



Università degli Studi di Firenze  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e  
Naturali  
C.d.L. in Matematica

Anno Accademico 2011-2012  
Versione integrale della tesi di Laurea Triennale

## **ASPETTI INTRODUTTIVI DELLA TEORIA DI MORSE**

Introductory aspects of Morse Theory

**Candidato:**  
Emilio Rossi Ferrucci

**Relatore:**  
Prof. Giorgio Ottaviani

## Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Punti critici non degeneri e funzioni di Morse</b>	<b>4</b>
<b>2 Esistenza di funzioni di Morse</b>	<b>11</b>
<b>3 Attaccamento di manici e tipo di omotopia</b>	<b>15</b>
<b>4 Disuguaglianze di Morse</b>	<b>25</b>
<b>5 Esempi e applicazioni</b>	<b>28</b>
<b>Appendice</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>40</b>

## Notazioni e terminologia

**sse** significa se e solo se

$\approx$  indica la relazione di omotopia di funzioni o di equivalenza di omotopia tra spazi

$\simeq$  indica la relazione di omeomorfismo, oppure di isomorfismo di gruppi

$\cong$  indica la relazione di diffeomorfismo

**differenziabile** significa  $C^\infty$

**mappa** indica una funzione differenziabile, se non altrimenti specificato

**la giustapposizione di due funzioni**, tipo  $fg$  indica la loro composizione; il loro prodotto verrà indicato specificando gli argomenti (i.e.  $f(x)g(y)$ ) oppure con  $f \cdot g$ .

**lettere in neretto** tipo  $\mathbf{x}$  indicano elementi di  $\mathbb{R}^n$  e  $x_i$  le loro componenti, se  $\phi$  è una funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$ , per cui non useremo il neretto, le  $\phi_i$  sono le funzioni  $p_i\phi$  dove  $p_i$  è l' $i$ -esima proiezione

$D^k$  è il disco chiuso (o palla chiusa) di dimensione  $k$ ,  $D^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq 1\}$

$S^{k-1}$  è la sfera di dimensione  $k-1$ , ovvero  $\partial D^k$

$B^k$  è il disco aperto (o palla aperta) di dimensione  $k$ , ovvero  $\text{int}(D^k)$

$B_r(p)$  indica la palla di raggio  $r$  e di centro  $p$  in uno spazio metrico (evidente dal contesto), tipo  $\mathbb{R}^n$

$e^k$  indica uno spazio che è immagine di  $D^k$  tramite un'applicazione continua che ristretta a  $B_k$  è un omeomorfismo, e verrà chiamata  $k$ -cella anche se, in generale, non è omeomorfa a  $D^k$

$\mathbb{1}_X$  indica la funzione identità dell'insieme  $X$ , che può anche essere omissa a pedice se risulta evidente dal contesto

$I$  è l'intervallo  $[0, 1]$

$\dot{\cup}, \dot{\bigcup}$  indicano l'unione disgiunta di due insiemi

$\amalg, \amalg$  indicano l'unione disgiunta di due spazi topologici, dotati della topologia di unione disgiunta

$\nabla g(\mathbf{x})$ ,  $Jg(\mathbf{x})$ ,  $Hg(\mathbf{x})$  sono rispettivamente il vettore gradiente, la matrice jacobiana e la matrice hessiana della funzione  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (con  $m = 1$  nel primo e terzo caso) calcolate nel punto  $\mathbf{x}$

$F_{*p}$  indica il differenziale  $F_*$  della mappa tra varietà differenziabili  $F: M \rightarrow N$ , calcolato nel punto  $p \in M$

## Introduzione

Questo scritto consiste nel programma integrale portato a termine per discutere la mia tesi di laurea triennale in Matematica, all'Università di Firenze, nell'appello del 6 marzo 2013. Il lavoro si è articolato anche in un apprendimento preliminare sulle nozioni di base delle varietà differenziabili, che costituiscono un prerequisito essenziale allo studio della teoria di Morse nella sua formulazione classica. Questo studio è stato compiuto prevalentemente con l'utilizzo dei due testi [8] e [7], e in quanto solo ausiliario all'argomento principale della tesi, non è trattato in queste pagine.

L'argomento di questo elaborato è dunque la teoria di Morse sulle varietà differenziabili reali di dimensione finita, che studia i collegamenti tra punti critici di una funzione differenziabile a valori reali definita su una varietà differenziabile, e la topologia della varietà stessa. Il concetto di punto critico viene spesso trattato nei corsi di analisi, perché strettamente collegato alla ricerca di minimi e massimi di funzioni differenziabili definite in aperti euclidei. Qui l'importanza di tale concetto è quindi del tutto differente, e per questo motivo spesso si ignora il fatto che i punti critici hanno una natura anche topologica, e che, se la funzione è definita in spazi topologicamente più interessanti di  $\mathbb{R}^n$ , la loro collocazione potrebbe non essere del tutto arbitraria. Un esempio di ciò che non richiede la teoria di Morse è una qualsiasi varietà compatta, che conterrà almeno due punti critici di una sua funzione: il massimo e il minimo. Dopo un po' di lavoro saremo in grado di fare asserzioni simili, e più forti, alla base dei quali stanno dei collegamenti tra la topologia della varietà, studiata mediante invarianti algebrici, e i punti critici di una sua funzione.

La prima sezione tratta alcune nozioni tecniche indispensabili allo sviluppo della teoria di Morse, la seconda tratta una importante questione esistenziale che rende la teoria di Morse generale e versatile, mentre la terza sezione è quella più importante, dal momento che vengono affrontati i risultati principali riguardanti la connessione tra punti critici e topologia accennata sopra. La quarta sezione è dedicata al risultato probabilmente più interessante di questo scritto, le disuguaglianze di Morse, che mettono in collegamento l'omologia di una varietà differenziabile con i punti critici di una sua funzione differenziabile. Nell'ultima sezione esploriamo qualche esempio e applicazione della teoria generale. E' presente anche un'appendice, che contiene alcuni risultati importanti allo sviluppo della teoria, ma un po' distaccati dal filone principale del ragionamento, che possono essere presi per buoni in prima lettura.

Una caratteristica della matematica che la rende senza dubbio affascinante è il suo essere contemporaneamente varia e inaspettatamente interconnessa. Spero di essere riuscito, in queste pagine, a far venire fuori i collegamenti profondi e significativi tra topologia, analisi e algebra che danno vita alla teoria di Morse.

Firenze, Marzo 2013

Emilio Ferrucci

# 1 Punti critici non degeneri e funzioni di Morse

In questa sezione sviluppiamo il bagaglio tecnico che ci servirà nella teoria che segue, e in particolare trattiamo il concetto fondamentale di punto critico non degenero.

**Definizione 1.1** (Punto critico). Sia  $f: M \rightarrow N$  una mappa tra varietà differenziabili.  $p \in M$  si dice *punto critico* di  $f$  se  $\text{rk}(f)_p < \dim(N)$ . In particolare se  $m < n$  ogni punto di  $M$  è critico, se  $n = 1$  un punto  $p$  è critico sse  $\text{rk}(f)_p = 0$ , ovvero sse  $f_{*p}$  è il covettore nullo di  $T_p^*(M)$ . Un *valore critico* di  $f$  è l'immagine di un suo punto critico.

Sia ora  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e  $(U, \phi)$  una carta locale (ovvero  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $U$  aperto in  $M$  e  $\phi$  omeomorfismo sull'immagine). Indichiamo con  $C^\infty(p)$  il germe delle funzioni differenziabili in  $p$  e sia  $\mathcal{E}_p = \{E_{p1}, \dots, E_{pn}\}$  la base di  $T_p(M)$  costituita dalle derivazioni lungo le linee coordinate in  $p$ , ovvero, per  $f \in C^\infty(p)$

$$E_{pi}(f) = \frac{\partial(f\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p))$$

Dato che  $\mathcal{E}_p$  è una base di  $T_p(M)$ ,  $p \in U$  è un punto critico di  $f$  sse  $f_{*p}(E_{pi}) \in T_{f(p)}(\mathbb{R})$  è l'applicazione nulla  $C^\infty(f(p)) \rightarrow \mathbb{R}$ , ovvero sse  $\nabla(f\phi^{-1})(\phi(p)) = \mathbf{0}$ .

Ora, data una  $f$  come sopra definiamo, per  $p \in M$  punto critico di  $f$

$$\begin{aligned} f_{**p}: T_p(M) \times T_p(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\mapsto X_p(Y(f)) \end{aligned}$$

dove  $Y$  è un qualunque campo vettoriale che vale  $Y_p$  in  $p$ . Proviamo che  $f_{**p}$  è ben definita (non dipende dal campo  $Y$ ), ed è una forma bilineare simmetrica su  $M$ . Posto  $X_p = \sum_i \alpha_{pi} E_{pi}$  e  $Y = \sum_i \beta_i E_{pi}$  osserviamo preliminarmente che

$$\begin{aligned} E_{pi}(E_j(f)) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (E_j(f) \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial(f\phi^{-1})}{\partial x_j} \circ \phi^{-1} \right) \Big|_{\phi(p)} \\ &= \frac{\partial^2(f\phi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\phi(p)) \\ &= \frac{\partial^2(f\phi^{-1})}{\partial x_j \partial x_i}(\phi(p)) = E_{pj}(E_i(f)) \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza vale per il teorema di Schwarz. Se  $X$  è un campo

vettoriale che vale  $X_p$  in  $p$  abbiamo, dato che  $E_{pi}(f) = 0$  per ogni  $i$

$$\begin{aligned}
X_p(Y(f)) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} E_{pi} \left( \sum_{j=1}^n \beta_j E_j(f) \right) \Big|_p \\
&= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{pi} [E_{pi}(\beta_j) E_{pj}(f) + \beta_{pj} E_{pi}(E_j(f))] \\
&= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{pi} \beta_{pj} E_{pi}(E_j(f)) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{pj} \beta_{pi} E_{pj}(E_i(f)) = Y_p(X(f))
\end{aligned}$$

Ciò prova la buona definizione e la simmetria. La bilinearità segue direttamente dalla definizione di vettore tangente. La matrice della forma bilineare  $f_{**p}$  rispetto alla base  $\mathcal{E}_p$  è proprio la matrice hessiana  $H(f\phi^{-1})(\phi(p))$ , i cui coefficienti sono dati da

$$h_{ij} = E_{pi}(E_j(f)) = \frac{\partial^2 (f\phi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\phi(p))$$

e verrà chiamata semplicemente matrice hessiana di  $f$  in  $p$ . Mentre essa dipende dalla mappa  $\phi$ , il suo rango e la sua segnatura no, in quanto sono il rango e la segnatura di una forma bilineare definita intrinsecamente. Siamo pronti per dare la seguente

**Definizione 1.2.** Data una funzione differenziabile  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , un suo punto critico  $p \in M$  si dice *non degenera* se la forma bilineare  $f_{**p}$ , o equivalentemente l'hessiana  $H(f\phi^{-1})(\phi(p))$ , ha rango massimo, e *degenera* altrimenti. Se  $p$  è un punto critico non degenera di  $f$ , la massima dimensione di un sottospazio di  $T_p(M)$  nel quale  $f_{**}$  è definita negativa si dice l'*indice* di  $f$  in  $p$ .  $f$  si dice una *funzione di Morse* se ogni suo punto critico è non degenera.

*Osservazione 1.3.* In genere, in analisi, la hessiana di funzioni  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  non viene definita solo nei punti critici. Questo non è sbagliato e risulta anche utile, ma viene fatto fissando tacitamente un sistema di coordinate, quelle canoniche di  $\mathbb{R}^n$ . Per definire la hessiana in maniera intrinseca, come visto sopra, serve che il punto sia critico.

Il seguente risultato, indispensabile allo sviluppo della teoria di Morse, ci assicura che esistono coordinate locali in un intorno di un punto critico non degenera di  $f$  rispetto alle quali  $f$  assume una semplice espressione quadratica.

**Lemma 1.4** (Morse). *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile. Sia  $p$  un punto critico non degenera di  $f$  e  $\lambda$  il suo indice. Allora esiste una carta locale  $(\psi, V)$ , con  $p \in V$ , tale che si ha  $\psi(p) = \mathbf{0}$  e, per  $\mathbf{x} \in \psi(V)$*

$$f\psi^{-1}(\mathbf{x}) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$$

*Dimostrazione.* Sia  $(U, \phi)$  una carta locale con  $p \in U$ . A meno di traslare l'aperto euclideo  $\phi(U)$  possiamo supporre  $\phi(p) = \mathbf{0}$  e, a meno di restrizioni, possiamo supporre  $\phi(U) = B_\varepsilon(\mathbf{0})$  per un qualche  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo. Tenendo in mente che  $p$  è punto critico non degenero di  $f$  se lo è di  $f - f(p)$ , sostituiamo per il momento  $f$  con  $f - f(p)$  in modo che ora  $f(p) = 0$  (riprenderemo in mano la  $f$  originaria alla fine della dimostrazione).

Posto  $\tilde{f} = f\phi^{-1}$ , proviamo prima di tutto che esistono funzioni  $\tilde{f}_i$  per  $i = 1, \dots, n$  tali che  $\tilde{f} = \sum_i x_i \tilde{f}_i$ . Sia dunque  $t \in I$  e  $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{0})$ , allora  $t\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{0})$  e

$$\frac{d}{dt} \tilde{f}(t\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) x_i$$

e quindi

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{0}) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{f}(t\mathbf{x}) dt = 0 + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) dt$$

e quindi, ponendo  $\tilde{f}_i = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) dt$  (che sono funzioni  $C^\infty$  perché  $\tilde{f}$  lo è) otteniamo l'uguaglianza desiderata.

Ora, dato che  $\nabla \tilde{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  e che  $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , e quindi che  $\tilde{f}_i(\mathbf{0}) = 0$  per  $i = 1, \dots, n$ , possiamo iterare la procedura sulle  $\tilde{f}_i$ , ottenendo cioè funzioni  $\tilde{f}_{ij}$  tali che  $\tilde{f}_i = \sum_j x_j \cdot \tilde{f}_{ij}$  e quindi che

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x})$$

per  $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{0})$ . Più esplicitamente abbiamo, derivando sotto il segno di integrale

$$\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) dt = \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j \partial x_i}(t\mathbf{x}) dt$$

da cui si può notare che  $\tilde{f}_{ij} = \tilde{f}_{ji}$  (per Schwarz) e che  $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{0})$  sono i coefficienti  $h_{ij}$  della matrice hessiana  $H(f\phi^{-1})(\phi(p))$ .

Definiamo ora dei diffeomorfismi  $\psi^k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , che hanno come dominio intornoi aperti di  $p$  in  $M$  e con immagini aperti euclidei contenenti  $\mathbf{0}$ , e definiamo delle mappe  $g_{ij}^k$  definite nell'immagine delle  $\psi^k$  e tali che la matrice  $G^k = (g_{ij}^k)$  sia simmetrica,  $G_k(\mathbf{0})$  non singolare e tali che

$$f\psi_k^{-1} = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{ij}^k$$

con

$$g_{ij}^k = \pm \delta_{ij} \quad \text{per } i, j \leq k-1$$

Possiamo quindi prendere  $\psi^0 = \phi$  scegliendo  $g_{ij}^0 = \tilde{f}_{ij}$ , e supponiamo induttivamente di aver definito  $\psi^k$  e  $G^k$  (in seguito, per semplicità, omettiamo, sottintendendoli, tutti gli apici  $k$ ). Ora, per noti risultati di algebra lineare, possiamo riportare la matrice simmetrica  $G(\mathbf{x})$  (i cui coefficienti sono dati da  $g_{ij}(\mathbf{x})$ ) in forma diagonale mediante un cambio di base, ed è chiaro che la cui matrice  $M(\mathbf{x})$  (vista come applicazione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ ) è differenziabile. Inoltre, dato che la sottomatrice  $G[i, j \leq k-1]$  è diagonale e che le sottomatrici  $G[i \geq k; j \leq k]$ ,  $G_k[i \leq k; j \geq k]$  sono nulle, possiamo supporre che tale cambiamento di base agisca solo sulle coordinate  $x_i$  con  $i \geq k$ . Quindi dato che  $G(\mathbf{0})$  ha rango massimo, e a meno del suddetto cambio di base, possiamo supporre  $g_{kk}(\mathbf{0}) \neq 0$  e che quindi anche  $g_{kk}(\mathbf{x}) \neq 0$  in un intorno sufficientemente piccolo di  $\mathbf{0}$ . Definiamo in questo intorno una mappa  $\gamma$  ponendo

$$\gamma_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_i & \text{per } i \neq k \\ \sqrt{|g_{kk}(\mathbf{x})|} \left( x_k + \sum_{i=k+1}^n x_i \frac{g_{ik}(\mathbf{x})}{g_{kk}(\mathbf{x})} \right) & \text{per } i = k \end{cases}$$

Osseviamo che, posto  $\alpha = \sqrt{|g_{kk}|}$  e  $\beta_i = \sqrt{|g_{kk}|} \cdot \frac{g_{ik}}{g_{kk}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_j}(\mathbf{0}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sqrt{|g_{kk}|} \left( x_k + \sum_{i=k+1}^n x_i \frac{g_{ik}}{g_{kk}} \right) \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \\ &= \left[ \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \alpha + x_k \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \beta_i + \sum_{i=k+1}^n x_i \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \\ &= \delta_{kj} \alpha(\mathbf{0}) + \sum_{i=k+1}^n \delta_{ij} \beta_i(\mathbf{0}) = \begin{cases} 0 & \text{se } j < k \\ \alpha(\mathbf{0}) & \text{se } j = k \\ \beta_j(\mathbf{0}) & \text{se } j > k \end{cases} \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente che la jacobiana  $J\gamma(\mathbf{0})$  è una matrice sovradiagonale, gli elementi sulla cui diagonale sono tutti 1 tranne quello di posto  $(k, k)$  che è  $\alpha(\mathbf{0})$ . Dunque lo jacobiano  $\det J\gamma(\mathbf{0}) = \sqrt{|g_{kk}(\mathbf{x})|} \neq 0$  e quindi, per il teorema della funzione inversa  $\gamma$ , ristretta ad un opportuno intorno aperto dello  $\mathbf{0}$  è un diffeomorfismo sull'immagine, che è un aperto euclideo contenente  $\mathbf{0} = \gamma(\mathbf{0})$ . Definiamo la carta locale  $\psi_{k+1} = \gamma\psi_k$ ; posto  $\mathbf{y} = \gamma(\mathbf{x})$ , e osservando che

$$x_k = \frac{y_k}{\sqrt{|g_{kk}(\mathbf{x})|}} - \sum_{i=k+1}^n y_i \frac{g_{ik}(\mathbf{x})}{g_{kk}(\mathbf{x})}$$



abbiamo

$$\begin{aligned}
f\psi_{k+1}^{-1}(\mathbf{y}) &= f\psi_k^{-1}\gamma^{-1}(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i < k} \pm x_i^2 + g_{kk}(\mathbf{x})x_k^2 + 2 \sum_{i > k} g_{ik}(\mathbf{x})x_i x_k \sum_{i,j > k} g_{ij}(\mathbf{x})x_i x_j \\
&= \sum_{i < k} \pm y_i^2 + \frac{y_k^2}{|g_{kk}(\mathbf{x})|} g_{kk}(\mathbf{x}) + g_{kk}(\mathbf{x}) \left( \sum_{i > k} y_i \frac{g_{ik}(\mathbf{x})}{g_{kk}(\mathbf{x})} \right)^2 \\
&\quad - 2g_{kk}(\mathbf{x}) \frac{y_k}{\sqrt{|g_{ik}(\mathbf{x})|}} \left( \sum_{i > k} y_i \frac{g_{ik}(\mathbf{x})}{g_{kk}(\mathbf{x})} \right) + 2 \sum_{i > k} g_{ik}(\mathbf{x}) \frac{y_k}{\sqrt{|g_{kk}(\mathbf{x})|}} y_i \\
&\quad - 2 \sum_{i,j > k} \frac{g_{ik}(\mathbf{x})^2}{g_{kk}(\mathbf{x})} y_i y_j + \sum_{i,j > k} g_{ij}(\mathbf{x}) y_i y_j \\
&= \sum_{i=1}^k \pm y_i^2 + \sum_{i,j > k} g_{ij}^{k+1}(\mathbf{y}) y_i y_j
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue da ovvie semplificazioni, e avendo definito le mappe  $g_{ij}^{k+1}$  ad hoc per ottenere la forma voluta. Possiamo dunque porre  $\psi_n = \psi$  (che è un diffeomorfismo che mappa  $p$  nello  $\mathbf{0}$ ) e dopo un riordinamento gli assi, ricordandoci che in realtà la nostra  $f$  è  $f - f(p)$  otteniamo la forma cercata.

Dobbiamo verificare che la matrice  $G_{k+1}$  sia simmetrica in un intorno dello  $\mathbf{0}$  e non singolare in  $\mathbf{0}$ . La prima affermazione segue dal fatto che le  $g_{ij}^k$  sono definite a partire dalle  $g_{ij}^k$ , che soddisfano  $g_{ij}^k = g_{ji}^k$ . Per verificare la non singolarità di  $G_{k+1}$  in  $\mathbf{0}$  ci avvaliamo del seguente "trucco", che ci evita di scrivere per esteso la (complicata) espressione delle  $g_{ij}^{k+1}$ . Siano  $i, j > k$  e, ricordando che  $p$  è un punto critico, usiamo la formula di Taylor a second'ordine per ottenere

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{k+1}(\mathbf{y}) y_i y_j = (f\psi_{k+1}^{-1})(\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(\mathbf{0}) y_i y_j + o(|\mathbf{y}|^2)$$

dove gli  $h_{ij}$  sono i coefficienti di  $H(f\psi_{k+1})$ . Restringendosi al piano  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_t = 0 \text{ per } t \neq i, j\}$  e dopo ovvii passaggi algebrici si ha

$$(g_{ij}^{k+1}(\mathbf{y}) - h_{ij}(\mathbf{0})) = \frac{o(|(y_i, y_j)|)}{y_i y_j} \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}} 0$$

e dunque, per continuità, si ha che  $G_{k+1}(\mathbf{0}) = H(f\psi_{k+1})(\mathbf{0})$ , che è non degenere, grazie all'invarianza del rango per cambi di coordinate. Ciò completa il passo induttivo. Manca solo da verificare che il numero di addendi positivi è proprio l'indice di  $p$ , ovvero  $\text{rk}(f_{**p})$ : questa verifica può essere fatta con un ragionamento simile al trucco di sopra, e la lasciamo come esercizio al lettore. Ciò conclude la dimostrazione. ■

*Osservazione 1.5.* Dalla dimostrazione si può notare che la forma quadratica da diagonalizzare per ottenere l'uguaglianza del lemma non è proprio la  $f_{**p}$ , bensì una forma quadratica leggermente diversa, ottenuta dalle coordinate iniziali mediante un cambio non lineare di coordinate. Questo ha il vantaggio di eliminare il resto che tipicamente compare nelle formule di Taylor, e che sarebbe comparso anche qui se avessimo direttamente adoperato la Hessiana. Notiamo che, sempre per lo stesso motivo, un teorema analogo ad 1.4 in cui non si richiede che il punto critico sia non degenere (in cui si sostituiscono zeri ai termini della sommatoria per indici maggiori del rango) non sarebbe valido, come si può vedere facilmente con l'esempio della funzione  $x^3$  e del suo punto critico 0 (ed effettivamente l'ipotesi di non degenerità viene usata nella dimostrazione). Diagonalizzando direttamente la forma quadratica  $f_{**p}$  (lasciamo i divertentissimi conti al lettore), si potrebbe invece dimostrare questa versione un po' più generale del teorema, sempre però al prezzo di portarci dietro un  $o(|\mathbf{x}|^2)$ .

*Osservazione 1.6.* L'identità di 1.4 si può scrivere in forma equivalente come

$$f(q) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} \psi_i^2(q) + \sum_{i=\lambda+1}^n \psi_i^2(q)$$

per  $q \in V$ . Per vedere l'equivalenza con l'identità di 1.4 basta porre  $\mathbf{x} = \psi(q)$ . Questo risulterà utile più avanti.

*Osservazione 1.7.* Com'è noto dall'analisi, esempi importanti di punti critici sono massimi e minimi locali; questo continua a valere per funzioni definite su varietà, essenzialmente per la stessa dimostrazione. È facile vedere da 1.4 che un punto critico ha indice  $n$  o  $0$  se è rispettivamente un massimo o minimo. I punti con indice diverso da  $0, n$  verranno detti *punti di sella*.

Vediamo ora, come conseguenza di 1.4, come sono distribuiti i punti e valori critici di una funzione di Morse. Prima di procedere diamo la seguente

**Definizione 1.8.** Sia  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile.  $f$  si dice *di esaurimento* se i suoi sottolivelli

$$M_a = f^{-1}(-\infty, a]$$

sono compatti o vuoti per ogni  $a \in \mathbb{R}$ . È chiaro che una nozione analoga e speculare poteva essere definita con i sovrolivelli, ma noi procederemo "dal basso in alto" in accordo con la tradizione.

**Proposizione 1.9.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile che ammette almeno un punto critico non degenere. Allora*

1. *L'insieme dei punti critici non degeneri di  $f$  è un insieme discreto, isolato dall'insieme dei punti critici degeneri, e al più numerabile.*
2. *Se  $f$  è Morse e di esaurimento, l'insieme  $\mathcal{C}$  dei valori critici non degeneri di  $f$  ammette minimo ed è privo di punti di accumulazione in  $\mathbb{R}$ .*

3. Se  $M$  è compatta,  $f$  ha un numero finito di punti (e quindi di valori) critici non degeneri.

*Dimostrazione.* Se  $p$  è un punto critico non degeneri di  $f$  allora, nelle notazioni di 1.4 abbiamo che  $f$  non ammette altri punti critici in  $V$ . Infatti ricaviamo facilmente

$$\frac{\partial(f\psi^{-1})}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \pm 2x_i$$

ma visto che  $\psi(\mathbf{0}) = p$ , esso è l'unico punto  $q \in V$  tale che  $\nabla(f\psi^{-1})(\psi(q)) = \mathbf{0}$ , ovvero l'unico punto critico in  $V$ . Per completare la dimostrazione di 1, prendiamo una base numerabile di  $M$  e per la proprietà di Hausdorff possiamo trovare aperti della base, ciascuno dei quali contiene esattamente un punto critico non degeneri.

Sia ora  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $M_a \neq \emptyset$ . Allora, dato che  $M_a$  è compatto,  $f$  ammette minimo in  $M_a$ , che è anche il suo minimo in  $M$ . Dunque  $f$  ammette minimo  $c_1$  che è anche un suo valore critico, e dunque in particolare  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Ora, supponiamo per assurdo che  $\mathcal{C}$  ammetta punti di accumulazione in  $\mathbb{R}$  e sia  $x \in \mathbb{R}$  un tale punto. Allora esiste una successione  $c_m$  di valori critici che tende ad  $x$ . Preso un  $\mathbb{R} \ni b > c_m \forall m \in \mathbb{N}$  abbiamo che esiste una successione di punti critici  $p_m \in M_b$  (con  $f(p_m) = c_m$ ). Ma dato che  $M_b$  è compatto, esiste una sottosuccessione  $p_{m_k}$  di  $p_m$  che ammette limite, che chiamiamo  $p$ . E' facile vedere che  $p$  è un punto critico di  $f$ , infatti, presa una carta locale in un intorno  $U$  di  $p$ ,  $p_{m_k} \in U$  definitivamente, e si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) &= \frac{\partial(f\phi^{-1})}{\partial x_i} \left( \phi \left( \lim_{k \rightarrow \infty} p_{m_k} \right) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial(f\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p_{m_k})) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

Ma  $f$  è una funzione di Morse, dunque siamo in presenza di un punto critico non degeneri  $p$  con una successione di punti critici  $p_{m_k} \rightarrow p$ , il che è assurdo per quanto appena provato. Questo prova 2.

Per la 3, scegliamo aperti ciascuno dei quali contiene un punto critico non degeneri, e completiamo tale collezione ad un ricoprimento di  $M$ . Il numero di punti critici non degeneri sarà maggiorato dalla cardinalità di un ricoprimento finito opportunamente estratto. ■

Finiamo la sezione con un paio di osservazioni.

*Osservazione 1.10.* Dato che  $M_a$  è sempre chiuso in  $M$ , l'ipotesi di compattezza di  $M_a$  è verificata in particolare se  $M$  è una varietà compatta. Molti dei risultati che seguono saranno enunciati con ipotesi più deboli della compattezza di  $M$ , ma è utile tenere in mente che essi sono veri nel caso particolare in cui la varietà  $M$  sia compatta.

*Osservazione 1.11.* E' chiaro che non è vero, in generale, che punti critici degeneri sono isolati (basta prendere un'applicazione costante), ed esistono anche funzioni che ammettono successioni di punti critici non degeneri che tendono ad un punto critico (necessariamente degenero): un esempio è dato da  $x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in C^2(\mathbb{R})$  (estesa con 0 in 0).

## 2 Esistenza di funzioni di Morse

In questa sezione dimostriamo dei risultati sull'esistenza e l'abbondanza (in un senso che verrà specificato) di funzioni di Morse definite su varietà compatte, e vediamo come queste possono essere prese in modo che soddisfino ulteriori proprietà che risulteranno utili. Questi risultati, anche se non indispensabili allo sviluppo principale della Teoria di Morse che tratteremo in seguito, hanno l'importanza di conferirne generalità. Per una trattazione dell'esistenza delle funzioni di Morse che si estende al caso di varietà non necessariamente compatte si veda [1, p.32]: l'idea principale consiste nel prendere un embedding della varietà  $M$  in  $\mathbb{R}^m$  per qualche  $m$  e di definire la funzione di Morse globalmente in termini delle  $m$  coordinate euclidee. Qui seguiamo un approccio più elementare, il cui primo passo consiste nel dimostrare l'esistenza di funzioni di Morse definite su aperti euclidei. Iniziamo enunciando, senza dimostrare, un noto teorema di teoria della misura che risulterà indispensabile (per la dimostrazione si veda [2, p.79]).

**Teorema 2.1** (Sard). *Sia  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione differenziabile. Allora l'insieme dei valori critici di  $F$  ha misura di Lebesgue nulla in  $\mathbb{R}^m$ .*

E' facile estendere il teorema al caso di mappe tra varietà differenziabili, ma nella proposizione seguente verrà usato solo nella formulazione riportata sopra.

**Proposizione 2.2.** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile (dove  $A$  ed  $\mathbb{R}$  sono intese dotate delle loro strutture differenziabili standard). Allora per quasi ogni  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , e quindi in particolare per  $\mathbf{a}$  di norma piccola a piacere, la funzione*

$$f_{\mathbf{a}}: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

è una funzione di Morse.

*Dimostrazione.* Definiamo una mappa

$$F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \nabla f(\mathbf{x})$$

Chiaramente  $F$  è differenziabile e la sua matrice jacobiana non è altro che l' Hessiana di  $f$ . Sappiamo per 2.1 che l'insieme degli  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  che non sono valori

critici di  $F$  (che comprende tutti gli  $\mathbf{a} \notin F(A)$ ) ha misura di Lebesgue nulla in  $\mathbb{R}^n$ . Prendiamo un tale  $\mathbf{a}$  e sia  $\mathbf{x}$  un punto critico di  $f_{\mathbf{a}}$ . Allora

$$\mathbf{0} = \nabla f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) - \mathbf{a} = F(\mathbf{x}) - \mathbf{a}$$

e quindi  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ , ovvero  $\mathbf{x}$  non è punto critico di  $F$  da cui segue che

$$Hf_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = Hf(\mathbf{x}) = JF(\mathbf{x})$$

ha rango massimo, ovvero  $\mathbf{x}$  è un punto critico non degenere di  $f_{\mathbf{a}}$ . Questo conclude la dimostrazione. ■

*Osservazione 2.3.* L'idea di questa dimostrazione si può adattare al caso di una generica varietà differenziabile  $M$ , definendo  $F$  come una mappa nel fibrato cotangente  $T^*(M)$  che mappa  $p \mapsto f_{*p}$  (di veda [2, p.87], che comunque tratta solo il caso compatto). Noi seguiamo un approccio più elementare, ma ugualmente efficace.

Ricordiamo che, se  $M$  è compatta, lo spazio delle funzioni differenziabili  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , che indichiamo con  $C^\infty(M)$  è dotato della norma del sup  $\|f\| = \sup_M |f|$  che induce una struttura di spazio metrico su  $C^\infty(M)$ . Vediamo ora il risultato principale di questa sezione.

**Teorema 2.4** (Esistenza e densità di funzioni di Morse). *Sia  $M$  una varietà differenziabile. Allora l'insieme delle funzioni di Morse è denso in  $C^\infty(M)$  rispetto alla norma del sup (in particolare esistono funzioni di Morse definite su  $M$ ).*

*Dimostrazione.* Come anticipato, dimostriamo il teorema solo nel caso in cui  $M$  sia compatta. Sia  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile che vogliamo approssimare con una funzione di Morse nella norma del sup per meno di un arbitrario  $\varepsilon > 0$ .

Scegliamo un ricoprimento  $\mathcal{U}$  di  $M$  che sia finito e costituito da aperti omeomorfi ad aperti euclidei (tale ricoprimento esiste per la compattezza di  $M$  e per il fatto che è una varietà). Prendiamo ora un ricoprimento compatto  $\mathcal{K}$  della stessa cardinalità di  $\mathcal{U}$ , gli interni dei cui insiemi formano ancora un ricoprimento, e con la proprietà che, detti

$$\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}, \quad \mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$$

si abbia  $K_i \subseteq U_i$  per ogni  $i$ . Per ottenere tutto ciò, consideriamo la famiglia di tutte le immagini omeomorfe di dischi chiusi contenuti in qualche  $U_i$ . È facile vedere che la famiglia di tutte le immagini (omeomorfe) degli interni di suddetti dischi costituiscono un ricoprimento di  $M$ , da cui ne possiamo estrarre uno finito. Chiamiamo  $\mathcal{K}$  il ricoprimento compatto formato dalle immagini delle chiusure dei dischi aperti le cui immagini appartengono al ricoprimento finito appena estratto. È chiaro che questo è un ricoprimento e, a meno di raggruppare i  $K_i$  che sono contenuti nello stesso  $U_j$  (i.e. considerare le loro unioni, che sono compatte perché unioni finite di compatti nello spazio di Hausdorff  $M$ ), e a

meno di eliminare gli  $U_j$  ridondanti (quelli che non contengono alcun  $K_i$ , che possono essere trascurati senza “scoprire”  $M$ , dato che  $\mathcal{K}$  è un ricoprimento più fine di  $\mathcal{U}$ ), otteniamo i ricoprimenti con le proprietà desiderate. Osserviamo, inoltre, che a meno di comporre con un omeomorfismo  $\mathbb{R}^n \rightarrow B^n$ , possiamo supporre tutte le copie omeomorfe degli  $U_i$  in  $\mathbb{R}^n$  limitate.

Prendiamo ora intorni aperti  $V_i$  dei  $K_i$  tali che  $\overline{V_i} \subseteq U_i$ . Per fare questo basta osservare che, detto  $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'omeomorfismo, la distanza tra  $\phi_i(K_i)$  e  $\partial(\phi_i(U_i))$  è positiva (perché la funzione  $\mathbf{x} \mapsto \text{dist}(\mathbf{x}, \partial(\phi_i(U_i)))$  definita sul compatto  $\phi_i(K_i)$  ammette minimo  $D$ , che non è nullo perché  $\phi_i(U_i)$  non contiene alcun punto del proprio bordo). Per ogni  $\mathbf{x} \in \partial\phi_i(K_i)$  prendiamo una palla aperta di centro  $\mathbf{x}$  e raggio minore di  $d$  e chiamiamo la loro unione  $E_i$ ,  $V_i = \phi_i^{-1}(\phi_i(K_i) \cup E_i)$  è un intorno di  $K_i$  con la proprietà cercata.

L'idea ora sarà di definire compatibilmente funzioni di Morse sugli  $U_i$ , utilizzando 2.2. E' noto che (si veda [2, p.67]) esistono mappe

$$h_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$$

che valgono 1 su  $K_i$  e 0 fuori da  $V_i$ , e con  $0 \leq h_i \leq 1$  in  $U_i$  per ogni  $i$ . Sia ora  $\tilde{f}_0 = f$  e definiamo induttivamente

$$\tilde{f}_i: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \begin{cases} f_{i-1}(p) - h_i(p) \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(p) & \text{per } p \in U_i \\ f_{i-1}(p) & \text{per } p \in M \setminus U_i \end{cases}$$

dove  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  sarà scelto opportunamente in modo che  $\tilde{f} = \tilde{f}_m$  sia la funzione cercata. E' chiaro che le  $f_i$  sono tutte differenziabili per come sono stati scelti i  $V_i$  e le  $h_i$ , e osserviamo che in  $K_i$

$$\tilde{f}_i \phi_i^{-1} = f_{i-1} \phi_i^{-1} - \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

e quindi per 2.2 possiamo scegliere  $\mathbf{a}$  in modo che ciascun  $\tilde{f}_i$  sia di Morse su ciascun  $\text{int}(K_i)$ . Il problema, tuttavia, è che  $\tilde{f}_j$  potrebbe non più esserlo su  $U_i$  per  $j > i$ . Serve dunque ancora un passo prima di poter concludere.

Un comodo modo alternativo di dire che una mappa  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  è priva di punti critici non degeneri in un sottinsieme  $C$  contenuto in un aperto coordinatizzato da  $\phi$ , ricordando che  $\mathcal{K}$  è un ricoprimento di  $M$ , è imporre che

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial(g\phi^{-1})}{\partial x_j} \right| + |\det(H(f\phi^{-1}))| > 0 \quad \text{in } C \cap K_i \text{ per } i = 1, \dots, m$$

dove stiamo definendo l'hessiana in tutto  $C$ , e ricordando che  $\det(H(\phi^{-1}f))$  è una funzione continua nelle  $\frac{\partial^2(f\phi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}$ . Quindi se le derivate prime e seconde

(rispetto a  $\phi$ ) di una mappa  $\tilde{g}: M \rightarrow \mathbb{R}$  si discostano a due a due da quelle di  $g$  per meno di un certo valore positivo, se  $g$  è di Morse su  $U$  anche  $\tilde{g}$  lo sarà.

Ricordiamo che le  $h_i$  sono nulle fuori dal compatto  $\bar{V}_i$  e che quindi le loro derivate prime e seconde sono limitate, e ricordiamo inoltre che abbiamo preso tutte le  $\phi_i$  a valori in  $B^n$ . E' facile allora vedere dalle espressioni delle differenze tra le derivate prime e seconde delle  $\tilde{f}_i$  consecutive in ciascun  $K_j$ , che esistono opportuni valori di  $\mathbf{a}$  che rendono ciascuna tale differenze, oltre alle differenze tra le  $\tilde{f}_i$  stesse, piccole a piacere in valore assoluto. Dato che tutte le condizioni imposte ad  $\mathbf{a}$  sono in numero finito, esiste un  $\mathbf{a}$  che le soddisfa tutte e che inoltre, per quanto osservato prima, può essere scelto in modo che ciascuna  $\tilde{f}_i$  sia di Morse in  $\text{int}(K_i)$  (poiché quasi ogni  $\mathbf{a}$  all'interno di una pallina di centro  $\mathbf{0}$  è accettabile). Ora è facile vedere per induzione che  $\tilde{f}_i$  è di Morse in  $\bigcup_{j=1}^i \text{int}(K_j)$ : infatti, osservando che il caso base consiste in un'affermazione vacua, preso  $i > 0$  abbiamo per ipotesi induttiva che  $\tilde{f}_{i-1}$  è priva di punti critici non degeneri in  $\bigcup_{j=1}^{i-1} \text{int}(K_j)$  e che quindi, data la scelta di  $\mathbf{a}$ , continua ad esserlo in tale unione e lo è anche in  $\text{int}(K_i)$ . Ma allora  $\tilde{f}$  è di Morse in  $\bigcup_{j=1}^m \text{int}(K_j) = M$ , e quindi abbiamo finito. ■

Vediamo ora che oltre all'esistenza, e addirittura densità delle funzioni di Morse, è possibile fare una ulteriore richiesta che spesso risulta utile (anche se non indispensabile).

**Teorema 2.5** (Spostamento di valori critici). *Le funzioni di Morse definite sulla varietà differenziabile  $M$  che sono "a valori critici distinti", ovvero con la proprietà di essere iniettive ristrette all'insieme dei propri punti critici, sono dense in  $C^\infty(M)$  rispetto alla norma del sup.*

*Dimostrazione.* Anche in questo caso ci restringiamo al caso compatto per la dimostrazione. Prendiamo una funzione di Morse  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  e un  $\varepsilon > 0$ , e dimostriamo che la possiamo approssimare per meno di  $\varepsilon$  con una  $\tilde{f}$  con la proprietà richiesta; dato che le funzioni di Morse sono dense in  $C^\infty(M)$  questo dimostrerò l'asserzione.

Per 1.9 i punti critici di  $f$  sono in numero finito, chiamiamoli  $p = p_1, \dots, p_m$ . Prendiamo due intorni aperti  $V$  e  $\bar{U}$  di  $p$ , omeomorfi tramite  $\phi$  (ed una sua restrizione) ad aperti euclidei, tali che  $\bar{U} \subseteq V$  e che nessun altro punto critico stia in  $V$ . Dato che  $M$  è compatto anche  $\bar{U}$  lo è e, come già visto, possiamo prendere una funzione  $h: M \rightarrow [0, 1]$  che vale 1 in  $\bar{U}$  e 0 fuori da  $V$ . Allora ricordando che il supporto di una funzione è definito come la chiusura dell'insieme dove essa non si annulla, abbiamo che  $K = \text{supp}(h) \cap \text{supp}(1 - h)$  è compatto e non contiene punti critici. Dunque esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che

$$0 < a \leq |\nabla(f\phi^{-1})| < b$$

Allora preso un qualsiasi  $c > 0$  che soddisfi

$$\frac{a}{b} > c \neq |f(p) - f(p_i)| \text{ per } i \neq 1$$

è facile vedere che  $g = f + ch$  è una funzione che ammette il solo punto critico  $p$  nella fibra della sua immagine. Infatti è chiaro che  $f(p)$  non corrisponde a nessun altro valore critico di  $f$ . Dato che  $h$  è costante fuori da  $K$  dobbiamo solo verificare che  $g$  non ammette punti critici in  $K$ , ma in  $K$

$$|\nabla(g\phi^{-1})| \geq |\nabla(f\phi^{-1})| - c|\nabla(h\phi^{-1})| \geq a - cb > 0$$

Ripetendo il procedimento per ogni  $p_i$  per  $i = 1 \dots, m$  otteniamo la funzione  $\tilde{f}$  desiderata.

La dimostrazione dell'enunciato è ora immediata osservando che, a ciascun passo, la quantità  $\sup_M |f - g|$  può essere contenuta arbitrariamente grazie ad una scelta opportuna di  $c$ , e ricordando che la  $\tilde{f}$  si ottiene dopo un numero finito di questi passi. ■

*Osservazione 2.6.* Osserviamo che la  $\tilde{f}$  ottenuta in 2.5 è critica negli stessi punti della  $f$  originaria, e gli indici dei rispettivi punti critici sono uguali.

### 3 Attaccamento di manici e tipo di omotopia

In questa sezione trattiamo i risultati centrali della teoria di Morse. Il cuore di tutta la teoria consiste nell'osservare come cambia il sottolivello  $M_a$  di una funzione di Morse  $f$  definita sulla varietà  $M$  al variare di  $a$ , per estrarre così informazioni topologiche di  $M$  immagazzinate nella  $f$ , o più precisamente nei suoi punti critici. Vedremo che con questa strategia è possibile dare due classificazioni di  $f$ , una del suo tipo di diffeomorfismo e l'altra, forse più importante, del suo tipo di omotopia. La prima verrà data in termini della nozione, che verrà introdotta, di complesso di manici e la seconda sarà portata a termine trovando un CW-complesso con lo stesso tipo di omotopia di  $f$ . La struttura di CW-complesso, che è molto maneggevole in topologia algebrica, potrà poi essere usata, ad esempio per calcolare l'omologia (cellulare) di  $M$ . Per alcune nozioni sui CW-complessi si veda l'appendice B, alla quale riferiremo di nuovo più avanti. Ora ci serve un'altra nozione, quella di gruppo di diffeomorfismi ad un parametro; il lettore estraneo a tale concetto può trovare informazioni nell'appendice A.

Sia  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile (non necessariamente Morse), e supponiamo che l'intervallo  $[a, b]$  non contenga valori critici di  $f$ . Allora  $f$  è una mappa di rango costante = 1 in un intorno di  $f^{-1}[a, b]$  e dunque, posto  $f_a = f^{-1}(a)$  abbiamo che  $f_a$  è una sottovarietà embedded di dimensione  $n - 1$  di  $M$  e  $M_a$  è una sottovarietà embedded con bordo di dimensione  $n$  di  $M$ . La seguente proposizione ci informa che sotto tali ipotesi non ci sono cambiamenti essenziali nei sottolivelli  $M_a$  ed  $M_b$ .



**Proposizione 3.1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Siano  $a < b$  numeri reali tali che  $[a, b]$  non contiene valori critici di  $f$  e tali che  $f^{-1}[a, b]$  ammetta un intorno compatto in  $M$ , allora*

1.  $M_a \cong M_b$
2.  $f^{-1}[a, b] \cong f_a \times I$
3.  $M_a$  è un retratto per deformazione di  $M_b$

*Dimostrazione.* Iniziamo con 1. Per un noto risultato di geometria differenziale,  $M$  ammette una metrica riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (si veda ad esempio [7, p.284]). Sia  $\text{grad}f$  il campo vettoriale associato al campo covettoriale definito dal differenziale  $f_{*p}$  “alzando l’indice” (per dettagli si veda [7, p.282]), caratterizzato cioè dall’uguaglianza

$$\langle \text{grad}f(p), X_p \rangle_p = X_p(f) \quad \text{per } X_p \in T_p(M)$$

E’ facile verificare che  $\text{grad}f(p)$  è il vettore nullo sse  $f_{*p}$  è il covettore nullo, ovvero sse  $p$  è un punto critico. L’idea della dimostrazione consisterà nell’utilizzare le linee integrali di  $\text{grad}f$  come guide per ottenere le corrispondenze (diffeomorfismi/omotopie) desiderate.

Sia  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile che sia uguale a  $\langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle_p^{-1}$  in  $f^{-1}[a, b]$  e nulla fuori da un intorno compatto di tale insieme (l’esistenza della  $g$  è garantita, come prima, da [2, p.67]). Allora, definito il campo vettoriale  $X = g \cdot \text{grad}f$  su  $M$ , A.2 ci garantisce l’esistenza di un (unico) gruppo di diffeomorfismi ad un parametro  $\theta_t(p)$  tale che, per ogni  $p \in M$ , valga il problema ai valori iniziali

$$\frac{d\theta_t(p)}{dt} = X_{\theta_t(p)}$$

dove con  $d\theta_t(p)/dt$  si intende il vettore tangente alla curva  $t \mapsto \theta_t(p)$ . Allora se  $\theta_t(p) \in f^{-1}[a, b]$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d(f\theta_t(p))}{dt} &= \frac{d\theta_t(p)}{dt}(f) \\ &= \langle \text{grad}f(\theta_t(p)), \frac{d\theta_t(p)}{dt} \rangle_{\theta_t(p)} \\ &= \langle \text{grad}f(\theta_t(p)), X_{\theta_t(p)} \rangle_{\theta_t(p)} = 1 \end{aligned}$$

Segue che, per  $f\theta_{t_0}(p), f\theta_t(p) \in [a, b]$

$$f\theta_t(p) = f\theta_{t_0}(p) + t - t_0$$

Dunque, ricordando che  $\theta_0$  è l’identità, si ha, per  $p \in f_b$

$$f\theta_{a-b}(p) = f\theta_0(p) + a - b - 0 = b + a - b = a$$

ovvero il diffeomorfismo  $\theta_{a-b}$  mappa  $f_b$  su  $f_a$ , e quindi anche  $M_b$  su  $M_a$ .

Per dimostrare la 2 definiamo la mappa

$$\begin{aligned} f^{-1}[a, b] &\rightarrow f_a \times [a, b] \\ p &\mapsto (\theta_{a-f(p)}(p), f(p)) \end{aligned}$$

che è facile verificare essere biettiva, differenziabile, e con inversa  $(q, c) \mapsto \theta_{c-a}(q)$  differenziabile. Si conclude immediatamente osservando che  $f_a \times [a, b] \cong f_a$ .

Per provare 3 definiamo

$$\begin{aligned} R: M_b \times [0, 1] &\rightarrow M_b \\ (p, t) &\mapsto \begin{cases} p & \text{per } f(p) \leq a \\ \theta_{t(a-f(p))}(p) & \text{per } a \leq f(p) \leq b \end{cases} \end{aligned}$$

Per il lemma di incollamento  $R$  è continua, e posto  $R(p, t) = r_t(p)$ , è facile vedere che  $r_0$  è l'identità, che  $r_1(M_b) = M_a$ , e che  $r_t|_{M_a}$  è l'identità. Ciò conclude la dimostrazione (si veda [Figura 1](#)). ■

*Osservazione 3.2.* L'ipotesi di compattezza di  $f^{-1}[a, b]$  è stringente. Come controesempio basta considerare ad esempio il toro (vedere [5.4](#)) a cui sia tolto un punto la cui immagine sta in  $[a, b]$ .

Ora ci proponiamo di descrivere il procedimento di attacco di un manico ad una varietà con bordo. A tale scopo ci serve subito la seguente

**Definizione 3.3.** Un manico di dimensione  $n$  e indice  $k$  è la varietà con spigoli di dimensione  $n$  (si veda [\[7, p.363\]](#) per la definizione di varietà con spigoli)

$$H_{nk} = D^k \times D^{n-k}$$

Si dice *core* del manico  $H_{nk}$  il disco  $D^k \times \{\mathbf{0}\} \subseteq H_{nk}$  e *cocore* il disco  $\{\mathbf{0}\} \times D^{n-k} \subseteq H_{nk}$ .

Osserviamo che il bordo di  $H_{nk}$  (come sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  o equivalentemente come varietà con spigoli) è

$$\partial H_{nk} = (\partial D^k \times D^{n-k}) \cup (D^k \times \partial D^{n-k})$$

se  $k \neq 0, n$  e rispettivamente  $\emptyset \cup \partial D^n$ ,  $\partial D^n \cup \emptyset$  e per  $k = 0, n$  (li indichiamo così per un motivo che sarà chiaro tra un attimo).

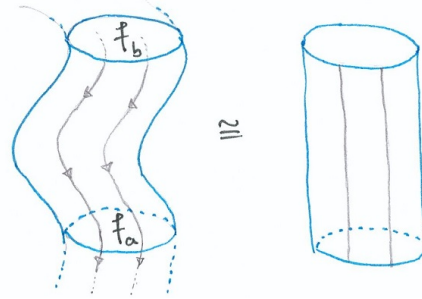


Figura 1

Supponiamo ora di avere una varietà con bordo  $B$  di dimensione  $n$  e una copia  $T$  di  $S^{k-1} \times D^{n-k}$  embedded in  $\partial B$ , e indichiamo con  $S$  la copia embedded di  $S^{k-1} \times \{\mathbf{0}\}$ . Questa costruzione può essere trattata nel caso particolare in cui  $T$  è un intorno tubolare di  $S$  rispetto ad una fissata metrica riemanniana (si veda [3, p.209]), oppure utilizzando il fibrato normale di  $S$  (si veda [4, p.31]). L’attaccamento del manico  $H_{nk}$  avviene identificando la componente del bordo  $\partial D^k \times D^{n-k}$  con  $T$  mediante l’embedding (si veda Figura 2 per qualche esempio), sempre che tale componente non sia vuota: ciò avviene solo nel caso  $k = 0$  e in tal caso l’attaccamento del manico è inteso come unione disgiunta. Tale spazio quoziente eredita una struttura differenziabile che estende quelle di  $B$  e  $H_{nk}$  (si veda [9, p.39] per un risultato più generale); l’unica anomalia che tutto ciò comporta è che non si ottiene, in generale, una varietà con bordo, ma una varietà con spigoli, con “punti spigolosi” in corrispondenza del bordo di  $T$ . Si tratta tuttavia di una patologia facilmente risolvibile “smussando gli spigoli” (per la descrizione completa si veda [4, p.33]), che consiste nel rendere lisci i punti di raccordo tra  $\partial B$  e  $H_{nk}$  senza cambiare le classi di diffeomorfismo delle due varietà (una con bordo, l’altra con spigoli) incollate. Fissiamo un po’ di notazioni nella seguente

**Definizione 3.4.** Se  $\phi$  è l’embedding di  $S^{k-1} \times D^{n-1}$  in  $\partial B$  indichiamo con  $B \vee_{\phi} H_{nk}$  la varietà ottenuta attaccando il manico e smussando gli spigoli. Chiameremo *complesso di manici* la varietà (con o senza bordo)

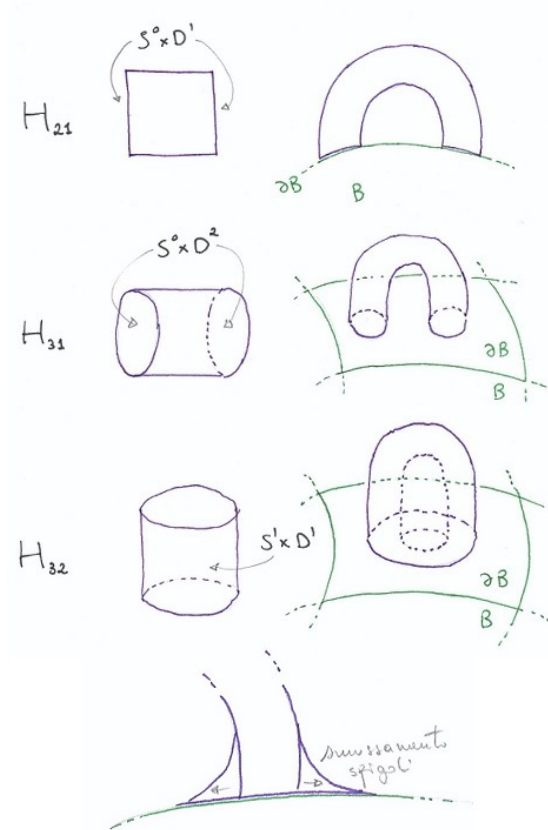
$$\mathcal{H}(n; \phi_1, \dots, \phi_n) = D^n \vee_{\phi_1} H_{nk_1} \vee_{\phi_2} H_{nk_2} \vee \dots \vee_{\phi_m} H_{nk_m}$$

(dove le mappe  $\phi_i$  per  $k_i = 0$  non hanno alcun significato, ma sono lasciate per uniformità di notazione).

*Osservazione 3.5.* Osserviamo che la classe di omeomorfismo di  $B \vee_{\phi} H_{nk}$  dipende, in generale, dalla  $\phi$  e non solo dal  $T \subseteq M$  sul quale viene attaccato il manico: ad esempio possiamo prendere  $B$  uguale ad un quadrato (con gli spigoli smussati, se vogliamo che  $B$  sia una varietà con bordo) e attaccarci sopra il quadrato  $H_{21}$  in modo da ottenere la superficie laterale di un cilindro, oppure “storcendo il manico” per ottenere un nastro di Möbius.

Ora siamo pronti per enunciare un teorema simile a 3.1, riferito però al caso in cui la retroimmagine tramite la funzione  $f$  di un intervallo di numeri reali contiene esattamente un punto critico non degenero; tale risultato mette in diretto collegamento le caratteristiche del punto critico che viene attraversato con il cambiamento della topologia del sottolivello, e si tratta del risultato più importante di questo elaborato. Per dettagli sull’attaccamento di  $k$ -celle e CW-complexi si veda l’appendice B.

Figura 2

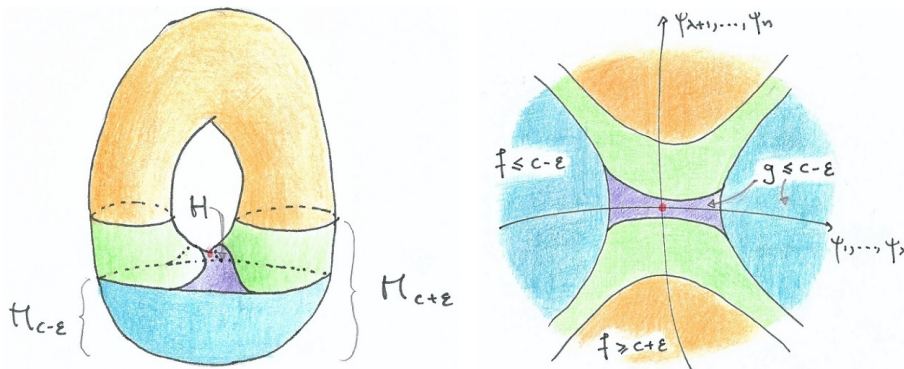


**Teorema 3.6** (Attraversamento di un valore critico). *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile, e  $p$  un punto critico non degenere di  $f$  di indice  $\lambda$ . Supponiamo che esista  $\delta > 0$  tale che, posto  $f(p) = c$ ,  $f^{-1}[c - \delta, c + \delta]$  non contenga altri punti critici oltre a  $p$ , e sia compatto. Allora, per un  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo:*

1. *La varietà con bordo  $M_{c+\varepsilon}$  è diffeomorfa ad una varietà con bordo ottenuta attaccando un manico di dimensione  $n$  e indice  $\lambda$  a  $M_{c-\varepsilon}$ .*
2.  *$M_{c+\varepsilon}$  si retrae per deformazione su uno spazio ottenuto attaccando una  $\lambda$ -cella ad  $M_{c-\varepsilon}$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema nel caso  $\lambda \neq 0, n$  (nel primo caso, corrispondente ad un minimo locale, bisogna dimostrare che  $M_{c+\varepsilon} \cong M_{c-\varepsilon} \amalg D^0$ , osservando per 2. che  $D^0$  è contrattile; nel secondo, corrispondente ad un massimo, la dimostrazione di 1. è simile a quella per  $\lambda \neq 0, n$  e di 2. è immediata, visto che il manico corrisponde alla cella).

Figura 3: A sinistra, il teorema applicato al caso di un punto di sella della funzione di Morse  $S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\theta, \phi) \mapsto (R + r \cos \phi) \cos \theta$ , corrispondente alla coordinata  $z$  dei punti di un embedding del toro in  $\mathbb{R}^3$  messo “in verticale”. A destra gli insiemi di sottolivello visti da sopra, (inteso nel caso generale).



L’idea centrale della dimostrazione sarà di considerare una nuova mappa  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  e di far comparire naturalmente una copia diffeomorfa del manico  $H_{n,\lambda}$ ,  $H$ , dentro  $M_{c+\epsilon}$  come quel sottospazio tale che  $M'_{c-\epsilon} = g^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$  sia dato da  $M_{c-\epsilon} \vee H$ . La prima parte dell’enunciato seguirà trovando un diffeomorfismo  $M'_{c-\epsilon} \cong M_{c+\epsilon}$  e la seconda parte dell’enunciato seguirà dalla prima retraendo  $M'_{c-\epsilon}$  per deformazione su  $M_{c-\epsilon} \cup e^\lambda$  dove la  $\lambda$ -cella chiusa  $e^\lambda$  è la copia del core di  $H_{n,k}$ . In seguito supporremo sempre che  $\lambda \neq 0, n$ , osservando che il caso  $\lambda = 0$  corrisponde ad un minimo (per cui il manico, che non è altro che il disco  $D^n$ , viene “attaccato all’insieme vuoto”), e lasciando al lettore il compito di riadattare la dimostrazione, ridefinendo tutte le quantità in gioco, al caso  $\lambda = n$  (corrispondente ad un massimo).

Dimostriamo 1. Scegliamo una carta locale  $(V, \psi)$ , con  $p \in V$  come in 1.4 e un  $\delta \geq \epsilon > 0$  sufficientemente piccolo affinché la regione  $\{q \in M : \sum_i \psi_i^2(q) \leq 2\epsilon\}$  sia contenuto in  $V$ . Osserviamo che  $f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$  è compatto perché chiuso nel compatto  $f^{-1}[c - \delta, c + \delta]$ . Definiamo ora una funzione differenziabile  $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà:

- $\mu(0) > \epsilon$
- $\mu(r) = 0$  per  $r \geq 2\epsilon$
- $-1 < \mu' \leq 0$  in  $\mathbb{R}$

L’esistenza di tale funzione è garantita dall’esistenza di funzioni continue a supporto compatto, dato che presa una di queste ultime possiamo, dopo facili trasformazioni, ottenere la nostra  $\mu$ . Si noti che dalle proprietà di  $\mu$  segue, per un semplice argomento analitico, anche che  $\mu \geq 0$  in  $\mathbb{R}$ . Definite ora due mappe  $\xi, \eta: V \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo  $\xi = \sum_{i=1}^\lambda \psi_i^2$  e  $\eta = \sum_{i=\lambda+1}^n \psi_i^2$ , definiamo una mappa

$g: M \rightarrow \mathbb{R}$  definita perturbando la  $f$  nelle vicinanze di  $p$ , ponendo cioè

$$g = \begin{cases} f - \mu(\xi + 2\eta) = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta) & \text{in } V \\ f & \text{fuori da } V \end{cases}$$

E' facile vedere che  $g$  è differenziabile, e che  $g = f$  già fuori dalla regione

$$E = \{q \in V : \xi(q) + 2\eta(q) \leq 2\varepsilon\}$$

Ora, posto  $M'_a = g^{-1}(-\infty, a]$  per  $a \in \mathbb{R}$ , proviamo che  $M'_{c+\varepsilon} = M_{c+\varepsilon}$ : si tratta di provare che  $f(q) \leq c + \varepsilon \Leftrightarrow g(q) \leq c + \varepsilon$ , e per quanto appena affermato sarà sufficiente provarlo per  $q \in E$ . Ma  $E$  è conenuto sia in  $M_{c+\varepsilon}$  che in  $M'_{c+\varepsilon}$ , infatti, dentro  $E$

$$g \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon$$

Ora proviamo che i punti critici di  $g$  sono gli stessi di quelli di  $f$ ; chiaramente anche qui è necessario provare l'asserzione solo dentro  $E$ . Possiamo scrivere  $g = \gamma(\xi, \eta)$ , ovvero esprimerla come composizione

$$E \xrightarrow{(\xi, \eta)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}$$

e quindi, per la regola della catena abbiamo

$$g_* = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \xi_* + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \eta_*$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1 \end{aligned}$$

Infine, è immediato dalla definizione di  $\xi$  ed  $\eta$  che  $\xi_*$  e  $\eta_*$  sono i covettori nulli solo in  $p$ ; insieme all'osservazione precedente questo prova che  $g$  ha il solo punto critico  $p$  in  $E$ .

Occupiamoci ora della regione  $M'_{c-\varepsilon}$ : vogliamo provare che essa è diffeomorfa a  $M_{c+\varepsilon}$ . Dato che  $M'_{c+\varepsilon} = M_{c+\varepsilon}$  e che  $g \leq f$ , abbiamo che  $g^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subseteq f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , e che quindi  $g^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  è compatto (perché chiuso in un compatto) e contiene al più il punto critico  $p$ . Ma

$$g(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$$

e dunque  $g^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  è privo di punti critici. Possiamo dunque concludere applicando [3.1](#).

Per completare la dimostrazione di 1. dobbiamo provare che  $M'_{c-\varepsilon}$  può essere ottenuto attaccando un manico di dimensione  $n$  e indice  $\lambda$  a  $M_{c-\varepsilon}$ . Come anticipato, l'idea è di riconoscere il manico all'interno di  $M'_{c-\varepsilon}$  e di dimostrare

che esso è attaccato a  $M_{c-\varepsilon}$  secondo la definizione; dovremo dunque trovare il sottinsieme  $H \subseteq M'_{c-\varepsilon}$  diffeomorfo ad  $H_{n,k}$  (come varietà con spigoli), trovare  $T$  e il diffeomorfismo  $T \cong S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$  e provare che  $T$  è effettivamente identificato a  $\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}$  secondo questa mappa. Tutto ciò proverà che  $M'_{c-\varepsilon}$  è diffeomorfo alla varietà differenziabile astratta ottenuta attaccando il manico  $H_{n,k}$  secondo il diffeomorfismo  $T \cong \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ . Osserviamo anche che  $M'_{c-\varepsilon}$  è una varietà con bordo senza spigoli, cioè che  $H$  è incollato in maniera liscia a  $M_{c-\varepsilon}$ . Definiamo dunque  $H$  come la chiusura dell'insieme

$$H' = \{q \in M : f(q) > c - \varepsilon, g(q) \leq c - \varepsilon\}$$

(Attenzione:  $H$  è diverso dall'insieme di sopra con il  $\geq$  al posto del  $>$ .) E' facile vedere che  $M'_{c-\varepsilon} = M_{c-\varepsilon} \cup H$ . Vogliamo provare che  $H$  è diffeomorfo ad  $H_{n,k}$  e che è attaccato a  $M_{c-\varepsilon}$  come descritto prima. Per la prima verifica osserviamo che  $H'$  è definito dalle disequazioni

$$\begin{cases} -\xi + \eta > -\varepsilon \\ -\xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta) \leq -\varepsilon \end{cases}$$

e di studiamo la chiusura della regione di piano delimitata dalle suddette disequazioni in cui  $\xi$  ed  $\eta$  sono sostituiti dagli assi coordinati di  $\mathbb{R}^2$ ,  $x$  e  $y$  (e aggiungendo quindi la condizione sottintesa  $x, y \geq 0$ ). Poniamo

$$\beta_x(y) = -x + y - \mu(x + 2y) + \varepsilon$$

Sostituendo nella seconda equazione con  $y = 0$  otteniamo  $\mu(x) > \mu(0) - x$  e quindi otteniamo subito  $\beta_x(0) < 0$  per ogni  $x$ . Inoltre  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \beta_x(y) = +\infty$ , da cui segue che l'equazione  $\beta_x(y) = 0$  ammette soluzione per ogni  $x$ , chiamiamola  $s(x)$ . Per il teorema della funzione implicita  $s$  è differenziabile, e differenziando la relazione  $\beta_x(s(x)) = 0$  otteniamo che  $s' = \frac{1+\mu'}{1-2\mu'} \in [0, 1]$ . Dunque  $s$  è una funzione crescente, da cui segue che la regione di piano cercata è una varietà con spigoli diffeomorfa al quadrato  $I^2$  tramite un opportuno diffeomorfismo  $\rho$ . Denotando con  $(\sigma, \tau) = \rho(\xi, \eta)$ , il diffeomorfismo  $\Phi$  di  $H$  su  $H_{n,k}$  è dato da

$$q \mapsto \left( \sigma(q) \frac{(\psi_1, \dots, \psi_\lambda)(q)}{\sqrt{\xi(q)}}, \tau(q) \frac{(\psi_{\lambda+1}, \dots, \psi_n)(q)}{\sqrt{\eta(q)}} \right) \in D^\lambda \times D^{n-\lambda}$$

Vediamo ora che il manico  $H$  è attaccato a  $M_{c-\varepsilon}$  in accordo con la definizione: definiamo

$$T = \{q \in H : f(q) = c - \varepsilon\}$$

Si ha che  $T \subseteq \partial M_{c-\varepsilon} = f_{c-\varepsilon}$  (una  $(n-1)$ -varietà embedded in  $M$  poiché  $c - \varepsilon$  non è un valore critico per cui  $f$  ha rango massimo e quindi costante in un intorno di  $f_{c-\varepsilon}$ ). Ricordando che i punti critici di  $g$  sono gli stessi di quelli di  $f$ , e visto che  $T$  può anche essere descritto come

$$T = \{q \in f_{c-\varepsilon} : g(q) \leq c - \varepsilon\}$$

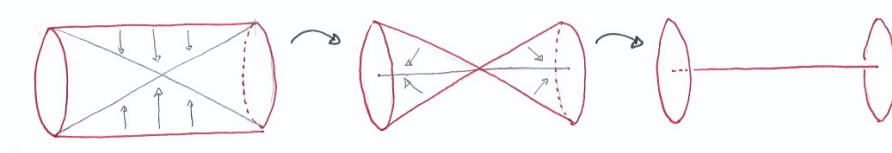
deduciamo che è una  $(n-1)$ -sottovarietà con bordo embedded in  $f_{c-\varepsilon}$ . Dato che il diffeomorfismo  $\Phi$  descritto sopra si restringe a diffeomorfismi tra le componenti non spigolose del bordo, possiamo concludere provando che  $\Phi$  mappa  $T$  su  $\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ . La verifica consiste nell'osservare che  $(\sigma, \tau)$  mappa  $T$  su  $\{1\} \times [0, 1]$ , e che quindi un qualsiasi punto di  $T$  viene mappato su  $\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ . Ma visto che il diffeomorfismo tra varietà con spigoli  $\Phi$  si restringe a dei diffeomorfi tra le componenti prive di spigoli dei bordi, tutto  $T$  viene mappato su  $\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ . Questo conclude la dimostrazione di 1.

Veniamo alla dimostrazione di 2. Come si può intuire, definiamo la  $\lambda$ -cella  $e^\lambda$  proprio come il core di  $H$ , ovvero

$$e^\lambda = \{q \in H : \eta(q) = 0\} = \Phi^{-1}(D^\lambda \times \{\mathbf{0}\})$$

Dato che abbiamo già stabilito che  $M'_{c-\varepsilon}$  è un retratto per deformazione di  $M_{c+\varepsilon}$ , se proviamo che  $M'_{c-\varepsilon}$  si retrae per deformazione su  $M_{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  avremo concluso. E' chiaro che  $e^\lambda$  è retratto per deformazione di  $H$ , ma tale retrazione per deformazione, se definita in tutto  $M'_{c-\varepsilon} = M_{c-\varepsilon} \vee H$  non sarebbe continua nei punti in cui il manico è attaccato a  $M_{c-\varepsilon}$ . L'idea quindi è quella di retrarre  $H$  per deformazione non su  $e^\lambda$  ma su  $e^\lambda \cup T$ ; dal momento che  $T = H \cap M_{c-\varepsilon}$ , ed estendendo la retrazione per deformazione con l'identità in  $M_{c-\varepsilon}$ , avremo concluso. A meno di comporre con  $\Phi^{-1}$  possiamo lavorare con  $H_{n,k}$  invece che direttamente con  $H$ , con lo scopo di retrarre  $H_{n,k}$  per deformazione su  $(\partial D^\lambda \times D^{n-k}) \cup (D^k \times \{\mathbf{0}\})$  (si veda [Figura 4](#) per il caso di  $H_{31}$ , che suggerisce l'idea anche nel caso generale). Questo conclude la dimostrazione di 2. ■

Figura 4



*Osservazione 3.7.* In realtà gli enunciati di [3.1](#) e [3.6](#) si possono modificare nel seguente modo:

1. [3.1](#) continua a valere anche se si suppone che non ci siano valori critici in  $(a, b)$ , ma che  $a$  sia un valore critico non degenere.
2. In [3.6](#) si ha anche che  $M_c$  (che però non è, in generale, una varietà) è ottenuta da  $M_{c-\varepsilon}$  attaccando un manico/una cella (a meno di diffeomorfismi/equivalenze di omotopie).

Vediamo ora un po' di teoria globale. Da [3.6](#) si può dedurre, ragionando per induzione, che se  $f$  è una funzione di Morse (che per semplicità prendiamo a valori critici distinti) sulla varietà compatta  $M$  di dimensione  $n$ , si ha  $M \cong$



$\mathcal{H}(n; -, \theta_2\phi_2, \dots, \theta_m\phi_m)$ , dove  $m$  è il numero di punti critici (necessariamente finito), i  $\theta_i$  sono i diffeomorfismi  $M_{c_i-\varepsilon} \rightarrow M_{c_{i-1}+\varepsilon}$  per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo da poter applicare 3.6 a tutti gli intervalli  $[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$ , e le  $\phi_i$  sono le mappe con cui vengono attaccati i manici  $H_{n\lambda_i}$  ai sottolivelli  $M_{c_i-\varepsilon}$ .

Con ciò abbiamo dato una classificazione del tipo di diffeomorfismo di  $M$  come complesso di manici; risulta tuttavia di maggior interesse studiare un altro tipo di decomposizione di  $M$ , con cui si perdono le proprietà di  $M$  come varietà differenziabile, ma si guadagna in maneggevolezza ai fini dello studio di  $M$  mediante strumenti della topologia algebrica.

**Teorema 3.8** (Classificazione del tipo di omotopia di una varietà differenziabile). *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Morse di esaurimento. Allora  $M$  ha lo stesso tipo di omotopia di un opportuno CW-complesso.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n \dots\}$  l'insieme (privo di punti di accumulazione, per 1.9) dei valori critici di  $f$ , ordinati in maniera crescente, con retroimmagini  $p_i$  di indici  $\lambda_i$ . Prendiamo  $a \notin \mathcal{C}$ , sia  $c_i = c$ ,  $\lambda = \lambda_i$  il più piccolo valore critico maggiore di  $a$  (se esiste), e dimostriamo per induzione su  $i$  che  $M_a$  ha lo stesso tipo di omotopia di un CW-complesso  $Z$  con una cella di indice  $\lambda_j$  per ogni  $j < i$ . Osserviamo che siamo nelle ipotesi di 3.6 ( $f^{-1}[c - \delta, c + \delta]$  è chiuso nel compatto  $M_{c+\delta}$ ) e sia  $\varepsilon > 0$  come nelle ipotesi di 3.6. Per  $i = 1$ ,  $c$  è necessariamente un minimo, dunque  $\lambda = 0$ ,  $M_{c-\varepsilon} = M_a = \emptyset$  e quindi  $M_{c+\varepsilon} \approx e^\lambda$  che è contrattile, il che dimostra il caso base. Se  $i > 1$ ,  $M_a \approx M_{c-\varepsilon}$  per 3.1 e  $M_{c+\varepsilon} \approx M_{c-\varepsilon} \vee_\alpha e^\lambda$  per 3.6, per una qualche applicazione continua  $\alpha$ . Inoltre, per ipotesi induttiva,  $M_a$  è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso  $Z$  con una  $\lambda_j$ -cella per ogni  $j < i$ . Allora, sempre per 3.1  $M_{c-\varepsilon} \approx Z$  e quindi per B.7

$$M_{c+\varepsilon} \approx M_{c-\varepsilon} \vee_\alpha e^\lambda \approx Z \vee_\beta e^\lambda$$

per una applicazione continua  $\beta$ . Ma per B.4  $\beta = \beta_0$  è omotopa ad un'applicazione cellulare  $\beta_1$ , e quindi per B.7 in cui si prende  $f$  l'identità su  $Z$  abbiamo

$$M_{c+\varepsilon} \approx Z \vee_{\beta_0} e^\lambda \approx Z \vee_{\beta_1} e^\lambda$$

che è un CW-complesso, chiamiamolo  $Z'$ , ottenuto attaccando una  $\lambda$ -cella a  $Z$ . Preso,  $a' > c$  tale che  $(c, a')$  non contenga punti critici, non resta che riapplicare 3.1 per ottenere  $M_{a'} \approx M_{c+\varepsilon} \approx Z'$  e il passo induttivo è completato. Questo conclude la dimostrazione nel caso in cui  $f$  ammetta un numero finito di punti critici, cosa che accade in particolare se  $M$  è compatto.

Trattiamo ora il caso in cui  $f$  ammette un numero infinito di punti critici. Fissiamo valori  $a_i \in (c_{i-1}, c_i)$  e chiamando  $g_i$  l'equivalenza di omotopia tra  $M_{a_i}$  e un CW-complesso  $Z_i$ . E' evidente, esaminando tutte le equivalenze per omotopie definite nel passo induttivo, che ciascuna  $g_i$  estende le precedenti,

ovvero abbiamo un diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} M_{a_1} & \subseteq & M_{a_2} & \subseteq & \dots & \subseteq & M_{a_i} & \subseteq & \dots \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & & & \downarrow g_i & & \\ Z_1 & \subseteq & Z_2 & \subseteq & \dots & \subseteq & Z_i & \subseteq & \dots \end{array}$$

Osserviamo che  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{a_n}$  e poniamo  $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$  (che è, per definizione, un CW-complesso, dotato della topologia debole, ovvero quella topologia in cui  $A \subseteq Z$  è aperto sse  $A \cap Z_i$  è aperto in ciascun  $Z_i$ ). Possiamo definire

$$\begin{aligned} g: M &\rightarrow Z \\ q &\mapsto g_i(q) \quad \text{per qualsiasi } i \text{ t.c. } q \in M_{a_i} \end{aligned}$$

Dette  $h_i$  le inverse per omotopia delle  $g_i$ , ovvero che soddisfano  $h_i g_i \approx \mathbb{1}_{M_{a_i}}$  (tramite una certa  $L(q, t) = \ell_i^t(q)$ ) e  $g_i h_i \approx \mathbb{1}_{Z_i}$  (tramite una certa  $K(z, t) = k_i^t(z)$ ), possiamo definire  $h, L$  e  $K$  in maniera analoga a  $g$ . È chiaro che se proviamo che  $g, h, L, K$  sono continue, abbiamo finito, dato che seguirà immediatamente che  $hg \approx \mathbb{1}_M$  tramite  $L$  e  $gh \approx \mathbb{1}_Z$  tramite  $K$ .

Astraiamoci per un attimo dalla situazione, e consideriamo spazi topologici  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$  e  $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$  dove le unioni sono monotone, e dove  $X$  ha una topologia in cui unioni monotone di aperti  $A_i \subseteq X_i$  sono aperti, e  $Y$  ha la topologia debole rispetto agli  $Y_i$ . Siano  $X_i \xrightarrow{\alpha_i} Y_i$  continue e compatibili e proviamo che la mappa limite  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  è continua. Per  $B \subseteq Y$  aperto abbiamo

$$\alpha^{-1}(B) = \alpha^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B \cap Y_i)\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^{-1}(B \cap Y_i)$$

che è un'unione monotona di aperti e quindi aperta. Proviamo anche che se  $Y_i \xrightarrow{\beta_i} X_i$  sono continue e compatibili anche la mappa limite  $\beta$  è continua. Per  $A \subseteq X$  aperto abbiamo

$$\beta^{-1}(A) \cap Y_i = \beta^{-1}(A \cap X_i) = \beta_i^{-1}(A \cap X_i)$$

e dunque  $\beta^{-1}(A)$  è aperto in  $Y$  per definizione di topologia debole.

Ora possiamo concludere la dimostrazione del teorema: basta osservare che un'unione monotona di aperti  $A_i \subseteq M_{a_i}$  è aperta in  $M$  (posto  $A = \bigcup_i A_i$ ,  $\widetilde{M}_{a_i} = f^{-1}(-\infty, a_i)$ ,  $\widetilde{A} = A \cap \widetilde{M}_{a_i}$  abbiamo  $A = \bigcup_i \widetilde{A}$  che è un'unione di aperti in  $M$  e quindi aperta), e che  $Z \times I$  ha la topologia debole rispetto a  $Z_1 \times I \subseteq \dots \subseteq Z_i \times I \subseteq \dots$ . Ciò prova che  $g, h, L, K$  sono continue, e dunque abbiamo finito. ■

## 4 Disuguaglianze di Morse

La descrizione del cambiamento del tipo di omotopia di  $M_a$  in 3.6 è utile per lo studio dell'omologia di  $M$ . Le disuguaglianze di Morse mettono in diretto

collegamente gli indici dei punti critici di una funzione di Morse definita su  $M$  con la sua omologia.

Indichiamo con  $H_k(X)$  il  $k$ -esimo gruppo di omologia singolare a coefficienti in  $\mathbb{Z}$  dello spazio topologico  $X$ , con  $b_k = b_k(X)$  il suo rango, altrimenti detto  $k$ -esimo numero di Betti di  $X$  e con  $\chi(X)$  la caratteristica di Eulero di  $X$ . In modo simile, se  $Y \subseteq X$ , indichiamo con  $H_k(X, Y)$  il  $k$ -esimo gruppo di omologia singolare relativa (a coefficienti interi) e con  $b_k(X, Y)$  il suo rango. Inoltre, data una funzione di Morse  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , chiamiamo  $m_\lambda$  il numero di punti critici di  $f$  di indice  $\lambda$  (che per 3.8 è il numero di celle di dimensione  $\lambda$  nella decomposizione cellulare di  $M$  indotta da  $f$ ), detto  $\lambda$ -esimo *numero di Morse* di  $f$ .

*Osservazione 4.1.* Osserviamo subito che, ragionando con l'omologia cellulare (si veda [6, p.137]), si ha che  $H_k(M) = 0$  per  $k > n$ , visto che le celle nella decomposizione di 3.8 hanno al massimo dimensione  $n$ .

**Definizione 4.2.** Sia  $\sigma$  una funzione a valori interi definita per certe coppie di sottospazi di uno spazio topologico. Diremo che è subadditiva se

$$Z \subseteq Y \subseteq X \Rightarrow \sigma(X, Z) \leq \sigma(Y, Z) + \sigma(X, Y)$$

**Lemma 4.3.** Siano  $X_0 \subseteq \dots \subseteq X_n$  spazi topologici e  $\sigma$  una funzione a valori interi definita su coppie di tali spazi. Allora,  $\forall n$  se  $\sigma$  è subadditiva

$$\sigma(X_n, X_0) \leq \sum_{k=1}^n \sigma(X_k, X_{k-1})$$

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $n$ . Per  $n = 1$  vale banalmente l'uguaglianza e per  $n = 2$  ritroviamo la definizione di subadditività. Il passo induttivo nel caso subadditivo consiste in

$$\begin{aligned} \sigma(X_n, X_0) &\leq \sigma(X_{n-1}, X_0) + \sigma(X_n, X_{n-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(X_i, X_{i-1}) + \sigma(X_n, X_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \sigma(X_i, X_{i-1}) \end{aligned}$$

e per il caso additivo basta sostituire le disuguaglianze con uguaglianze. ■

**Teorema 4.4** (Disuguaglianze di Morse). *Sia  $f$  una funzione di Morse definita sulla varietà differenziabile compatta  $M$ . Allora per ogni  $\lambda \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} b_k \leq \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} m_k$$

*Dimostrazione.* Per 2.4, a meno di piccole perturbazioni e senza alterare i suoi punti critici e i rispettivi indici, possiamo supporre  $f$  a valori critici distinti. Siano  $c_1 < \dots < c_m$  i valori critici di  $f$  e indichiamo con  $\lambda_i$  gli indici dei rispettivi punti critici. Osserviamo che  $(M_{c_i}, M_{c_{i-1}})$  e  $(M_{c_{i-1}} \vee e^{\lambda_i}, M_{c_{i-1}})$  sono coppie di spazi omotopicamente equivalenti (i.e. esiste un'equivalenza di omotopia

tra i primi termini delle coppie che ristretta ai secondi termini rimane una equivalenza di omotopia; nel nostro caso, per 3.7, abbiamo addirittura una retrazione per deformazione di  $M_{c_i}$  su  $M_{c_{i-1}} \vee e^{\lambda_i}$  che si restringe all'identità su  $M_{c_{i-1}}$ : per [6, p.133 es.17] questo implica che le omologie relative delle due coppie sono isomorfe. Da 3.6 segue direttamente che  $(M_{c_i}, M_{c_{i-1}})$  sono “buone coppie” (ovvero  $M_{c_{i-1}}$  è chiuso, e retratto per deformazione di un qualche suo intorno in  $M_{c_i}$ ). Allora per noti risultati di topologia algebrica (si veda [6, p.114,124]) abbiamo

$$\begin{aligned} H_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) &\simeq H_k(M_{c_{i-1}} \vee e^{\lambda_i}, M_{c_{i-1}}) \\ &\simeq \tilde{H}_k\left(\frac{M_{c_{i-1}} \vee e^{\lambda_i}}{M_{c_{i-1}}}\right) \\ &\simeq \tilde{H}_k\left(\frac{D^{\lambda_i}}{\partial D^{\lambda_i}}\right) \\ &\simeq \tilde{H}_k(S^{\lambda_i}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } k = \lambda_i \\ 0 & \text{per } k \neq \lambda_i \end{cases} \end{aligned}$$

e in particolare abbiamo  $b_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) = \delta_{k\lambda_i}$ .

Consideriamo ora una successione esatta lunga di gruppi abeliani  $A_k$ , che si può completare ad un diagramma

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & 0 & & & 0 & & & & & 0 & & & & & & 0 \\ & & & \searrow & & \nearrow & & & & & & \searrow & & & & & & \nearrow \\ & & & & B_k & & & & & & & B_{k-2} & & & & & & 0 \\ & & & \nearrow & \partial_{k+1} & \searrow & \nearrow & \partial_k & \searrow & \nearrow & & & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & A_{k+1} & \longrightarrow & A_k & \longrightarrow & A_{k-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & & \searrow & & & & & & & \\ & & 0 & \nearrow & B_{k+1} & \searrow & 0 & \nearrow & B_{k-1} & \searrow & 0 & \nearrow & B_0 & \searrow & 0 & \nearrow & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

dove  $B_k \simeq \ker(\partial_k) = \text{Im}(\partial_{k+1}) \simeq \text{coker}(\partial_{k+2})$  e le successioni diagonali sono tutte esatte corte. Proviamo che per ogni  $k$  si ha  $\text{rk}(\partial_{k+1}) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{rk}(A_i)$ : ricordando che per successioni esatte corte il rango del gruppo di mezzo è uguale alla somma dei ranghi degli altri due, si ha

$$\begin{aligned} \text{rk}(\partial_{k+1}) &= \text{rk}(B_k) = \text{rk}(A_k) - \text{rk}(B_{k-1}) \\ &= \text{rk}(A_k) - (\text{rk}(A_{k-1}) - \text{rk}(B_{k-2})) \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=2}^k (-1)^{k-i} \text{rk}(A_i) + (-1)^{k-1} (\text{rk}(A_1) - \text{rk}(B_0)) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{rk}(A_i) \end{aligned}$$

Consideriamo la successione esatta lunga della terna di spazi topologici  $Z \subseteq Y \subseteq X$  (per dettagli si veda [6, p.118])

$$\cdots \longrightarrow H_k(Y, Z) \longrightarrow H_k(X, Z) \longrightarrow H_k(X, Y) \longrightarrow H_{k-1}(Y, Z) \longrightarrow \cdots$$

e applicando quanto appena visto alla mappa  $H_{k+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(Y, Z)$  abbiamo che, posto  $\sigma_k(V, W) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} b_i(V, W)$

$$\sigma_k(Y, Z) - \sigma_k(X, Z) + \sigma_k(X, Y) = \text{rk}(\partial) \geq 0$$

ovvero  $\sigma_k$  è subadditiva per ogni  $k$ . Possiamo quindi applicare 4.3 a  $\sigma_\lambda$  per gli spazi  $\emptyset \subseteq M_{c_1} \subseteq \dots \subseteq M_{c_m}$ , ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} b_k &= \sigma_\lambda(M, \emptyset) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sigma_\lambda(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} b_k(M_{c_i}, M_{c_{i-1}}) \\ &= \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} \sum_{i=1}^m \delta_{k\lambda_i} = \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-k} m_k \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*Osservazione 4.5.* Aggiungendo la disuguaglianza di 4.4 per  $\lambda$  a quella per  $\lambda - 1$  otteniamo le *disuguaglianze deboli di Morse*

$$b_\lambda \leq m_\lambda$$

e paragonando 4.4 con  $\lambda$  e  $\lambda + 1$  quando  $\lambda \geq n$  abbiamo

$$\sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda b_\lambda = \chi(M) = \sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda m_\lambda$$

Entrambi possono essere dedotti semplicemente usando 3.8 e l'omologia cellulare, nel primo caso osservando che il rango di  $H_k(M)$  è sicuramente maggiorato dal numero di generatori del  $k$ -esimo gruppo del complesso di catene cellulare, e nel secondo, usando l'equivalenza delle definizioni di caratteristica di Eulero (si veda [6, p.146]).

## 5 Esempi e applicazioni

In questa sezione mostriamo come la teoria delle sezioni precedenti può essere applicata a casi particolari, con vari scopi.

**Esempio 5.1** ( $S^n$ ). Consideriamo la sfera  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  con la sua struttura differenziabile standard e chiamiamo i due "emisferi aperti"  $S_-^n$  e  $S_+^n$ , con  $S_-^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} < 0\}$  e  $S_+^n$  definito in modo simile. Consideriamo le carte

$$\begin{aligned} \phi_\pm : S_\pm^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Queste coprono tutta la sfera tranne l'“equatore”. Consideriamo ora la funzione “altezza al quadrato”

$$f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto x_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Lasciamo come facile verifica al lettore che gli unici punti critici di  $f$  rispetto alle due carte  $(S_-^n, \phi_-)$  e  $(S_+^n, \phi_+)$  (ovvero i punti in cui si annullano i gradienti di  $f\phi_-^{-1}$ ,  $f\phi_+^{-1}$ ) sono il “polo nord” e il “polo sud” (sono il massimo e il minimo di  $f$ ), che questi sono non degeneri, e che la norma dei suddetti gradienti rimane lontana da 0 nei pressi dell'equatore. Quest'ultima osservazione ci permette di dedurre che  $f$  non ammette punti critici neanche sull'equatore (risparmiandoci la fatica di usare carte dalle espressioni più complicate che coprono tutta la sfera, come due sistemi di coordinate sferiche o due proiezioni stereografiche), infatti, se così non fosse, presa una carta  $\psi$  in un intorno di un punto critico  $p$  sull'equatore avremmo l'assurdo

$$|\nabla(f\phi_{\pm}^{-1})| = |\nabla(f\psi^{-1}\psi\phi_{\pm})| = |\nabla(f\psi^{-1})J(\psi\phi_{\pm})| \xrightarrow{q \rightarrow p} 0$$

perché  $\nabla(f\psi^{-1})$  tende al vettore nullo. Dunque abbiamo la conferma, da 3.6, che  $S^n$  è diffeomorfa ad una varietà del tipo  $D^n \vee D^n$ .

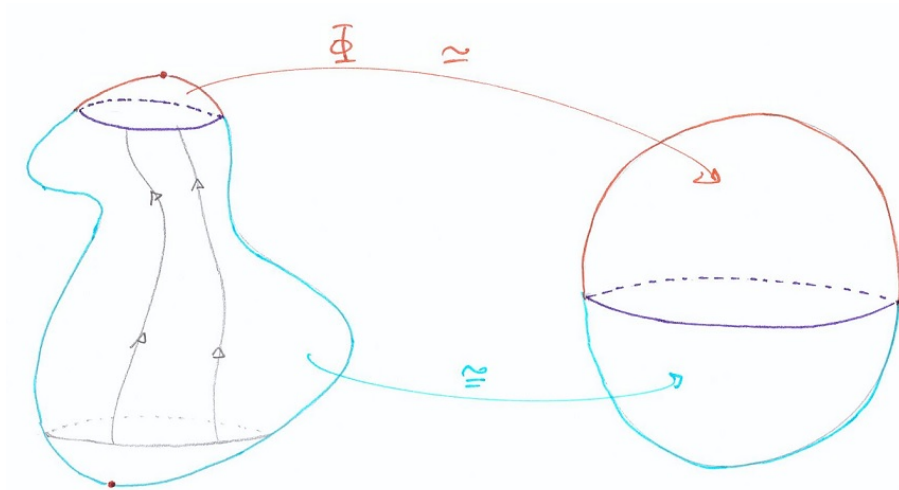
Ciò che è interessante è che, in un certo senso, vale anche il viceversa: il seguente potente risultato di classificazione, dovuto a Reeb, discende immediatamente dal teorema di decomposizione in manici.

**Corollario 5.2** (Reeb). *Sia  $M$  una varietà differenziabile compatta, e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Morse con due punti critici. Allora  $M$  è omeomorfa a  $S^n$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $p$  e  $q$  i punti critici, necessariamente il punto di minimo e di massimo di  $f$ , e dato che  $f$  non è costante (altrimenti non sarebbe Morse) possiamo prendere  $f(p) = a < b = f(q)$ . Allora per 3.1 e 3.6, per un  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo abbiamo  $M_{b-\varepsilon} \cong M_{a+\varepsilon} \cong D^n$  e quindi  $M = M_{b+\varepsilon} \cong D^n \vee_{\phi} D^n$  per qualche embedding  $\phi: \partial D^n \rightarrow \partial D^n$ . E' chiaro che  $\phi$  deve essere suriettiva perché se non lo fosse  $\phi$  si fattorizzerebbe come  $S^n \rightarrow S^n \setminus \{\text{un punto}\} \simeq \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ , e dunque verrebbero indotti omomorfismi sui rispettivi  $n$ -esimi gruppi di omologia ridotta  $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$  che è assurdo, perché  $\phi$  induce isomorfismi sull'omologia, essendo un omeomorfismo. Dunque  $\phi$  è un diffeomorfismo (e in particolare un omeomorfismo)  $\partial D^n \rightarrow \partial D^n$ , che si estende ad un omeomorfismo  $\Phi: D^n \rightarrow D^n$  ponendo  $\Phi(t\mathbf{u}) = t\phi(\mathbf{u})$  per  $\mathbf{u} \in S^{n-1}$ ,  $t \in I$ . Esistono dunque omeomorfismi compatibili di  $M_{b-\varepsilon}$  e  $f^{-1}[b - \varepsilon, b]$  rispettivamente su due emisferi di chiusi di  $S^n$ , e possiamo concludere per il lemma di incollamento (si veda Figura 5). ■

Non è vero, in generale, che una varietà  $M$  con le proprietà del 5.2 debba necessariamente essere diffeomorfa ad  $S^n$ : la struttura differenziabile su  $M \simeq S^n$

Figura 5



potrebbe non essere quella ordinaria, e dipende dal diffeomorfismo  $\phi$ . E' noto che effettivamente esistono, per  $7 \leq n \neq 12$ , strutture differenziabili su  $S^n$  che la rendono una varietà differenziabile non diffeomorfa ad  $S^n$  con il suo atlante usuale: tali varietà furono scoperte per la prima volta da Milnor nel 1956 e vengono dette "sfere esotiche". Per  $6 \geq n \neq 4$  è noto che esiste un'unica struttura differenziabile su  $S^n$  (a meno di diffeomorfismi), e per  $n = 4$  la questione dell'esistenza di strutture esotiche su  $S^n$  è tutt'ora aperta, nota come "Smooth Poincaré Conjecture". Smale ha dimostrato che ogni sfera esotica può essere ottenuta incollando due dischi lungo il loro bordo tramite una mappa che preserva l'orientazione. Per ulteriori dettagli si veda [11] e [5, p.83].

**Proposizione 5.3.** *Siano  $M$  ed  $N$  due varietà differenziabili compatte di dimensioni rispettivamente  $m$  ed  $n$ , ed  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: N \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni di Morse. Allora per  $A > \max_M |f|$  e  $B > \max_N |g|$ , la funzione  $F = (f+A)(g+B)$  definita sulla varietà prodotto  $M \times N$  è Morse. I punti critici di  $F$  sono i punti  $(p, q)$ , con  $p \in M$  punto critico di  $f$  e  $q \in N$  punto critico di  $g$ , e l'indice di un tale punto critico  $(p, q)$  è la somma degli indici di  $p$  e di  $q$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(p, q) \in M \times N$  un punto critico di  $F$ . Prese carte  $\phi$  in un intorno di  $p$  in  $M$  e  $\psi$  in un intorno di  $q$  in  $N$ , consideriamo la carta prodotto  $\theta = (\phi, \psi)$  definita in un intorno di  $(p, q)$  in  $M \times N$ . Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial(F\theta^{-1})}{\partial x_i} = \frac{\partial(F\phi^{-1})}{\partial x_i}(g+B) & \text{per } 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial(F\theta^{-1})}{\partial x_i} = (f+A) \frac{\partial(F\psi^{-1})}{\partial x_i} & \text{per } m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}$$

La prima affermazione segue dal fatto che  $f + A$  e  $g + B$  sono sempre positivi, mentre la seconda si deduce direttamente da 1.4 (e riordinando gli assi). ■

**Esempio 5.4** (Il toro). Vediamo ora l'esempio di gran lunga più trattato nella teoria di Morse: il toro  $T = S^1 \times S^1$ . Ogni punto di  $T$  è univocamente determinato da una coppia di angoli  $(\theta, \phi)$ , che possiamo far variare in tutto  $\mathbb{R}$  in modo che tale parametrizzazione generi, per restrizione ad intorni aperti di ogni punto, un atlante differenziabile su  $T$  (considerando cioè come carte le inverse delle opportune restrizioni della parametrizzazione). Consideriamo ora un embedding del toro in  $\mathbb{R}^3$  che pone il toro “in verticale”, data nelle coordinate  $\theta, \phi$  da

$$\begin{cases} x(\theta, \phi) = (R + r \cos \phi) \sin \theta \\ y(\theta, \phi) = r \sin \phi \\ z(\theta, \phi) = (R + r \cos \phi) \cos \theta \end{cases}$$

con  $R > r$ . Prendiamo, come funzione di Morse definita sul toro la funzione  $z$ , che possiamo pensare definita sul toro originale  $S^1 \times S^1$ . Ricordando che  $R > r$  è facile vedere che  $\nabla z = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sin \theta = 0$  e  $\sin \phi = 0$ . Derivando ancora si ha

$$Hz(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -(R + r \cos \phi) \cos \theta & r \sin \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta & -r \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

da cui è facile controllare che, sostituendo i punti critici (elencati per immagini di  $z$  crescenti, e restringendoci a  $[0, 2\pi)$ )  $(\pi, 0), (\pi, \pi), (0, \pi), (0, 0)$ , i loro indici sono rispettivamente 0, 1, 1, 2. Dunque il  $T$  ammette una decomposizione in manici del tipo  $H_{20} \vee H_{21} \vee H_{21} \vee H_{22}$  e una decomposizione in celle del tipo  $e^0 \vee e^1 \vee e^1 \vee e^2$ .

**Esempio 5.5** ( $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ). Consideriamo lo spazio proiettivo complesso  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} / \sim$ , dove  $\sim$  è la relazione di appartenenza ad uno stesso sottospazio vettoriale di dimensione 1 (su  $\mathbb{C}$ ). Possiamo descrivere alternativamente  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  come quoziente di  $S_{\mathbb{C}}^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_j |z_j|^2 = 1\}$ , dove l'equivalenza si riduce all'identificazione di tutti i multipli di un vettore  $\mathbf{z}$  per numeri complessi di norma 1. Sia ora, per  $k = 1, \dots, n+1$ ,  $\tilde{U}_k = \{\mathbf{z} \in S_{\mathbb{C}}^{2n+1} : z_k \neq 0\}$  (è unioni di  $\sim$ -classi) e poniamo, per  $\mathbf{z} \in U_k$  e  $j \neq k$

$$|z_k| \frac{z_j}{z_k} = x_j + iy_j$$

e definiamo

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_k : \tilde{U}_k &\rightarrow B^{2n} \\ \mathbf{z} &\mapsto (x_1, y_1, \dots, \hat{x}_k, \hat{y}_k, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \end{aligned}$$

Queste mappe passano al quoziente in quanto l'equivalenza  $\mathbf{z} \sim_{\phi} \mathbf{w} \Leftrightarrow \tilde{\phi}_k(\mathbf{z}) = \tilde{\phi}_k(\mathbf{w})$  è la stessa di  $\sim$  ristretta a  $\tilde{U}_k$ : è facile vedere che  $\sim$  è più fine di  $\sim_{\phi}$ ; per il viceversa si provi prima che i  $w_j$  con  $j \neq k$  sono multipli dei relativi  $z_j$  mediante uno stesso numero complesso di norma unitaria, che anche  $w_k$  è multiplo di  $z_k$



mediante un tale numero complesso, e che i due numeri sono uguali. Detti  $U_k = \pi(\tilde{U}_k)$  (dove  $\pi$  è la proiezione sul quoziente), i passaggi delle  $\tilde{\phi}_k$  a  $U_k$  (chiamiamole  $\phi_k$ ) sono omeomorfismi sull'immagine perché continue, biettive ed aperte, e dato che gli  $U_k$  ricoprono  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  (perché i  $\tilde{U}_k$  ricoprono  $S_{\mathbb{C}}^{2n+1}$ ) le carte  $(U_k, \phi_k)$  definiscono un  $(2n)$ -atlante differenziabile (reale) su  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_k & \xrightarrow{\tilde{\phi}_k} & B^{2n} \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi & \\ U_k & & \end{array}$$

Consideriamo ora la funzione

$$f: \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[z_1, \dots, z_{n+1}] \sim \mapsto \sum_{j=1}^{n+1} j|z_j|^2$$

che è facile verificare esser ben definita sulle classi. Esprimendo  $f$  nelle coordinate sopra definite abbiamo, tenendo conto che  $|z_j| = x_j^2 + y_j^2$  per  $j \neq k$  e che  $|z_k|^2 = 1 - \sum_{j \neq k} |z_j|^2$

$$\begin{aligned} f\phi_k^{-1}(x_1, y_1, \dots, \hat{x}_k, \hat{y}_k, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} j(x_j^2 + y_j^2) + k \left( 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (x_j^2 + y_j^2) \right) \\ &= k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (j - k)(x_j^2 + y_j^2) \end{aligned}$$

da cui è facile vedere che  $f$  ha un punto critico, quello con coordinate nulle in  $\mathbb{R}^{2n}$ , in ogni aperto  $U_k$ . Detti  $p_k$  tali punti critici si ha che ogni vettore in  $\pi^{-1}(p_k)$  ha  $n$  componenti nulle (tutte tranne la  $k$ -esima) e dunque è immediato che i  $p_k$  sono distinti. Dunque  $f$  ammette esattamente  $k$  punti critici, e derivando ancora si verifica che  $H(f\phi_k^{-1})$  è una matrice diagonale con il coefficiente di posto  $x_j$  uguale a quello di posto  $y_j$  uguale a  $j - k$  (per  $j = 1, \dots, \hat{k}, \dots, n+1$ ). Segue che  $f$  è Morse e che l'indice di  $p_k$  è  $2(k - 1)$ , e quindi per 3.8  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso con una cella per ogni  $k = 0, 2, \dots, 2n$ , e il fatto che non ci siano celle in dimensioni consecutive ha come conseguenza che le mappe bordo ne complesso di catene degli  $H_k(X_k, X_{k-1})$  (quello che dà luogo all'omologia cellulare) sono tutte mappe nulle. Risulta quindi agevole calcolare l'omologia del proiettivo complesso, e si ha

$$H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } k = 0, 2, \dots, 2n \\ 0 & \text{per altri valori di } k \end{cases}$$

*Osservazione 5.6.* Non sempre il calcolo dell'omologia risulta così agevole, e in generale è necessaria anche la conoscenza delle mappe bordo del complesso di catene cellulare. Mentre 3.8 ci dice qual'è il numero di celle di ciascuna dimensione, in una decomposizione cellulare di  $M$ , non è evidente come si possano ricavare le mappe bordo direttamente dalla  $f$ . Si veda a questo proposito una mia domanda su Mathoverflow [14] (a cui però non ho ricevuto risposte nei termini in cui avevo posto la domanda). Dunque, purtroppo, bisogna sottolineare che una delle mancanze della teoria di Morse (nella sua formulazione classica) è quella di non fornire un metodo generale per calcolare l'omologia di una varietà differenziabile dotata di funzione di Morse. Ci sono però delle teorie più moderne orientate al calcolo diretto dell'omologia a partire dalle linee integrali, si veda [13].

**Esempio 5.7** (Prodotti di sfere). Consideriamo la varietà differenziabile compatta  $M = S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$ , dove prendiamo  $n_1 \leq \dots \leq n_k$ . Da 5.3 e 5.1 segue subito che esiste una funzione di Morse con  $2^k$  punti critici  $p_j$ , parametrizzati dai  $J \subseteq \{1, \dots, k\}$ , e detti  $\lambda_J$  i rispettivi indici si ha  $\lambda_J = \sum_{j \in J} n_j$ . Anche in questo caso, se i  $\lambda_J$  non assumono valori consecutivi risulta agevole il calcolo dell'omologia di  $M$ ; questo accade ad esempio per  $k = 2$  e  $n_2 > n_1$  e per  $k$  generico e  $1 \neq n_1 = \dots = n_k$ .

Vediamo ora un paio di esempi che illustrano chiaramente come la collocazione dei punti critici di  $f$  dipende dalla topologia di  $M$ .

**Esempio 5.8.** Se  $f$  è una funzione di Morse definita su  $S^n$ , si ha  $\sum_{\lambda=0}^n m_\lambda = \chi(S^n)$ , che è 2 per  $n$  pari e 0 per  $n$  dispari. In particolare, per  $n = 1$ , il numero di punti di minimo locale deve essere uguale al numero di punti di massimo locale (si veda Figura 6).

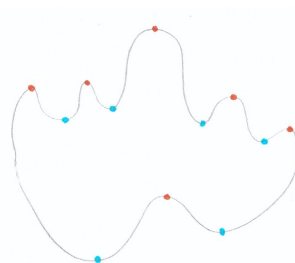


Figura 6

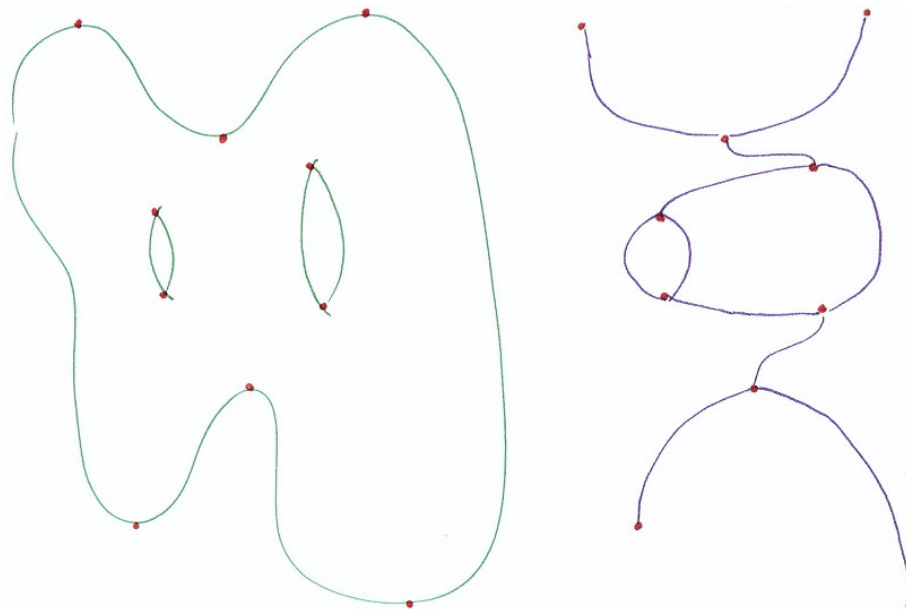
Se  $f$  è una funzione di Morse definita sul toro  $T = S^1 \times S^1$ , la somma a segni alterni dei suoi numeri di Morse deve essere pari a  $\chi(T) = 0$ , quindi il numero di selle deve essere uguale al numero di estremi relativi. Per compattezza di  $T$ ,  $f$  ammette massimo e un minimo, dunque ha almeno 2 selle e quindi almeno 4 punti critici. Più in generale, se  $f$  è definita sul  $g$ -toro, di caratteristica di Eulero  $2 - 2g$ , ammette almeno  $2g$  selle e almeno  $2 + 2g$  punti critici.

**Applicazione 5.9** (Grafici di Reeb). Concludiamo con un'applicazione, sempre di natura teorica, della teoria di Morse. Il concetto di grafo di Reeb trova applicazioni nell'imaging biomedico e in altri settori della computer grafica. Data una varietà differenziabile compatta  $M$  dotata di una funzione di Morse  $f$  con la proprietà di 2.5 si definisce il grafo di Reeb  $R(f)$  come lo spazio ottenuto da  $M$  identificando ad un punto componenti connesse di ciascun insieme di livello di  $f$ ,  $f_a$ .  $R(f)$  è uno strumento utile per studiare, in dimensioni basse, l'evolversi di  $f_a$ .  $R(f)$  è effettivamente un grafo (nel senso di CW-complesso unidimensionale), con un vertice per ciascun punto critico, e i cui archi corrispondono

a porzioni “verticali” di  $M$  prive di punti critici. Quando, salendo di livello, due componenti connesse del livello di  $f$  si fondono in una (e ciò avviene in corrispondenza di punti critici), i relativi lati si uniscono, e viceversa quando un livello si sconnette due lati si separano. Riportiamo in seguito qualche fatto sui grafi di Reeb, rimandando a [10, p.140] per i dettagli.

- Il grado di un vertice corrispondente ad un punto critico di indice  $\lambda$  è 1 se  $\lambda = 0, n$ ; 3 se  $\lambda = 1, n - 1$  e 2 altrimenti: il numero di componenti connesse del livello di  $f$  rimane cioè invariato attraversando un punto critico di indice  $1 < \lambda < n - 1$ .
- L'informazione contenuta in  $R(f)$  riflette la connettività 0 e (in parte) 1-dimensionale di  $M$ . La proiezione quoziente di  $M$  su  $R(f)$  definisce una biiezione tra le componenti connesse di entrambi gli spazi, e un ciclo (in termini omologici, o alternativamente un laccio in termini di gruppo fondamentale) è l'immagine di un ciclo in  $M$ , dunque si ha  $b_0(M) = b_0(R(f))$  e  $b_1(M) \leq b_1(R(f))$ . Quozientando però si perde tutto in dimensioni superiori (essendo  $R(f)$  un CW-complesso unidimensionale, con gruppi di omologia banali in dimensioni  $\geq 2$ ).
- (*Loop lemma*) Se  $M$  è una superficie compatta di genere  $g$ ,  $R(f)$  ha  $g$  cicli se  $M$  è orientabile e al più  $\frac{g}{2}$  cicli se non lo è.

Figura 7



# Appendice

## A Gruppi di diffeomorfismi ad un parametro

In questo paragrafo trattiamo qualche nozione di base riguardante equazioni differenziali definite su varietà differenziabili e l'esistenza globale delle loro soluzioni, argomenti che tratteremo utilizzando il concetto di gruppo di diffeomorfismi ad un parametro.

**Definizione A.1.** Un gruppo di differomorfismi ad un parametro su una varietà differenziabile  $M$  è una funzione differenziabile

$$\Theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \quad (1)$$

$$(t, p) \mapsto \theta_t(p) \quad (2)$$

con le seguenti due proprietà:

1. per ogni  $t \in \mathbb{R}$  la mappa  $\theta_t: M \rightarrow M$  è un diffeomorfismo
2. per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$  si ha  $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$

Osserviamo, in particolare, che ciò implica che  $\theta_0 = \iota_M$  l'identità (dato che le  $\theta_t$  sono biettive si ha  $\theta_t = \theta_{t+0} = \theta_t \circ \theta_0$  e quindi  $\theta_0 = \theta_t^{-1} \circ \theta_t$ ) e che quindi  $\theta_{-t} = \theta_t^{-1}$ .

Il collegamento con le equazioni differenziali sta nel fatto che, dato un gruppo ad un parametro  $\Theta$ , possiamo definire un campo vettoriale  $X$  ponendo

$$X_p = \frac{d\theta_t(p)}{dt} \quad (3)$$

dove col secondo membro si intende il vettore tangente alla curva  $\theta_t(p)$  in  $t$  (intesa ovviamente come derivazione). Si ha che  $\theta_t(p)$  è la soluzione (unica) del problema di Cauchy (nella curva incognita  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ )

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = X_{\alpha(t)} \\ \alpha(0) = p \end{cases} \quad (4)$$

Ribaltando il discorso, ci si può chiedere se un campo vettoriale differenziabile, abbinato ad una condizione iniziale, ammetta un integrale globale, e che quindi dia luogo ad un gruppo ad un parametro  $\theta_t$  (dove  $\theta_t(p)$  è l'unica soluzione  $\alpha$  dell'equazione differenziale con condizione iniziale  $\alpha(0) = p$ ). E' noto che le soluzioni esistono localmente, e che esse dipendono in modo differenziabile dalla condizione iniziale (si veda ad esempio [7, p.442]). Per quanto riguarda l'esistenza globale di gruppi ad un parametro (e quindi di soluzioni), enunciamo il seguente risultato.

**Teorema A.2.** Un campo vettoriale differenziabile che si annulla fuori da un insieme compatto  $K \subseteq M$  dà luogo, come descritto sopra, ad un unico gruppo di diffeomorfismi ad un parametro.

Omettiamo la dimostrazione, che può essere trovata su [1, p.10], e ci limitiamo ad un paio di osservazioni. Notiamo che il lemma si applica nel caso particolare in cui la varietà è compatta, nel qual caso l'unica richiesta sul campo vettoriale e quella di regolarità. In secondo luogo osserviamo che l'ipotesi di compattezza del supporto del campo vettoriale è stringente: ad esempio il campo vettoriale  $\frac{d}{dt}$  definito sulla varietà  $(0, 1)$  non genera nessun gruppo ad un parametro (per accorgersene basta prendere in considerazione il problema di Cauchy con condizione iniziale  $0 \mapsto 0$  e vedere che la soluzione è l'applicazione identica di  $(0, 1)$ , definita cioè non in tutto  $\mathbb{R}$ ). Il motivo per cui campi vettoriali definiti su varietà non compatte non sempre ammettono soluzioni, è che queste potrebbero scontrarsi col bordo e non poter essere prolungate. Questo non può succedere, però, se le soluzioni sono contenute in un insieme compatto di una varietà differenziabile (senza bordo), e in particolare nel caso che la varietà stessa sia compatta.

## B CW-complessi e approssimazione cellulare

I CW-complessi sono un tipo di spazio topologico concepito da J. H. C. Whitehead per trattare la sua teoria dell'omotopia. E' una classe di spazi abbastanza ampia e molti degli spazi topologici notevoli ammettono una descrizione come CW-complessi, e mantengono una certa natura combinatorica che li rende maneggevoli. In questo paragrafo daremo la definizione di CW-complesso e tratteremo alcuni aspetti che servono nella teoria di Morse. Per una trattazione più approfondita (e per una spiegazione delle lettere CW) si veda [6, p.519]. In questo paragrafo (e solo in questo paragrafo) il termine "mappa" verrà usato per indicare un'applicazione continua (non necessariamente differenziabile).

**Definizione B.1** (Attaccare una  $k$ -cella). Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\phi: \partial D^k \rightarrow X$  un'applicazione continua. E' naturalmente definita, sull'unione disgiunta  $X \amalg D^k$ , l'equivalenza  $\sim_\phi$  che identifica punti di  $\partial D^k$  con la loro immagine in  $X$ . Definiamo dunque lo spazio,  $X \vee_\phi e^k$ , ottenuto attaccando ad  $X$  una  $k$ -cella tramite  $\phi$  ponendo

$$X \vee_\phi e^k = \frac{X \amalg D^k}{\sim_\phi} \quad (5)$$

dove intendiamo lo spazio  $X \amalg D^k$  dotato di una topologia ben precisa, la topologia dell'unione disgiunta, ovvero la più fine che rende le iniezioni canoniche di  $X$  e  $D^k$  in  $X \amalg D^k$  continue (per dettagli si veda [12]).

**Definizione B.2** (CW-complesso). Un CW-complesso è uno spazio topologico definito induttivamente nel seguente modo:

- Partiamo da uno spazio discreto  $X_0$ , detto 0-scheletro, i cui punti possono essere pensati come 0-celle.
- Attacciamo  $k$ -celle  $e_\alpha^k$ , con  $\alpha$  che varia in un insieme di indici di cardinalità arbitraria, all' $(n-1)$ -scheletro  $X_{n-1}$  definito induttivamente, mediante opportune mappe  $\phi_\alpha^k$ .

Se questo processo termina dopo un numero finito di passi  $X = X_n$  si dirà un CW-complesso ed  $n$  la sua dimensione ( $\dim(X)$ ), se invece il processo continua indefinitamente e  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  si dirà un CW-complesso di dimensione infinita. In questo caso dobbiamo specificare quale sia la topologia su  $X$ : essa è la topologia debole, ovvero un insieme  $A \subseteq X$  è aperto se e solo se  $A \cap X_n$  è aperto in  $X_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definizione B.3** (Mappa cellulare). *Siano  $X$  e  $Y$  CW-completti. Una mappa  $f: X \rightarrow Y$  una mappa si dice cellulare se  $f(X_k) \subseteq Y_k$  per ogni  $k \leq \dim(X)$  (ovvero  $\forall k \in \mathbb{N}$ ), dove intendiamo la condizione banalmente soddisfatta per  $k \geq \dim(Y)$ .*

Le mappe cellulari sono oggetti centrali nello studio dei CW-completti. Ad esempio le stesse mappe utilizzate per attaccare celle nella definizione di CW-complesso, viste come mappe tra CW-completti, sono cellulari. Enunciamo in seguito il risultato fondamentale riguardante mappe cellulari, rimandando ad [6, p.349], per la dimostrazione.

**Teorema B.4** (Approssimazione cellulare). *Siano  $X$  e  $Y$  CW-completti, e  $f: X \rightarrow Y$  una mappa. Allora  $f$  è omotopa ad una mappa cellulare.*

Vediamo ora un altro paio di risultati sull'attaccamento di mappe a spazi topologici. In quanto segue, con un leggero abuso di notazione, useremo  $X$  anche per indicare le sue copie negli spazi  $X \vee_{\phi_0} e^k$  e  $X \vee_{\phi_1} e^k$ , quando sarà evidente cosa intenderemo.

**Lemma B.5** (Whitehead). *Sia  $X$  uno spazio topologico, e  $\phi_0$  e  $\phi_1$  due mappe  $S^{k-1} \rightarrow X$  tramite un'omotopia  $\phi_t$ . Allora  $\vee_{\phi_0} e^k$  e  $X \vee_{\phi_1} e^k$  sono omotopicamente equivalenti tramite un'equivalenza di omotopia che ristretta a  $X$  è l'identità.*

*Dimostrazione.* Siano  $\iota_0$  e  $\iota_1$  le inclusioni di  $S^{k-1}$  in  $X \vee_{\phi_0} e^k$  e  $X \vee_{\phi_1} e^k$  rispettivamente. Definiamo

$$\kappa: X \vee_{\phi_0} e^k \rightarrow X \vee_{\phi_1} e^k \quad (6)$$

uguale all'identità su  $X$  e poniamo

$$\kappa(\iota_0(t\mathbf{u})) = \begin{cases} \iota_1(2t\mathbf{u}) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \phi_{2-2t}(\mathbf{u}) & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

per  $\mathbf{u} \in S^{k-1}$ . Non ci sono problemi di buona definizione perché  $\iota_0$  è iniettiva. Osserviamo che  $t\mathbf{u}$  assume tutti i possibili punti di  $D^k$ , quindi abbiamo definito  $\kappa$  per tutti i punti di  $X \vee_{\phi_0} e^k$  e dato che è definita compatibilmente sui tre chiusi  $\iota_0(B_{\frac{1}{2}}^k(\mathbf{0}))$ ,  $\iota_0(D^k \setminus B_{\frac{1}{2}}^k(\mathbf{0}))$  e  $X$  ( $X$  e  $e^k$  sono chiusi nel quoziente perché immagini tramite la proiezione sul quoziente di chiusi saturi in  $X \amalg D^k$ ) (questa è una facile verifica), nei quali è continua, essa è continua per il lemma di incollamento.

Osserviamo inoltre che  $\kappa$  è l'identità in  $\phi_0(\partial D^k)$ , quindi è compatibile con la definizione di  $\kappa$  su  $X$ . Definiamo ora

$$\nu: X \vee_{\phi_1} e^k \rightarrow X \vee_{\phi_0} e^k \quad (8)$$

in modo simile, ovvero uguale alla funzione identica su  $X$  e ponendo

$$\nu(\iota_1(\mathbf{t}\mathbf{u})) = \begin{cases} \iota_0(2\mathbf{t}\mathbf{u}) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \phi_{2t-1}(\mathbf{u}) & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

Le verifiche sono analoghe al caso precedente. Proviamo ora che  $\nu\kappa$  è omotopa all'identità su  $X \vee_{\phi_0} e^k$ . Applicando le definizioni date si ha

$$\nu\kappa(\iota_0(\mathbf{t}\mathbf{u})) = \begin{cases} \nu(\iota_1(2\mathbf{t}\mathbf{u})) = \iota_0(4\mathbf{t}\mathbf{u}) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \nu(\iota_1(2\mathbf{t}\mathbf{u})) = \phi_{4t-1}(\mathbf{u}) & \text{per } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \nu(\phi_{2-2t}(\mathbf{u})) = \phi_{2-2t}(\mathbf{u}) & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\nu\kappa(x) = x \quad \text{per } x \in X \quad (11)$$

Definiamo un'omotopia  $\psi_s$  da  $X \vee_{\phi_0} e^k$  in sé stesso ponendo

$$\psi_s(\iota_0(\mathbf{t}\mathbf{u})) = \begin{cases} \iota_0(4\mathbf{t}\mathbf{u}) & \text{per } (t, s) \in [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}] \\ \phi_{(1-2s)(4t-1)}(\mathbf{u}) & \text{per } (t, s) \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \\ \phi_{(1-2s)(2-2t)}(\mathbf{u}) & \text{per } (t, s) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \\ \iota_0(((1 - (2s - 1))4t + (2s - 1)t)\mathbf{u}) & \text{per } (t, s) \in [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{2}, 1] \\ \iota_0((2st - t - 2s + 2)\mathbf{u}) & \text{per } (t, s) \in [\frac{1}{4}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (12)$$

$$\psi_s(x) = x \quad \text{per } x \in X \text{ e } s \in [0, 1] \quad (13)$$

Le verifiche di compatibilità sono facili e lasciate al lettore. Come in precedenza concludiamo che l'applicazione  $(t, y) \mapsto \psi_s(y)$  è continua ed è inoltre facile vedere che  $\psi_0 = \nu\kappa$  e che  $\psi_1$  è l'identità. Una costruzione analoga, e lasciata al lettore, prova che  $\kappa\nu$  è omotopa all'identità su  $X \vee_{\phi_1} e^k$ . Questo conclude la dimostrazione. ■

**Corollario B.6.** *Sia  $Z$  un CW complesso e  $\phi: e^k \rightarrow Z$  una mappa. Allora  $Z \vee_{\phi} e^k$  è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso.*

*Dimostrazione.* Per B.4  $\phi$  è omotopa ad una mappa cellulare  $\psi$ , e per il B.5  $Z \vee_{\phi} e^k \approx Z \vee_{\psi} e^k$  che è un CW-complesso. ■

**Lemma B.7.** *Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici,  $\phi: S^{k-1} \rightarrow X$  una mappa e  $f: X \rightarrow Y$  una equivalenza di omotopia. Allora esiste una equivalenza di omotopia tra  $X \vee_{\phi} e^k$  e  $Y \vee_{f\phi} e^k$  che ristretta a  $X$  è uguale ad  $f$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $\iota_0$  e  $\iota_1$  le inclusioni di  $S^{k-1}$  in  $X \vee_\phi e^k$  e  $Y \vee_{f\phi} e^k$  rispettivamente. Definiamo

$$F: X \vee_\phi e^k \rightarrow Y \vee_{f\phi} e^k \quad (14)$$

$$x \mapsto f(x) \quad \text{per } x \in X \quad (15)$$

$$\iota_0(\mathbf{v}) \mapsto \iota_1(\mathbf{v}) \quad \text{per } \mathbf{v} \in S^{k-1} \quad (16)$$

Sia  $g: X \rightarrow Y$  una inversa per omotopia di  $f$  (i.e.  $fg$  e  $gf$  sono omotope alle rispettive identità) e definiamo

$$G: Y \vee_{f\phi} e^k \rightarrow X \vee_{gf\phi} e^k \quad (17)$$

$$y \mapsto g(y) \quad \text{per } y \in Y \quad (18)$$

$$\iota_1(\mathbf{v}) \mapsto \iota_0(\mathbf{v}) \quad \text{per } \mathbf{v} \in S^{k-1} \quad (19)$$

Dato che  $gf$  è omotopo all'identità (diciamo tramite  $h_t$ ),  $gf\phi$  è omotopo a  $\phi$  (tramite  $h_t\phi$ ) e quindi per il B.5 esiste una equivalenza di omotopia

$$\kappa: X \vee_{gf\phi} e^k \rightarrow X \vee_\phi e^k \quad (20)$$

Proviamo che

$$\kappa GF: X \vee_\phi e^k \rightarrow X \vee_\phi e^k \quad (21)$$

è omotopa all'identità. Utilizzando le definizioni date abbiamo, e la definizione di  $\kappa$  nel B.5, abbiamo

$$\kappa GF(\iota_0(t\mathbf{u})) = \begin{cases} 2\iota'_0(2t\mathbf{u}) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_{2-2t}\phi(\mathbf{u}) & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (22)$$

$$\kappa GF(x) = gf(x) \quad \text{per } x \in X \quad (23)$$

dove  $\mathbf{u} \in S^{k-1}$ , e  $\iota'_0$  indica l'inclusione di  $S^{k-1}$  in  $X \vee_{gf\phi} e^k$ . L'omotopia cercata, che chiamiamo  $\eta_s$ , è data da

$$\eta_s(t\mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{2}{1+s}t\mathbf{u} & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ h_{2-2t+s}\phi(\mathbf{u}) & \text{per } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (24)$$

$$\eta_s(x) = h_s(x) \quad \text{per } x \in X \quad (25)$$

Le solite verifiche sono omesse perché dirette. In particolare ciò prova che  $F$  ha un'inversa sinistra per omotopia ( $\kappa G$ ). Una dimostrazione del tutto analoga (partendo dall'inizio con  $G$  al posto di  $F$ , definendo cioè una  $H: X \vee_{gf\phi} e^k \rightarrow X \vee_{fgf\phi} e^k$  che assume il ruolo di  $G$  e procedendo nello stesso modo) prova che anche  $G$  ha una inversa sinistra per omotopia.

Prima di procedere, astraiamoci un attimo dalla situazione e proviamo la seguente asserzione: se una mappa  $F$  tra spazi topologici ha una inversa sinistra per omotopia  $S$  e una inversa destra per omotopia  $D$  (che però non necessariamente coincidono), allora entrambi  $S$  e  $D$  sono inverse (bilatere) per omotopia



di  $F$ , che quindi è una equivalenza di omotopia. Infatti se  $SF \approx \mathbb{1}$  e  $FD \approx \mathbb{1}$  abbiamo che

$$L \approx S(FD) = (SF)D \approx D \quad (26)$$

e quindi  $DF \approx LF \approx \mathbb{1}$  (e analogamente  $FL \approx \mathbb{1}$ ).

Siamo ora pronti per finire la dimostrazione del lemma. Sappiamo che  $\kappa(GF) \approx \mathbb{1}$  e che  $\kappa$  ha una inversa sinistra per omotopia, quindi per quanto appena visto abbiamo che  $G(F\kappa) = (GF)\kappa \approx \mathbb{1}$ . Ma  $G$  ha una inversa destra per omotopia, e quindi  $F(\kappa G) = (F\kappa)G \approx \mathbb{1}$ ; unitamente al fatto che  $(\kappa G)F \approx \mathbb{1}$  ciò prova che  $F$  è un'equivalenza di omotopia, come volevamo. ■

## Riferimenti bibliografici

- [1] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1963
- [2] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications, Part II*, Springer-Verlag, New York, 1985
- [3] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1990
- [4] L. Nicolaescu, *An Invitation to Morse Theory*, Springer, New York, 2007
- [5] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, AMS, Providence, 2002
- [6] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, New York, 2001, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [7] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, 2003
- [8] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1975
- [9] S. Pigola *Lezioni di topologia differenziale: aspetti introduttivi della teoria di Morse*, Dipartimento di Fisica e Matematica, Università dell'Insubria
- [10] H. Edelsbrunner, J.L. Harer, *Introduction to Smooth Manifolds*, AMS, Providence, 2010
- [11] Wikipedia, Exotic Spheres [http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic\\_sphere](http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_sphere)
- [12] Wikipedia, Disjoint Union Topology [http://en.wikipedia.org/wiki/Disjoint\\_union\\_\(topology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Disjoint_union_(topology))
- [13] Wikipedia, Morse Homology [http://en.wikipedia.org/wiki/Morse\\_homology](http://en.wikipedia.org/wiki/Morse_homology)
- [14] Mathoverflow, una mia domanda <http://mathoverflow.net/questions/122164/a-description-of-cellular-boundary-maps-in-terms-of-a-morse-function>