



Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e
Naturali
C.d.L. in Matematica

Anno Accademico 2011-2012
Relazione finale per la Laurea Triennale

ASPETTI INTRODUTTIVI DELLA TEORIA DI MORSE

Introductory aspects of Morse Theory

Candidato:
Emilio Rossi Ferrucci

Relatore:
Prof. Giorgio Ottaviani

Indice

Introduzione	1
1 Punti critici non degeneri e funzioni di Morse	1
2 Attaccamento di manici e tipo di omotopia	4
3 Disuguaglianze di Morse	9
Bibliografia	12

Introduzione

Lo scopo di questa relazione è di trattare in maniera sintetica gli aspetti principali della teoria di Morse classica. Questa teoria, che si colloca a cavallo della topologia differenziale e di quella algebrica, studia come estrarre, da certe funzioni f definite su varietà differenziabili M , informazioni di natura topologica su M . Più in particolare vengono collegate le caratteristiche di f nei pressi dei suoi punti critici con l'omologia di M grazie ad una sua descrizione, a meno di equivalenze di omotopia, come CW-complesso. Dato che la topologia di M è fissata, il discorso si può anche ribaltare, ottenendo cioè condizioni di natura analitica a cui certe funzioni $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ debbano necessariamente soddisfare.

Fissiamo subito qualche notazione. Con il termine *differenziabile* intenderemo C^∞ e con il termine *mappa* intenderemo funzione differenziabile. \cong indica la relazione di diffeomorfismo, \simeq quella di omeomorfismo o isomorfismo di gruppi, \approx quella di omotopia di funzioni o equivalenza di omotopia tra spazi topologici. D^n è l' n -disco, S^{n-1} il suo bordo, $I = [0, 1]$. Con “sse” intenderemo “se e solo se”.

1 Punti critici non degeneri e funzioni di Morse

Definizione 1.1 (Punto critico). Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa tra varietà differenziabili di dimensioni rispettivamente m ed n . $p \in M$ si dice *punto critico* di f se $\text{rk}(f)_p < n$. In particolare se $m < n$ ogni punto di M è critico, se $n = 1$ un punto p è critico sse $\text{rk}(f)_p = 0$, ovvero sse f_{*p} è il covettore nullo di $T_p^*(M)$. Si dice *valore critico* di f l'immagine di un suo punto critico.

Sia ora M una varietà differenziabile di dimensione n , (U, ϕ) una carta locale e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una mappa. Indichiamo con $C^\infty(p)$ il germe delle funzioni C^∞ in p e sia $\mathcal{E}_p = \{E_{1p}, \dots, E_{np}\}$ la base di $T_p(M)$ costituita dalle derivazioni lungo le linee coordinate in p . Definiamo, per $p \in M$ punto critico di f

$$f_{**p}: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) \mapsto X_p(Y(f))$$

dove Y è un qualunque campo vettoriale che vale Y_p in p . Proviamo che f_{**p} è ben definita (non dipende dal campo Y), ed è una forma bilineare simmetrica. Posto $X_p = \sum_i \alpha_{ip} E_{ip}$ e $Y = \sum_i \beta_i E_{ip}$ è facile vedere, usando il Teorema di Schwarz, che $E_{ip}(E_j(f)) = E_{jp}(E_i(f))$. Se X è un campo vettoriale che vale

X_p in p , tenendo presente che $E_{ip}(f) = 0$ per ogni i , sviluppando i calcoli abbiamo $X_p(Y(f)) = Y_p(X(f))$, che prova la buona definizione e la simmetria. La bilinearità segue direttamente dalla definizione di vettore tangente. La matrice della forma bilineare f_{**p} rispetto alla base \mathcal{E}_p è proprio la matrice hessiana $H(f\phi^{-1})(\phi(p))$. Mentre essa, in generale, dipende dalla carta ϕ , il suo rango e la sua segnatura no, in quanto sono il rango e la segnatura di una forma bilineare definita intrinsecamente. Siamo pronti per dare la seguente

Definizione 1.2. Data una funzione differenziabile $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, un suo punto critico $p \in M$ si dice *non degenera* se la forma bilineare f_{**p} , o equivalentemente la matrice hessiana $H(f\phi^{-1})(\phi(p))$, ha rango massimo, e *degenera* altrimenti. Se p è un punto critico non degenera di f , la massima dimensione di un sottospazio di $T_p(M)$ in cui f_{**p} è definita negativa si dice l'*indice* di f in p . f si dice una *funzione di Morse* se ogni suo punto critico è non degenera.

Com'è noto dall'analisi, esempi importanti di punti critici sono massimi e minimi locali; questo continua a valere per funzioni definite su varietà differenziabili. E' facile vedere da 1.3, che enunciamo fra poco, che un punto critico non degenera ha indice n o 0 sse è rispettivamente un massimo o minimo. I punti con indice diverso da $0, n$ verranno detti *punti di sella*.

Il seguente risultato, indispensabile allo sviluppo della teoria di Morse, ci assicura che esistono coordinate locali in un intorno di un punto critico non degenera di f , rispetto alle quali f assume una semplice espressione quadratica. L'idea non è altro che la diagonalizzazione di una forma quadratica, ma la dimostrazione è un po' lunga e tecnica, e rimandiamo il lettore a [3, p.188] per i dettagli.

Lemma 1.3 (Morse). *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia p un punto critico non degenera di f e λ il suo indice. Allora esiste una carta locale (ψ, V) , con $p \in V$, tale che si abbia $\psi(p) = \mathbf{0}$ e, per $\mathbf{x} \in \psi(V)$*

$$f\psi^{-1}(\mathbf{x}) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$$

Osservazione 1.4. E' facile vedere da 1.3 che l'insieme dei punti critici di una funzione di Morse f costituisce un insieme discreto, e se inoltre tutti i sottolivelli $M_a = f^{-1}(-\infty, a]$ sono compatti (o vuoti), l'insieme dei suoi valori critici è privo di punti di accumulazione in \mathbb{R} (per quest'ultima asserzione, si prenda per assurdo una successione convergente di valori critici, e si consideri una successione di loro retroimmagini per arrivare ad una contraddizione). Inoltre, se M è compatta, f ha un numero finito di punti (e quindi di valori) critici (si estragga un ricoprimento finito da un ricoprimento aperto opportunamente scelto). Non è vero, in generale, che punti critici degeneri sono isolati (basta prendere un'applicazione costante), ed esistono anche funzioni che ammettono successioni di punti critici non degeneri che tendono ad un punto critico (necessariamente degenera): un esempio è dato da $C^2(\mathbb{R}) \ni f(x) = x^6 \sin(\frac{1}{x})$ estesa con 0 in 0 .

Veniamo ora agli aspetti esistenziali delle funzioni di Morse, che rendono la teoria di Morse una teoria versatile e generale. Delineiamo un approccio che

prova l'esistenza (o meglio l'abbondanza, in un senso che verrà specificato) di funzioni di Morse definite in varietà compatte, a cui possiamo richiedere anche una proprietà aggiuntiva. I risultati che enunciamo sono estendibili a varietà non necessariamente compatte; per questa trattazione più generale rimandiamo il lettore a [1, p.32], in cui l'idea principale consiste nell'immergere M in uno spazio euclideo.

In seguito risulterà indispensabile il famoso teorema di Sard (si veda [2, p.79]), che afferma che l'insieme dei valori critici di una mappa tra spazi euclidei ha misura di Lebesgue nulla. Ricordiamo anche che, se M è compatta, lo spazio delle funzioni differenziabili $M \rightarrow \mathbb{R}$, che indichiamo con $C^\infty(M)$, è dotato della norma del sup $\|f\| = \sup_M |f|$, che induce una struttura di spazio metrico su $C^\infty(M)$. Vediamo ora il risultato promesso.

Teorema 1.5 (Esistenza e densità di funzioni di Morse). *Sia M una varietà differenziabile compatta. Allora l'insieme delle funzioni di Morse con l'ulteriore proprietà di essere "a valori critici distinti", ovvero iniettive ristrette al loro insieme di punti critici, è denso in $C^\infty(M)$ rispetto alla norma del sup (e in particolare è non vuoto).*

Traccia di dimostrazione. Delineiamo sinteticamente i vari passi della dimostrazione, per i dettagli rimandiamo il lettore a [5, p.47]. Prima di tutto si dimostra che se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato e f è una funzione differenziabile definita in A , la funzione $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n x_i a_i$ definita in A è Morse per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ che non sia valore critico della funzione $F(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ (la cui jacobiana è proprio la matrice hessiana di f): per il teorema di Sard ciò avviene per q.o. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, in particolare per opportuni \mathbf{a} di norma piccola a piacere (e quindi con $\|f - f_{\mathbf{a}}\|$ piccolo a piacere).

Si procede con la dimostrazione della densità delle funzioni di Morse (senza la proprietà aggiuntiva) definite in una varietà differenziabile compatta M : sia dunque $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ un'arbitraria funzione differenziabile che vogliamo approssimare con una di Morse. A tale scopo scegliamo un ricoprimento \mathcal{U} di M che sia finito e costituito da aperti omeomorfi ad aperti euclidei limitati, e un altro ricoprimento compatto \mathcal{K} della stessa cardinalità di \mathcal{U} , gli interni dei cui insiemi formano ancora un ricoprimento, e con la proprietà che, detti $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$, $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ si abbia $K_i \subseteq U_i$ per ogni i . Inoltre ci procuriamo intorno aperti V_i dei K_i tali che $\bar{V}_i \subseteq U_i$. L'idea, ora, è di utilizzare funzioni $h_i \in C^\infty(U_i)$ che valgano 1 in K_i , 0 fuori da V_i , e con $0 \leq h_i \leq 1$ in U_i per ogni i (per la loro esistenza si veda [2, p.67]), per definire induttivamente mappe \tilde{f}_i in M : posto $\tilde{f}_0 = f$ definiamo

$$p \mapsto \begin{cases} f_{i-1}(p) - h_i(p) \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(p) & \text{per } p \in U_i \\ f_{i-1}(p) & \text{per } p \in M \setminus U_i \end{cases}$$

dove le ϕ_i sono embedding degli U_i in \mathbb{R}^n , e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ in modo che ogni \tilde{f}_i sia Morse su ciascun $\text{int}(K_j)$ per $j \leq i$ (distinguere il caso $j = i$, per il quale si usa la prima parte della dimostrazione, e il caso $j < i$, per il quale si usa la continuità delle derivate di f). Segue, per induzione, e dal fatto che gli $\text{int}(K_j)$ ricoprono M , che \tilde{f}_m è una funzione di Morse arbitrariamente vicina ad f per un'opportuna scelta di \mathbf{a} .

Infine, la dimostrazione che una funzione f (che a questo punto possiamo supporre di Morse) può essere approssimata da una funzione di Morse a valori

critici distinti è simile alla precedente: l'idea è sempre di perturbare f , mediante funzioni C^∞ a supporto compatto, in intorno dei suoi punti critici, in modo da rendere le loro immagini a due a due distinte, senza perdere la loro non degenericità e mantenendo invariati i loro indici. ■

2 Attaccamento di manici e tipo di omotopia

In questa sezione trattiamo i risultati centrali della teoria di Morse. Il cuore di tutta la teoria consiste nello studio del cambiamento del sottolivello di f , $M_a = f^{-1}(-\infty, a]$, al variare di a , per descrivere così la topologia di M in termini di f . Con questa strategia si arriva ad una descrizione di M come CW-complesso, a meno di equivalenze di omotopia.

Sia $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, e supponiamo che l'intervallo $[a, b]$ non contenga valori critici di f . Allora f è una mappa di rango costante $= 1$ in un intorno di $f^{-1}[a, b]$ e dunque, posto $f_a = f^{-1}(a)$ abbiamo che f_a è una sottovarietà embedded di dimensione $n - 1$ di M e M_a è una sottovarietà embedded con bordo di dimensione n di M . Il prossimo risultato ci informa che sotto opportune ipotesi non ci sono differenze sostanziali tra i sottolivelli M_a ed M_b . Per procedere è necessaria la nozione di gruppo di diffeomorfismi ad un parametro; il lettore estraneo a tale concetto può consultare [1, p.9].

Proposizione 2.1. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Siano $a < b$ numeri reali tali che $[a, b]$ non contiene valori critici di f e tali che $f^{-1}[a, b]$ ammetta un intorno compatto in M , allora*

1. $M_b \cong M_a$
2. $f^{-1}[a, b] \cong f_a \times I$
3. M_a è un retratto per deformazione di M_b

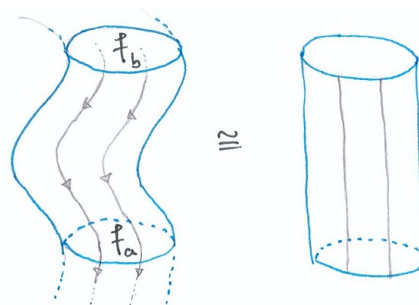


Figura 1

Traccia di dimostrazione. Dotiamo M di una metrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (che esiste sempre, si veda ad esempio [7, p.284]) e sia $\text{grad}f$ il campo vettoriale su M caratterizzato dall'uguaglianza

$$\langle \text{grad}f(p), X_p \rangle_p = X_p(f) \quad \text{per } X_p \in T_p(M)$$

ovvero ottenuto dal campo covettoriale f_* "alzando l'indice" (per dettagli si veda [7, p.282]). È facile verificare che $\text{grad}f(p)$ è il vettore nullo sse f_{*p} è il covettore nullo, ovvero sse p è un punto critico. L'idea della dimostrazione consiste nell'utilizzare le linee integrali di $\text{grad}f$ come guide per ottenere le corrispondenze (diffeomorfismi/equivalenze di omotopia) desiderate. Presa una funzione differenziabile g che sia uguale a $\langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle_p^{-1}$ in $f^{-1}[a, b]$ e nulla fuori da un intorno compatto di tale insieme, abbiamo che, per risultati di esistenza globale di soluzioni di equazioni differenziali (di veda [1, p.10]), il campo vettoriale $X = g \cdot \text{grad}f$ definito su M genera un (unico) gruppo di

diffeomorfismi ad un parametro θ . Utilizzando le definizioni degli oggetti in gioco si ha che $d(f\theta_t(p))/dt = 1$ e quindi, se $f\theta_{t_0}(p), f\theta_t(p) \in [a, b]$ si ha

$$f\theta_t(p) = f\theta_{t_0}(p) + t - t_0$$

Possiamo dunque ottenere tutte le corrispondenze volute: il diffeomorfismo di 1. è dato da θ_{a-b} , il diffeomorfismo di 2. (a meno di sostituire I con $[a, b]$) è dato da $p \mapsto (\theta_{a-f(p)}(p), f(p))$, e infine la retrazione per deformazione di 3. è data da $(p, t) \mapsto \theta_{t(a-f(p))}(p)$ per $a \leq f(p) \leq b$ ed estesa tramite l'identità in M_a per ogni $t \in I$. ■

Ora ci proponiamo di descrivere il procedimento di attaccamento di un manico ad una varietà con bordo. Diciamo subito cos'è un manico:

Definizione 2.2. Un manico di dimensione n e indice k è la varietà con spigoli di dimensione n (si veda [7, p.363] per la definizione di questo tipo di varietà differenziabile)

$$H_{nk} = D^k \times D^{n-k}$$

Si dice *core* del manico H_{nk} il disco $D^k \times \{\mathbf{0}\} \subseteq H_{nk}$ e *cocore* il disco $\{\mathbf{0}\} \times D^{n-k} \subseteq H_{nk}$.

Osserviamo che il bordo di H_{nk} (come sottospazio di \mathbb{R}^n o equivalentemente come varietà con spigoli) è

$$\partial H_{nk} = (\partial D^k \times D^{n-k}) \cup (D^k \times \partial D^{n-k})$$

se $k \neq 0, n$ e rispettivamente $\emptyset \cup \partial D^n, \partial D^n \cup \emptyset$ e per $k = 0, n$ (li indichiamo così per un motivo che sarà chiaro tra un attimo).

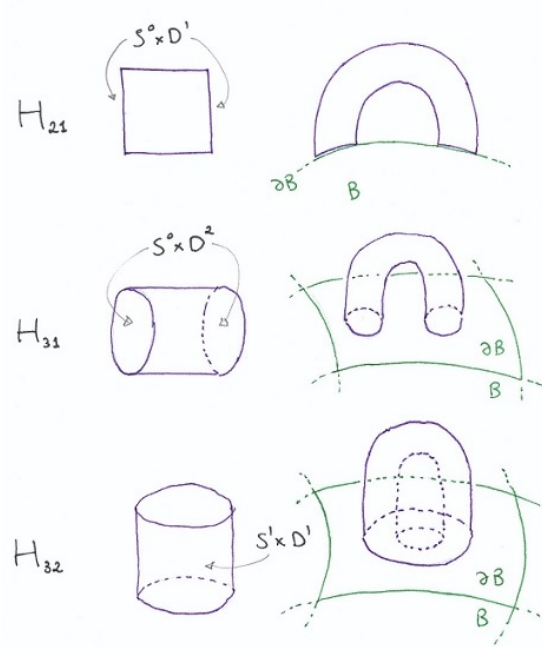
Supponiamo ora di avere una varietà con bordo B di dimensione n e una copia T di $S^{k-1} \times D^{n-k}$ embedded in ∂B , e indichiamo con S la copia embedded di $S^{k-1} \times \{\mathbf{0}\}$. Questa costruzione può essere trattata nel caso particolare in cui T è un intorno tubolare di S rispetto ad una fissata metrica riemanniana (si veda [3, p.209]), oppure utilizzando il fibrato normale di S (si veda [4, p.31]). L'attaccamento del manico H_{nk} avviene identificando la componente del bordo $\partial D^k \times D^{n-k}$ con T mediante l'embedding (si veda Figura 2 per qualche esempio), sempre che tale componente non sia vuota: ciò avviene solo nel caso $k = 0$ e in tal caso l'attaccamento del manico è inteso come unione disgiunta. Tale spazio quoziente eredita una struttura differenziabile che estende quelle di B e H_{nk} ; l'unica anomalia che tutto ciò comporta è che non si ottiene, in generale, una varietà con bordo, ma una varietà con spigoli, con "punti spigolosi" in corrispondenza del bordo di T . Si tratta tuttavia di una patologia facilmente risolvibile "smussando gli spigoli" (per la descrizione completa si veda [4, p.33]), che consiste nel rendere lisci i punti di raccordo tra ∂B e H_{nk} senza cambiare le classi di diffeomorfismo delle due varietà (una con bordo, l'altra con spigoli) incollate. Fissiamo un po' di notazioni nella seguente

Definizione 2.3. Se ϕ è l'embedding di $S^{k-1} \times D^{n-1}$ in ∂B indichiamo con $B \vee_{\phi} H_{nk}$ la varietà ottenuta attaccando il manico e smussando gli spigoli. Chiameremo *complesso di manici* la varietà (con o senza bordo)

$$\mathcal{H}(n; \phi_1, \dots, \phi_n) = D^n \vee_{\phi_1} H_{nk_1} \vee_{\phi_2} H_{nk_2} \vee \dots \vee_{\phi_m} H_{nk_m}$$

(dove le mappe ϕ_i per $k_i = 0$ non hanno alcun significato, ma sono lasciate per uniformità di notazione).

Figura 2



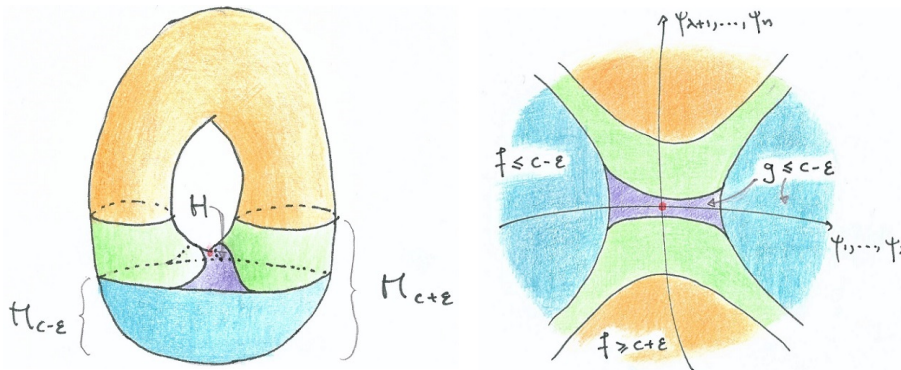
Osservazione 2.4. Osserviamo che la classe di omeomorfismo di $B \vee_{\phi} H_{nk}$ dipende, in generale, dalla ϕ e non solo dal $T \subseteq M$ sul quale viene attaccato il manico: ad esempio possiamo prendere B uguale ad un quadrato (con gli spigoli smussati, se vogliamo che B sia una varietà con bordo) e attaccarci sopra il quadrato H_{21} in modo da ottenere la superficie laterale di un cilindro, oppure “storcendo il manico” per ottenere un nastro di Möbius.

Per il prossimo teorema, di fondamentale importanza, è necessario anche il concetto di attaccamento di k -celle, la cui definizione è data su [6, p.5] insieme alla definizione di CW-complesso, che sarà importante in seguito. Indicheremo con $X \vee_{\phi} e^k$ lo spazio X con attaccata una k -cella mediante l'applicazione continua $\phi: S^{k-1} \rightarrow X$. Il risultato descrive, in un paio di modi, come cambia il sottolivello di f quando viene attraversato un valore critico. La dimostrazione per esteso può essere reperita su [4, p.37] o [1, p.14].

Teorema 2.5 (Attraversamento di un valore critico). *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, p un punto critico non degenere di f di indice λ e c la sua immagine. Supponiamo che esista $\delta > 0$ tale che $f^{-1}[c - \delta, c + \delta]$ non contenga altri punti critici oltre a p , e sia compatto. Allora, per un $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo:*

1. *La varietà con bordo $M_{c+\varepsilon}$ è diffeomorfa ad una varietà con bordo ottenuta attaccando un manico di dimensione n e indice λ a $M_{c-\varepsilon}$.*
2. *$M_{c+\varepsilon}$ si retrae per deformazione su uno spazio ottenuto attaccando una λ -cella ad $M_{c-\varepsilon}$.*

Figura 3: A sinistra, il teorema applicato al caso di un punto di sella della funzione di Morse $S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\theta, \phi) \mapsto (R + r \cos \phi) \cos \theta$, corrispondente alla coordinata z dei punti di un embedding del toro in \mathbb{R}^3 messo “in verticale”. A destra gli insiemi di sottolivello visti da sopra, (inteso nel caso generale).



Traccia di dimostrazione. Delineiamo la dimostrazione nel caso $\lambda \neq 0, n$ (nel primo caso, corrispondente ad un minimo locale, bisogna dimostrare che $M_{c+\epsilon} \cong M_{c-\epsilon} \amalg D^0$, osservando per 2. che D^0 è contrattile; nel secondo, corrispondente ad un massimo, la dimostrazione di 1. è simile a quella per $\lambda \neq 0, n$ e di 2. è immediata, visto che il manico corrisponde alla cella).

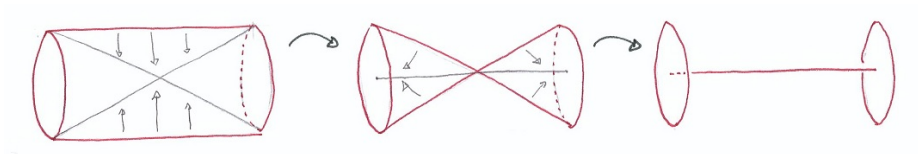
L’idea centrale della dimostrazione, nella quale si fa uso esplicito di 1.3, è di considerare una nuova mappa $g: M \rightarrow \mathbb{R}$, ottenuta perturbando f vicino a p mediante una funzione continua a supporto compatto, in modo che, indicando con $M'_x = g^{-1}(-\infty, x]$ si abbia:

- a) g non ha valori critici in $[c - \epsilon, c + \epsilon]$
- b) $M'_{c-\epsilon} = M_{c-\epsilon} \cup H$, con $H = \overline{M'_{c-\epsilon}} \setminus M_{c-\epsilon}$, $H \cap M_{c-\epsilon} = \Phi(\partial D^k \times D^{n-k})$ dove $\Phi: H_{n\lambda} \rightarrow H$ è un diffeomorfismo di varietà con spigoli che si restringe ad un embedding $\partial D^k \times D^{n-k} \hookrightarrow \partial M_{c-\epsilon}$
- c) $M'_{c+\epsilon} = M_{c+\epsilon}$

Da b) segue che $M'_{c-\epsilon} \cong M_{c-\epsilon} \vee_{\Phi} H_{n\lambda}$, e da a), c) e applicando 2.1 si conclude la dimostrazione di 1. La dimostrazione di 2. consiste nel retrarre $H_{n\lambda}$ per deformazione su $(\partial D^k \times D^{n-k}) \cup (D^k \times \{\mathbf{0}\})$ (si veda Figura 4 per il caso di H_{31}) e di comporre con Φ . Estendendo con l’identità in $M_{c-\epsilon}$ per ogni $t \in I$, quello che si ottiene è una retrazione per deformazione di $M'_{c-\epsilon}$ su $M_{c-\epsilon} \vee_{\Phi} e^k$. Si conclude componendo con la retrazione per deformazione di $M_{c+\epsilon} = M'_{c+\epsilon}$ su $M'_{c-\epsilon}$ la cui esistenza è garantita sempre da 2.1. ■

Da 2.5 si può dedurre, ragionando per induzione, che se f è una funzione di Morse (che per semplicità prendiamo a valori critici distinti) sulla varietà compatta M di dimensione n , si ha $M \cong \mathcal{H}(n; -, \theta_2 \phi_2, \dots, \theta_m \phi_m)$, dove m è il numero di punti critici (necessariamente finito), i θ_i sono i diffeomorfismi $M_{c_i-\epsilon} \rightarrow M_{c_{i-1}+\epsilon}$ per ϵ abbastanza piccolo da poter applicare 2.5 a tutti gli intervalli $[c_i - \epsilon, c_i + \epsilon]$, e le ϕ_i sono le mappe con cui vengono attaccati i manici $H_{n\lambda_i}$ ai sottolivelli $M_{c_i-\epsilon}$.

Figura 4



Con ciò abbiamo dato una classificazione del tipo di diffeomorfismo di M come complesso di manici; risulta tuttavia di maggior interesse studiare un altro tipo di decomposizione di M , con cui si perdono le proprietà di M come varietà differenziabile, ma si guadagna in maneggevolezza ai fini dello studio di M mediante strumenti della topologia algebrica. La dimostrazione di questo teorema è meno banale e necessita di un paio di risultati preliminari sui CW-complessi: il teorema di approssimazione cellulare (un risultato di grande importanza nello studio dei CW-complessi, che afferma che ogni applicazione continua tra CW-complessi è omotopa ad una cellulare, ovvero una che manda k -scheletri in k -scheletri; si veda [6, p.348]) ed un lemma che adesso enunciamo e per cui rimandiamo a [1, p.20,21] per la dimostrazione.

Lemma 2.6.

1. Sia X uno spazio topologico e $\phi_t: S^{k-1} \rightarrow X$ una omotopia. Allora $X \vee_{\phi_0} e^k \approx X \vee_{\phi_1} e^k$ tramite un'equivalenza di omotopia che ristretta a X è uguale all'identità.
2. Sia anche Y uno spazio topologico, $\phi: S^{k-1} \rightarrow X$ continua e $f: X \rightarrow Y$ una equivalenza di omotopia. Allora $X \vee_{\phi} e^k \approx Y \vee_{f\phi} e^k$ tramite un'equivalenza di omotopia che ristretta a X è uguale ad f .

Teorema 2.7 (Classificazione del tipo di omotopia di una varietà differenziabile). Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse a sottolivelli M_a compatti (o vuoti) per ogni $a \in \mathbb{R}$, e che supponiamo inoltre a valori critici distinti. Allora M ha lo stesso tipo di omotopia di un opportuno CW-complesso con una cella di dimensione λ per ciascun punto critico di indice λ .

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema solo nel caso in cui M è compatta; per la dimostrazione nel caso non compatto si veda [1, p.23]. Sia dunque M compatta e $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ l'insieme (necessariamente finito) dei valori critici di f , ordinati in maniera crescente, con retroimmagini p_i di indici λ_i . Prendiamo $a \notin \mathcal{C}$, sia $c = c_i$ il più piccolo valore critico maggiore di a (se esiste), $\lambda = \lambda_i$, e dimostriamo per induzione su i che M_a ha lo stesso tipo di omotopia di un CW-complesso Z con una cella di indice λ_j per ogni $j \leq i$. Osserviamo che siamo nelle ipotesi di 2.5 ($f^{-1}[c-\delta, c+\delta]$ è chiuso nel compatto $M_{c+\delta}$) e sia $\varepsilon > 0$ come nell'enunciato di 2.5. Per $i = 1$, c è necessariamente un minimo, dunque $\lambda = 0$, $M_{c-\varepsilon} = M_a = \emptyset$ e quindi $M_{c+\varepsilon} \approx e^\lambda$ che è contrattile, il che dimostra il caso base. Se $i > 1$, $M_a \approx M_{c-\varepsilon}$ per 2.1 e $M_{c+\varepsilon} \approx M_{c-\varepsilon} \vee_\alpha e^\lambda$ per 2.5, per una qualche applicazione continua α . Inoltre, per ipotesi induttiva, M_a è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso Z con una λ_j -cella per ogni $j < i$. Allora

$M_{c-\varepsilon} \approx Z$ e quindi per il punto 2. di 2.6 $M_{c+\varepsilon} \approx M_{c-\varepsilon} \vee_{\alpha} e^{\lambda} \approx Z \vee_{\beta} e^{\lambda}$ per una applicazione continua β . Ma per approssimazione cellulare $\beta = \beta_0$ è omotopa ad un'applicazione cellulare β_1 , e quindi per il punto 1. di 2.6 abbiamo $M_{c+\varepsilon} \approx Z \vee_{\beta_0} e^{\lambda} \approx Z \vee_{\beta_1} e^{\lambda}$ che è un CW-complesso, chiamiamolo Z' , ottenuto attaccando una λ -cella a Z . Preso, $a' > c$ tale che (c, a') non contenga punti critici, non resta che riapplicare 2.1 per ottenere $M_{a'} \approx M_{c+\varepsilon} \approx Z'$ e il passo induttivo è completato. ■

Vediamo ora un'interessante conseguenza dei risultati visti in questa sezione (in particolare di 2.5).

Corollario 2.8 (Reeb). *Sia M una varietà differenziabile compatta di dimensione n e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse con esattamente due punti critici. Allora M è omeomorfa a S^n .*

Dimostrazione. Siano p e q i punti critici, necessariamente il punto di minimo e di massimo di f , e dato che f non è costante (altrimenti non sarebbe Morse) possiamo prendere $f(p) = a < b = f(q)$. Allora per 2.1 e 2.5, per un $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo abbiamo $M_{b-\varepsilon} \cong M_{a+\varepsilon} \cong D^n$ e quindi $M = M_{b+\varepsilon} \cong D^n \vee_{\phi} D^n$ per qualche embedding $\phi: \partial D^n \rightarrow \partial D^n$. E' chiaro che ϕ deve essere suriettiva perché se non lo fosse ϕ si fattorizzerebbe come $S^n \rightarrow S^n \setminus \{\text{un punto}\} \simeq \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$, e dunque verrebbero indotti omomorfismi sui rispettivi n -esimi gruppi di omologia ridotta $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ che è assurdo, perché ϕ induce isomorfismi sull'omologia, essendo un omeomorfismo. Dunque ϕ è un diffeomorfismo (e in particolare un omeomorfismo) $\partial D^n \rightarrow \partial D^n$, che si estende ad un omeomorfismo $\Phi: D^n \rightarrow D^n$ ponendo $\Phi(t\mathbf{u}) = t\phi(\mathbf{u})$ per $\mathbf{u} \in S^{n-1}$, $t \in I$. Esistono dunque omeomorfismi compatibili di $M_{b-\varepsilon}$ e $f^{-1}[b-\varepsilon, b]$ rispettivamente sulla calotta chiusa inferiore e superiore di S^n , e possiamo concludere per il lemma di incollamento. ■

Non è vero, in generale, che una varietà M con le proprietà di 2.8 debba necessariamente essere diffeomorfa ad S^n : la struttura differenziabile su $M \simeq S^n$ potrebbe non essere quella ordinaria, e in generale dipende dal diffeomorfismo ϕ . Per $12 \neq n \geq 7$ esistono effettivamente strutture differenziabili su S^n , dette "esotiche", che la rendono non diffeomorfa ad S^n con la sua struttura standard; per $4 \neq n \leq 6$ queste non esistono, mentre per $n = 4$ il problema della loro esistenza è aperto. Per ulteriori dettagli si veda [8] e [5, p.83].

3 Disuguaglianze di Morse

La struttura di CW-complesso indotta su una varietà M da una sua funzione di Morse può essere utilizzata per fare affermazioni di carattere omologico su M , dal momento che spazi omotopicamente equivalenti hanno omologie isomorfe. Le disuguaglianze di Morse mettono in diretto collegamento gli indici dei punti critici di una funzione di Morse definita su M con la sua omologia.

Indichiamo con $H_k(X)$ il k -esimo gruppo di omologia singolare a coefficienti in \mathbb{Z} dello spazio topologico X , con $b_k = b_k(X)$ il suo rango, altrimenti detto k -esimo numero di Betti di X e con $\chi(X)$ la caratteristica di Eulero di X . In modo simile, se $Y \subseteq X$, indichiamo con $H_k(X, Y)$ il k -esimo gruppo di omologia singolare relativa (a coefficienti interi) e con $b_k(X, Y)$ il suo rango. Inoltre, data una funzione di Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, chiamiamo m_{λ} il numero di punti critici di f

di indice λ (che per 2.7 è il numero di celle di dimensione λ nella decomposizione cellulare di M indotta da f), detto λ -esimo *numero di Morse* di f . Prima di dimostrare le disuguaglianze di Morse, diamo la definizione di funzioni subaddittive, ed enunciamo un lemma su tali funzioni, la cui dimostrazione (facile, induttiva) può essere trovata su [1, p.28].

Definizione 3.1. Sia σ una funzione a valori interi definita per certe coppie di sottospazi di uno spazio topologico. Diremo che σ è subaddittiva se

$$Z \subseteq Y \subseteq X \Rightarrow \sigma(X, Z) \leq \sigma(Y, Z) + \sigma(X, Y)$$

Lemma 3.2. Siano $X_0 \subseteq \dots \subseteq X_n$ spazi topologici e σ una funzione a valori interi definita su coppie di tali spazi. Allora se σ è subaddittiva

$$\sigma(X_n, X_0) \leq \sum_{k=1}^n \sigma(X_k, X_{k-1})$$

Teorema 3.3 (Disuguaglianze di Morse). *Sia f una funzione di Morse definita sulla varietà differenziabile compatta M . Allora per ogni $\lambda \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} b_k \leq \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} m_k$$

Dimostrazione. Per 1.5, a meno di piccole perturbazioni e senza alterare i suoi punti critici e i rispettivi indici, possiamo supporre f a valori critici distinti. Siano $c_1 < \dots < c_m$ i valori critici di f e indichiamo con λ_i gli indici dei rispettivi punti critici. Osserviamo che $(M_{c_i}, M_{c_{i-1}})$ e $(M_{c_{i-1}} \vee e^{\lambda_i}, M_{c_{i-1}})$ sono coppie di spazi omotopicamente equivalenti (i.e. esiste un'equivalenza di omotopia tra i primi termini delle coppie che ristretta ai secondi termini rimane una equivalenza di omotopia; nel nostro caso, con leggere modifiche al punto 2. dell'enunciato di 2.5, per 2.1 e 2.6, abbiamo addirittura una retrazione per deformazione di M_{c_i} su $M_{c_{i-1}} \vee e^{\lambda_i}$ che si restringe all'identità su $M_{c_{i-1}}$): per [6, p.133 es.17] questo implica che le omologie relative delle due coppie sono isomorfe. Da 2.5 segue direttamente che $(M_{c_i}, M_{c_{i-1}})$ sono "buone coppie" (ovvero $M_{c_{i-1}}$ è chiuso, e retrato per deformazione di un qualche suo intorno in M_{c_i}). Allora per noti risultati di topologia algebrica (si veda [6, p.114,124]) abbiamo

$$\begin{aligned} H_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) &\simeq H_k(M_{c_{i-1}} \vee e^{\lambda_i}, M_{c_{i-1}}) \\ &\simeq \tilde{H}_k \left(\frac{M_{c_{i-1}} \vee e^{\lambda_i}}{M_{c_{i-1}}} \right) \\ &\simeq \tilde{H}_k \left(\frac{D^{\lambda_i}}{\partial D^{\lambda_i}} \right) \\ &\simeq \tilde{H}_k(S^{\lambda_i}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } k = \lambda_i \\ 0 & \text{per } k \neq \lambda_i \end{cases} \end{aligned}$$

e in particolare abbiamo $b_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) = \delta_{k\lambda_i}$.

Consideriamo ora una successione esatta lunga di gruppi abeliani A_k , che si può completare ad un diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & B_k & & & \\
 & & \nearrow & \searrow & & & \\
 \dots & \longrightarrow & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{\partial_k} & A_{k-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & & \searrow & & \\
 & & B_{k+1} & & B_{k-1} & & B_{k-2} & & & & B_0 & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & & \searrow & & \\
 0 & & & & 0 & & 0 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

dove $B_k \simeq \ker(\partial_k) = \text{Im}(\partial_{k+1}) \simeq \text{coker}(\partial_{k+2})$ e le successioni diagonali sono tutte esatte corte. Proviamo che per ogni k si ha $\text{rk}(\partial_{k+1}) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{rk}(A_i)$: ricordando che per successioni esatte corte il rango del gruppo di mezzo è uguale alla somma dei ranghi degli altri due, si ha

$$\begin{aligned}
 \text{rk}(\partial_{k+1}) &= \text{rk}(B_k) = \text{rk}(A_k) - \text{rk}(B_{k-1}) \\
 &= \text{rk}(A_k) - (\text{rk}(A_{k-1}) - \text{rk}(B_{k-2})) \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{i=2}^k (-1)^{k-i} \text{rk}(A_i) + (-1)^{k-1} (\text{rk}(A_1) - \text{rk}(B_0)) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{rk}(A_i)
 \end{aligned}$$

Consideriamo la successione esatta lunga della terna di spazi topologici $Z \subseteq Y \subseteq X$ (per dettagli si veda [6, p.118])

$$\dots \longrightarrow H_k(Y, Z) \longrightarrow H_k(X, Z) \longrightarrow H_k(X, Y) \longrightarrow H_{k-1}(Y, Z) \longrightarrow \dots$$

e applicando quanto appena visto alla mappa $H_{k+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(Y, Z)$ abbiamo che, posto $\sigma_k(V, W) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} b_i(V, W)$

$$\sigma_k(Y, Z) - \sigma_k(X, Z) + \sigma_k(X, Y) = \text{rk}(\partial) \geq 0$$

ovvero σ_k è subadditiva per ogni k . Possiamo quindi applicare 3.2 a σ_λ per gli spazi $\emptyset \subseteq M_{c_1} \subseteq \dots \subseteq M_{c_m}$, ottenendo

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} b_k &= \sigma_\lambda(M, \emptyset) \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \sigma_\lambda(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} b_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) \\
 &= \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} \sum_{i=1}^m \delta_{k\lambda_i} = \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} m_k \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Aggiungendo la disuguaglianza di 3.3 per λ a quella per $\lambda - 1$ otteniamo

$$b_\lambda \leq m_\lambda$$

e paragonando 3.3 con λ e $\lambda + 1$ quando $\lambda \geq n$ abbiamo

$$\sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda b_\lambda = \chi(M) = \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda m_\lambda$$

Queste vengono dette *disuguaglianze deboli di Morse*, e possono essere dedotte più semplicemente da ragionamenti sull'omologia cellulare di M (per la definizione di questo tipo di omologia si veda [6, p.137]).

Esempio 3.4. Se f è una funzione di Morse definita su S^n , si ha $\sum_{\lambda=0}^n m_\lambda = \chi(S^n)$, che è 2 per n pari e 0 per n dispari. In particolare, per $n = 1$, il numero di punti di minimo locale deve essere uguale al numero di punti di massimo locale (si veda Figura 5).

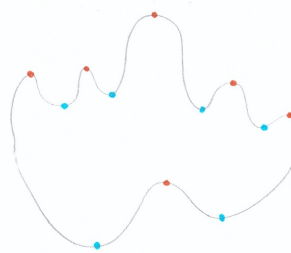


Figura 5

Se f è una funzione di Morse definita sul toro $T = S^1 \times S^1$, la somma a segni alterni dei suoi numeri di Morse deve essere pari a $\chi(T) = 0$, quindi il numero di selle deve essere uguale al numero di estremi relativi. Per compattezza di T , f ammette massimo e un minimo, dunque ha almeno 2 selle e quindi almeno 4 punti critici. Più in generale, se f è definita sul g -toro, di caratteristica di Eulero $2 - 2g$, ammette almeno $2g$ selle e almeno $2 + 2g$ punti critici.

Riferimenti bibliografici

- [1] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1963
- [2] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications, Part II*, Springer-Verlag, New York, 1985
- [3] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1990
- [4] L. Nicolaescu, *An Invitation to Morse Theory*, Springer, New York, 2007
- [5] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, AMS, Providence, 2002
- [6] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, New York, 2001, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [7] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, 2003
- [8] Wikipedia, Exotic Spheres http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_sphere