Equazioni per le Coniche di Poncelet

2° Seminario

Giada Giuliani

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

20 giugno 2008

Obiettivi finali

Data $\mathcal{C}$ una conica non singolare in $\mathbb{P}^2$. Denotiamo con T un triangolo circoscritto a $\mathcal{C}$.

OBIETTIVO:
Trovare le *equazioni* a cui deve soddisfare una conica $\mathcal{S}$ affinchè sia

- circoscritta a qualche triangolo T circoscritto a $\mathcal{C}$;
- circoscritta a qualche poligono circoscritto a $\mathcal{C}$;

e infine

- circoscritta a qualche triangolo autopolare rispetto a $\mathcal{C}$.

Dove eravamo rimasti...

L'ultimo obiettivo era già stato risolto: infatti avevo dimostrato

- *A è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B se e solo se A è apolare a B*

  e inoltre

- *A è apolare a $B \Leftrightarrow tr(B^{-1}A) = 0$*

Tramite un calcolo dimensionale ci siamo accorti che succedeva un fenomeno ben noto ma inaspettato...e precisamente che

Proposizione

Data una conica B, se esiste un triangolo autopolare rispetto a B tale che A è una conica circoscritta a questo triangolo, allora esistono *infiniti* triangoli autopolari rispetto a B che hanno A come conica circoscritta.

Dove eravamo rimasti...

L'ultimo obiettivo era già stato risolto: infatti avevo dimostrato

- *A è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B se e solo se A è apolare a B*

  e inoltre

- *A è apolare a $B \Leftrightarrow tr(B^{-1}A) = 0$*

Tramite un calcolo dimensionale ci siamo accorti che succedeva un fenomeno ben noto ma inaspettato...e precisamente che

Proposizione

Data una conica B, se esiste un triangolo autopolare rispetto a B tale che A è una conica circoscritta a questo triangolo, allora esistono *infiniti* triangoli autopolari rispetto a B che hanno A come conica circoscritta.

Dove eravamo rimasti...

L'ultimo obiettivo era già stato risolto: infatti avevo dimostrato

- *A è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B se e solo se A è apolare a B*

  e inoltre

- *A è apolare a B* $\Leftrightarrow tr(B^{-1}A) = 0$

Tramite un calcolo dimensionale ci siamo accorti che succedeva un fenomeno ben noto ma inaspettato...e precisamente che

Proposizione

Data una conica B, se esiste un triangolo autopolare rispetto a B tale che A è una conica circoscritta a questo triangolo, allora esistono *infiniti* triangoli autopolari rispetto a B che hanno A come conica circoscritta.

Dove eravamo rimasti...

L'ultimo obiettivo era già stato risolto: infatti avevo dimostrato

- *A è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B se e solo se A è apolare a B*

  e inoltre

- *A è apolare a B* $\Leftrightarrow tr(B^{-1}A) = 0$

Tramite un calcolo dimensionale ci siamo accorti che succedeva un fenomeno ben noto ma inaspettato...e precisamente che

Proposizione

Data una conica B, se esiste un triangolo autopolare rispetto a B tale che A è una conica circoscritta a questo triangolo, allora esistono *infiniti* triangoli autopolari rispetto a B che hanno A come conica circoscritta.

Dove eravamo rimasti...

L'ultimo obiettivo era già stato risolto: infatti avevo dimostrato

- *A è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B se e solo se A è apolare a B*

  e inoltre

- *A è apolare a $B \Leftrightarrow tr(B^{-1}A) = 0$*

Tramite un calcolo dimensionale ci siamo accorti che succedeva un fenomeno ben noto ma inaspettato...e precisamente che

Proposizione

Data una conica B, se esiste un triangolo autopolare rispetto a B tale che A è una conica circoscritta a questo triangolo, allora esistono *infiniti* triangoli autopolari rispetto a B che hanno A come conica circoscritta.

Dove eravamo rimasti...

L'ultimo obiettivo era già stato risolto: infatti avevo dimostrato

- *A è circoscritta ad un triangolo autopolare rispetto a B se e solo se A è apolare a B*

  e inoltre

- *A è apolare a B* $\Leftrightarrow tr(B^{-1}A) = 0$

Tramite un calcolo dimensionale ci siamo accorti che succedeva un fenomeno ben noto ma inaspettato...e precisamente che

Proposizione

Data una conica B, se esiste un triangolo autopolare rispetto a B tale che A è una conica circoscritta a questo triangolo, allora esistono *infiniti* triangoli autopolari rispetto a B che hanno A come conica circoscritta.

Dove eravamo rimasti...

Per quanto riguarda gli altri due obiettivi ricordiamo

Definizione di coniche in relazione di Poncelet

Sia $P = (p_1, \ldots, p_n)$ un n-poligono circoscritto ad una conica non singolare $\mathcal{C}$. Una conica $\mathcal{S}$ è *Poncelet n-related a* $\mathcal{C}$ rispetto a P se tutti i punti p_i stanno su $\mathcal{S}$.

Teorema di Poncelet (versione generale)

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ due coniche non singolari che si intersecano trasversalmente. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ sono Poncelet n-related allora, partendo da un qualsiasi punto $x \in \mathcal{C}$ e da un punto $y \in \mathcal{S} \cap T_x\mathcal{C}$, esiste un n-poligono, con un vertice in y e un lato tangente a $\mathcal{C}$ in x, che è circoscritto a $\mathcal{C}$ e inscritto in $\mathcal{S}$.

Dove eravamo rimasti...

Per quanto riguarda gli altri due obiettivi ricordiamo

Definizione di coniche in relazione di Poncelet

Sia $P = (p_1, \ldots, p_n)$ un n-poligono circoscritto ad una conica non singolare $\mathcal{C}$. Una conica $\mathcal{S}$ è *Poncelet n-related a* $\mathcal{C}$ rispetto a P se tutti i punti p_i stanno su $\mathcal{S}$.

Teorema di Poncelet (versione generale)

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ due coniche non singolari che si intersecano trasversalmente. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ sono Poncelet n-related allora, partendo da un qualsiasi punto $x \in \mathcal{C}$ e da un punto $y \in \mathcal{S} \cap T_x\mathcal{C}$, esiste un n-poligono, con un vertice in y e un lato tangente a $\mathcal{C}$ in x, che è circoscritto a $\mathcal{C}$ e inscritto in $\mathcal{S}$.

Dove eravamo rimasti...

Per quanto riguarda gli altri due obiettivi ricordiamo

Definizione di coniche in relazione di Poncelet

Sia $P = (p_1, \ldots, p_n)$ un n-poligono circoscritto ad una conica non singolare $\mathcal{C}$. Una conica $\mathcal{S}$ è *Poncelet n-related a* $\mathcal{C}$ rispetto a P se tutti i punti p_i stanno su $\mathcal{S}$.

Teorema di Poncelet (versione generale)

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ due coniche non singolari che si intersecano trasversalmente. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$ sono Poncelet n-related allora, partendo da un qualsiasi punto $x \in \mathcal{C}$ e da un punto $y \in \mathcal{S} \cap T_x\mathcal{C}$, esiste un n-poligono, con un vertice in y e un lato tangente a $\mathcal{C}$ in x, che è circoscritto a $\mathcal{C}$ e inscritto in $\mathcal{S}$.

Il Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^3$

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango ≥ 3 tali che la loro curva di intersezione $E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ è una curva ellittica liscia. Fissiamo due famiglie di rette, R_1 su $\mathcal{Q}_1$ e R_2 su $\mathcal{Q}_2$.

Teorema

Supponiamo che esista una sequenza chiusa di rette distinte $L_1, \ldots, L_{2n}, L_{2n+1} = L_1$ tale che la retta L_i appartiene a R_1 (rispettivamente R_2) se i è dispari (rispettivamente pari), e tale che rette consecutive L_i, L_{i+1} si intersecano l'una con l'altra. Allora ci sono sequenze di questo tipo attraverso ogni punto di $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$.

Il Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^3$

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango $\geq$3 tali che la loro curva di intersezione $E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ è una curva ellittica liscia. Fissiamo due famiglie di rette, R_1 su $\mathcal{Q}_1$ e R_2 su $\mathcal{Q}_2$.

Teorema

Supponiamo che esista una sequenza chiusa di rette distinte $L_1, \dots, L_{2n}, L_{2n+1} = L_1$ tale che la retta L_i appartiene a R_1 (rispettivamente R_2) se i è dispari (rispettivamente pari), e tale che rette consecutive L_i, L_{i+1} si intersecano l'una con l'altra. Allora ci sono sequenze di questo tipo attraverso ogni punto di $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$.

Quadriche in posizione di Poncelet

Definizione

Diremo che che le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in *posizione di n-Poncelet* (oppure che la coppia (R_1, R_2) soddisfa la *condizione di n-Poncelet*) se l'automorfismo $t : E \to E$ definito nel teorema precedente è di ordine n.

Proposizione

La coppia di famiglie di rette (R_1, R_2) soddisfa la condizione di n-Poncelet se e solo se la soddisfa la coppia (R_2, R_1).

Quadriche in posizione di Poncelet

Definizione

Diremo che che le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in *posizione di n-Poncelet* (oppure che la coppia (R_1, R_2) soddisfa la *condizione di n-Poncelet*) se l'automorfismo $t : E \to E$ definito nel teorema precedente è di ordine n.

Proposizione

La coppia di famiglie di rette (R_1, R_2) soddisfa la condizione di n-Poncelet se e solo se la soddisfa la coppia (R_2, R_1).

Vediamo in che modo il Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^3$ implica il Teorema di Poncelet per due coniche nel piano.

Sia $\mathcal{Q}_1$ una quadrica liscia e $\mathcal{Q}_2$ un cono con vertice in $P_0 \notin E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, e E una curva ellittica liscia. Denotiamo con $\pi_i : \mathcal{Q}_i \to \mathbb{P}^2$ le proiezioni dal vertice P_0.

- Il morfismo π_1 è di grado 2 e si ramifica su una conica liscia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$;
- L'immagine di π_2 è un'altra conica liscia $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$, che sta in posizione generica rispetto a $\mathcal{C}$.

Proposizione

Le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Vediamo in che modo il Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^3$ implica il Teorema di Poncelet per due coniche nel piano.

Sia $\mathcal{Q}_1$ una quadrica liscia e $\mathcal{Q}_2$ un cono con vertice in $P_0 \notin E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, e E una curva ellittica liscia. Denotiamo con $\pi_i : \mathcal{Q}_i \to \mathbb{P}^2$ le proiezioni dal vertice P_0.

- Il morfismo π_1 è di grado 2 e si ramifica su una conica liscia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$;
- L'immagine di π_2 è un'altra conica liscia $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$, che sta in posizione generica rispetto a $\mathcal{C}$.

Proposizione

Le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Vediamo in che modo il Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^3$ implica il Teorema di Poncelet per due coniche nel piano.

Sia $\mathcal{Q}_1$ una quadrica liscia e $\mathcal{Q}_2$ un cono con vertice in $P_0 \notin E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, e E una curva ellittica liscia. Denotiamo con $\pi_i : \mathcal{Q}_i \to \mathbb{P}^2$ le proiezioni dal vertice P_0.

- Il morfismo π_1 è di grado 2 e si ramifica su una conica liscia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$;
- L'immagine di π_2 è un'altra conica liscia $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$, che sta in posizione generica rispetto a $\mathcal{C}$.

Proposizione

Le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Vediamo in che modo il Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^3$ implica il Teorema di Poncelet per due coniche nel piano.

Sia $\mathcal{Q}_1$ una quadrica liscia e $\mathcal{Q}_2$ un cono con vertice in $P_0 \notin E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, e E una curva ellittica liscia. Denotiamo con $\pi_i : \mathcal{Q}_i \to \mathbb{P}^2$ le proiezioni dal vertice P_0.

- Il morfismo π_1 è di grado 2 e si ramifica su una conica liscia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$;
- L'immagine di π_2 è un'altra conica liscia $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$, che sta in posizione generica rispetto a $\mathcal{C}$.

Proposizione

Le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Vediamo in che modo il Teorema di Poncelet in $\mathbb{P}^3$ implica il Teorema di Poncelet per due coniche nel piano.

Sia $\mathcal{Q}_1$ una quadrica liscia e $\mathcal{Q}_2$ un cono con vertice in $P_0 \notin E = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, e E una curva ellittica liscia. Denotiamo con $\pi_i : \mathcal{Q}_i \to \mathbb{P}^2$ le proiezioni dal vertice P_0.

- Il morfismo π_1 è di grado 2 e si ramifica su una conica liscia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$;
- L'immagine di π_2 è un'altra conica liscia $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$, che sta in posizione generica rispetto a $\mathcal{C}$.

Proposizione

Le quadriche $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Quadriche in relazione di Poncelet in un fascio

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango ≥ 3 tali che il fascio da loro generato $\lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2$ è un fascio generico.

Sia $M \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento a due fogli di $\mathbb{P}^1$ che ha come punti di branch le radici di $d(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2)$. Allora

- i punti della curva ellittica M sono identificati con le famiglie di rette sulle quadriche del fascio;
- ogni famiglia di rette R in M definisce un'involuzione $I_R : E \to E$ con punti fissi e esiste unico $a \in E$ tale che $I_R(x) = -x + a$.

Otteniamo un'applicazione

$$\Phi : M \to E$$

$$R \mapsto a.$$

Quadriche in relazione di Poncelet in un fascio

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango $\geq$3 tali che il fascio da loro generato $\lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2$ è un fascio generico.
Sia $M \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento a due fogli di $\mathbb{P}^1$ che ha come punti di branch le radici di $d(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2)$. Allora

- i punti della curva ellittica M sono identificati con le famiglie di rette sulle quadriche del fascio;
- ogni famiglia di rette R in M definisce un'involuzione $I_R : E \to E$ con punti fissi e esiste unico $a \in E$ tale che $I_R(x) = -x + a$.

Otteniamo un'applicazione

$$\Phi : M \to E$$

$$R \mapsto a.$$

Quadriche in relazione di Poncelet in un fascio

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango ≥ 3 tali che il fascio da loro generato $\lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2$ è un fascio generico.
Sia $M \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento a due fogli di $\mathbb{P}^1$ che ha come punti di branch le radici di $d(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2)$. Allora

- i punti della curva ellittica M sono identificati con le famiglie di rette sulle quadriche del fascio;
- ogni famiglia di rette R in M definisce un'involuzione $I_R : E \to E$ con punti fissi e esiste unico $a \in E$ tale che $I_R(x) = -x + a$.

Otteniamo un'applicazione

$$\Phi : M \to E$$

$$R \mapsto a.$$

Quadriche in relazione di Poncelet in un fascio

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango $\geq$3 tali che il fascio da loro generato $\lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2$ è un fascio generico.
Sia $M \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento a due fogli di $\mathbb{P}^1$ che ha come punti di branch le radici di $d(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2)$. Allora

- i punti della curva ellittica M sono identificati con le famiglie di rette sulle quadriche del fascio;
- ogni famiglia di rette R in M definisce un'involuzione $I_R : E \to E$ con punti fissi e esiste unico $a \in E$ tale che $I_R(x) = -x + a$.

Otteniamo un'applicazione

$$\Phi : M \to E$$

$$R \mapsto a.$$

Quadriche in relazione di Poncelet in un fascio

Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ due quadriche di rango $\geq$3 tali che il fascio da loro generato $\lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2$ è un fascio generico.
Sia $M \to \mathbb{P}^1$ il rivestimento a due fogli di $\mathbb{P}^1$ che ha come punti di branch le radici di $d(\lambda_1, \lambda_2) = \det(\lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2)$. Allora

- i punti della curva ellittica M sono identificati con le famiglie di rette sulle quadriche del fascio;
- ogni famiglia di rette R in M definisce un'involuzione $I_R : E \to E$ con punti fissi e esiste unico $a \in E$ tale che $I_R(x) = -x + a$.

Otteniamo un'applicazione

$$\Phi : M \to E$$

$$R \mapsto a.$$

Quadriche in relazione di Poncelet in un fascio

Proposizione

Φ è un isomorfismo di gruppi (se l'origine di M è scelta appropriatamente).

Corollario

a) Due famiglie di rette R_1, R_2 nel fascio soddisfano la condizione di n-Poncelet se e solo se il punto $R_2 - R_1 \in M$ è un punto di n-torsione primitivo.

b) Fissata una famiglia di rette $R_1 \in M$ ci sono $T(n)$ famiglie di rette $R_2 \in M$ tale che R_1, R_2 soddisfano la condizione di n-Poncelet, dove $T(n)$ denota il numero di punti di n-torsione primitivi di una curva ellittica.

Quadriche in relazione di Poncelet in un fascio

Proposizione

Φ è un isomorfismo di gruppi (se l'origine di M è scelta appropriatamente).

Corollario

a) Due famiglie di rette R_1, R_2 nel fascio soddisfano la condizione di n-Poncelet se e solo se il punto $R_2 - R_1 \in M$ è un punto di n-torsione primitivo.

b) Fissata una famiglia di rette $R_1 \in M$ ci sono $T(n)$ famiglie di rette $R_2 \in M$ tale che R_1, R_2 soddisfano la condizione di n-Poncelet, dove $T(n)$ denota il numero di punti di n-torsione primitivi di una curva ellittica.

Formula di Gerbaldi

Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche in $\mathbb{P}^2$ e consideriamo l'invariante che si annulla se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Teorema (Formula di Gerbaldi)

Questo invariante è di grado $\frac{1}{2}T(n)$ in $\mathcal{C}$ e di grado $\frac{1}{4}T(n)$ in $\mathcal{D}$.

NOTAZIONE: $\left(\frac{1}{4}T(n), \frac{1}{2}T(n)\right)$

Teorema

Sia $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$, $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ un fascio generico di coniche in $\mathbb{P}^2$. Allora il numero di coniche del fascio a cui $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related è uguale a $\frac{1}{2}T(n)$, e il numero di coniche del fascio che sono Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ è $\frac{1}{4}T(n)$.

Formula di Gerbaldi

Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche in $\mathbb{P}^2$ e consideriamo l'invariante che si annulla se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Teorema (Formula di Gerbaldi)

Questo invariante è di grado $\frac{1}{2}T(n)$ in $\mathcal{C}$ e di grado $\frac{1}{4}T(n)$ in $\mathcal{D}$.

NOTAZIONE: $\left(\frac{1}{4}T(n), \frac{1}{2}T(n)\right)$

Teorema

Sia $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$, $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ un fascio generico di coniche in $\mathbb{P}^2$. Allora il numero di coniche del fascio a cui $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related è uguale a $\frac{1}{2}T(n)$, e il numero di coniche del fascio che sono Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ è $\frac{1}{4}T(n)$.

Formula di Gerbaldi

Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche in $\mathbb{P}^2$ e consideriamo l'invariante che si annulla se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$.

Teorema (Formula di Gerbaldi)

Questo invariante è di grado $\frac{1}{2}T(n)$ in $\mathcal{C}$ e di grado $\frac{1}{4}T(n)$ in $\mathcal{D}$.

NOTAZIONE: $\left(\frac{1}{4}T(n), \frac{1}{2}T(n)\right)$

Teorema

Sia $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$, $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ un fascio generico di coniche in $\mathbb{P}^2$. Allora il numero di coniche del fascio a cui $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related è uguale a $\frac{1}{2}T(n)$, e il numero di coniche del fascio che sono Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ è $\frac{1}{4}T(n)$.

Dimostrazione

1) C'è una quadrica liscia $\mathcal{Q}_1 \in \mathbb{P}^3$ e un cono $\mathcal{Q}_2 \in \mathbb{P}^3$ tali che

- **i.** la proiezione $\mathcal{Q}_1 \to \mathbb{P}^2$ dal vertice P_0 di $\mathcal{Q}_2$ ha come punti di branch i punti di $\mathcal{C}$,
- **ii.** l'immagine di $\mathcal{Q}_2$ tramite la proiezione da P_0 è $\mathcal{D}$, e
- **iii.** il fascio generato da $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ è generico.

2) Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ le quadriche con le proprietà i. ii. iii. I punti di branch di una quadrica liscia $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2$ rispetto alla proiezione da P_0 formano una conica nel fascio $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$.

3) Se una quadrica $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ del fascio è liscia, allora le quadriche $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related al luogo dei punti di branch di $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$.

Dimostrazione

1) C'è una quadrica liscia $\mathcal{Q}_1 \in \mathbb{P}^3$ e un cono $\mathcal{Q}_2 \in \mathbb{P}^3$ tali che

- **i.** la proiezione $\mathcal{Q}_1 \to \mathbb{P}^2$ dal vertice P_0 di $\mathcal{Q}_2$ ha come punti di branch i punti di $\mathcal{C}$,
- **ii.** l'immagine di $\mathcal{Q}_2$ tramite la proiezione da P_0 è $\mathcal{D}$, e
- **iii.** il fascio generato da $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ è generico.

2) Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ le quadriche con le proprietà i. ii. iii. I punti di branch di una quadrica liscia $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1 \mathcal{Q}_1 + \lambda_2 \mathcal{Q}_2$ rispetto alla proiezione da P_0 formano una conica nel fascio $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$.

3) Se una quadrica $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ del fascio è liscia, allora le quadriche $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related al luogo dei punti di branch di $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$.

Dimostrazione

1) C'è una quadrica liscia $\mathcal{Q}_1 \in \mathbb{P}^3$ e un cono $\mathcal{Q}_2 \in \mathbb{P}^3$ tali che

- **i.** la proiezione $\mathcal{Q}_1 \to \mathbb{P}^2$ dal vertice P_0 di $\mathcal{Q}_2$ ha come punti di branch i punti di $\mathcal{C}$,
- **ii.** l'immagine di $\mathcal{Q}_2$ tramite la proiezione da P_0 è $\mathcal{D}$, e
- **iii.** il fascio generato da $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ è generico.

2) Siano $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ le quadriche con le proprietà i. ii. iii. I punti di branch di una quadrica liscia $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1\mathcal{Q}_1 + \lambda_2\mathcal{Q}_2$ rispetto alla proiezione da P_0 formano una conica nel fascio $\lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$.

3) Se una quadrica $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ del fascio è liscia, allora le quadriche $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$ e $\mathcal{Q}_2$ sono in posizione di n-Poncelet se e solo se $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related al luogo dei punti di branch di $\mathcal{Q}_{\lambda_1,\lambda_2}$.

Ricapitoliamo...

Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche in $\mathbb{P}^2$, e indichiamo con A e B le rispettive matrici associate.

- $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ se e solo se le matrici associate alle coniche soddisfano una certa equazione $f(A, B) = 0$, cioè sono invarianti rispetto all'azione del gruppo $SL(3)$;
- questo invariante ha grado $\frac{1}{4}T(n)$ in $\mathcal{D}$ e $\frac{1}{2}T(n)$ in $\mathcal{C}$ (Formula di Gerbaldi).

Ricapitoliamo...

Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche in $\mathbb{P}^2$, e indichiamo con A e B le rispettive matrici associate.

- $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ se e solo se le matrici associate alle coniche soddisfano una certa equazione $f(A, B) = 0$, cioè sono invarianti rispetto all'azione del gruppo $SL(3)$;
- questo invariante ha grado $\frac{1}{4}T(n)$ in $\mathcal{D}$ e $\frac{1}{2}T(n)$ in $\mathcal{C}$ (Formula di Gerbaldi).

Ricapitoliamo...

Siano $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ due coniche in $\mathbb{P}^2$, e indichiamo con A e B le rispettive matrici associate.

- $\mathcal{D}$ è Poncelet n-related a $\mathcal{C}$ se e solo se le matrici associate alle coniche soddisfano una certa equazione $f(A, B) = 0$, cioè sono invarianti rispetto all'azione del gruppo $SL(3)$;
- questo invariante ha grado $\frac{1}{4}T(n)$ in $\mathcal{D}$ e $\frac{1}{2}T(n)$ in $\mathcal{C}$ (Formula di Gerbaldi).

Richiami di teoria degli invarianti

Siano A e B le matrici simmetriche associate a due coniche $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ (non necessariamente non singolari). Abbiamo che

Teorema

Tutti gli $SL(3)$-invarianti sono polinomi nei seguenti quattro:

$$\Delta = \det(A) \qquad \rightarrow (3,0)$$

$$\Theta = tr(B \cdot adj(A)) \quad \rightarrow (2,1)$$

$$\Theta' = tr(A \cdot adj(B)) \quad \rightarrow (1,2)$$

$$\Delta' = \det(B) \qquad \rightarrow (0,3)$$

dove $adj(A) \cdot A = \det(A) I$.

Richiami di teoria degli invarianti

Siano A e B le matrici simmetriche associate a due coniche $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ (non necessariamente non singolari). Abbiamo che

Teorema

Tutti gli $SL(3)$-invarianti sono polinomi nei seguenti quattro:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \det(A) & &\longrightarrow (3,0)\\
\Theta &= tr(B \cdot adj(A)) & &\longrightarrow (2,1)\\
\Theta' &= tr(A \cdot adj(B)) & &\longrightarrow (1,2)\\
\Delta' &= \det(B) & &\longrightarrow (0,3)
\end{aligned}$$

dove $adj(A) \cdot A = \det(A) I$.

Coniche Poncelet 3-related

Vogliamo ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 3-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *triangolo* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$.

- $T(3) = 8$;

$\Rightarrow$ L'invariante deve avere grado $(2, 4)$ (Formula di Gerbaldi)

L'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^2 + ktr(B \cdot adj(A)) \det(B) = 0,$$

con k da determinare.

Coniche Poncelet 3-related

Vogliamo ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 3-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *triangolo* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$.

- $T(3) = 8$;

$\Rightarrow$ L'invariante deve avere grado $(2, 4)$ (Formula di Gerbaldi)

L'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^2 + ktr(B \cdot adj(A)) \det(B) = 0,$$

con k da determinare.

Coniche Poncelet 3-related

Vogliamo ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 3-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *triangolo* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$.

- $T(3) = 8$;

  $\Rightarrow$ L'invariante deve avere grado $(2, 4)$ (Formula di Gerbaldi)

L'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^2 + ktr(B \cdot adj(A)) \det(B) = 0,$$

con k da determinare.

Coniche Poncelet 3-related

Vogliamo ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 3-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *triangolo* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$.

- $T(3) = 8$;

  $\Rightarrow$ L'invariante deve avere grado $(2, 4)$ (Formula di Gerbaldi)

L'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^2 + ktr(B \cdot adj(A)) \det(B) = 0,$$

con k da determinare.

Coniche Poncelet 3-related

Teorema

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due coniche non singolari. Allora esiste un triangolo inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$ se e solo se

$$\Theta'^2 - 4\Theta\Delta' = 0.$$

Formula di Eulero

Siano

$$\mathcal{D} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \;\text{ e }\; \mathcal{C} : x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

le due circonferenze e poniamo $x_0^2 + y_0^2 = a^2$.

Abbiamo:

- $tr(A \cdot adj(B)) = -2r^2 + a^2 - R^2$ e
- $tr(B \cdot adj(A)) = -r^2 + a^2 - 2R^2$.

$$\Rightarrow \;(a^2 - R^2 - 2rR)(a^2 - R^2 + 2rR) = 0$$

Formula di Eulero

Siano

$$\mathcal{D} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \ \text{ e } \ \mathcal{C} : x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

le due circonferenze e poniamo $x_0^2 + y_0^2 = a^2$.

Abbiamo:

- $tr(A \cdot adj(B)) = -2r^2 + a^2 - R^2$ e
- $tr(B \cdot adj(A)) = -r^2 + a^2 - 2R^2$.

$$\Rightarrow \ (a^2 - R^2 - 2rR)(a^2 - R^2 + 2rR) = 0$$

Formula di Eulero

Siano

$$\mathcal{D} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \ \text{ e } \ \mathcal{C} : x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

le due circonferenze e poniamo $x_0^2 + y_0^2 = a^2$.

Abbiamo:

- $tr(A \cdot adj(B)) = -2r^2 + a^2 - R^2$ e
- $tr(B \cdot adj(A)) = -r^2 + a^2 - 2R^2$.

$$\Rightarrow \ (a^2 - R^2 - 2rR)(a^2 - R^2 + 2rR) = 0$$

Formula di Eulero

Siano

$$\mathcal{D} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \ \text{ e } \ \mathcal{C} : x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

le due circonferenze e poniamo $x_0^2 + y_0^2 = a^2$.

Abbiamo:

- $tr(A \cdot adj(B)) = -2r^2 + a^2 - R^2$ e
- $tr(B \cdot adj(A)) = -r^2 + a^2 - 2R^2$.

$$\Rightarrow \ (a^2 - R^2 - 2rR)(a^2 - R^2 + 2rR) = 0$$

Formula di Eulero

Siano

$$\mathcal{D} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \ \text{ e } \ \mathcal{C} : x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

le due circonferenze e poniamo $x_0^2 + y_0^2 = a^2$.

Abbiamo:

- $tr(A \cdot adj(B)) = -2r^2 + a^2 - R^2$ e
- $tr(B \cdot adj(A)) = -r^2 + a^2 - 2R^2$.

$$\Rightarrow \ (a^2 - R^2 - 2rR)(a^2 - R^2 + 2rR) = 0$$

Proposizione (Formula di Eulero)

Siano date due circonferenze $\mathcal{C}_i$ di centro P_i e raggio r_i per $i = 1, 2$. Supponiamo che $\mathcal{C}_1$ sia interna a $\mathcal{C}_2$. Allora esiste un triangolo circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se $d(P_1, P_2)^2 = r_2(r_2 - 2r_1)$.

Coniche Poncelet 4-related

Vogliamo ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 4-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *quadrilatero* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$.

- $T(4) = 12$;

  $\Rightarrow$ L'invariante deve avere grado $(3, 6)$ (Formula di Gerbaldi)

L'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^3 + k\,tr(A \cdot adj(B))\,tr(B \cdot adj(A)) \det(B) + \mu \det(A) \det(B)^2 = 0$$

con k, μ da determinare.

Coniche Poncelet 4-related

Vogliamo ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 4-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *quadrilatero* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$.

- $T(4) = 12$;

$\Rightarrow$ L'invariante deve avere grado $(3, 6)$ (Formula di Gerbaldi)

L'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^3 + k\,tr(A \cdot adj(B))\,tr(B \cdot adj(A)) \det(B) + \mu \det(A) \det(B)^2 = 0$$

con k, μ da determinare.

Coniche Poncelet 4-related

Vogliamo ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 4-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *quadrilatero* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$.

- $T(4) = 12$;

  $\Rightarrow$ L'invariante deve avere grado $(3, 6)$ (Formula di Gerbaldi)

L'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^3 + k tr(A \cdot adj(B)) tr(B \cdot adj(A)) \det(B) + \mu \det(A) \det(B)^2 = 0$$

con k, μ da determinare.

Coniche Poncelet 4-related

Vogliamo ricavare la condizione che devono soddisfare le matrici A e B affinchè la conica $\mathcal{D}$ sia Poncelet 4-related alla conica $\mathcal{C}$, cioè affinchè esista un *quadrilatero* inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$.

- $T(4) = 12$;

  $\Rightarrow$ L'invariante deve avere grado $(3, 6)$ (Formula di Gerbaldi)

L'equazione che stiamo cercando avrà la forma

$$tr(A \cdot adj(B))^3 + ktr(A \cdot adj(B))tr(B \cdot adj(A)) \det(B) + \mu \det(A) \det(B)^2 = 0$$

con k, μ da determinare.

Coniche Poncelet 4-related

Teorema

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due coniche non singolari. Allora esiste un quadrilatero inscritto in $\mathcal{D}$ e circoscritto a $\mathcal{C}$ se e solo se

$$\Theta'^3 - 4\Theta\Theta'\Delta' + 8\Delta\Delta'^2 = 0.$$

Formula di Fuss

$$\Rightarrow \; (a^2 - R^2)[(a^2 - R^2) - 2r^2(a^2 + R^2)] = 0$$

Proposizione (Formula di Fuss)

Siano date due circonferenze $\mathcal{C}_i$ di centro P_i e raggio r_i per $i = 1, 2$. Supponiamo che $\mathcal{C}_1$ sia interna a $\mathcal{C}_2$ e sia $d = d(P_1, P_2)$. Allora esiste un quadrilatero circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se $(d^2 - r_2^2)^2 = 2r_1^2(r_2^2 + d^2)$.

Formula di Fuss

$$\Rightarrow (a^2 - R^2)[(a^2 - R^2) - 2r^2(a^2 + R^2)] = 0$$

Proposizione (Formula di Fuss)

Siano date due circonferenze $\mathcal{C}_i$ di centro P_i e raggio r_i per $i = 1, 2$. Supponiamo che $\mathcal{C}_1$ sia interna a $\mathcal{C}_2$ e sia $d = d(P_1, P_2)$. Allora esiste un quadrilatero circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se $(d^2 - r_2^2)^2 = 2r_1^2(r_2^2 + d^2)$.

Formula di Fuss

$$\Rightarrow (a^2 - R^2)[(a^2 - R^2) - 2r^2(a^2 + R^2)] = 0$$

Proposizione (Formula di Fuss)

Siano date due circonferenze $\mathcal{C}_i$ di centro P_i e raggio r_i per $i = 1, 2$. Supponiamo che $\mathcal{C}_1$ sia interna a $\mathcal{C}_2$ e sia $d = d(P_1, P_2)$. Allora esiste un quadrilatero circoscritto a $\mathcal{C}_1$ e inscritto a $\mathcal{C}_2$ se e solo se $(d^2 - r_2^2)^2 = 2r_1^2(r_2^2 + d^2)$.