$$

poiché $(\partial_0, \partial_1, \partial_2)$ è la base duale di (x_0, x_1, x_2), abbiamo

$$(x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix}\partial_0\\ \partial_1\\ \partial_2\end{pmatrix} = I = (x'_0, x'_1, x'_2)\begin{pmatrix}\partial'_0\\ \partial'_1\\ \partial'_2\end{pmatrix}$$

da cui otteniamo facilmente

$$\begin{pmatrix}\partial_0\\ \partial_1\\ \partial_2\end{pmatrix} = (g^{-1})^t\begin{pmatrix}\partial'_0\\ \partial'_1\\ \partial'_2\end{pmatrix}.$$

Quindi, ricordando che $A^{-1} = g(A')^{-1}g^t$, abbiamo che

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2)A^{-1}\begin{pmatrix}\partial_0\\ \partial_1\\ \partial_2\end{pmatrix} = (\partial'_0, \partial'_1, \partial'_2)g^{-1}g(A')^{-1}g^t(g^{-1})^t\begin{pmatrix}\partial'_0\\ \partial'_1\\ \partial'_2\end{pmatrix}$$

$$= (\partial'_0, \partial'_1, \partial'_2)(A')^{-1}\begin{pmatrix}\partial'_0\\ \partial'_1\\ \partial'_2\end{pmatrix}.$$

Definizione 1.3.1. *La conica $x^tAx = 0$ si dice* apolare *alla conica $x^tBx = 0$ se*

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2)B^{-1}\begin{pmatrix}\partial_0\\ \partial_1\\ \partial_2\end{pmatrix}(x^tAx) = 0$$

Indichiamo con A e B rispettivamente le coniche di equazione $x^tAx = 0$ e $x^tBx = 0$.

Proposizione 1.3.1. *A è apolare a B* $\Leftrightarrow tr(B^{-1}A) = 0$.

Dimostrazione. Questo viene semplicemente esplicitando la definizione di conica apolare: infatti, se con a_{ij} e b_{ij}^{-1} indichiamo rispettivamente i coefficienti di posto ij delle matrici A e B^{-1}, abbiamo

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2)B^{-1} \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} (x^t A x) = \sum_{i,j=0}^{2} b_{ij}^{-1} \partial_i \partial_j \left(\sum_{k,h=0}^{2} a_{kh} x_k x_h \right)$$

$$= \sum_{i,j=0}^{2} b_{ij}^{-1} a_{ij} = tr(B^{-1}A),$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che $(\partial_0, \partial_1, \partial_2)$ è la base duale di (x_0, x_1, x_2).

□

L'invariante $tr(B^{-1}A)$ della proposizione 1.3.1 appare in modo naturale nella seguente costruzione:

Proposizione 1.3.2. *Siano A e B due coniche in $\mathbb{P}^2(V)$. Allora*

$$\det(A + tB) = \det A + t\sigma_1(A, B) + t^2\sigma_2(A, B) + \det(B)t^3,$$

dove $\sigma_1(A, B) = \det(A)tr(A^{-1}B) = tr(B \cdot adj(A))$,
$\sigma_2(A, B) = \det(B)tr(B^{-1}A) = tr(A \cdot adj(B))$ *e* $adj(A) \cdot A = \det(A)I$.

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori della matrice A, allora

$$(t+\lambda_1)(t+\lambda_2)(t+\lambda_3) = \det(A+tI) = \sigma_0(A, I)+t\sigma_1(A, I)+t^2\sigma_2(A, I)+\sigma_3(A, I)t^3.$$

Dalla precedente uguaglianza si ricava che

$$\sigma_0(A, I) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(A),$$

$$\sigma_1(A, I) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \left(\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \right) = \det(A)tr(A^{-1}),$$

$$\sigma_2(A, I) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(A) \text{ e } \sigma_3(A, I) = 1.$$

Poiché

$$\det(A + tB) = \det(B(B^{-1}A + tI)) = \det B \det(B^{-1}A + tI)$$

basta applicare i risultati precedenti alla matrice $B^{-1}A$. Otteniamo quindi

$$\det(A+tB) = \det(B)[\det(B^{-1}A) + t\det(B^{-1}A)tr(A^{-1}B) + t^2 tr(B^{-1}A) + t^3]$$

$$= \det(A) + t\det(A)tr(A^{-1}B) + t^2 \det(B)tr(B^{-1}A) + t^3 \det(B).$$

□

Corollario 1.3.1. *A è apolare a B* $\Leftrightarrow \det(A + tB)$ *non ha il termine di 2° grado in t. Viceversa, B è apolare a A* $\Leftrightarrow \det(A + tB)$ *non ha il termine di 1° grado in t.*

In generale, se A e B stanno in $\mathbb{P}^n(V)$ si ricava con passaggi analoghi a quelli precedenti una decomposizione simile per $\det(A + tB)$:

$$\det(A + tB) = \det A + t\sigma_1(A, B) + \ldots + t^n \sigma_n(A, B) + \det(B)t^{n+1},$$

dove però in questo caso i $\sigma_i(A, B)$ hanno una forma più complicata, comunque legata a quella dei polinomi simmetrici elementari.

1.4 Triangoli autopolari

Sia $\mathcal{C}$ una conica non singolare. Per ogni punto $a \in \mathbb{P}^2$ la 1° polare di a rispetto a $\mathcal{C}$ è una retta, la *retta polare di a*. Abbiamo già osservato che per ogni retta l esiste un unico punto a tale che la 1° polare di a rispetto a $\mathcal{C}$ è l. Il punto a considerato come una retta nel piano duale è la retta polare del punto l rispetto alla conica duale di $\mathcal{C}$.

Definizione 1.4.1. *Un insieme di tre rette l_1, l_2, l_3 è chiamato* triangolo autopolare *rispetto a $\mathcal{C}$ se ogni l_i è la retta polare rispetto a $\mathcal{C}$ del punto di intersezione delle altre due rette.*

Definizione 1.4.2. *Siano l_1, l_2, l_3 i tre lati di un triangolo. I poli dei lati sono i vertici di un altro triangolo chiamato* triangolo polare *(o coniugato). I suoi lati sono le rette polari dei vertici del triangolo originale.*

Chiaramente, un triangolo è uguale al suo polare se e solo se è un triangolo autopolare. Tutto questo può essere generalizzato a quadriche non singolari in $\mathbb{P}^n$ per n arbitrario, anche se non è per niente banale, poiché dovremmo introdurre i simplessi.

Teorema 1.4.1. *A è apolare a $B \Leftrightarrow A$ è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B.*

Dimostrazione. Sia T un triangolo autopolare rispetto a B e siano P_i i vettori colonna corrispondenti ai tre vertici. Allora $P_j^t B P_i = 0$ per $i \neq j$. Denotando con P la matrice 3×3 che ha i P_i come colonne, possiamo aggiustare le costanti in modo che $P^t B P = I$, cioè

$$B = (P^t)^{-1} P^{-1}.$$

Se A è circoscritta a T abbiamo $P_i^t A P_i = 0$ per ogni i. Quindi

$$tr(B^{-1}A) = tr(PP^tA) = tr((P)(P^tA)) = tr((P^tA)(P)) = tr(P^tAP) = 0.$$

□

1.5 Coniche circoscritte a triangoli autopolari

Riprendiamo il teorema 1.4.1, *A è apolare a B se e solo se A è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B*, e analizziamo più a fondo questa condizione.
Sia B una conica fissata e $\mathcal{A}$ l'insieme dei triangoli autopolari rispetto a B; allora, dalla definizione di triangolo autopolare rispetto ad una conica abbiamo che

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid \langle x, y\rangle = r_z, \langle y, z\rangle = r_x, \langle x, z\rangle = r_y\},$$

dove r_x, r_y, r_z sono rispettivamente le polari di x, y, z rispetto a B. In pratica però quando costruiamo un triangolo autopolare sono sufficienti meno condizioni sui tre vertici; vale infatti la seguente proposizione

Proposizione 1.5.1. *Sia B una conica e x un punto del piano. Se scelgo $y \in r_x$, $y \neq x$ e $z = r_x \cap r_y$, con r_x, r_y polari rispettivamente di x e y rispetto a B, allora x, y, z sono i vertici di un triangolo autopolare rispetto a B.*

Dimostrazione. Poiché $y \in r_x$, per il teorema di reciprocità polare si ha che $x \in r_y$. Inoltre $z = r_x \cap r_y$, quindi $z \in r_x$ e $z \in r_y$, e per il teorema di reciprocità polare abbiamo che $x \in r_z$ e $y \in r_z$, dove r_z è la polare di z rispetto a B. Le rette r_x, r_y, r_z sono quindi i lati di un triangolo autopolare. $\square$

Possiamo quindi scrivere $\mathcal{A}$ nella forma

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \mid x \neq y, y \in r_x, z = r_x \cap r_y\}.$$

Definiamo poi la *varietà di bandiera* $\mathbb{F}(0, 1, 2) = \mathbb{F} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ come

$$\mathbb{F} = \{(x, y) \mid y \in r_x\},$$

e chiamiamo $\alpha : \mathbb{F} \to \mathbb{P}^2$ la proiezione di $\mathbb{F}$ sulla prima componente. Si può osservare facilmente che α è suriettiva e che se $x \in \mathbb{P}^2$ la fibra $\alpha^{-1}(x)$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1$; quindi applicando la parte 2) del Teorema sulla Dimensione delle fibre A.2.1 otteniamo che $\dim \mathbb{F} = 3$. Sia ora $\gamma : \mathcal{A} \to \mathbb{F}$, la funzione che associa a $(x, y, z) \in \mathcal{A}$ la coppia $(x, y) \in \mathbb{F}$ e mettiamoci nell'aperto di $\mathbb{F}$ in cui $x \neq y$; anche γ è una funzione suriettiva e per ogni coppia (x, y) si ha che $\gamma^{-1}((x, y))$ è un solo punto, cioè γ è iniettiva. γ è perciò un isomorfismo, e quindi anche $\dim \mathcal{A} = 3$. Consideriamo $\mathbb{P}^5$ come lo spazio che parametrizza le coniche e sia $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A} \times \mathbb{P}^5$ una *varietà di incidenza* definita da

$$\mathcal{Q} = \{(T, \mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \text{ è circoscritta a } T\}.$$

Siano π_1 e π_2 le proiezioni di $\mathcal{Q}$, rispettivamente su $\mathcal{A}$ e su $\mathbb{P}^5$, e cerchiamo di calcolare la dimensione di $\mathcal{Q}$ utilizzando di nuovo il teorema A.2.1. Per prima cosa osserviamo che la fibra di π_1 è

$$\pi_1^{-1}(T) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ è circoscritta a } T\},$$

quindi poiché $\mathcal{C} \simeq \mathbb{P}^5$ e $\dim \mathcal{A} = 3$ si ha che $\pi_1^{-1}(T) \simeq \mathbb{P}^2$. Applicando ancora la parte 2) del teorema A.2.1 otteniamo $\dim \mathcal{Q} = 5$. Quindi abbiamo che π_2 è un'applicazione tra due varietà di dimensione 5. Se anche π_2 fosse suriettiva avremo che ogni conica è circoscritta a qualche triangolo autopolare rispetto a B; ma questo effettivamente è falso poiché proprio il teorema 1.4.1 ci dice che solo quando la conica è apolare a B, e quindi quando $tr(B^{-1}A) = 0$ per la proposizione 1.3.1, allora è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B. Questo significa che ci sono alcuni triangoli autopolari che danno luogo alla stessa conica circoscritta. In particolare, poiché

$Im(\pi_2) = \{\mathcal{C} \in \mathbb{P}^5 \mid \mathcal{C}$ è apolare a $B\}$, abbiamo che $\dim Im(\pi_2) = 4$; quindi sempre dal teorema A.2.1 ricaviamo che $\pi_2^{-1}(\mathcal{C}) = \{T \mid T$ è inscritto in $\mathcal{C}\}$ ha dimensione 1. Siamo arrivati dunque alla seguente, ben nota ma non aspettata, conclusione:
Data una conica B, se esiste un triangolo autopolare rispetto a B tale che A è una conica circoscritta a questo triangolo, allora esistono infiniti triangoli autopolari rispetto a B che hanno A come conica circoscritta.

Capitolo 2

Teorema di Poncelet

2.1 La Relazione di Poncelet

Definizione 2.1.1. *Sia $\mathcal{C}$ una conica, e sia $T = \{l_1, l_2, l_3\}$ un triangolo circoscritto a $\mathcal{C}$. Una conica $\mathcal{S}$ che ha T come triangolo inscritto è chiamata conica* Poncelet related a $\mathcal{C}$.

Sia $\mathcal{C}$ una conica fissata. Consideriamo $\mathbb{P}^5$, come lo spazio che parametrizza le coniche; definiamo poi $\mathcal{C}^0 \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ come

$$\mathcal{C}^0 = \{(p, q, r) \mid p \neq q, p \neq r, q \neq r\}.$$

Indicando con S^3 il gruppo delle permutazioni su tre elementi, definiamo

$$\mathcal{T} = \mathcal{C}^0 / S^3;$$

identificando i punti di $\mathcal{C}$ con lo spazio tangente a $\mathcal{C}$ in quel punto, abbiamo che $\mathcal{T}$ rappresenta l'insieme di tutti i triangoli circoscritti a $\mathcal{C}$ ed è quindi una varietà di dimensione 3. Sia ora $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \times \mathbb{P}^5$ una *varietà di incidenza* definita da

$$\mathcal{P} = \{(T, \mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \text{ è circoscritta a } T\}.$$

Siano α e β le proiezioni di $\mathcal{P}$, rispettivamente, su $\mathcal{T}$ e su $\mathbb{P}^5$, e cerchiamo di calcolare la dimensione di $\mathcal{P}$ utilizzando il teorema A.2.1. Consideriamo l'applicazione α; ovviamente α è una mappa suriettiva e si può osservare facilmente che verifica anche tutte le altre ipotesi del teorema A.2.1, essendo semplicemente una proiezione. La fibra di α è l'insieme

$$\alpha^{-1}(T) = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ è circoscritta a } T\},$$

quindi, poichè $\mathcal{S} \simeq \mathbb{P}^5$ e $\mathcal{T} \simeq \mathbb{P}^3$ si ha che $\alpha^{-1}(T) \simeq \mathbb{P}^2$. Applicando quindi la parte 2 del teorema A.2.1 abbiamo che $\dim \mathcal{P} = 5$. Potremo aspettarci quindi che anche β sia suriettiva ($\beta : \mathcal{P} \to \mathbb{P}^5$, dove $\dim \mathcal{P} = 5$), così che ogni conica è Poncelet related a $\mathcal{C}$ rispetto a qualche triangolo, e cioè che, data la conica $\mathcal{C}$, per ogni conica $\mathcal{S}$ posso sempre trovare un triangolo circoscritto a $\mathcal{C}$ e inscritto in $\mathcal{S}$; ma sorprendentemente questo non è vero! Esiste infatti un teorema che dimostra che se esiste un triangolo inscritto a $\mathcal{S}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$, allora esistono infiniti triangoli circoscritti a $\mathcal{C}$ e che hanno $\mathcal{S}$ come conica circoscritta. In pratica si dimostra proprio che $\beta^{-1}(\mathcal{S}) = \{T \mid T \text{ è inscritto in } \mathcal{S}\}$ ha dimensione 1, e quindi, sempre per il teorema sulla dimensione delle fibre, che $\dim Im(\beta) = 4$, cioè β non è suriettiva.
La prima versione di questo teorema è la seguente:

Teorema 2.1.1. *(***J.V.Poncelet***) Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ due coniche non singolari che si intersecano trasversalmente. Se esiste un triangolo inscritto a $\mathcal{S}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$, cioè $\mathcal{S}$ è Poncelet related a $\mathcal{C}$, allora per ogni $x \in X$ e per ogni $y \in \mathcal{S} \cap T_x\mathcal{C}$ esiste un triangolo, con un vertice in y e un lato tangente a $\mathcal{C}$ in x, che è circoscritto a $\mathcal{C}$ e inscritto in $\mathcal{S}$.*

In pratica proveremo una versione più generale del teorema 2.1.1: invece di triangoli circoscritti considereremo n-poligoni circoscritti.
Un n-poligono P in $\mathbb{P}^2$ è un insieme ordinato di $n \geqslant 3$ punti $(p_1, \ldots, p_n)$ di $\mathbb{P}^2$ tali che non ci siano tre punti p_i, p_{i+1}, p_{i+2} appartenenti alla stessa retta. I punti p_i sono i vertici di P, le rette $\overline{p_i, p_{i+1}}$ sono i lati di P ($p_{n+1} = p_1$). Diciamo inoltre che due poligoni sono uguali se i loro insiemi di lati sono uguali. Il numero di n-poligoni con lo stesso insieme di vertici è $n!/2n$. Diciamo che P è circoscritto ad una conica non singolare $\mathcal{C}$ se ogni lato è tangente a $\mathcal{C}$. Dato un insieme ordinato $(q_1, \ldots, q_n)$ di n punti su $\mathcal{C}$, siano l_i le rette tangenti a $\mathcal{C}$ in q_i. Allora queste rette sono i lati di un n-poligono P con vertici $p_i = l_i \cap l_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$ ($l_{n+1} = l_1$). Questo poligono è circoscritto a $\mathcal{C}$. Questo da una corrispondenza 1-1 tra gli n-poligoni circoscritti a $\mathcal{C}$ e gli insiemi ordinati di n punti su $\mathcal{C}$.

Definizione 2.1.2. *Sia $P = (p_1, \ldots, p_n)$ un n-poligono circoscritto ad una conica non singolare $\mathcal{C}$. Una conica $\mathcal{S}$ è* Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ *rispetto a P se tutti i punti p_i stanno su $\mathcal{S}$.*

Iniziamo con due coniche qualsiasi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$. Scegliamo un punto p_1 su $\mathcal{S}$ e una tangente l_1 a $\mathcal{C}$ che passa per p_1. Questa interseca $\mathcal{S}$ in un altro punto

p_2. Ripetiamo questa costruzione. Se il processo si ferma dopo n passi, cioè non abbiamo più nuovi punti p_i, otteniamo un n-poligono inscritto in $\mathcal{S}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$. In questo caso $\mathcal{S}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$. La versione generale del Teorema di Poncelet, enunciato a pagina seguente come Teorema di Darboux, dice che se il processo si ferma, allora possiamo costruire un'infinità di n-poligoni con questa proprietà partendo da un punto arbitrario di $\mathcal{S}$.

2.2 Formula di Riemann-Hurwitz e automorfismi di una curva ellittica

Prima di dare la dimostrazione del Teorema di Darboux richiamiamo alcune nozioni importanti sulle superfici di Riemann (cfr. [Mira]).
Sia $F : X \to Y$ una funzione olomorfa non costante tra due superfici di Riemann.

Definizione 2.2.1. *La* molteplicità *di F in $p \in X$, indicata con $mult_p(F)$, è l'unico intero m che soddisfa questa proprietà: per ogni carta $\phi_2 : U_2 \to V_2$ su Y centrata in $F(p)$, esiste una carta $\phi_1 : U_1 \to V_1$ su X centrata in p tale che $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.*

Definizione 2.2.2. *Il* grado *di F, indicato con $\deg(F)$, è l'intero $d_y(F)$ definito da $d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F)$.*

Una proposizione ci assicura che $d_y(F)$ è costante indipendentemente da y.

Teorema 2.2.1. *(***Formula di Riemann-Hurwitz***) Sia $F : X \to Y$ una funzione olomorfa non costante tra due superfici di Riemann compatte. Allora*

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1], \qquad (2.1)$$

dove con g si indica il genere delle superfici di Riemann compatte.

Ricordiamo che esiste una proposizione che lega il genere di una superficie di Riemann compatta con la caratteristica di Eulero χ della superficie; in particolare vale che $\chi = 2 - 2g$. Infine ricordiamo la seguente proposizione, che caratterizza gli automorfismi senza punti fissi di un toro complesso:

Proposizione 2.2.1. *Sia* Λ *un reticolo in* $\mathbb{C}$ *che definisce un toro complesso* $X = \mathbb{C}/\Lambda$. *Sia* F *un automorfismo non banale di* X *senza punti fissi. Allora* $\forall z \in X \ F(z) = z + a$, *con* $a \in X$ *fissato.*

2.3 Versione generale del Teorema di Poncelet

Teorema 2.3.1. *(***G.Darboux***) Siano* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{S}$ *due coniche non singolari che si intersecano trasversalmente. Se* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{S}$ *sono Poncelet* $n-$*related allora, partendo da un qualsiasi punto* $x \in \mathcal{C}$ *e da un punto* $y \in \mathcal{S} \cap T_x\mathcal{C}$, *esiste un* $n-$*poligono, con un vertice in* y *e un lato tangente a* $\mathcal{C}$ *in* x, *che è circoscritto a* $\mathcal{C}$ *e inscritto in* $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente corrispondenza su $\mathcal{C} \times \mathcal{S}$:

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S} : \overline{xy} \text{ è tangente a } \mathcal{C} \text{ in } x\}.$$

Poichè, per ogni $x \in \mathcal{C}$ la tangente a $\mathcal{C}$ in x interseca $\mathcal{S}$ in due punti, e, per ogni $y \in \mathcal{S}$ ci sono due tangenti a $\mathcal{C}$ passanti per y, abbiamo che R è di bi-grado $(2, 2)$. Questo significa che se identifichiamo $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ con $\mathbb{P}^1$, allora R è una curva sulla quadrica $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Ricordiamo che su una quadrica ci sono due famiglie di rette distinte e che una curva su una quadrica ha bi-grado (a, b) se a è il numero di intersezioni della curva con una famiglia di rette e b con l'altra.

Vale inoltre il seguente Lemma:

Lemma 2.3.1. *La curva* R *è non singolare se e solo se le coniche* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{S}$ *si intersecano in quattro punti distinti. In questo caso,* R *è isomorfo al rivestimento a due fogli di* $\mathcal{S}$ *che si ramifica sui quattro punti di intersezione.*

Dimostrazione. Sia $\pi_{\mathcal{S}}$ la proiezione di R su $\mathcal{S}$. Allora $\pi_{\mathcal{S}}$ è un'applicazione $2 : 1$. Un punto di branch $y \in \mathcal{S}$ per $\pi_{\mathcal{S}}$ è un punto tale che c'è una sola tangente a $\mathcal{C}$ passante per y. Ovviamente questo è possibile solo se $y \in \mathcal{C}$. Vale inoltre la seguente proposizione (crf. [Mira]): R è non singolare se e solo se il rivestimento a due fogli $\pi_{\mathcal{S}} : R \to \mathcal{S} \simeq \mathbb{P}^1$ ha quattro punti di branch. Quindi poichè i punti di branch per $\pi_{\mathcal{S}}$ sono i punti di intersezione si ha che R è non singolare se e solo se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ si intersecano trasversalmente.

□

Notiamo che anche la proiezione $\pi_{\mathcal{C}}$ deve avere quattro punti di branch, se R è non singolare. Un punto $x \in \mathcal{C}$ è un punto di branch se e solo se la tangente di $\mathcal{C}$ in x è anche tangente a $\mathcal{S}$. Otteniamo così che due coniche si intersecano trasversalmente se e solo se ci sono 4 tangenti comuni diverse.
Abbiamo inoltre che R è una *curva ellittica*. Per dimostrarlo basta applicare la *Formula di Riemann-Hurwitz* ad una delle proiezioni e verificare che il *genere di R è 1*. Osserviamo innanzitutto che la sommatoria che compare nella formula (2.1) è una somma finita in quanto può essere ristretta esclusivamente ai punti di ramificazione: infatti se p non è un punto di ramificazione allora $mult_p = 1$. Nel nostro caso possiamo considerare $F = \pi_{\mathcal{C}}$; quindi abbiamo che $\deg(\pi_{\mathcal{C}}) = 2$, $g(\mathcal{C}) = 0$ e $mult_p(\pi_{\mathcal{C}}) = 2$ se p è un punto di ramificazione per $\pi_{\mathcal{C}}$; quindi sostituendo nella formula otteniamo proprio $g(R) = 1$.
Prendiamo un punto $(x_0, y_0) \in R$ e sia $(x_1, y_1) \in R$ definito come segue: y_1 è il secondo punto su $\mathcal{S}$ che appartiene alla tangente in x_0, $x_1 \neq x_0$ è il punto dove la tangente di $\mathcal{C}$ in x_1 contiene y_1. Questo definisce un automorfismo di R

$$f : R \to R$$

$$(x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1).$$

Poichè per ipotesi le coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ sono Poncelet $n-$related, esisterà un $n-$poligono circoscritto a $\mathcal{C}$ e inscritto in $\mathcal{S}$, e quindi ci sarà un punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in R$ tale che

$$f^n(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y}).$$

Per completare la dimostrazione basta quindi provare che $f^n = 1_R$. Poichè R è una curva ellittica abbiamo che $R \simeq \mathbb{C}/\Lambda$, ossia R è isomorfa ad un toro complesso. Ovviamente la nostra f non ha punti fissi, quindi per la proposizione 2.2.1 esiste $a \in R$ tale che $f(z) = z + a$; da cui $f^n(z) = z + na$. Poichè $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ sono Poncelet $n-$related si ha che $na = 0$ e quindi il teorema è dimostrato perché tutti i punti sono fissi per f^n.

□

Capitolo 3

Equazioni per le Coniche di Poncelet

3.1 Il Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^3$

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango maggiore o uguale a 3 tali che la loro curva di intersezione $E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ è una curva ellittica liscia. Fissiamo due famiglie di rette, R_1 su $\mathcal{Q}_1$ e R_2 su $\mathcal{Q}_2$.

Teorema 3.1.1. *Supponiamo che esista una sequenza chiusa di rette distinte $L_1, \dots, L_{2n}, L_{2n+1} = L_1$ tale che la retta L_i appartiene a R_1 (rispettivamente R_2) se i è dispari (rispettivamente pari), e tale che rette consecutive L_i, L_{i+1} si intersecano l'una con l'altra. Allora ci sono sequenze di questo tipo attraverso ogni punto di $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$.*

Dimostrazione. Le famiglie di rette R_1, R_2 definiscono due involuzioni i_1, i_2 su E che scambiano i due punti di intersezione di E con una retta di R_1 (rispettivamente di R_2). Sia $t : E \to E$ la composizione $i_2 i_1$ e definiamo $e = L_{2n} \cap L_1$. Allora L_{2k-1} è l'unica retta in R_1 che passa per $t^{k-1}e$ e L_{2k} è l'unica retta di R_2 che passa per $i_1 t^{k-1} e$ per $k \geq 1$. Poiché la sequenza $L_1, \dots, L_{2n}, L_{2n+1}$ è chiusa, cioè $L_{2n+1} = L_1$, abbiamo che $t^n(e) = e$.
Le involuzioni i_1, i_2 hanno punti fissi, quindi la loro composizione t è una traslazione su E. Ma allora, poiché per ipotesi le rette sono distinte e vale $t^n(e) = e$, possiamo concludere che t è un automorfismo di E di ordine n.

□

Il teorema precedente vale anche per due diverse famiglie di rette R_1 e

R_2 sulla stessa quadrica liscia se E è una curva ellittica di bi-grado $(2, 2)$ su questa quadrica. La dimostrazione è letteralmente la stessa.

Definizione 3.1.1. *Diremo che che le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in* posizione di n-Poncelet *(oppure che la coppia (R_1, R_2) soddisfa la* condizione di n-Poncelet*) se l'automorfismo $t : E \to E$ definito nel teorema 3.1.1 è di ordine n.*

A priori questa è una proprietà della coppia ordinata (R_1, R_2), ma si può osservare facilmente che l'automorfismo associato alla coppia (R_2, R_1) non è altro che t^{-1}. Vale quindi la seguente proposizione:

Proposizione 3.1.1. *La coppia di famiglie di rette (R_1, R_2) soddisfa la condizione di n-Poncelet se e solo se la soddisfa la coppia (R_2, R_1).*

Vediamo a questo punto come il teorema 3.1.1 implica l'usuale Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^2$.
In pratica vedremo che se una delle quadriche, $\mathcal{Q}_1$, è liscia e l'altra, $\mathcal{Q}_2$, è un cono con vertice in $P_0 \notin E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ e E è una curva ellittica liscia, allora il Teorema di Poncelet tridimensionale è equivalente al Teorema di Poncelet per due coniche nel piano. Denotiamo con $\pi_i : \mathcal{Q}_i \to \mathbb{P}^2$ le proiezioni dal vertice P_0. Il morfismo π_1 è di grado 2 e si ramifica su una conica liscia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$. L'immagine di π_2 è un'altra conica liscia $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$, che sta in posizione generica rispetto a $\mathcal{C}$.

Premettiamo questi due lemma:

Lemma 3.1.1. *Sia $\Delta = \pi_1^{-1}\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ la curva di ramificazione. Allora Δ è una curva di bi-grado $(1, 1)$ e possiamo identificare tramite un isomorfismo le due copie di $\mathbb{P}^1$ in modo che Δ sia la diagonale.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che una delle due famiglie di rette su $\mathcal{Q}_1$ incontri Δ in due punti Q e R. Allora gli spazi tangenti a $\mathcal{Q}_1$ in Q e R devono contenere entrambi la retta QR e il punto P_0, quindi coincidono. Segue perciò che $Q = R$ e cioè che Δ è una curva di bi-grado $(1, 1)$. Per verificare che Δ è proprio la diagonale scegliamo un isomorfismo $\mathcal{Q}_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in modo che la famiglia di rette R_1 su $\mathcal{Q}_1$ sia parametrizzata dal primo fattore, cioè $R_1 \simeq a \times \mathbb{P}^1$ al variare di a, e scegliamo l'altra famiglia su $\mathcal{Q}_1$ parametrizzata da $\mathbb{P}^1 \times a$; quindi, poiché Δ ha bi-grado $(1, 1)$ ogni suo punto avrà la forma (a, a).

□

Lemma 3.1.2. *Sia $\mathcal{Q}_1$ una quadrica liscia, P_0 un punto non appartenente alla quadrica e π_1 la proiezione di $\mathcal{Q}_1$ da P_0 su $\mathbb{P}^2$. Allora sulla stessa fibra ci sono due punti della forma (a,b) e (b,a).*

Dimostrazione. Un punto $(a,b) \in \mathcal{Q}_1$ possiamo vederlo come come l'intersezione di una retta di una famiglia con una dell'altra, $(a,b) = \{a \times \mathbb{P}^1\} \cap \{\mathbb{P}^1 \times b\}$; inoltre $\{a \times \mathbb{P}^1\} \cap \Delta = (a,a)$ e analogamente $\Delta \cap \{\mathbb{P}^1 \times b\} = (b,b)$ (per il lemma precedente). Sia (x,y) l'altro punto sulla stessa fibra di (a,b); dobbiamo provare che $x = b$ e $y = a$. Il piano tangente per (a,a) contiene P_0 e la retta $a \times \mathbb{P}^1$, e il piano tangente per (b,b) contiene P_0 e la retta $\mathbb{P}^1 \times b$. Questi due piani si intersecano nella retta per (a,b) e P_0, che incontra la quadrica in (x,y), quindi (x,y) può esere visto come intersezione della famiglia di rette $b \times \mathbb{P}^1$ e di quella $\mathbb{P}^1 \times a$; da qui la tesi.

□

Proposizione 3.1.2. *Le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione

$$\mathcal{Q}_1 \to \mathbb{P}^2 \times \mathcal{C}^*$$

$$(a,b) \mapsto (u,T)$$

dove $\mathcal{C}^*$ è la conica duale di $\mathcal{C}$, $u := \pi_1(a,b)$ e $T := \pi_1(a \times \mathbb{P}^1)$. Quindi T è la tangente da u a $\mathcal{C}$ che incontra $\mathcal{C}$ nel punto $\pi_1(a,a)$ (per il Lemma 3.1.1). La proiezione π_1 restringe a un'applicazione $E \to \mathcal{D}$ di grado 2. La retroimmagine di un punto $u \in \mathcal{D}$ sono due punti $(a,b),(b,a) \in E$ (per il Lemma 3.1.2). Determiniamo ora la funzione indotta da t (t è l'automorfismo del teorema 3.1.1) sulla coppia (u,T). Iniziamo con un punto liscio $P = (a,b) \in E$. La retta $L_1 = a \times \mathbb{P}^1 \in R_1$ passante per P incontra E in un altro punto $P' = (a,b')$. Questo significa che passiamo dalla coppia (u,T) alla coppia (u',T), dove $u' := \pi_1(a,b')$ è il secondo punto di intersezione di T e $\mathcal{D}$. Il punto $P'' := t(P)$ è il secondo punto di intersezione della retta $L_2 \in R_2$ per P' con E. Quindi abbiamo $P'' = (b',a)$, perchè i punti sulla stessa generatrice di $\mathcal{Q}_2$ stanno sulla stessa fibra della proiezione π_2. Passare dal punto (a,b') al punto (b',a) significa passare dalla coppia (u',T) alla coppia (u',T'), dove T' è la seconda tangente a $\mathcal{C}$ passante da u'. Quindi abbiamo che l'applicazione

$$t : (u,T) \mapsto (u',T')$$

descrive proprio il processo di Poncelet per la coppia di coniche $\mathcal{C}, \mathcal{D}$.

$\square$

3.2 Quadriche in relazione di Poncelet in un fascio

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango maggiore o uguale a 3 tali che il fascio unidimensionale da loro generato $\lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2$ è un fascio generico. Questo significa che $E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ è una curva liscia, o equivalentemente che il discriminante $d(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2)$ del fascio non ha radici multiple. Le quattro radici di $d(\lambda_1, \lambda_2)$ corrispondono ai coni nel fascio, cioè a quelle quadriche con una sola famiglia di rette. Sia $M \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento a due fogli di $\mathbb{P}^1$ che ha come punti di branch le radici di $d(\lambda_1, \lambda_2)$. I punti della curva ellittica M sono identificati con le famiglie di rette sulle quadriche del fascio. Ogni famiglia di rette R in M definisce un'involuzione $I_R : E \to E$ con punti fissi. Scegliendo un origine in E possiamo scrivere I_R come $x \mapsto -x + a$ con un unico punto $a \in E$. Otteniamo quindi un'applicazione

$$\Phi : M \to E$$

$$R \mapsto a.$$

Proposizione 3.2.1. *Φ è un isomorfismo di gruppi (se l'origine di M è scelta appropriatamente).*

Dimostrazione. Basta provare che Φ è iniettiva. Siano $R_1, R_2 \in M$ tali che $\Phi(R_1) = \Phi(R_2)$, cioè $I_{R_1} \equiv I_{R_2}$. Sia $P \in E$ un punto non fisso nè per I_{R_1} nè per I_{R_2}. Poiché $I_{R_1} \equiv I_{R_2}$ le rette

$$\overline{P, I_{R_1}(P)} \in R_1$$

$$\overline{P, I_{R_2}(P)} \in R_2$$

sono uguali. Facendo variare il punto P in E possiamo concludere $R_1 = R_2$.

$\square$

Corollario 3.2.1. *a) Due famiglie di rette R_1, R_2 nel fascio soddisfano la condizione di n-Poncelet se e solo se il punto $R_2 - R_1 \in M$ è un punto di n-torsione primitivo.*

b) Fissata una famiglia di rette $R_1 \in M$ ci sono $T(n)$ famiglie di rette $R_2 \in M$ tale che R_1, R_2 soddisfano la condizione di n-Poncelet, dove $T(n)$ denota il numero di punti di n-torsione primitivi di una curva ellittica.

Dimostrazione. Per la parte a) basta osservare che se $x \in E$ allora

$$t(x) = i_2 i_1(x) = i_2(-x + a) = -(-x + a) + b = x - a + b,$$

dove t è l'automorfismo del teorema 3.1.1 e $a, b \in E$.
La parte b) segue direttamente dalla parte a).

□

Questo corollario è indipendente dalla scelta dell'origine in M se uno interpreta $R_2 - R_1$ come la traslazione su M che porta R_1 in R_2.
In generale il fatto di essere in posizione di Poncelet dipende dalla scelta delle famiglie di rette R_1, R_2 su $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$. Si può comunque verificare facilmente che se vale per R_1 e R_2 allora vale anche per le famiglie di rette complementari, R'_1 su $\mathcal{Q}_1$ e R'_2 su $\mathcal{Q}_2$: infatti $R_2 - R_1 = -(R'_2 - R'_1)$, indipendentemente dalla scelta dell'origine di M.

3.3 Formula di Gerbaldi per il numero di coniche Poncelet n-related

Consideriamo l'invariante di due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D} \in \mathbb{P}^2$ che si annulla se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Teorema 3.3.1. ***(Formula di Gerbaldi)***
Questo invariante è di grado $\frac{1}{2}T(n)$ in $\mathcal{C}$ e di grado $\frac{1}{4}T(n)$ in $\mathcal{D}$.

In pratica non proveremo precisamente questro teorema, ma ci concentreremo sui due teoremi successivi, entrambi equivalenti al teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.2. *Sia $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$, $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ un fascio generico di coniche in $\mathbb{P}^2$. Allora il numero di coniche del fascio a cui $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related è $\frac{1}{2}T(n)$.*

Dimostrazione. 1) C'è una quadrica liscia $\mathcal{Q}_1 \in \mathbb{P}^3$ e un cono $\mathcal{Q}_2 \in \mathbb{P}^3$ tali che

i. la proiezione $\mathcal{Q}_1 \to \mathbb{P}^2$ dal vertice P_0 di $\mathcal{Q}_2$ ha come punti di branch i punti di $\mathcal{C}$,

ii. l'immagine di $\mathcal{Q}_2$ tramite la proiezione da P_0 è $\mathcal{D}$, e

iii. il fascio generato da $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ è generico.

Infatti, in opportune coordinate omogeneee x, y, t su $\mathbb{P}^2$ e x, y, z, t su $\mathbb{P}^3$ le coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono date dalle equazioni

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + t^2 = 0, \qquad \mathcal{D} : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma t^2 = 0$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Scegliamo $\mathcal{Q}_2$ il cono

$$\mathcal{Q}_2 : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma t^2 = 0$$

con vertice $P_0 = (0 : 0 : 1 : 0)$ e $\mathcal{Q}_1$ la quadrica liscia data da

$$\mathcal{Q}_1 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

Le proprietà i. e ii. sono ovviamente soddisfatte. Per verificare iii. osserviamo che il discriminante del fascio $\lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2$,

$$d(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2) = \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 \alpha)(\lambda_1 + \lambda_2 \beta)(\lambda_1 + \lambda_2 \gamma),$$

non ha radici multiple poiché il fascio $\lambda \mathcal{C} + \mu \mathcal{D}$ è generico per ipotesi.

2) Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ le quadriche con le proprietà i. ii. iii. della parte 1). I punti di branch di una quadrica liscia $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2$ rispetto alla proiezione da P_0 formano una conica nel fascio $\lambda \mathcal{C} + \mu \mathcal{D}$. Basta mostrare che i luoghi dei punti di branch delle proiezioni da P_0, $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2} \to \mathbb{P}^2$, variano in un fascio. Ora, un punto $P \in \mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ è un punto di branch se la retta $\overline{PP_0}$ tocca $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ in P, cioè se $P_0^t \mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2} P = 0$; il piano $P_0^t \mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2} P = 0$ si dice piano polare di P_0 rispetto a $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$. Quindi il luogo dei punti di branch è l'intersezione di $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ con questo piano. Ma

$$P_0^t \mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2} = P_0^t(\lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2) = \lambda_1 P_0^t \mathcal{Q}_1,$$

perchè $P_0^t \mathcal{Q}_2 = 0$ poiché $P_0 \in \mathcal{Q}_2$, quindi il piano polare è lo stesso per tutte le quadriche nel fascio. Allora i luoghi dei punti di branch variano in un fascio su questo piano polare.

3) Se una quadrica $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ del fascio è liscia, allora per la proposizione 3.1.2 le quadriche $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related al luogo dei punti di branch di $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$, che è una conica nel fascio $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$ (per la parte 2). Se $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ è un cono, allora sicuramente $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ e $\mathcal{Q}_2$ non sono in posizione di n-Poncelet, perchè la costruzione della sequenza di rette del teorema 3.1.1 darebbe tutte le rette sullo stesso piano. Concludiamo che il numero di coniche nel fascio $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$, a cui $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related, è uguale al numero di quadriche $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ che sono in posizione di n-Poncelet con $\mathcal{Q}_2$. Ma questo numero è proprio la metà del numero di famiglie di rette $R \in M$ tali che R, R_2 soddisfano la condizione di n-Poncelet. La tesi segue direttamente applicando la parte b) del corollario 3.2.1.

□

Proposizione 3.3.1. *Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ coniche liscie. Allora $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ se e solo se $\mathcal{C}^*$ è Poncelet n-related a $\mathcal{D}^*$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata dalla definizione di conica duale data nel paragrafo 3 del capitolo 1.

□

Osservazione 3.3.1. *Sia A una matrice 3×3 (simmetrica). La conica duale di A è definita se e solo se $rk(A) = 2$ o $rk(A) = 3$.*

Infatti, in generale, la matrice associata alla conica duale è $adj(A)$, dove $adj(A) \cdot A = \det(A)I$. Se $rk(A) = 3$ o se $rk(A) = 1$ è evidente che si abbia, rispettivamente, $rk(adj(A)) = 3$ o $rk(adj(A)) = 0$; quindi nel primo caso la conica duale è una conica liscia, mentre nel secondo caso non è proprio definita. Cosa succede se $rk(A) = 2$; ovviamente la matrice aggiunta dovrà verificare $adj(A) \cdot A = 0$, e possiamo quindi vederla come la matrice dei coefficienti del sistema lineare $adj(A) \cdot x = 0$, con $rk(x) = 2$. Allora applicando il teorema della dimensione per i sistemi lineari abbiamo che $rk(adj(A)) = 1$. Quindi anche in questo caso la conica duale è definita ma sarà però singolare.

Osservazione 3.3.2. *Se $\mathcal{C}$ è una conica singolare di rango 1, per ogni $\mathcal{D}$ liscia esiste un n-poligono inscritto in $\mathcal{D}$, e quindi si ha che $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$, poiché ogni retta del piano in questo caso è tangente alla conica $\mathcal{C}$. Viceversa, se $\mathcal{C}$ è liscia allora, se $\mathcal{D}$ è singolare di rango 1, $\mathcal{D}$ in generale non è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.*

Teorema 3.3.3. *Fissata $\mathcal{C}$ conica in $\mathbb{P}^2$, l'ipersuperficie H delle coniche Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ ha grado $\frac{1}{4}T(n)$.*

Dimostrazione. Sia Γ una conica liscia che parametrizza il fascio $(\lambda\mathcal{C}^*+\mu\mathcal{D}^*)^*$ nello spazio $\mathbb{P}^5$ di tutte la coniche. Se $\lambda\mathcal{C}^*+\mu\mathcal{D}^*$ è singolare allora $(\lambda\mathcal{C}^*+\mu\mathcal{D}^*)^*$ ha rango 1, e non è contenuta in H. Pertanto le intersezioni di Γ con H corrispondono esattamente alle intersezioni di $\lambda\mathcal{C}^* + \mu\mathcal{D}^*$ con l'ipersuperficie K delle coniche a cui $\mathcal{C}^*$ è Poncelet n-related, che sono $\frac{1}{2}T(n)$ per il teorema 3.3.2. Quindi abbiamo che

$$\deg H = \frac{1}{2}\deg(\Gamma \cap H) = \frac{1}{4}T(n).$$

□

Osservazione 3.3.3. *Il ragionamento del teorema 3.3.3 non può essere invertito. Infatti la conica che parametrizza il fascio duale $(\lambda\mathcal{C}+\mu\mathcal{D})^*$ contiene tre coniche doppie che sono sempre contenute in K e alterano il calcolo del grado. Si potrebbe dimostrare che $(\lambda\mathcal{C}+\mu\mathcal{D})^*$ incontra K con molteplicità $\frac{1}{4}T(n)$ in ciascuna delle coniche doppie.*

3.4 Equazioni per il Teorema di Poncelet

Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche in $\mathbb{P}^2$, e indichiamo con A e B le rispettive matrici associate. Finora abbiamo dimostrato che:

i. $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ se e solo se le matrici associate alle coniche soddisfano una certa equazione $f(A, B) = 0$, cioè sono invarianti rispetto all'azione del gruppo $SL(3)$;

ii. questo invariante ha grado $\frac{1}{4}T(n)$ in $\mathcal{D}$ e $\frac{1}{2}T(n)$ in $\mathcal{C}$ (Formula di Gerbaldi).

3.4.1 $SL(3)$-invarianti

Prima di ricavare la forma esplicita di questi invarianti, enunciamo il seguente teorema, che rientra nella teoria generale degli invarianti, e che occuperà un ruolo molto importante nella parte successiva di questo lavoro.
Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ le matrici simmetriche associate a due coniche (non necessariamente non singolari), allora vale che:

Teorema 3.4.1. *Tutti gli $SL(3)$-invarianti della coppia (A, B) sono polinomi nei seguenti quattro, già incontrati nella proposizione 1.3.2:*

$$\Delta = \det(A)$$

$$\Theta = tr(B \cdot adj(A))$$
$$\Theta' = tr(A \cdot adj(B))$$
$$\Delta' = \det(B).$$

Tralasciamo la dimostrazione di questo teorema, poiché richiederebbe una conoscenza molto più approfondita della teoria degli invarianti (crf. [Dolga1]). Aggiungiamo comunque alcune osservazioni.
Sia $D = \det(t_0 A + t_1 B)$, allora D è un polinomio omogeneo di grado ≤ 3. Cambiando coordinate sostituiamo A e B con $Q^t AQ$ e $Q^t BQ$, dove Q è una matrice invertibile, e quindi D con $\det(Q)^2 D$. Abbiamo così che i coefficienti di D sono invarianti sullo spazio delle coppie di forme quadratiche su $\mathbb{C}^3$ rispetto all'azione del gruppo $SL(3)$. Per scrivere D esplicitamente basta utilizzare la seguente formula per il determinante della somma di due matrici $n \times n$:

$$\det(X + Y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \Delta_{i_1, \ldots, i_k},$$

dove $\Delta_{i_1, \ldots, i_k}$ è il determinante della matrice ottenuta da X sostituendo le colonne $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ con le colonne $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}$. Applicando questa formula al nostro caso otteniamo proprio

$$D = \Delta t_0^3 + \Theta t_0^2 t_1 + \Theta' t_0 t_1^2 + \Delta' t_1^3.$$

Possiamo immediatamente riconoscere il significato geometrico dell'annullarsi dei coefficienti di D. Il coefficiente Δ (risp. Δ') si annulla se e solo se $\mathcal{D}$ (risp. $\mathcal{C}$) è una conica singolare. Se Δ, Δ' sono diversi da zero, allora il coefficiente Θ si annulla se e solo se la conica $\mathcal{C}$ è apolare a $\mathcal{D}$, e, rispettivamente, Θ' si annulla se e solo se $\mathcal{D}$ è apolare a $\mathcal{C}$ (dalla proposizione 1.3.1 e dal teorema 1.4.1).

3.4.2 Equazione per le coniche Poncelet 3-related

A questo punto vogliamo proprio ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 3-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *triangolo* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$. Per prima cosa dobbiamo calcolare, con la formula di Gerbaldi il grado di questo invariante, e quindi quanto vale $T(3)$. Ricordiamo che $T(n)$ è il numero di punti di n-torsione primitivi di una curva ellittica, o equivalentemente il numero degli elementi di ordine n nel gruppo abeliano $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$; quindi abbiamo che $T(3) = 8$. L'invariante che vogliamo determinare ha quindi grado $(2,4)$, cioè grado 2 in A e grado 4 in B, dove con A e B indichiamo per semplicità rispettivamente le coniche $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$. Poiché, dal teorema 3.4.1 sappiamo che tutti gli $SL(3)-$invarianti sono combinazioni lineari di polinomi in Δ, Δ', Θ e Θ', che hanno grado ripettivamente $(3,0), (0,3), (2,1)$ e $(1,2)$, dobbiamo determinare tutti i possibili monomi che danno come grado $(2,4)$ e farne una combinazione linare, con coefficienti costanti da determinare. Si può osservare facilmente che le uniche possibilità sono in questo caso Θ'^2 e $\Theta\Delta'$. Quindi l'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^2 + ktr(B \cdot adj(A)) \det(B) = 0, \tag{3.1}$$

con k da determinare. L'idea per determinare k è quella di trovare un esempio di due coniche Poncelet 3-related, di sostituire le matrici associate nell'equazione (3.1) e ricavare k.
Prendiamo le coniche

$$\mathcal{D} : x^2 + y^2 - 4 = 0, \qquad \mathcal{C} : x^2 + y^2 - 1 = 0;$$

le matrici associate alle coniche sono quindi matrici diagonali, e precisamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si può osservare facilmente che il triangolo equilatero di lato $2\sqrt{3}$ è circoscritto a $\mathcal{C}$ e inscritto in $\mathcal{D}$. Allora

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad adj(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e inoltre

$$A \cdot adj(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad B \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A questo punto, sostituendo nell'equazione (3.1) otteniamo

$$(-6)^2 + k(-9)(-1) = 0,$$

quindi $k = -4$. Quindi possiamo concludere che se esiste un triangolo inscritto a $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$ allora deve valere che $\Theta'^2 - 4\Theta\Delta' = 0$. Osserviamo però che questa equazione è un'equazione omogenea nel grado (2,4), quindi se fosse scomponibile come prodotto di due fattori entrambi dovrebbero essere SL(3)-invarianti e la somma dei loro gradi dovrebbe essere $(2,4)$; ma le uniche possibilità sarebbero perciò o $\Theta'\Theta'$ oppure $\Theta\Delta'$ e ovviamente questo è assurdo. Abbiamo pertanto dimostrato il seguente teorema:

Teorema 3.4.2. *Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche non singolari. Allora esiste un triangolo inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$ se e solo se*

$$\Theta'^2 - 4\Theta\Delta' = 0.$$

A questo punto siamo anche in grado di ricavare una condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un triangolo circoscritto ad una circonferenza e inscritto in un altra, che dipende esclusivamente dai raggi delle due circonferenze e dalla distanza dei centri. Scegliamo per semplicità la circonferenza più interna centrata nell'origine; siano allora

$$\mathcal{D} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{C} : x^2 + y^2 - r^2 = 0;$$

quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ -x_0 & -y_0 & a^2 - R^2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}$$

dove $a^2 = x_0^2 + y_0^2$. Allora

$$adj(B) = \begin{pmatrix} -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con un pò di calcoli otteniamo inoltre $\det(A) = -R^2$ e

$$adj(A) = \begin{pmatrix} x_0^2 - R^2 & x_0 y_0 & x_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 - R^2 & y_0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione che abbiamo ricavato precedentemente è

$$tr(A \cdot adj(B))^2 - 4tr(B \cdot adj(A)) \det(B) = 0; \tag{3.2}$$

quindi dobbiamo calcolare $A \cdot adj(B)$ e $B \cdot adj(A)$. Otteniamo

$$B \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} x_0^2 - R^2 & x_0 y_0 & x_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 - R^2 & y_0 \\ -r^2 x_0 & -r^2 y_0 & -r^2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot adj(B) = \begin{pmatrix} -r^2 & 0 & -x_0 \\ 0 & -r^2 & -y_0 \\ x_0 r^2 & y_0 r^2 & a^2 - R^2 \end{pmatrix}$$

Inseriamo ora le tracce di queste due matrici nell'equazione (3.2), quindi abbiamo

$$(-2r^2 + a^2 - R^2)^2 - 4(a^2 - 2R^2 - r^2)(-r^2) = 0.$$

Facendo i calcoli otteniamo che questa equazione può essere scritta come prodotto di due fattori, e precisamente

$$(a^2 - R^2 - 2rR)(a^2 - R^2 + 2rR) = 0.$$

Poiché il primo fattore non si può annullare, altrimenti $a^2 = R(R + 2r)$ mentre $a^2 < R^2 < R(R + 2r)$, ricaviamo la seguente proposizione:

Proposizione 3.4.1. ***(Formula di Eulero)*** *Siano date due circonferenze $\mathcal{C}_i$ di centro P_i e raggio r_i per $i = 1, 2$. Supponiamo che $\mathcal{C}_1$ sia interna a $\mathcal{C}_2$. Allora esiste un triangolo circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se $d(P_1, P_2)^2 = r_2(r_2 - 2r_1)$.*

Di questa formula, anche conosciuta come *Formula di Chapple*, esiste tuttavia una dimostrazione classica (vedi ultimo paragrafo di questo capitolo), neanche troppo difficile, ma sicuramente più laboriosa, che utilizza la geometria elementare.

3.4.3 Equazione per le coniche Poncelet 4-related

Procedendo analogamente al caso precedente vogliamo ora ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè esista un *quadrilatero* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$. Si può osservare con facilità che il numero degli elementi di ordine 4 nel gruppo abeliano $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ è 12, quindi abbiamo che $T(4) = 12$. Per la formula di Gerbaldi, l'invariante che vogliamo determinare ha perciò grado 3 in A e grado 6 in B. In questo caso tutte le possibili composizioni che danno come grado $(3,6)$ sono tre, e precisamente Θ'^3, $\Theta'\Theta\Delta'$ e $\Delta\Delta'^2$; quindi l'equazione che dobbiamo trovare ha la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^3 + ktr(A \cdot adj(B))tr(B \cdot adj(A))\det(B)+ \\ +\mu\det(A)\det(B)^2 = 0, \tag{3.3}$$

con k, μ da determinare. Per determinarli questa volta saranno necessari due esempi diversi di coniche Poncelet 4-related. Vediamo il primo: siano

$$\mathcal{D} : x^2 + y^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad \mathcal{C} : x^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0;$$

allora il quadrato di lato 1 è circoscritto a $\mathcal{C}$ e inscritto in $\mathcal{D}$. Abbiamo quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad adj(B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot adj(B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione (3.3) otteniamo

$$(-1)^3 + k(-1)\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 0,$$

cioè

$$1 + \frac{5}{16}k + \frac{1}{32}\mu = 0. \tag{3.4}$$

Per ottenere l'altra equazione in k e μ consideriamo le coniche

$$\mathcal{D} : x^2 + y^2 - 5 = 0, \quad \mathcal{C} : \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0;$$

si vede che il rettangolo di dimensioni 4 e 2 è inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$. Questa volta abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad adj(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot adj(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad B \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione (3.3) otteniamo

$$\left(-\frac{5}{2}\right)^3 + k\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{29}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \mu(-5)\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 0,$$

cioè

$$\frac{125}{8} + \frac{145}{32}k + \frac{5}{16}\mu = 0. \tag{3.5}$$

A questo punto se mettiamo a sistema le equazioni (3.4) e (3.5), ricaviamo $k = -4$ e $\mu = 8$. Più elegantemente, in questo caso, si poteva anche scegliere una famiglia ad un parametro $(\mathcal{D}, \mathcal{C}_t)$, dove $\mathcal{D}$ era una circonferenza fissata di raggio r e $\mathcal{C}_t$ la famiglia di ellissi di equazione $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{r^2-t^2} = 1$, ma provando a fare i calcoli veniva fuori un'equazione più complicata da utilizzare. Concludiamo osservando che l'equazione ottenuta $\Theta'^3 - 4\Theta\Theta'\Delta' + 8\Delta\Delta'^2 = 0$ è un'equazione irriducibile perchè omogenea nel grado $(3, 6)$. Vale quindi il seguente teorema:

Teorema 3.4.3. *Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche non singolari. Allora esiste un quadrilatero inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$ se e solo se*

$$\Theta'^3 - 4\Theta\Theta'\Delta' + 8\Delta\Delta'^2 = 0.$$

Anche in questo caso se consideriamo come coniche due circonferenze, riusciamo a ricavare un'equazione, che dipende dai raggi delle circonferenze e dalla distanza dei centri, che caratterizza le circonferenze Poncelet 4-related. Come nel caso dei triangoli scegliamo le circonferenze

$$\mathcal{D} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \;\; e \;\; \mathcal{C} : x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

L'equazione che abbiamo ottenuto nel caso dei quadrilateri è

$$tr(A \cdot adj(B))^3 - 4tr(A \cdot adj(B))tr(B \cdot adj(A)) \det(B) + 8 \det(A) \det(B)^2 = 0;$$

sostituendo otteniamo

$$(-2r^2+a^2-R^2)^3-4(-2r^2+a^2-R^2)(-r^2+a^2-2R^2)(-r^2)+8(-R^2)(-r^2)^2 = 0.$$

Facendo tutti i calcoli riusciamo a scriverci l'equazione in questo modo

$$(a^2 - R^2)[(a^2 - R^2) - 2r^2(a^2 + R^2)] = 0.$$

Ora poiché ovviamente $a^2 - R^2$ non può essere uguale a zero, altrimenti $\mathcal{C}$ non sarebbe interna a $\mathcal{D}$, abbiamo $(a^2 - R^2) - 2r^2(a^2 + R^2) = 0$. Vale quindi

Proposizione 3.4.2. ***(Formula di Fuss)*** *Siano date due circonferenze $\mathcal{C}_i$ di centro P_i e raggio r_i per $i = 1, 2$. Supponiamo che $\mathcal{C}_1$ sia interna a $\mathcal{C}_2$ e sia $d = d(P_1, P_2)$. Allora esiste un quadrilatero circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se $(d^2 - r_2^2)^2 = 2r_1^2(r_2^2 + d^2)$.*

Anche di questa formula esiste una dimostrazione che utilizza la geometria elementare (vedi paragrafo successivo).

In teoria potremo andare avanti con pentagoni, esagoni... perché sappiamo dal Teorema di Darboux che esiste un'equazione per ogni n. Purtroppo però il metodo che abbiamo utilizzato fino ad ora, nonostante la sua originalità, diventa troppo laborioso per $n \geq 5$.

3.4.4 Dimostrazioni classiche della formula di Eulero e della formula di Fuss

Per permettere un confronto immediato riportiamo le dimostrazioni che di solito si trovano in letteratura delle formule di Eulero e di Fuss, prese da [Dorrie].

Proposizione 3.4.3. ***(Formula di Eulero)*** *Siano date due circonferenze $\mathcal{C}_i$ di centro P_i e raggio r_i per $i = 1, 2$. Supponiamo che $\mathcal{C}_1$ sia interna a $\mathcal{C}_2$ e sia $d = d(P_1, P_2)$. Allora esiste un triangolo circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se $d^2 = r_2(r_2 - 2r_1)$.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia ABC il triangolo circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto in $\mathcal{C}_2$. Prolunghiamo il segmento BP_1 e indichiamo con D l'intersezione di questo con $\mathcal{C}_2$; congiungiamo A con D e A con P_1, e indichiamo con β l'angolo P_1AC e con α l'angolo $D\hat{A}C$.

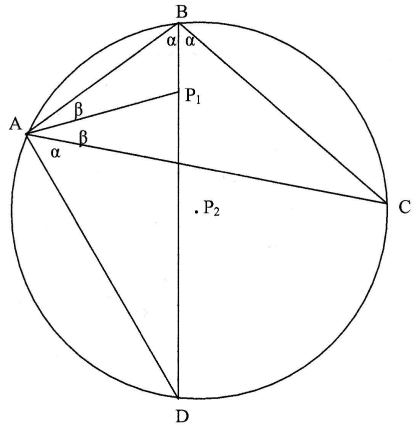

Figura 3.1: Triangolo ABC inscritto e circoscritto a due circonferenze

Allora gli angoli $D\hat{A}C = D\hat{B}C = \alpha$, perché insistono sullo stesso arco DC. Per il teorema delle corde si ha

$$BP_1 \cdot P_1D = (r_2 + d)(r_2 - d). \tag{3.6}$$

L'angolo $A\hat{P_1}D = \alpha + \beta$, perché angolo esterno del triangolo ABP_1. Quindi abbiamo che il triangolo AP_1D è isoscele, pertanto $AD = DP_1$. $AD = 2r_2 \sin\alpha$, perchè è una corda sottesa ad un angolo α, e $BP_1 = \frac{r_1}{\sin\alpha}$. Sostituendo in (3.6) otteniamo $(r_2 + d)(r_2 - d) = 2r_1r_2$, ossia la tesi.

($\Leftarrow$) Prendiamo $A \in \mathcal{C}_2$. Traccio la retta passante per A e P_1, che interseca $\mathcal{C}_2$ nel punto D. Dal punto A traccio le tangenti a $\mathcal{C}_1$, che intersecano $\mathcal{C}_2$ nei punti B e C, e sono tangenti a $\mathcal{C}_1$ in M e N. Congiungo B con C; il segmento BC interseca il segmento AD nel punto H. Congiungo D con C, D con B e B con P_1.

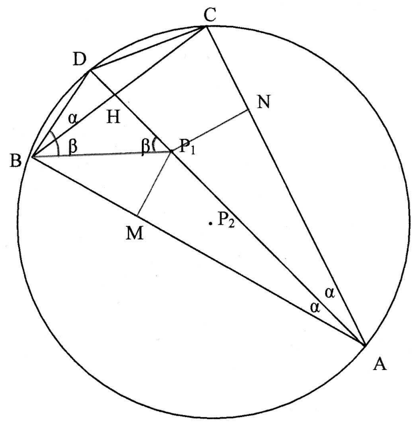

Figura 3.2: Formula di Eulero

Il segmento AD è bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ per costruzione, quindi $B\hat{A}D = D\hat{A}C = \alpha$, e si ha $AP_1 = \frac{r_1}{\sin\alpha}$. Per il teorema delle corde abbiamo $AP_1 \cdot DP_1 = (r_2 + d)(r_2 - d)$, cioè $DP_1 = \frac{r_2^2 - d^2}{r_1}\sin\alpha$. Poiché per ipotesi abbiamo che $d^2 = r_2(r_2 - 2r_1)$, ricaviamo che $DP_1 = 2r_2\sin\alpha$. Anche $DB = 2r_2\sin\alpha$, perché corda sottesa all'angolo α, quindi il triangolo DBP_1 è isoscele; indichiamo con β l'angolo $D\hat{B}P_1 = D\hat{P_1}B$. Gli angoli $D\hat{B}C = D\hat{A}C = \alpha$, perché insistono sullo stesso arco DC, quindi $P_1\hat{B}A = \pi - \alpha - (\pi - \beta) = \beta - \alpha = C\hat{B}P_1$. Allora BP_1 è la bisettrice dell'angolo $C\hat{B}A$. Allo stesso modo si dimostra che CP_1 è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}A$. Possiamo perciò concludere che P_1 è l'incontro delle bisettrici del triangolo ABC, quindi è il centro del cerchio inscritto; ma P_1 è anche il centro di $\mathcal{C}_1$, che è tangente a AB e AC. Quindi $\mathcal{C}_1$ è il cerchio inscritto e sarà tangente anche a BC.

$\square$

Proposizione 3.4.4. *(**Formula di Fuss**) Siano date due circonferenze $\mathcal{C}_i$ di centro P_i e raggio r_i per $i = 1, 2$. Supponiamo che $\mathcal{C}_1$ sia interna a $\mathcal{C}_2$ e sia $d = d(P_1, P_2)$. Allora esiste un quadrilatero circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se $(d^2 - r_2^2)^2 = 2r_1^2(r_2^2 + d^2)$.*

Dimostrazione. Prima di tutto dimostriamo che: *un quadrilatero $PQRS$ è circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se i lati opposti PQ, RS, SP, QR sono tangenti a $\mathcal{C}_1$ nei punti X, X', Y, Y', estremi di due corde, XX' e YY', di $\mathcal{C}_1$ perpendicolari tra loro.*
$(\Rightarrow)$ Sia O il punto di intersezione di XX' con YY'.

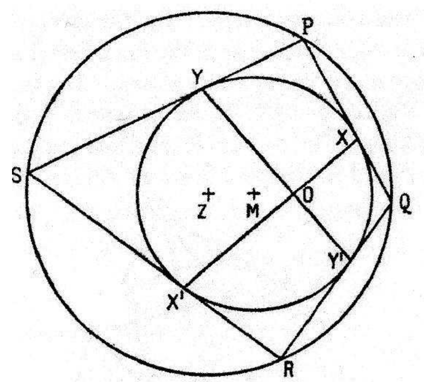

Figura 3.3: Quadrilatero inscritto e circoscritto a due circonferenze

Applicando il teorema della somma degli angoli interni di un quadrilatero ai due quadrilateri $OXPY$ e $OX'RY'$, indicando gli angoli dei quadrilateri con le lettere corrispondenti ai vertici, otteniamo le equazioni

$$\hat{O} + \hat{X} + \hat{Y} + \hat{P} = 360°, \ \hat{O} + \hat{X'} + \hat{R} + \hat{Y'} = 360°.$$

Poiché la somma degli angoli $\hat{X}$ e $\hat{X'}$ ($\hat{Y}$ e $\hat{Y'}$), situati da parti opposte del segmento XX' (YY'), equivale a 180°, sommando le due equazioni precedenti ricaviamo

$$2\hat{O} + \hat{P} + \hat{R} = 360°. \tag{3.7}$$

Quindi, dato che la somma dei due angoli opposti $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ del quadrilatero $PQRS$ è 180°, abbiamo che $\hat{O} = 90°$, e cioè che le corde XX' e YY' sono perpendicolari tra loro.
$(\Leftarrow)$ Dalla (3.7), poiché $\hat{O} = 90°$, si ha che la somma degli angoli opposti $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ deve fare 180°, cioè il quadrilatero $PQRS$ è anche inscritto in una circonferenza $\mathcal{C}_2$.

A questo punto il modo più semplice per trovare la relazione tra i raggi e la distanza dai centri delle circonferenze inscritta e circoscritta è quello di risolvere il seguente problema:
un angolo retto ruota attorno al suo vertice fisso, che si trova dentro una circonferenza; trovare il luogo dei punti di intersezione delle due tangenti alla circonferenza che passano per i punti di intersezione dei lati dell'angolo con la circonferenza. Sia $\mathcal{C}_1$ la circonferenza; sia M il suo centro e $r_1 = \rho$ il raggio. Sia O il vertice fisso dell'angolo retto che dista e da M. Siano X e Y i punti di intersezione dei lati dell'angolo con $\mathcal{C}_1$, e sia P il punto di intersezione delle tangenti da X e Y; sia $MP = p$ e $P\hat{M}O = \varphi$.

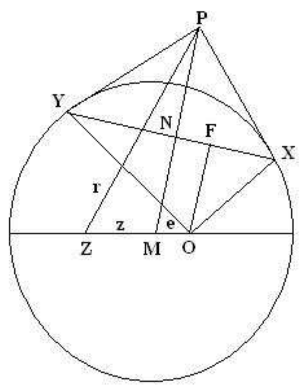

Figura 3.4: L'angolo $X\hat{O}Y$ ruota attorno al suo vertice fisso O

Poiché OXY è un triangolo retto abbiamo $OF^2 = FX \cdot FY$, dove F è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa. Introduciamo le proiezioni $\rho' = MN$ e $e' = e\cos\varphi$ su MP e, $\rho'' = NX$ e $e'' = e\sin\varphi (= NF)$ su XY. Allora l'equazione precedente può essere scritta $(\rho' - e')^2 = (\rho'' - e'')(\rho'' + e'')$, oppure

$$2\rho' - 2\rho' e \cos\varphi + e^2 = \rho^2. \tag{3.8}$$

Anche MXP è un triangolo retto, quindi $MX^2 = MP \cdot MN$, cioè

$$\rho^2 = p\rho'. \tag{3.9}$$

Ricavando ρ' dalla (3.9), e sostituendolo nella (3.8) otteniamo la seguente relazione:

$$p^2 + 2\frac{\rho e^2}{\rho^2 - e^2} p \cos\varphi = \frac{2\rho^4}{\rho^2 - e^2}. \tag{3.10}$$

Sia Z un punto che si trova sul prolungamento di OM, a distanza z da M; la distanza $r = ZP$ del punto Z da P è data dal teorema del coseno

$$r^2 = z^2 + p^2 + 2zp\cos\varphi. \tag{3.11}$$

Scegliendo

$$z = \frac{\rho^2}{\rho^2 - e^2} e, \tag{3.12}$$

e utilizzando la (3.10), possiamo riscrivere la (3.11) in questo modo

$$r^2 = z^2 + \frac{2\rho^4}{\rho^2 - e^2}, \tag{3.13}$$

e concludere che r ha un valore costante! Quindi il luogo dei punti che cercavamo è una circonferenza $\mathcal{C}_2$, il cui centro Z è determinato dalla (3.12) e il suo raggio r dalla (3.13).
Siano Q, R, S i punti di intersezione delle tangenti a $\mathcal{C}_1$ nei punti in cui il prolungamento di OX e OY incontra $\mathcal{C}_1$. Naturalmente Q, R, S appartengono a $\mathcal{C}_2$. Il quadrilatero $PQRS$ è simultaneamente circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto in $\mathcal{C}_2$. Se ruotiamo l'angolo $X\hat{O}Y$ attorno ad O, i punti X e Y descrivono la circonferenza $\mathcal{C}_1$, e il quadrilatero $PQRS$ assume continuamente una posizione differente, ma sempre circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto in $\mathcal{C}_2$. Ricavando $\rho^2 - e^2$ dalla (3.13), e sostituendolo in (3.12) otteniamo $e = \frac{2z\rho^2}{(r^2-z^2)^2}$. Da questa segue $\rho^2 - e^2 = \rho^2 \frac{[(r^2-z^2)^2 - 4\rho^2 z^2]}{(r^2-z^2)^2}$. Sostituendo questo valore nella (3.13) otteniamo (finalmente!)

$$2\rho^2(r^2 + z^2) = (r^2 - z^2)^2.$$

$\square$

Appendice A

Richiami di Geometria Algebrica

A.1 Varietà Affini e Proiettive

Sia k un campo, che possiamo supporre algebricamente chiuso, e indichiamo con $\mathbb{A}^n_k$ lo spazio affine $n-$dimensionale su k.

Definizione A.1.1. *Un* sottoinsieme algebrico *in* $\mathbb{A}^n$ *è un sottoinsieme* $X \subset \mathbb{A}^n$ *composto da tutti gli zeri comuni di un certo numero (finito) di polinomi a coefficienti in* k.

Definizione A.1.2. *Un insieme algebrico* $X \subset \mathbb{A}^n$ *si dice* irriducibile *se non esiste una decomposizione*

$$X = X_1 \cup X_2 \text{ con } X_1, X_2 \subsetneq X$$

di X *come unione di due sottoinsiemi algebrici.*

Siano $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ due sottoinsiemi algebrici.

Definizione A.1.3. *Una* funzione $f : X \to k$ *si dice* regolare (o polinomiale) *se esiste un polinomio* $F(T)$ *a coefficenti in* k *tale che* $f(x) = F(x)$ *per ogni* $x \in X$. *L'insieme delle funzioni regolari da* X *in* k *si indica con* $k[X]$ *ed è un anello che si chiama* anello delle coordinate.
*Un'*applicazione $g : X \to Y$ *si dice* regolare *se esistono* m *funzioni regolari* $f_1, \dots, f_m$ *su* X *tali che* $g(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ *per ogni* $x \in X$.

Definizione A.1.4. *Un'applicazione regolare* $f : X \to Y$ *è un* isomorfismo *se esiste un'applicazione regolare* $g : Y \to X$ *tale che* $f \circ g = g \circ f = Id$.

Viene chiamata *varietà affine* la classe di equivalenza degli isomorfismi polinomiali di ogni sottoinsieme algebrico irriducibile.

Definizione A.1.5. *Sia X una varietà affine. Allora il campo delle frazioni dell'anello $k[X]$ è chiamato* campo delle funzioni razionali *su X, e si indica con $k(X)$. Una funzione razionale su X si scrive $f : X \dashrightarrow k$.*

Definizione A.1.6. *Una funzione razionale $f \in k(X)$ si dice* regolare in un punto *$P \in X$ se può essere scritta nella forma $f = \frac{g}{h}$, con $g, h \in k[X]$ e $h(P) \neq 0$.*

Definizione A.1.7. *Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ una varietà affine e $Y \subset \mathbb{A}^m$ un sottoinsieme algebrico. Un'*applicazione razionale *$f : X \dashrightarrow Y$ è un'applicazione definita al di fuori degli zeri dei denominatori, data da m funzioni razionali $f_1, \dots, f_m$ tale che $(f_1, \dots, f_m) \in Y$ per ogni $x \in X$, con x punto regolare di ogni f_i.*

Sia $\mathbb{P}^n_k := \mathbb{A}^{n+1}_k - \{0\}/\sim$ lo spazio proiettivo $n-$dimensionale, dove $(\alpha_0 : \dots : \alpha_n) \sim (\beta_0 : \dots : \beta_n)$ se e solo se esiste $\lambda \in k,\ \lambda \neq 0$ tale che $\alpha_j = \lambda\beta_j$, per $j = 0, \dots, n$. I polinomi su $\mathbb{P}^n$ in genere non definiscono delle funzioni, ma sono ben definiti i luoghi degli zeri di polinomi omogenei.

Definizione A.1.8. *Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{P}^n$ si dice un* sottoinsieme algebrico proiettivo *se è composto da tutti i punti di $\mathbb{P}^n$ che azzerano simultaneamente un certo numero (finito) di polinomi omogenei a coefficienti in k.*

Definizione A.1.9. *Una* varietà quasiproiettiva *è un sottoinsieme aperto, rispetto alla topologia di Zariski, di un sottoinsieme algebrico proiettivo.*

Poiché tra i polinomi solo le costanti definiscono delle funzioni, per quanto riguarda le funzioni su $\mathbb{P}^n$ si lavora solo con le funzioni razionali. In generale però neanche le funzioni razionali definite su un aperto sono funzioni su $\mathbb{P}^n$. Quindi fra queste vengono considerate solo quelle ottenute come quoziente di polinomi omogenei dello stesso grado. Se $X \in \mathbb{P}^n$ è una varietà quasiproiettiva la definizione di regolarità per $f : X \dashrightarrow k$ è la stessa di quella del caso affine.

Definizione A.1.10. *Sia $X \in \mathbb{P}^n$ una varietà quasiproiettiva. Un'applicazione $f : X \dashrightarrow \mathbb{A}^m$ è data da m funzioni razionali su X a valori in k. Se queste funzioni sono regolari su X allora l'applicazione si dice* regolare.

Infine consideriamo il caso generale, e più interessante, di applicazioni razionali da $X \in \mathbb{P}^n$ a $Y \in \mathbb{P}^m$, varietà quasiproiettive, ricordando che lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ può essere ricoperto da $n+1$ aperti affini $\mathbb{A}_i^n$, $i = 0, \dots n$, con $i-$esima coordinata diversa da zero.

Definizione A.1.11. *Un'applicazione $f : X \dashrightarrow Y$ è composta da $m+1$ funzioni razionali su $\mathbb{P}^n$, $f = (f_0 : \dots : f_m)$, ed è definita a meno di coefficienti di proporzionalità. f è* regolare *in $x \in X$ se esiste una rappresentazione $f = (f_0 : \dots : f_m)$ tale che per ogni $j = 0, \dots, m$ si ha che f_j è regolare in x, e inoltre esiste j tale che $f_j(x) \neq 0$.*

A questo punto passiamo a definire la *dimensione* di una varietà affine qualsiasi. Un modo per arrivare a questa definizione è quello di passare attraverso la definizione di *spazio tangente* ad una varietà. Definiremo lo spazio tangente ad un punto x di una varietà affine X come l'insieme di tutte le rette che passano per x e *toccano* X. Vediamo cosa significa che una retta $L \subset \mathbb{A}^n$ tocca una varietà $X \subset \mathbb{A}^n$. Possiamo supporre che il sistema di coordinate in $\mathbb{A}^n$ sia stato scelto in modo che x coincide con l'origine O. Allora $L = \{ta, t \in k\}$ e supponiamo che X sia data da un sistema di equazioni $F_1 = \dots = F_m = 0$. L'insieme $X \cap L$ è quindi determinato dalle equazioni $F_1(ta) = \dots = F_m(ta) = 0$. Poiché ci occupiamo di polinomi in una sola variabile t le loro radici comuni sono le radici del loro MCD. Sia $f(t) = MCD(F_1(ta), \dots, F_m(ta)) = C \prod (t - \alpha_i)^{l_i}$. I valori $t = \alpha_i$ corrispondono ai punti di intersezione di L con X e la moltiplicità l_i viene interpretata naturalmente come molteplicità delle intersezioni di L con X. Osserviamo che, poiché $O \in L \cap X$, $t = 0$ è una radice di $f(t)$.

Definizione A.1.12. *La* molteplicità di intersezione *in un punto $O \in L \cap X$ è la molteplicità della radice $t = 0$ in $f(t)$.*

Definizione A.1.13. *Una retta L* tocca *X in un punto O se la molteplicità di intersezione in O è maggiore di 1.*

Vediamo ora quali sono le condizioni di tangenza di L e X. Poiché $O \in X$, i termini costanti degli $F_i(T)$ sono nulli. Quindi possiamo scrivere $F_i = L_i + G_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$, dove L_i sono le parti lineari e G_i le parti di grado almeno 2. Allora $F_i(at) = tL_i(a) + G_i(at)$ e $G_i(at)$ è divisibile per t^2. Quindi $F_i(at)$ è divisibile per t^2 se e solo se $L_i(a) = 0$.

Definizione A.1.14. *Il sottospazio formato dalle rette che toccano X in x si chiama* spazio tangente nel punto x a X *e si indica con T_xX. Questo* *sottospazio è dato dalle equazioni $L_1(a) = \ldots = L_m(a) = 0$, ed è quindi un sottospazio lineare.*

Utilizzando lo sviluppo di Taylor degli F_i possiamo scrivere l'equazione dello spazio tangente nella forma $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial T_i}\right)(a)(T_i - a_i) = 0 \; j = 1, \ldots, m$. Se il rango della matrice $((\partial F_j/\partial T_i)(a))$ è r, allora la dimensione di T_xX è $n-r$. Esiste quindi un numero s tale che $dimT_xX \geq s$ e quei punti $y \in X$ per cui $dimT_yX > s$ formano un sottoinsieme chiuso di X, cioè una sottovarietà di dimensione più piccola.

Definizione A.1.15. *I punti x di una varietà irriducibile X per i quali* $\dim T_xX = s = min \dim T_yX$ *sono chiamati* punti semplici*; i rimanenti sono chiamati* singolari.

Come abbiamo già osservato i punti semplici formano un sottoinsieme aperto e non vuoto di X e i punti singolari un sottoinsieme chiuso di X.

Definizione A.1.16. *Se X è una varietà affine irriducibile. La* dimensione di X *è uguale alla dimensione dello spazio tangente ad un punto semplice.*

Osserviamo che se la varietà non è irriducibile la dimensione è uguale al massimo delle dimensioni delle sue componenti irriducibili.

A.2 Teorema sulla Dimensione delle Fibre

Teorema A.2.1. *Se $f : X \to Y$ è un'applicazione regolare tra varietà quasiproiettive irriducibili, $f(X) = Y$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, allora $m \leq n$ e*

1) $\dim f^{-1}(y) \geq n - m$ *per ogni $y \in Y$;*

2) in Y esiste un insieme aperto e non vuoto U tale che $\dim f^{-1}(y) = n - m$ *per ogni $y \in U$.*

In realtà ci sono alcuni casi in cui la 2) non vale per ogni $y \in Y$, cioè la dimensione di una fibra può saltare in alcuni punti. Vediamone un esempio: Consideriamo il problema della disposizione delle rette su una superficie in $\mathbb{P}^3$. Una retta $L \subset \mathbb{P}^3$ corrisponde ad un piano P in uno spazio vettoriale V di dimensione 4. P ha quindi una base formata da due vettori, $x = (x_0, \ldots, x_3)$

e $y = (y_0, \ldots, y_3)$, che determina $p = x \wedge y \in \Lambda^2 V$, dove $p_{ij} = x_i y_j - y_i x_j$ con $i, j = 0, \ldots, 3$. Ovviamente vale anche il viceversa, cioè dato p determino univocamente il piano P. La 2-forma p ha 16 coordinate che sono collegate dalle relazioni $p_{ii} = 0$ e $p_{ij} = -p_{ji}$; quindi ci sono 6 coordinate indipendenti $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$. Abbiamo cioè che ogni retta $L \subset \mathbb{P}^3$ determina $[p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}] \in \mathbb{P}^5$. Per il viceversa bisogna però che valga $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$, cioè ogni punto che soddisfa questa relazione corrisponde ad una retta. Ricordiamo inoltre che l'equazione precedente definisce quella che si chiama Quadrica di Klein. I punti che soddisfano questa relazione formano un'ipersuperficie π di grado 2 in $\mathbb{P}^5$, $\dim \pi{=}4$. In conclusione le rette $L \subset \mathbb{P}^3$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di π. Per un dato m consideriamo lo spazio $\mathbb{P}^\nu$, i cui punti corrispondono alle superfici di grado m in $\mathbb{P}^3$; quindi $\nu = \begin{pmatrix} m+3 \\ 3 \end{pmatrix} - 1$.

Sia $m = 2$. Lo spazio $\mathbb{P}^9$ è perciò in corrispondenza biunivoca con le quadriche di $\mathbb{P}^3$. Consideriamo $\Gamma_2 \subset \mathbb{P}^9 \times \pi$ definito dalle coppie $(\xi, \eta) \in \mathbb{P}^9 \times \pi$ per le quali la retta L corrispondente a $\eta \in \pi$ è contenuta nella quadrica corrispondente al punto $\xi \in \mathbb{P}^9$, e cerchiamo di calcolare la dimensione di Γ_2. Consideriamo le proiezioni $\varphi : \mathbb{P}^9 \times \pi \to \mathbb{P}^9$ e $\psi : \mathbb{P}^9 \times \pi \to \pi$. Ovviamente sono applicazioni regolari su tutto $\mathbb{P}^9 \times \pi$ ma consideriamole solo su Γ_2. Osserviamo che $\psi(\Gamma_2) = \pi$: infatti attraverso ogni retta passa almeno una quadrica. Determiniamo a questo punto le dimensioni delle fibre $\psi^{-1}(\eta)$ di ψ. Tramite una trasformazione proiettiva possiamo supporre che la retta L corrispondente a η sia definita dalle equazioni $u_0 = 0, u_1 = 0$. I punti $\xi \in \mathbb{P}^9$ tali che $(\xi, \eta) \in \psi^{-1}(\eta) \subset \Gamma_2$, corrispondono alle quadriche passanti per questa retta. L'equazione di queste quadriche ha la forma $F = 0$, dove $F = u_0 G + u_1 H$ con G, H forme di grado 1: infatti in generale posso scrivere $F = u_0 G + u_1 H + K(u_2, u_3)$, ma poiché $F(0, 0, u_2, u_3) = 0$, per ogni u_2, u_3, per il principio di identità dei polinomi si ha che $K(u_2, u_3) \equiv 0$. L'insieme delle quadriche che contengono L (indichiamolo con $\mathcal{K}$) corrisponde ad un sottospazio lineare di $\mathbb{P}^9$, la cui dimensione può essere calcolata come segue: consideriamo la successione esatta

$0 \to \mathcal{K} \to \{\text{quadriche di } \mathbb{P}^3\} \to \{\text{quadriche su L}\} \to 0$, dove le due applicazioni centrali sono la prima iniettiva e l'altra suriettiva; abbiamo quindi che $\{\text{quadriche su L}\} = \{\text{quadriche di } \mathbb{P}^3\}/\mathcal{K}$, cioè

$\dim \mathcal{K} = \dim\{\text{quadriche di } \mathbb{P}^3\} - \dim\{\text{quadriche su L}\} = 7$. In conclusione le quadriche passanti per L corrispondono a punti di $\mathbb{P}^6$. Quindi $\dim \psi^{-1}(\eta) = 6$; per la parte 2) del teorema A.2.1 applicato alla funzione

ψ abbiamo $\dim(\Gamma_2) = \dim\psi(\Gamma_2) + \dim\psi^{-1}(\eta) = 10$. Consideriamo l'altra proiezione $\varphi : \Gamma_2 \to \mathbb{P}^9$; ovviamente $\dim\varphi(\Gamma_2) \leq \dim\Gamma_2$. Applichiamo la parte 1) del teorema A.2.1 a φ, allora $\dim\varphi^{-1}(\xi) \geq 10 - 9 = 1$. A questo punto siamo proprio arrivati di fronte al fenomeno del salto della dimensione della fibra: infatti se la quadrica è irriducibile per i punti corrispondenti si ha $\dim\varphi^{-1}(\xi) = 1$, ma se la quadrica degenera in due piani allora $\dim\varphi^{-1}(\xi) = 2$.

Bibliografia

[BB] W. Barth, Th. Bauer: *Poncelet Theorems*. Exposition. Math. 14, 125-144 (1996)

[Dolga1] Igor Dolgachev: *Lectures on Invariant Theory*. Cambridge University Press, (2003)

[Dolga2] Igor Dolgachev: *Topics in Classical Geometry*. Lecture Notes available at `http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga`

[Dorrie] Heinrich Dörrie: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications Inc., (1965)

[FT] D.Fuchs, S.Tabachnikov: *Mathematical Omnibus*. American Mathematical Society, (2007)

[GRT] F.Gherardelli, L.Rosati, G.Tomassini: *Lezioni di Geometria*. CEDAM, Padova (1978)

[Mira] Rick Miranda: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society (1997)

[Reid] Miles Reid: *Undergraduate Algebraic Geometry*. Cambridge University Press, (1988)

[Sha] I.R.Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1977)

[Ser] E. Sernesi: *Geometria 2*. Bollati Boringhieri Editore, Torino (2000)