INDICE

INTRODUZIONE 3

I ALGEBRA DI CLIFFORD E SPINORI 7

1.1 Forme quadratiche 7

1.2 Algebre e rappresentazioni 22

1.3 Algebra tensoriale e Algebra esterna 30

1.4 Pfaffiani 37

1.5 Varietà algebriche proiettive 52

1.6 Algebra di Clifford 55

1.7 Gruppo di Clifford 81

1.8 Rappresentazioni Spin e Spinori 89

1.9 Spinori Puri 93

1.10 Varietà degli Spinori Puri 104

II VARIETÀ SECANTI 109

2.1 Coni, joins e multisecanti 109

2.2 Il problema della difettività 113

2.3 Spazio tangente ad una varietà algebrica proiettiva
e Lemma di Terracini 122

III SECANTI DELLA VARIETÀ DEGLI SPINORI PURI 131

3.1 Algoritmo probabilistico 131

3.2 I casi difettivi 153

3.3 I casi non difettivi 172

3.4 Congetture 176

BIBLIOGRAFIA 177

INTRODUZIONE

Lo scopo di questa tesi è lo studio delle varietà secanti alle varietà spinoriali.

La trattazione è divisa in tre capitoli.

Il primo capitolo è dedicato alla descrizione dell'*algebra di Clifford* e delle *varietà spinoriali*. In questo capitolo abbiamo seguito il libro di Chevalley [3] come riferimento principale. Abbiamo ampliato molti dei suoi argomenti che a volte sono trattati in modo sintetico. In particolare, abbiamo introdotto i concetti fondamentali di geometria spinoriale (algebra di Clifford, gruppo di Clifford, rappresentazioni spin, spinori) e abbiamo costruito la varietà degli spinori puri.

L'algebra di Clifford generata da uno spazio vettoriale complesso $2h$-dimensionale è un'algebra semplice isomorfa, come spazio vettoriale, all'algebra esterna. La rappresentazione spin dell'algebra di Clifford ha come spazio di rappresentazione un ideale sinistro minimale dell'algebra di Clifford: esso può essere identificato con lo spazio degli spinori. Poiché il gruppo di Clifford è contenuto nell'algebra di Clifford, questa rappresentazione induce la rappresentazione spin del gruppo di Clifford.

Gli spinori hanno un ruolo fondamentale nella fisica teorica. La scoperta degli spinori è da attribuire a Cartan, in particolare gli spinori puri rappresentano geometricamente un sottoinsieme degli spinori in corrispondenza uno-a-uno con i sottospazi totalmente isotropi massimali del sottostante spazio vettoriale. Grazie a questa interpretazione si dimostra che l'insieme degli spinori puri è una varietà algebrica proiettiva la cui dimensione complessa è $\dfrac{h(h-1)}{2}$ e su cui agisce in modo transitivo il gruppo ortogonale $O\left(2h\right)$. Tale varietà è parametrizzata dagli Pfaffiani principali di una matrice antisimmetrica di ordine h, quindi è immersa in $\mathbb{P}^{2^{(h-1)}-1}(\mathbb{C})$.

Nella secondo capitolo ci occupiamo delle *multisecanti* ad una varietà algebrica proiettiva qualunque. In questo capitolo abbiamo seguito come riferimento principale il testo [10], che contiene anche numerose applicazioni. Ci è stata utile la partecipazione al corso sull'argomento tenuto da J. Landsberg a Firenze nel giugno 2009.

Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva, allora la k-esima varietà secante di X, $\sigma_k(X)$, è la chiusura dell'unione di tutti gli spazi lineari generati da k punti indipendenti di X. Chiaramente vale la seguente relazione:

$$\dim \sigma_k(X) \leq \min\left\{k\left(\dim X\right) + k - 1, N\right\}.$$

Nel caso in cui valga l'uguaglianza diciamo che $\sigma_k(X)$ ha la *dimensione aspettata*, altrimenti diciamo che X è k-*difettiva*.

Il problema di determinare la dimensione delle multisecanti alle varietà algebriche proiettive classiche ha una storia lunga e interessante: si tratta del cosiddetto *problema della difettività*.

Se $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è una curva che non giace in un iperpiano allora è facile verificare che la dimensione di $\sigma_k(X)$ è la massima possibile. Passando alle superfici la questione assume maggior spessore: nel 1901, infatti, Severi dimostrò che se $X \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ è una superficie non contenuta in un iperpiano allora $\sigma_2(X)$ riempie lo spazio ambiente a meno che X non sia la superficie di Veronese, nel qual caso risulta $\dim \sigma_2(X) = 4$.

Il problema della difettività per le varietà di Grassmann è ancora aperto, [1]: la Grassmanniane delle rette sono tutte difettive e, per $a \geq 2$, si congettura che $\sigma_k(Gr(a,b))$ abbia la dimensione aspettata tranne quando

$$(a,b,k) \in \{(2,6,3),(3,7,3),(3,7,4),(2,8,4)\}.$$

In questo capitolo richiamiamo anche la nozione di spazio tangente ad una varietà algebrica proiettiva e dimostriamo il *Lemma di Terracini*:

se $x_1,...,x_k \in X^*$ *sono punti generali e* $z \in \langle x_1,...,x_k\rangle$ *allora*

$$\widetilde{T}_z\sigma_k(X) = \left\langle \widetilde{T}_{x_1}X,...,\widetilde{T}_{x_k}X \right\rangle.$$

Questo teorema è di fondamentale importanza per lo studio delle secanti: a tal riguardo si vedano il corollario 2.3.2 e il teorema 2.3.3.

Il terzo capitolo contiene risultati originali. In esso trattiamo la questione centrale di questa tesi, affrontando il *problema della difettività per le varietà spinoriali* $PS(V,Q)$. Nella letteratura matematica, in questo ambito, troviamo risolto il caso in cui $k=2$, precisamente $\sigma_2(PS(V,Q))$ ha la dimensione aspettata, [12].

Con l'aiuto del software Macaulay2 abbiamo costruito un *algoritmo di tipo probabilistico* riconducendo lo studio della dimensione di $\sigma_k(PS(V,Q))$ al calcolo del rango di certe matrici. In questo modo, oltre ad ottenere la conferma dei risultati già noti, *abbiamo dimostrato la non difettività* di certe varietà spinoriali, risultati che non erano noti. Sulla base dei dati empirici raccolti, abbiamo ipotizzato la difettività per alcuni casi non noti e *ne abbiamo fornito una prova teorica*, teorema 3.2.3, corollario 3.2.4 e teorema 3.2.5.

Concludiamo con la formulazione di alcune congetture e problemi aperti.

Un ringraziamento particolare al prof. Giorgio Ottaviani, per l'interessante argomento proposto e per il costante impegno con cui ha seguito lo svolgimento di questa tesi.

I ALGEBRA DI CLIFFORD E SPINORI

1.1 Forme quadratiche

In questo paragrafo richiamiamo le definizioni e proprietà principali delle forme quadratiche.

Con $\mathbb{K}$ denotiamo un campo di caratteristica diversa da 2 e con V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Definizione 1.1.1 Una **forma bilineare** su V è un'applicazione

$$B : V \times V \to \mathbb{K}$$

tale che per ogni $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ e per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$ vale

$$\begin{aligned} & B(a_1v_1 + b_1w_1, a_2v_2 + b_2w_2) \\ = \; & a_1a_2B(v_1, v_2) + a_1b_2B(v_1, w_2) + b_1a_2B(w_1, v_2) + b_1b_2B(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Definizione 1.1.2 Una forma bilineare B su V si dice **simmetrica** se per ogni $v, w \in V$ vale

$$B(v, w) = B(w, v).$$

Si dice **antisimmetrica** se per ogni $v, w \in V$ vale

$$B(v, w) = -B(w, v).$$

Definizione 1.1.3 Siano W un sottospazio vettoriale di V e B una forma bilineare simmetrica su V. Si dice **ortogonale** di W e si denota con $W^\perp$ il sottospazio vettoriale di V definito da

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid B(v,w) = 0 \ \forall w \in W\}\,.$$

Osservazione 1.1.1 i) Se W è un sottospazio vettoriale di V allora $W \subset \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$;

ii) Se W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di V allora $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

Definizione 1.1.4 Una forma bilineare simmetrica B su V si dice **non degenere** se $V^{\perp} = \{0\}$, ossia se $B(v,w) = 0$ per ogni $v \in V$ implica $w = 0$ (equivalentemente se $B(v,w) = 0$ per ogni $w \in V$ implica $v = 0$).

Definizione 1.1.5 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ tale che $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ e sia B una forma bilineare simmetrica su V, si dice **rango** di B il numero reale non negativo

$$\dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{V^{\perp}} = n - \dim_{\mathbb{K}} V^{\perp}.$$

Osservazione 1.1.2 Se B è non degenere allora il rango di B è n.

Teorema 1.1.1 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ tale che $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ e sia B una forma bilineare simmetrica su V non degenere. Se W è un sottospazio vettoriale di V tale che $\dim_{\mathbb{K}} W = m$ allora*

$$\dim_{\mathbb{K}} W^{\perp} = n - m \text{ e } W = (W^{\perp})^{\perp}.$$

Osserviamo che se omettiamo l'ipotesi che B sia non degenere risulta che

$$\dim_{\mathbb{K}} W^{\perp} \geq n - m.$$

Definizione 1.1.6 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n e sia B una forma bilineare simmetrica su V; sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base di V, poniamo

$$b_{ij} = B(v_i, v_j).$$

Risulta

$$B\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} a'_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a'_j b_{ij}$$

per ogni $a_1, a_2, ..., a_n, a'_1, a'_2, ..., a'_n \in \mathbb{K}$.

La matrice quadrata $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ si chiama **matrice della forma** B rispetto alla base $\mathcal{B}$ e il suo determinante si dice **discriminante** della forma B rispetto alla base $\mathcal{B}$.

<u>Osservazione</u> 1.1.3 $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ è una matrice quadrata di ordine n a elementi in $\mathbb{K}$ simmetrica.

<u>Teorema</u> 1.1.2 *Siano* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *e* $\{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ *due basi di* V.

La matrice della forma B *rispetto alla base* $\{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ *è* ${}^tTBT$, *con* T *matrice del cambiamento di base da* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *a* $\{v'_1, v'_2, ..., v'_n\}$ *e* B *matrice della forma* B *rispetto a* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. *Dunque il suo determinante è* $\det B \cdot (\det T)^2$.

<u>Osservazione</u> 1.1.4 La forma B è non degenere se e solo se il suo discriminante rispetto a una qualsiasi base di V è non nullo.

<u>Definizione</u> 1.1.7 Siano B una forma bilineare simmetrica su V e W un sottospazio vettoriale di V. Diciamo che:

i) W è **isotropo** se ha in comune con $W^{\perp}$ un elemento diverso da 0 (equivalentemente se B ristretta a W è degenere);

ii) W è **totalmente isotropo** se $W \subset W^{\perp}$ (equivalentemente se B ristretta a W è la forma nulla).

In virtù del teorema 1.1.1 abbiamo immediatamente il seguente:

<u>Teorema</u> 1.1.3 *Sia* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *tale che* $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ *e sia* B *una forma bilineare simmetrica su* V*. Se* B *è non degenere e* W *è un sottospazio vettoriale di* V *non isotropo, allora* $W^{\perp}$ *è non isotropo e* $V = W \oplus W^{\perp}$.

<u>Definizione</u> 1.1.8 Una **forma quadratica** su V è un'applicazione

$$Q : V \to \mathbb{K}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

i) per ogni $a \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$ vale

$$Q\,(av) = a^2 v;$$

ii) l'applicazione

$$B : V \times V \to \mathbb{K}$$

definita mediante

$$B(v, w) = \frac{1}{2}\left[Q(v + w) - Q(v) - Q(w)\right] \text{ per ogni } v,\, w \in V$$

è una forma bilineare simmetrica su V detta **forma bilineare associata a** Q.

<u>Osservazione</u> 1.1.5 È facile verificare che, se Q è una forma quadratica su V e B è la forma bilineare ad essa associata, vale

$$B\,(v, v) = Q\,(v) \text{ per ogni } v \in V.$$

<u>Osservazione</u> 1.1.6. Se Q è una forma quadratica su V, allora:

i) esiste un'unica forma bilineare simmetrica B_0 su V tale che $B_0\,(v, v) = Q\,(v)$, per ogni $v \in V$;

ii) esistono infinite forme bilineari B_0 su V tali che $B_0(v,v) = Q(v)$, per ogni $v \in V$.

Osservazione 1.1.7 Siano Q una forma quadratica su V, B la forma bilineare ad essa associata e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base di V. Se $a_1, a_2, ..., a_n$ sono elementi di $\mathbb{K}$ allora risulta

$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Q(v_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_i a_j B(v_i, v_j).$$

Definizione 1.1.9 Sia Q una forma quadratica su V e sia W un sottospazio vettoriale di V. Se Q ristretta a W è la forma nulla allora W si dice è **totalmente singolare.** Inoltre si dice **singolare** ogni $v \in V$ tale che $Q(v) = 0$.

Osservazione 1.1.8 Se Q è una forma quadratica su V e B è la forma bilineare ad essa associata allora $V^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V totalmente singolare.

Dalle definizioni di sottospazio totalmente isotropo e di sottospazio totalmente singolare si ottiene immediatamente il seguente:

Teorema 1.1.4 *Sia Q una forma quadratica su V e sia B la forma bilineare ad essa associata. Risulta che ogni sottospazio vettoriale di V è totalmente isotropo se e solo se è totalmente singolare.*

Da qui in poi assumiamo che V abbia dimensione finita n su $\mathbb{K}$.

Vale il seguente:

Teorema 1.1.5 *Siano $\widetilde{\mathbb{K}}$ un'estensione di $\mathbb{K}$, $\widetilde{V}$ lo spazio vettoriale definito da V estendendo $\mathbb{K}$ a $\widetilde{\mathbb{K}}$ e Q una forma quadratica su V. Allora esiste un'unica forma quadratica $\widetilde{Q}$ su $\widetilde{V}$ che estende Q. Inoltre la forma bilineare associata a $\widetilde{Q}$ è un'estensione di quella associata a Q.*

<u>Definizione</u> 1.1.10 Siano Q una forma quadratica su V e B la forma bilineare ad essa associata. Due vettori v,$w \in V$ si dicono B-**ortogonali** se $B(v, w) = 0$.

A questo riguardo vale il seguente:

<u>Teorema</u> 1.1.6 *Se* $V \neq \{0\}$ *allora* V *ha una base costituita da vettori a due a due ortogonali, cioè possiede una* **base** B-**ortogonale**.

Supponiamo d'ora in poi che Q sia una forma quadratica su V con forma bilineare associata B non degenere.

<u>Teorema</u> 1.1.7 *Sia* E *un sottospazio vettoriale di* V *totalmente isotropo tale che* $\dim_{\mathbb{K}} E = m$. *Valgono i seguenti fatti*:

i) *esiste un sottospazio vettoriale* F *di* V *totalmente isotropo tale che* $\dim_{\mathbb{K}} F = m$, $E \cap F = \{0\}$ *e* $E \oplus F$ *è non isotropo*;

ii) *se* $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ *è una base di* E, *allora esiste una base* $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ *di* F *tale che* $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, *con* $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$;

iii) *se* E *è massimale nell'insieme dei sottospazi vettoriali di* V *totalmente isotropi, allora* $Q(w) \neq 0$ *per ogni* $w \in (E \oplus F)^{\perp} - \{0\}$.

<u>Dimostrazione</u>. Procediamo per induzione su m. Sia l un intero tale che $0 \leq l \leq m$ e supponiamo di aver già costruito l vettori $f_1, f_2, ..., f_l$ con le seguenti proprietà:

1. $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, per ogni $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., l\}$;
2. $\langle f_1, f_2, ..., f_l \rangle$ è totalmente isotropo.

Vogliamo trovare un vettore f_{l+1} tale che

$$B(e_i, f_{l+1}) = \delta_{i,l+1} \text{ per ogni } i \in \{1, 2, ..., m\} \tag{1}$$

e

$$B\left(f_j, f_{l+1}\right) = 0 \text{ per ogni } j \in \{1, 2, ..., l+1\}. \tag{2}$$

Dal teorema 1.1.1 si ha che

$$\dim_{\mathbb{K}} \langle e_1, ..., e_l, e_{l+2}, ..., e_m \rangle^{\perp} = n - m + 1$$

e

$$\dim_{\mathbb{K}} E^{\perp} = n - m.$$

Quindi esiste $f \in \langle e_1, ..., e_l, e_{l+2}, ..., e_m \rangle^{\perp} \setminus E^{\perp}$, cioè tale che

$$B\left(f, e_i\right) = 0 \text{ per ogni } i \in \{1, ..., l, l+2, ..., m\} \tag{3}$$

ma

$$B\left(f, e_{l+1}\right) \neq 0,$$

diciamo

$$B\left(f, e_{l+1}\right) = 1. \tag{4}$$

Sia ora

$$\widetilde{f} = f - \sum_{i=1}^{l} B\left(f, f_i\right) e_i;$$

essendo E totalmente isotropo, da (3) abbiamo che

$$B\left(\widetilde{f}, e_j\right) = B\left(f, e_j\right) - \sum_{i=1}^{l} B\left(f, f_i\right) B\left(e_i, e_j\right) = 0 \text{ per ogni } j \neq l+1 \tag{5}$$

e da (4) che

$$B\left(\widetilde{f}, e_{l+1}\right) = B\left(f, e_{l+1}\right) - \sum_{i=1}^{l} B\left(f, f_i\right) B\left(e_i, e_{l+1}\right) = 1, \tag{6}$$

cioè $\widetilde{f}$ si comporta allo stesso modo di f. Inoltre è facile verificare che $\widetilde{f}$ è ortogonale a $f_1, f_2, ..., f_l$: infatti, dalle proprietà di $f_1, ..., f_l$ discende che, per ogni $j \in \{1, 2, ..., l\}$,

$$B\left(\widetilde{f}, f_j\right) = B\left(f, f_j\right) - \sum_{i=1}^{l} B\left(f, f_i\right) B\left(e_i, f_j\right) = B\left(f, f_j\right) - B\left(f, f_j\right) = 0. \tag{7}$$

Ora, se $c \in \mathbb{K}$ si ha che

$$\begin{aligned} B\left(\widetilde{f} - ce_{l+1}, \widetilde{f} - ce_{l+1}\right) &= B\left(\widetilde{f}, \widetilde{f}\right) - 2cB\left(\widetilde{f}, e_{l+1}\right) + c^2 B\left(e_{l+1}, e_{l+1}\right) \\ &= B\left(\widetilde{f}, \widetilde{f}\right) - 2c = B\left(f, f\right) - 2c. \end{aligned}$$

Poniamo

$$f_{l+1} = \widetilde{f} - \frac{B\left(f, f\right)}{2} e_{l+1};$$

utilizzando (5), (6) e (7) è facile verificare che f_{l+1} soddisfa (1) e (2).

Al termine della costruzione otteniamo, quindi, m vettori $f_1, ..., f_m$ tali che

$$B\left(e_i, f_j\right) = \delta_{ij} \text{ per ogni } i, j \in \{1, 2, ..., m\} \tag{8}$$

e

$$F = \langle f_1, ..., f_m \rangle$$

è un sottospazio vettoriale di V totalmente isotropo. Inoltre, se $a_1, ..., a_m \in \mathbb{K}$ allora da (8) si ha che

$$B\left(e_i, \sum_{j=1}^{m} a_j f_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_j B\left(e_i, f_j\right) = a_i \text{ per ogni } i \in \{1, 2, ..., m\}$$

da cui $\{f_1, ..., f_m\}$ sono linearmente indipendenti, $E \cap F = \{0\}$ e $(E \oplus F) \cap (E \oplus F)^{\perp} = \{0\}$, cioè valgono i) e ii).

Per provare l'affermazione iii) procediamo nel modo seguente: supponiamo per assurdo che esista $\widetilde{w} \in (E \oplus F)^{\perp} - \{0\}$ tale che $Q\left(\widetilde{w}\right) = 0$; allora abbiamo che

$B(\widetilde{w}, v) = 0$ per ogni $v \in E$, da cui

$$Q(v + \widetilde{w}) = 2B(\widetilde{w}, v) + Q(v) + Q(\widetilde{w}) = 0$$

per ogni $v \in E$. Quindi $E \oplus \langle \widetilde{w} \rangle$ è un sottospazio totalmente isotropo di V la cui dimensione supera di uno quella di E, assurdo. $\square$

Corollario 1.1.8 *Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso e E è un sottospazio totalmente isotropo massimale di V allora*

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Dimostrazione. Sia $h = \dim_{\mathbb{K}} E$, sia F il sottospazio totalmente isotropo di V che costruiamo in base al teorema 1.1.7 e siano w, w' elementi di $(E \oplus F)^{\perp}$; essendo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, esistono a, a' non entrambi 0 in $\mathbb{K}$ tali che

$$Q(aw + a'w') = a^2 Q(w) + 2aa' B(w, w') + a'^2 Q(w') = 0.$$

Dal punto iii) del teorema 1.1.7 segue che

$$aw + a'w' = 0$$

da cui

$$\dim_{\mathbb{K}} (E \oplus F)^{\perp} \leq 1.$$

Ora, poichè B è non degenere e $E \oplus F$ è non isotropo, dal teorema 1.1.3 si ha che

$$V = (E \oplus F) \oplus (E \oplus F)^{\perp};$$

quindi $n = 2h$ oppure $n = 2h + 1$, da cui la tesi. $\square$

Poniamo ora la seguente:

Definizione 1.1.11 Un'applicazione lineare $\sigma : V \to V$ è Q**-ortogonale** se per ogni $v \in V$ vale che

$$Q(\sigma(v)) = Q(v).$$

Osservazione 1.1.9 Ogni applicazione Q-ortogonale è un automorfismo di V.

Dimostrazione. Dalle definizioni di forma quadratica e di applicazione Q-ortogonale è facile verificare che

$$B(\sigma(v), \sigma(w)) = B(v, w) \text{ per ogni } v,\ w \in V.$$

Quindi se $v \in \ker \sigma$, cioè $\sigma(v) = 0$, la precedente uguaglianza implica che $B(v, w) = 0$ per ogni $w \in V$. Poichè B è non degenere è chiaro che $v = 0$, cioè σ è iniettiva, da cui la tesi. $\square$

Sia ora $O(n, Q)$ l'insieme delle applicazioni Q-ortogonali. In virtù della precedente osservazione, $O(n, Q)$ con l'operazione di composizione è un gruppo e si chiama **gruppo ortogonale di** Q. Inoltre si dice **gruppo ortogonale speciale** l'insieme

$$SO(V, Q) = \{\sigma \in O(V, Q) \mid \det \sigma = 1\}.$$

Definizione 1.1.12 Siano E, F due sottospazi vettorali di V e sia $\sigma : E \to F$ un isomorfismo. Si dice che σ è un Q**-isomorfismo** se per ogni $v \in E$ vale che

$$Q(\sigma(v)) = Q(v).$$

Vale il seguente teorema fondamentale per la cui dimostrazione si rimanda a [3]:

Teorema 1.1.9 (**Witt**) *Ogni Q-isomorfismo si può estendere ad un elemento di $O(n, Q)$.*

In particolare, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dal corollario 1.1.8 e dal teorema 1.1.9 segue:

Corollario 1.1.10 *I sottospazi vettoriali di V totalmente isotropi massimali hanno la stessa dimensione e sono permutati transitivamente tra di loro dagli elementi di $O(n, Q)$. Tale dimensione comune è detta* **indice di** Q.

Inoltre:

Teorema 1.1.11 *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora l'indice di Q è* $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Dimostrazione. L'affermazione è diretta conseguenza dei corollari 1.1.8 e 1.1.10. □

Per trattare il caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e introdurre l'indice di una forma quadratica, richiamiamo il seguente risultato per la cui dimostrazione si rimanda a [5]:

Teorema 1.1.12 (**Sylvester**) *Sia V uno spazio vettoriale reale tale che $\dim_{\mathbb{R}} V = n < +\infty$, sia Q una forma quadratica su V con forma bilineare associata B. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base di V B-ortogonale tale che*

$$\begin{aligned} B(v_i, v_i) &> 0 \text{ per } 1 \leq i \leq p, \\ B(v_j, v_j) &< 0 \text{ per } p+1 \leq j \leq p+q, \\ B(v_k, v_k) &= 0 \text{ per } p+q+1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

I numeri p e q non dipendono dalla base B-ortogonale scelta. In particolare p si dice **indice di positività di** Q, *q si dice* **indice di negatività di** Q *e $n - p - q$ si dice* **indice di nullità di** Q.

Proposizione 1.1.13 ([5]) *Si può dimostrare che*:

i) *p è la massima dimensione per cui esiste un sottospazio vettoriale W di V tale che, per ogni $w \in W - \{0\}$, $Q(w) > 0$;*

ii) *q è la massima dimensione per cui esiste un sottospazio vettoriale W di V tale che, per ogni $w \in W - \{0\}$, $Q(w) < 0$;*

iii) $n - p - q = \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp}$.

Osserviamo che se B è non degenere allora l'indice di nullità di Q è 0, cioè vale che $n = p + q$.

A questo punto possiamo affermare quanto segue:

Teorema 1.1.14 *Sia V uno spazio vettoriale reale tale che $\dim_{\mathbb{R}} V = n < +\infty$, sia Q una forma quadratica su V con forma bilineare associata B non degenere. Se p è l'indice di positività di Q e $n-p$ è l'indice di negatività di Q allora tutti i sottospazi totalmente isotropi massimali di V hanno la stessa dimensione; tale dimensione è il minimo tra p e $n-p$ e si dice* **indice di** *Q.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo supporre che $p \leq n - p$ (l'altro caso si tratta in modo analogo). Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base di V B-ortogonale (esiste per il teorema 1.1.6) tale che

$$\begin{aligned} Q(v_i) &= 1 \text{ per } 1 \leq i \leq p, \\ Q(v_j) &= -1 \text{ per } p+1 \leq j \leq n; \end{aligned}$$

poniamo $W = \langle v_1 - v_{p+1}, v_2 - v_{p+2}, ..., v_p - v_{2p} \rangle$: W è un sottospazio vettoriale di V tale che $\dim_{\mathbb{R}} W = p$ ed è totalmente isotropo, infatti per ogni $i \in \{1, ..., p\}$ vale che

$$\begin{aligned} Q(v_i - v_{p+i}) &= B(v_i - v_{p+i}, v_i - v_{p+i}) = \\ &= B(v_i, v_i) - 2B(v_i, v_{p+i}) + B(v_{p+i}, v_{p+i}) = \\ &= Q(v_i) + Q(v_{p+i}) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che esista un sottospazio vettoriale U di V totalmente isotropo e tale che $\dim_{\mathbb{R}} U = p+1$. Poichè $p \leq n-p$, abbiamo che $U \cap \langle v_{p+1}, ..., v_{n-p} \rangle \neq \emptyset$, cioè esiste $u \in V$ tale che $Q(u) = 0$ $(u \in U)$ e $Q(u) < 0$ $(u \in \langle v_{p+1}, ..., v_{n-p} \rangle)$, assurdo. Questo completa la dimostrazione. $\square$

Nel caso reale vediamo un'interpretazione geometrica dei sottospazi totalmente isotropi di V.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base di V e sia $v \in V$, abbiamo che $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, con $x_1, x_2, ..., x_n$ numeri reali. Sia inoltre $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice della forma B rispetto alla base $\mathcal{B}$, dall'osservazione 1.1.7 segue che

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j.$$

Poichè B è una matrice simmetrica, per il teorema spettrale possiamo diagonalizzarla e ottenere

$$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} Q(\overline{v}_i)\, \overline{x}_i^2,$$

con $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ numeri reali e $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ base B-ortogonale di V tale che

$$\begin{aligned} Q(\overline{v}_i) &> 0 \text{ per } 1 \leq i \leq p, \\ Q(\overline{v}_j) &< 0 \text{ per } p+1 \leq j \leq n; \end{aligned}$$

in particolare se questa base è come quella della dimostrazione del teorema 1.1.14, allora la matrice della forma B rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ assume la forma

$$\begin{pmatrix} I_p & O_{p \times (n-p)} \\ O_{(n-p) \times p} & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

e vale che

$$Q(v) = \overline{x}_1^2 + ... + \overline{x}_p^2 - \overline{x}_{p+1}^2 - ... - \overline{x}_n^2.$$

Quindi se W è un sottospazio totalmente isotropo di V, gli elementi di W saranno soluzioni di un'equazione della forma

$$x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_n^2 = 0.$$

A titolo di esempio analizziamo alcuni casi di spazi vettoriali reali con dimensioni crescenti.

Esempio 1.1.1 Se $n = 2$ i sottospazi totalmente isotropi di V devono soddisfare

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ (punto)}$$

oppure

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \text{ (coppia di rette).}$$

Esempio 1.1.2 Se $n = 3$ i sottospazi totalmente isotropi di V devono soddisfare

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \text{ (punto)}$$

oppure

$$x_1^2 \pm x_2^2 - x_3^2 = 0 \text{ (completamento proiettivo del cono affine).}$$

Esempio 1.1.3 Se $n = 4$ i sottospazi totalmente isotropi di V devono soddisfare

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \text{ (punto)}$$

oppure

$$x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 - x_4^2 = 0$$

(completamento proiettivo dell'ellissoide affine) oppure

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$$

(completamento proiettivo dell'iperboloide a una falda affine).

Torniamo al caso in cui $\mathbb{K}$ sia un generico campo di caratteristica diversa da 2 e poniamo la seguente:

Definizione 1.1.13 Sia $w \in V$ un vettore non singolare, si dice **simmetria rispetto all'iperpiano** $H = w^{\perp}$ l'applicazione lineare $\sigma : V \to V$ definita da

$$\sigma(v) = v - 2Q(w)^{-1} B(v, w)\, w \text{ per ogni } v \in V.$$

È facile verificare che per una tale σ valgono queste proprietà, [3]:

i) σ è l'unico elemento di $O(n, Q)$ diverso dall'identità a lasciare fissati gli elementi di H;

ii) se $\tau \in O(n, Q)$ allora $\tau\sigma\tau^{-1}$ è la simmetria rispetto a $\tau(H)$;

iii) $\sigma^2 = id$.

Enunciamo il seguente risultato fondamentale, per la cui dimostrazione si rimanda a [3]:

Teorema 1.1.15 (**Cartan-Dieudonné**) *Ogni $\sigma \in O(n, Q)$ può essere espresso come composizione di un numero finito di simmetrie rispetto a iperpiani ortogonali a vettori non singolari.*

1.2 Algebre e rappresentazioni

In questo paragrafo richiamiamo le definizioni e proprietà principali delle algebre e delle loro rappresentazioni.

Con $\mathbb{K}$ denotiamo un campo qualsiasi.

Definizione 1.2.1 Una **$\mathbb{K}$-algebra** A è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con un'ulteriore operazione

$$\begin{array}{rcl} \mu \;:\; A \times A & \to & A \\ (v,w) & \to & v \cdot w \end{array}$$

detta **moltiplicazione**, che soddisfa le seguenti proprietà:

i) (bilinearità) per ogni $v_1, v_2, w_1, w_2 \in A$ e per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$ vale

$$\begin{aligned} & (a_1 v_1 + a_2 v_2) \cdot (b_1 w_1 + b_2 w_2) \\ = \; & a_1 b_1 (v_1 \cdot w_1) + a_1 b_2 (v_1 \cdot w_2) + a_2 b_1 (v_2 \cdot w_1) + a_2 b_2 (v_2 \cdot w_2) \, ; \end{aligned}$$

ii) (associatività) per ogni $u, v, w \in A$ vale

$$u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w.$$

Se la moltiplicazione è anche commutativa, cioè per ogni $v, w \in A$ vale

$$v \cdot w = w \cdot v,$$

allora la $\mathbb{K}$-algebra A si dice **commutativa.**

Naturalmente la **dimensione** di A su $\mathbb{K}$ è quella come spazio vettoriale.

Definizione 1.2.2 Sia A una $\mathbb{K}$-algebra e sia $\overline{v} \in A$ tale che

$$\overline{v} \cdot v = v \cdot \overline{v} = v \text{ per ogni } v \in A.$$

Allora A è detta **algebra con unità** e l'elemento $\overline{v}$ è indicato con il simbolo 1_A.

Osservazione 1.2.1 Una $\mathbb{K}$-algebra con unità è anche un anello con unità.

Nella trattazione saranno considerate sempre algebre con unità, quindi da qui in poi il termine algebra è da intendere come algebra con unità.

Definizione 1.2.3 Sia A una $\mathbb{K}$-algebra e sia B un suo sottospazio vettoriale. Si dice che B è una **sottoalgebra** di A se:

i) B è chiuso rispetto alla moltiplicazione di A, cioè per ogni $v, w \in B$ vale che $v \cdot w \in B$;

ii) $1_A \in B$.

Osservazione 1.2.2 Sia $Z = \{w \in A \,|\, v \cdot w = w \cdot v \text{ per ogni } v \in A\}$ il centro di A; Z è una sottoalgebra commutativa di A che contiene $\mathbb{K} \cdot 1_A$.

Definizione 1.2.4 Se $Z = \mathbb{K} \cdot 1_A$ allora diciamo che A è una $\mathbb{K}$-algebra **centrale**.

Definizione 1.2.5 Sia A una $\mathbb{K}$-algebra e sia S un suo sottoinsieme. Se non esiste una sottoalgebra propria di A che contiene S e 1_A allora S è un **insieme di generatori** di A.

Introduciamo ora le nozioni principali riguardanti le applicazioni tra algebre su uno stesso campo $\mathbb{K}$.

Definizione 1.2.6 Siano A_1 e A_2 due $\mathbb{K}$-algebre. Si dice **omomorfismo** (di $\mathbb{K}$-algebre) un'applicazione lineare $\psi : A_1 \rightarrow A_2$ con le seguenti proprietà:

i) $\psi (v_1 \cdot w_1) = \psi (v_1) \cdot \psi (w_1)$, per ogni $v_1, w_1 \in A_1$;

ii) $\psi (1_{A_1}) = 1_{A_2}$.

Se ψ è anche invertibile, allora ψ si dice **isomorfismo** (di $\mathbb{K}$-algebre). In particolare, se $A_1 = A_2$ un isomorfismo $\psi : A_1 \to A_1$ si dice **automorfismo** (di A_1).

Definizione 1.2.7 Sia A una $\mathbb{K}$-algebra non commutativa e sia $\psi : A \to A$ un'applicazione lineare invertibile. Se

$$\psi(v \cdot w) = \psi(w) \cdot \psi(v) \text{ per ogni } v, w \in A$$

allora ψ si dice **antiautomorfismo** (di A).

A questo punto introduciamo i concetti di algebra semplice e semisemplice; per fare ciò servono alcune nozioni preliminari.

Definizione 1.2.8 Sia A un anello con unità, A si dice **artiniano sinistro (destro)** se ogni catena discendente di ideali sinistri (destri) di A è finita.

Per comodità concentriamoci sugli anelli artiniani sinistri, che da qui in poi chiameremo semplicemente artiniani.

Osservazione 1.2.3 Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia n un intero positivo. L'anello $M(n, \mathbb{K})$ delle matrici quadrate di ordine n a elementi in $\mathbb{K}$ è artiniano poichè è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e i suoi ideali sinistri sono suoi sottospazi vettoriali.

Definizione 1.2.9 Sia A un anello con unità artiniano, si dice **radicale** di A e si denota con $Rad(A)$ la somma di tutti gli ideali sinistri nilpotenti di A.

Vale il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a [4]:

Proposizione 1.2.1 *$Rad(A)$ è un ideale bilatero nilpotente di A.*

Poniamo la seguente:

Definizione 1.2.10 Si dice **semisemplice** un anello con unità artiniano A tale che

$$Rad(A) = \{0\}.$$

Chiameremo, invece, **semplice** un anello con unità artiniano A i cui unici ideali bilateri sono A e $\{0\}$.

Osservazione 1.2.4 Dalle proprietà di $Rad(A)$ e dalla precedente definizione otteniamo che ogni anello semplice è anche semisemplice.

Torniamo ora alle algebre e diamo la seguente:

Definizione 1.2.11 Una $\mathbb{K}$-algebra A si dice **semisemplice (**risp. **semplice)** se lo è come anello.

Proposizione 1.2.2 *$M(n, \mathbb{K})$ è una $\mathbb{K}$-algebra centrale semplice.*

Dimostrazione. In base all'osservazione 1.2.3 $M(n, \mathbb{K})$ è un anello artiniano e ha per unità la matrice identica I_n (ricordiamo che la moltiplicazione in $M(n, \mathbb{K})$ è il prodotto righe per colonne).

Per provare che $M(n, \mathbb{K})$ è centrale procediamo come segue: sia $M = \{m_{ij}\}$ una matrice $n \times n$ a elementi in $\mathbb{K}$ tale che

$$M \cdot N = N \cdot M \text{ per ogni } N \in M(n, \mathbb{K}),$$

vogliamo dimostrare che esiste $k \in \mathbb{K}$ tale che

$$M = kI_n.$$

Sia $\{E_{11}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n}, ..., E_{n1}, ..., E_{nn}\}$ una base di $M(n, \mathbb{K})$ tale che

$$E_{ij} = (\delta_{hk})_{h,k \in \{1,...,n\}}$$

dove

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad h = i \quad \text{e} \quad k = j \\ \\ 0 \quad \text{se} \quad h \neq i \quad \text{o} \quad k \neq j \end{cases}.$$

Per ogni $i, j \in \{1, ..., n\}$ abbiamo che

$$M \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & m_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice che ha tutti zero escluso la colonna j-esima che è fatta dalla i-esima colonna di M; inoltre

$$E_{ij} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{j1} & \ddots & \ddots & m_{jn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice che ha tutti zero escluso la riga i-esima che è fatta dalla j-esima riga di A. Ora, poichè $M \in Z$, risulta

$$M \cdot E_{ij} = E_{ij} \cdot M \text{ per ogni } i, j \in \{1, ..., n\}$$

da cui

$$m_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j$$

e

$$m_{ii} = m_{jj} \text{ per ogni } i, j.$$

Quindi

$$M = m_{11}I_n,$$

da cui $M(n,\mathbb{K})$ è centrale.

Resta solo da provare che $M(n,\mathbb{K})$ è semplice, cioè che se $\mathcal{I} \subset M(n,\mathbb{K})$ è un ideale bilatero tale che $\mathcal{I} \neq \{0\}$ allora

$$\mathcal{I} = M(n,\mathbb{K}). \tag{9}$$

Poichè $\mathcal{I} \neq \{0\}$, esiste $M = \{m_{ij}\} \in \mathcal{I}$ tale che $M \neq O_n$, in particolare supponiamo che $m_{pq} \neq 0$, con $1 \leq p, q \leq n$. Con un calcolo diretto otteniamo che

$$m_{pq}I_n = \sum_{k=1}^{n} E_{kp}ME_{qk},$$

da cui, essendo $\mathcal{I}$ un ideale bilatero,

$$m_{pq}I_n \in \mathcal{I}.$$

Segue che

$$I_n = m_{pq}I_n \cdot m_{pq}^{-1}I_n \in \mathcal{I},$$

cioè vale (9). □

Introduciamo ora il concetto di rappresentazione:

<ins>Definizione</ins> 1.2.12 Siano A una $\mathbb{K}$-algebra e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una **rappresentazione di A con spazio di rappresentazione** V è un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre

$$\rho : A \to End(V).$$

ρ si dice **semplice** se $V \neq \{0\}$ e gli unici sottospazi vettoriali di V invarianti per tutte le operazioni di $\rho(A)$ sono $\{0\}$ e V.

Inoltre diciamo che ρ è **semisemplice** se V può essere rappresentato come somma diretta di sottospazi non nulli ognuno dei quali è invariante per tutte le operazioni di $\rho(A)$ ed è minimale rispetto a questa proprietà.

Infine, se $\ker \rho = \{0_A\}$ allora ρ si dice **fedele.**

<u>Osservazione</u> 1.2.5 Una rappresentazione semplice è anche semisemplice.

Tra le rappresentazioni di una $\mathbb{K}$-algebra possiamo definire una relazione di equivalenza:

<u>Definizione</u> 1.2.13 Sia A una $\mathbb{K}$-algebra e siano ρ_1 e ρ_2 due rappresentazioni di A con spazi di rappresentazione V_1 e V_2; ρ_1 e ρ_2 si dicono **equivalenti** se esiste un isomorfismo di spazi vettoriali

$$f : V_1 \to V_2$$

tale che, per ogni $a \in A$, il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1(a)"'] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(a)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \end{tikzcd}$$

A questo riguardo è noto il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a [2]:

<u>Teorema</u> 1.2.3 *Se A è una $\mathbb{K}$-algebra semplice allora c'è un'unica classe di equivalenza per le rappresentazioni semplici di A.*

Riportiamo ora la nozione di rappresentazione di un gruppo:

Definizione 1.2.14 Siano G un gruppo e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una **rappresentazione di G con spazio di rappresentazione** V è un omomorfismo di gruppi

$$\rho : G \to Aut\,(V)\,.$$

Le proprietà delle rappresentazioni che abbiamo enunciato per le algebre valgono anche nel caso dei gruppi.

1.3 Algebra tensoriale e Algebra esterna

In questo paragrafo richiamiamo le proprietà principali dell'algebra tensoriale e dell'algebra esterna su un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi.

Definizione 1.3.1 Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Si dice **prodotto tensoriale di** V **e** W lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ definito da

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W = Bil\left(V^* \times W^*, \mathbb{K}\right).$$

Osservazione 1.3.1

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(V \otimes_{\mathbb{K}} W\right) = \dim_{\mathbb{K}} V \cdot \dim_{\mathbb{K}} W$$

Per semplicità, d'ora in poi utilizzeremo la notazione $V \otimes W$ al posto di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$.

Definizione 1.3.2 Sia

$$\otimes \ : \ V \times W \ \rightarrow \ V \otimes W$$

l'applicazione bilineare definita da

$$\otimes\left(x, y\right)\left(v^*, w^*\right) = v^*\left(x\right) \cdot w^*\left(y\right)$$

per ogni $v \in V$ e $w \in W$. Si dicono **elementi semplici** gli elementi di $\otimes\left(V \times W\right)$ e si pone

$$x \otimes y = \otimes\left(x, y\right).$$

È noto il seguente:

Teorema 1.3.1 (**Proprietà universale del prodotto tensoriale**) *Siano* V, W, U *spazi vettoriali su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita e sia*

$$\phi : V \times W \rightarrow U$$

un'applicazione bilineare. Allora esiste un'unica applicazione lineare

$$\psi : V \otimes W \to U$$

tale che

$$\phi = \psi \circ \otimes.$$

<u>Corollario</u> 1.3.2 *Sia*

$$L\left(V \otimes W, U\right) = \left\{\varphi : V \otimes W \to U \mid \varphi \text{ è } \textit{lineare}\right\},$$

allora

$$Bil\left(V \times W, U\right) \backsimeq L\left(V \otimes W, U\right)$$

come spazi vettoriali.

<u>Teorema</u> 1.3.3 *Siano* V, W, U *spazi vettoriali su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita, allora valgono i seguenti isomorfismi di spazi vettoriali*:

i) (*commutatività di* $\otimes$) $V \otimes W \backsimeq W \otimes V$;

ii) (*associatività di* $\otimes$) $(V \otimes W) \otimes U \backsimeq V \otimes (W \otimes U)$;

iii) $\mathbb{K} \otimes V \backsimeq V$.

<u>Osservazione</u> 1.3.2 Se $V_1, ..., V_s$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita allora, per il punto ii) del teorema 1.3.3, abbiamo che le notazioni $V_1 \otimes ... \otimes V_s$ e $v_1 \otimes ... \otimes v_s$ non sono ambigue, cioè è possibile eliminare le parentesi. Inoltre, posto

$$M\left(V_1^* \otimes ... \otimes V_s^*, \mathbb{K}\right) = \left\{\chi : V_1^* \times ... \times V_s^* \to \mathbb{K} \mid \chi \text{ è multilineare}\right\},$$

è facile verificare che $V_1 \otimes ... \otimes V_s$ e $M\left(V_1^* \otimes ... \otimes V_s^*, \mathbb{K}\right)$ sono canonicamente isomorfi. Quindi possiamo generalizzare il teorema 1.3.1 al caso multilineare.

Richiamiamo la nozione di algebra graduata:

Definizione 1.3.3 Una $\mathbb{K}$-algebra A si dice **graduata** (dai numeri naturali 0,1,...) se

$$A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$$

dove A_i è un sottospazio di A (detto **parte omogenea di grado** i **di** A) e

$$A_i \cdot A_j \subset A_{i+j} \text{ per ogni } i, j.$$

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per definire l'algebra tensoriale:

Definizione 1.3.4 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e sia

$$T(V) = \bigoplus_{r \geq 0} T^r(V)$$

dove

$$T^r(V) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{se} \quad r = 0 \\ \underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{r \text{ volte}} & \text{se} \quad r \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

e l'operazione naturale è

$$T^r(V) \times T^s(V) \to T^{r+s}(V).$$

$T(V)$ si dice **algebra tensoriale su** V.

Osservazione 1.3.3 $T(V)$ è una $\mathbb{K}$-algebra (con moltiplicazione data da $\otimes$) graduata generata da V (con somma, moltiplicazione per scalare e $\otimes$). L'unità di $T(V)$ è $1_{\mathbb{K}}$.

Tramite l'algebra tensoriale possiamo definire l'algebra esterna:

Definizione 1.3.5 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n. Si dice **alternatore** l'applicazione lineare

$$\mathcal{A} : T(V) \to T(V)$$

che sugli elementi semplici di $T^r(V)$ è definita da

$$\mathcal{A}(v_1 \otimes ... \otimes v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \epsilon(\sigma) \, v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(r)}$$

dove $\Sigma(r)$ è l'insieme delle permutazioni su $\{1, ..., r\}$ e $\epsilon(\sigma)$ è il segno di σ. Poniamo

$$\Lambda^r(V) = \mathcal{A}(T^r(V))$$

e

$$\Lambda(V) = \operatorname{Im} \mathcal{A} = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(V).$$

$\Lambda^r(V)$ si dice r-**esima potenza esterna di** V e $\Lambda(V)$ si dice **algebra esterna su** V.

Inoltre, se $\alpha, \beta \in \Lambda(V)$, diciamo $\alpha = \mathcal{A}(s)$ e $\beta = \mathcal{A}(t)$ con $s, t \in T(V)$, allora il **prodotto esterno** $\wedge$ di α con β è definito da

$$\alpha \wedge \beta = \mathcal{A}(s \otimes t).$$

Il prodotto esterno gode delle seguenti proprietà:

i) per ogni $\alpha \in \Lambda^p(V)$ e $\beta \in \Lambda^q(V)$ vale $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$;

ii) per ogni $\alpha \in \Lambda^{2k+1}(V)$ vale $\alpha \wedge \alpha = 0$;

iii) per ogni $\alpha \in \Lambda(V)$ e $\lambda \in \Lambda^0(V) = \mathbb{K}$ vale $\lambda \wedge \alpha = \alpha \wedge \lambda = \lambda\alpha$;

iv) per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda(V)$ e $\lambda \in \Lambda^0(V) = \mathbb{K}$ vale $\lambda\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \lambda\beta$;

v) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(V)$ vale $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$;

vi) per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(V)$ valgono $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$ e $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$.

Osservazione 1.3.4 $\Lambda(V)$ è una $\mathbb{K}$-algebra (con moltiplicazione data da $\wedge$) graduata generata da V (con somma, moltiplicazione per scalare e $\wedge$). L'unità di $\Lambda(V)$ è $1_{\mathbb{K}}$.

Osservazione 1.3.5 È noto che

$$\Lambda^r(V) = \left\{ \mu : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{r\ volte} \to \mathbb{K} \mid \mu \text{ è multilineare} \right\}$$

da cui

$$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^r(V) = \binom{n}{r}.$$

Quindi

$$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda(V) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

Definizione 1.3.6 Un elemento f di $End(\Lambda(V))$ si dice **omogeneo di grado** $g \in \mathbb{Z}$ se f trasforma ogni elemento di $\Lambda^h(V)$ in un elemento di $\Lambda^{h+g}(V)$.

Osservazione 1.3.6 Se $f_1, ..., f_s \in End(\Lambda(V))$ sono elementi omogenei di grado rispettivamente $g_1, ..., g_s$ allora $f_1 \circ ... \circ f_s$ è un elemento omogeneo di grado $g_1 + ... + g_s$.

Definizione 1.3.7 Un elemento δ di $End(\Lambda(V))$ si dice **antiderivazione** su $\Lambda(V)$ se, per ogni $\alpha \in \Lambda^p(V)$ e $\beta \in \Lambda^q(V)$, risulta

$$\delta(\alpha \wedge \beta) = \delta(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \delta(\beta).$$

Vale il seguente:

Teorema 1.3.4 *Sia* $g : V \to \mathbb{K}$ *un'applicazione lineare. Allora esiste un'unica antiderivazione* δ_g *su* $\Lambda(V)$ *tale che*:

i) *per ogni* $v \in V$, $\delta_g(v) = g(v) \cdot 1$;

ii) $\delta_g^2 = 0$;

iii) δ_g *è omogenea di grado* -1.

Dimostrazione. È sufficiente porre

$$\begin{aligned}\delta_g(\lambda) &= 0 \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{K} \\ \delta_g(v) &= g(v) \cdot 1 \text{ per ogni } v \in V\end{aligned}$$

ed estendere δ_g come antiderivazione su $\Lambda(V)$ in modo ricorsivo, cioè

$$\delta_g(v_1 \wedge ... \wedge v_k) = \delta_g(v_1 \wedge ... \wedge v_{k-1}) \wedge v_k + (-1)^{k-1} v_1 \wedge ... \wedge v_{k-1} \wedge \delta_g(v_k)$$

per ogni $k \geq 2$.

È ovvio che l'applicazione così definita soddisfi le proprietà i) e iii). Per verificare che δ_g gode anche della ii) procediamo per induzione su k: se $k = 1$ allora, per ogni $v \in V$, risulta

$$\delta_g^2(v) = \delta_g(g(v) \cdot 1) \in \Lambda^{-1}V.$$

Supponiamo ora che la ii) valga per $k-1$, vogliamo dimostrare che vale anche per k. Per ogni $v_1, ..., v_k \in V$ abbiamo

$$\begin{aligned}\delta_g^2(v_1 \wedge ... \wedge v_k) &= \delta_g(\delta_g(v_1 \wedge ... \wedge v_k)) \\ &= \delta_g^2(v_1 \wedge ... \wedge v_{k-1}) \wedge v_k \\ &\quad + (-1)^{k-2} \delta_g(v_1 \wedge ... \wedge v_{k-1}) \wedge \delta_g(v_k) \\ &\quad + (-1)^{k-1} \delta_g(v_1 \wedge ... \wedge v_{k-1}) \wedge \delta_g(v_k) \\ &\quad + v_1 \wedge ... \wedge v_{k-1} \wedge \delta_g^2(v_k)\end{aligned}$$

da cui, per quanto dimostrato al passo base e per ipotesi induttiva,

$$\delta_g^2(v_1 \wedge ... \wedge v_k) = 0. \qquad \square$$

Corollario 1.3.5 *Siano* $g_1, g_2 \in End\left(\Lambda\left(V\right)\right)$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Valgono i seguenti fatti*:

i) $\delta_{g_1+g_2} = \delta_{g_1} + \delta_{g_2}$;

ii) $\delta_{\lambda g_1} = \lambda \delta_{g_1}$;

iii) $\delta_{g_1} \circ \delta_{g_2} + \delta_{g_2} \circ \delta_{g_1} = 0$.

1.4 Pfaffiani

In questo paragrafo richiamiamo la nozione di Pfaffiano di una matrice antisimmetrica e ne descriviamo le principali proprietà.

Il termine *Pfaffiano* fu introdotto da Arthur Cayley, che lo utilizzò nel 1852:

"*Chiamerò Pfaffiani i permutanti di questa classe* (*per la loro connessione con le ricerche di Pfaff sulle equazioni differenziali*)".

Tale termine rende onore al matematico tedesco Johann Friedrich Pfaff.

Sia A una matrice antisimmetrica $m \times m$ a elementi in un campo $\mathbb{K}$. Il determinante di A si può sempre scrivere come il quadrato di un polinomio nei coefficienti della matrice. Questo polinomio è detto lo **Pfaffiano** di A ed è indicato con $Pf\,(A)$. Quindi abbiamo che

$$\det(A) = (Pf\,(A))^2 .$$

È immediato verificare che se $m = 2l+1$ allora $Pf\,(A) = 0$: infatti, essendo $A = -A^t$, risulta

$$\det(A) = \det(-A^t) = (-1)^m \det(A^t) = -\det(A)$$

da cui

$$\det(A) = 0.$$

Se, invece, $m = 2l$ e A è non degenere allora $Pf\,(A)$ è un polinomio di grado l. Nel caso in cui $m = 0$, per convenzione, poniamo $Pf\,(A) = 1$.

Riportiamo di seguito varie definizioni di Pfaffiano, tra loro equivalenti.

<u>Definizione</u> 1.4.1 (formale) Sia $A = \{a_{ij}\}$ una matrice antisimmetrica $2l \times 2l$ a elementi in $\mathbb{K}$. Lo **Pfaffiano** di A è definito dall'equazione

$$Pf(A) = \frac{1}{2^l l!} \sum_{\sigma \in \Sigma(2l)} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{l} a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)} \tag{10}$$

dove $\Sigma(2l)$ è il gruppo simmetrico e $\epsilon(\sigma)$ è il segno di σ.

Applichiamo (10) al caso in cui $l = 1$: se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} Pf(A) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \Sigma(2)} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),\sigma(2)} \\ &= \frac{1}{2}[a_{12} - a_{21}] = \frac{1}{2}[a - (-a)] = a. \end{aligned}$$

Osserviamo che al crescere di l può risultare complicato calcolare tutti gli elementi di $\Sigma(2l)$, pertanto talvolta si preferisce utilizzare la seguente:

<u>Definizione</u> 1.4.2 (ricorsiva) Sia $A = \{a_{ij}\}$ una matrice antisimmetrica $2l \times 2l$ a elementi in $\mathbb{K}$. Lo **Pfaffiano** di A si può calcolare ricorsivamente mediante

$$Pf(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } l = 0 \\ \sum_{i=2}^{2l} (-1)^i a_{1i} Pf(A_{\widehat{1}\widehat{i}}) & \text{se } l > 0 \end{cases} \tag{11}$$

dove abbiamo indicato con $A_{\widehat{1}\widehat{i}}$ la matrice $(2l-2) \times (2l-2)$ che si ottiene da A togliendo la prima riga, la prima colonna, la i-esima riga e la i-esima colonna.

Poichè siamo già in grado di calcolare lo Pfaffiano di una matrice 2×2, possiamo utilizzare (11) per ottenere lo Pfaffiano di una matrice 4×4: se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} Pf(A) &= \sum_{i=2}^{4} (-1)^i a_{1i} Pf(A_{\widehat{1i}}) = aPf(A_{\widehat{12}}) - bPf(A_{\widehat{13}}) + cPf(A_{\widehat{14}}) \\ &= aPf \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} - bPf \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} + cPf \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \\ &= af - be + cd. \end{aligned}$$

<u>Definizione</u> 1.4.3 (alternante) Sia $A = \{a_{ij}\}$ una matrice antisimmetrica $2l \times 2l$ a elementi in $\mathbb{K}$; ad A possiamo associare il bivettore

$$\widetilde{A} = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 \mathbb{K}$$

dove $\{e_1, ..., e_{2l}\}$ è la base standard di $\mathbb{K}^{2l}$. Lo **Pfaffiano** di A è definito dall'equazione

$$\frac{\widetilde{A}^{\wedge l}}{l!} = Pf(A) e_1 \wedge ... \wedge e_{2l}$$

dove $\widetilde{A}^{\wedge l}$ indica il prodotto wedge di l copie di $\widetilde{A}$ con sé stesso.

Osserviamo che una sottomatrice qualsiasi di una matrice antisimmetrica A non è necessariamente antisimmetrica: lo è se ottenuta cancellando le stesse righe e colonne di A. In tal caso possiamo calcolarne lo Pfaffiano e iterare il procedimento.

A questo proposito poniamo la seguente:

Definizione 1.4.4 Sia $A = \{a_{ij}\}$ una matrice antisimmetrica $m \times m$ a elementi in $\mathbb{K}$; si dicono **Pfaffiani principali** di A gli Pfaffiani dei minori principali di ordine pari di A.

A titolo di esempio analizziamo i casi in cui $m = 2$, $m = 3$ e $m = 4$:

1) gli Pfaffiani principali di

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\{1\}$ (ordine 0) e $\{a\}$ (ordine 2);

2) gli Pfaffiani principali di

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\{1\}$ (ordine 0) e $\{a, b, c\}$ (ordine 2);

3) gli Pfaffiani principali di

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\{1\}$ (ordine 0), $\{a, b, c, d, e, f\}$ (ordine 2) e $\{af - be + cd\}$ (ordine 4).

Osservazione 1.4.1 Lo spazio degli Pfaffiani principali di una matrice antisimmetrica $A \in M(m, \mathbb{K})$ ha dimensione su $\mathbb{K}$ pari a 2^{m-1}.

Mediante la definizione 1.4.3 possiamo verificare che lo Pfaffiano gode delle proprietà enunciate nelle prossime proposizioni:

<u>Proposizione</u> 1.4.1 *Sia* $A \in M(2l, \mathbb{K})$ *tale che* $A = -A^t$ *e sia* $g \in GL(2l, \mathbb{K})$. *Vale che*

$$Pf\left(g^t A g\right) = \det(g)\, Pf(A).$$

Per dimostrare la proposizione 1.4.1 è necessario il seguente risultato di algebra lineare:

<u>Lemma</u> 1.4.2 *Siano* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ *una base di* V *e* $f \in End(V)$; *allora*

$$f(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = \det(f)\, v_1 \wedge ... \wedge v_n.$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia $B = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \{b_{jk}\}$; allora

$$\begin{aligned} f(v_1 \wedge ... \wedge v_n) &= f(v_1) \wedge ... \wedge f(v_n) \\ &= \left[\sum_{h_1=1}^{n} b_{h_1 1} v_{h_1}\right] \wedge ... \wedge \left[\sum_{h_n=1}^{n} b_{h_n n} v_{h_n}\right] \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \epsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1)1} ... b_{\sigma(n)n} v_1 \wedge ... \wedge v_n \\ &= \det(B)\, v_1 \wedge ... \wedge v_n = \det(f)\, v_1 \wedge ... \wedge v_n. \end{aligned}$$

□

Passiamo ora a dimostrare la proposizione 1.4.1.

<u>Dimostrazione</u>. Sia

$$\widetilde{g^t A g} = \sum_{i<j} \left(g^t A g\right)_{ij} e_i \wedge e_j$$

il bivettore associato alla matrice antisimmetrica $g^t A g$, si ha che

$$\begin{aligned}
\widetilde{g^t A g} &= \sum_{i<j}\left[\sum_{r,s}\left(g^t\right)_{ir} a_{rs} g_{sj}\right] e_i \wedge e_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left[\sum_{r,s}\left(g^t\right)_{ir} a_{rs}\left(g^t\right)_{js}\right] e_i \wedge e_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{r,s}\left[a_{rs}\left(\left(g^t\right)_{ir} e_i\right) \wedge \left(\left(g^t\right)_{js} e_j\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r,s} a_{rs}\left[\left(\sum_{i}\left(g^t\right)_{ir} e_i\right) \wedge \left(\sum_{j}\left(g^t\right)_{js} e_j\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r,s} a_{rs}\left[g^t e_r \wedge g^t e_s\right] = \sum_{r<s} a_{rs}\left[g^t e_r \wedge g^t e_s\right].
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\widetilde{g^t A g}^{\wedge l} &= \underbrace{\widetilde{g^t A g} \wedge \ldots \wedge \widetilde{g^t A g}}_{l \text{ volte}} \\
&= \left[\sum_{r_1<s_1} a_{r_1 s_1} g^t e_{r_1} \wedge g^t e_{s_1}\right] \wedge \ldots \wedge \left[\sum_{r_l<s_l} a_{r_l s_l} g^t e_{r_l} \wedge g^t e_{s_l}\right] \\
&= \sum_{\substack{r_1<s_1 \\ \vdots \\ r_l<s_l}} \left[a_{r_1 s_1} g^t e_{r_1} \wedge g^t e_{s_1}\right] \wedge \ldots \wedge \left[a_{r_l s_l} g^t e_{r_l} \wedge g^t e_{s_l}\right] \\
&= \sum_{\substack{r_1<s_1 \\ \vdots \\ r_l<s_l}} a_{r_1 s_1} \ldots a_{r_l s_l} g^t e_{r_1} \wedge g^t e_{s_1} \wedge \ldots \wedge g^t e_{r_l} \wedge g^t e_{s_l}.
\end{aligned}$$

Applicando il lemma 1.4.2 a g^t otteniamo

$$\begin{aligned}
\widetilde{g^t A g}^{\wedge l} &= \sum_{\substack{r_1<s_1 \\ \vdots \\ r_l<s_l}} a_{r_1 s_1} \ldots a_{r_l s_l} \det\left(g^t\right) e_{r_1} \wedge e_{s_1} \wedge \ldots \wedge e_{r_l} \wedge e_{s_l} \qquad (12) \\
&= \det(g)\left[\sum_{r_1<s_1} a_{r_1 s_1} e_{r_1} \wedge e_{s_1}\right] \wedge \ldots \wedge \left[\sum_{r_l<s_l} a_{r_l s_l} e_{r_l} \wedge e_{s_l}\right] \\
&= \det(g)\underbrace{\widetilde{A} \wedge \ldots \wedge \widetilde{A}}_{l \text{ volte}} = \det(g)\, \widetilde{A}^{\wedge l},
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\widetilde{g^t A g}^{\wedge l}}{l!} = \det(g)\, \frac{\widetilde{A}^{\wedge l}}{l!} = \det(g)\, Pf(A) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2l}. \tag{13}$$

Inoltre sappiamo che

$$\frac{\widetilde{g^t A g}^{\wedge l}}{l!} = Pf(g^t A g) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2l}; \tag{14}$$

quindi, uguagliando i secondi membri di (13) e (14) otteniamo che

$$Pf\left(g^t A g\right) = \det(g)\, Pf(A),$$

cioè la tesi. □

Proposizione 1.4.3 *Sia* $A \in M(2l, \mathbb{K})$ *tale che* $A = -A^t$; *allora esistono* $g \in GL(2l, \mathbb{K})$ *e* $r \in \mathbb{N}$ *tali che*

$$g^t A g = J_r$$

dove J_r *è la matrice antisimmetrica di ordine* $2l$ *che ha i primi* r *blocchi diagonali uguali a*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia

$$\begin{array}{rccc} f_A & : & \mathbb{K}^{2l} \times \mathbb{K}^{2l} & \rightarrow & \mathbb{K}^{2l} \\ & & (x, y) & \rightarrow & x^t A y \end{array}$$

la forma bilineare antisimmetrica associata ad A. Per provare l'affermazione è sufficiente mostrare che esistono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^{2l}$ e $r \in \mathbb{N}$ tali che

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = J_r,$$

dato che, se $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^{2l}$, vale

$$\begin{aligned} J_r &= \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \left[\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)\right]^t \mathfrak{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_A)\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id) \\ &= \left[\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)\right]^t A\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id) \end{aligned}$$

dove $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id) \in GL(2l, \mathbb{K})$.

Procediamo per induzione su l. Supponiamo che $l = 1$; se $f_A = 0$ non c'è niente da dimostrare ($r = 0$). Assumiamo, quindi, che $f_A \neq 0$: segue che esistono $u_1, u_2 \in \mathbb{K}^2$ non nulli tali che $f_A(u_1, u_2) \neq 0$, diciamo $f_A(u_1, u_2) = 1$ (quindi $f_A(u_2, u_1) = -1$). È facile verificare che u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti: infatti, se esistesse $k \in \mathbb{K}$ tale che $u_2 = ku_1$ avremmo

$$f_A(u_1, u_2) = f_A(u_1, ku_1) = kf_A(u_1, u_1) = 0,$$

assurdo. Quindi $\{u_1, u_2\}$ è una base di $\mathbb{K}^2$ e

$$\mathfrak{M}_{\{u_1,u_2\}}^{\{u_1,u_2\}}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_1$$

da cui la tesi.

Supponiamo ora che l'enunciato valga per ogni spazio vettoriale W tale che $\dim_{\mathbb{K}} W = 2s$, dove $1 < s < l$; vogliamo dimostrare che vale anche per $W = \mathbb{K}^{2l}$. Come al punto precedente, assumiamo che $f_A \neq 0$; segue che esistono $u_1, u_2 \in \mathbb{K}^{2l}$ non nulli tali che $f_A(u_1, u_2) = 1$. Anche in questo caso u_1 e u_2 risultano linearmente indipendenti. Sia $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, per quanto dimostrato al passo precedente abbiamo che

$$\mathfrak{M}_{\{u_1,u_2\}}^{\{u_1,u_2\}}\left(f_{A_{|\,U\times U}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_1. \tag{15}$$

Inoltre se $u \in U$, diciamo $u = au_1 + bu_2$, con $a, b \in \mathbb{K}$, si ottiene

$$\begin{aligned} f_A(u, u_1) &= f_A(au_1 + bu_2, u_1) \\ &= af_A(u_1, u_1) + bf_A(u_2, u_1) = -b \end{aligned} \tag{16}$$

e

$$\begin{aligned} f_A(u, u_2) &= f_A(au_1 + bu_2, u_2) \\ &= af_A(u_1, u_2) + bf_A(u_2, u_2) = a. \end{aligned} \tag{17}$$

Poniamo

$$W = \left\{ w \in \mathbb{K}^{2l} \mid f_A(w, u_1) = f_A(w, u_2) = 0 \right\};$$

poichè per ogni $w \in \mathbb{K}^{2l}$ e $u = au_1 + bu_2 \in U$ vale

$$f_A(w, u) = af_A(w, u_1) + bf_A(w, u_2),$$

risulta che

$$W = \left\{ w \in \mathbb{K}^{2l} \mid f_A(w, u) = 0, \text{ per ogni } u \in U \right\} = U^{\perp}.$$

Affermiamo che

$$\mathbb{K}^{2l} = U \overset{\perp}{\oplus} W. \tag{18}$$

Infatti, è chiaro che $U \cap W = \{0\}$ (segue da (16) e (17)); resta così da provare che $\mathbb{K}^{2l} = U + W$. Sia $v \in \mathbb{K}^{2l}$, poniamo

$$u = f_A(v, u_2) u_1 - f_A(v, u_1) u_2$$

e

$$w = v - u.$$

È ovvio che $u \in U$, vogliamo mostrare che $w \in W$: dalle definizioni di u e w e dalle proprietà (16) e (17) otteniamo

$$\begin{aligned} f_A(w, u_1) &= f_A(v-u, u_1) = f_A(v, u_1) - f_A(u, u_1) \\ &= f_A(v, u_1) - f_A(v, u_1) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_A(w, u_2) &= f_A(v-u, u_2) = f_A(v, u_2) - f_A(u, u_2) \\ &= f_A(v, u_2) - f_A(v, u_2) = 0, \end{aligned}$$

da cui $w \in W$. Quindi

$$v = u + w \in U + W$$

da cui (18). Ora $f_{A_{| W \times W}}$ è una forma bilineare antisimmtrica su W e

$$\dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{2l} - \dim_{\mathbb{K}} U = 2l - 2 = 2(l-1).$$

Così, per ipotesi induttiva, esisteranno una base $\{u_3, ..., u_{2l}\}$ di W e $r_W \in \mathbb{N}$ tali che

$$\mathfrak{M}_{\{u_3,...,u_{2l}\}}^{\{u_3,...,u_{2l}\}}\left(f_{A_{| W\times W}}\right) = J_{r_W}.$$

Ricordando (15) e (18) e ponendo $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_{2l}\}$ abbiamo che

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} J_1 & O_{2\times(2l-2)} \\ O_{(2l-2)\times 2} & J_{r_W} \end{pmatrix},$$

da cui la tesi. □

<u>Corollario</u> 1.4.4 *Sia* $A \in M(2l, \mathbb{K})$ *tale che* $A = -A^t$; *allora esiste* $r \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$rk(A) = rk(J_r) = 2r, \tag{19}$$

cioè A ha rango pari.

Corollario 1.4.5 *Sia $A \in M(2l, \mathbb{K})$ tale che $A = -A^t$; allora*

$$rk(A) \geq 2k \Leftrightarrow \widetilde{A}^{\wedge k} \neq 0.$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 1.4.3 segue che esistono $g \in GL(2l, \mathbb{K})$ e $r \in \mathbb{N}$ tali che

$$g^t A g = J_r; \tag{20}$$

inoltre dalla (12) sappiamo che

$$\widetilde{A}^{\wedge k} \neq 0 \Leftrightarrow \widetilde{g^t A g}^{\wedge k} \neq 0,$$

da cui, per (20),

$$\widetilde{A}^{\wedge k} \neq 0 \Leftrightarrow \widetilde{J_r}^{\wedge k} \neq 0. \tag{21}$$

Osserviamo che il bivettore associato a J_r è

$$\widetilde{J_r} = \sum_{i=0}^{r-1} e_{2i+1} \wedge e_{2i+2};$$

quindi

$$\widetilde{J_r}^{\wedge k} \neq 0 \Leftrightarrow k \leq r,$$

da cui la tesi per (19) e (21). $\square$

Corollario 1.4.6 *Sia $A \in M(2l, \mathbb{K})$ tale che $A = -A^t$; allora $rk(A) \geq 2k$ se e solo se A contiene uno Pfaffiano principale di ordine $2k$ non nullo.*

Proposizione 1.4.7 *Sia J_l la matrice antisimmetrica $2l \times 2l$ costituita da l blocchi diagonali uguali a*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

allora

$$Pf\left(J_l\right)=1.$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia $\widetilde{J_l}$ il bivettore associato a J_l, abbiamo che

$$\widetilde{J_l}=\sum_{i=0}^{l-1} e_{2i+1}\wedge e_{2i+2}.$$

Quindi per induzione su l possiamo provare che

$$\widetilde{J_l}^{\wedge l}=l!e_1\wedge e_2\wedge ...\wedge e_{2l}. \tag{22}$$

Infatti, se $l=1$ vale

$$\widetilde{J_1}^{\wedge 1}=\widetilde{J_1}=e_1\wedge e_2.$$

Se $l>1$ supponiamo che (22) valga per l, vogliamo provare che vale anche per $l+1$.

Scriviamo

$$\widetilde{J_{l+1}}=\widetilde{J_l}+e_{2l+1}\wedge e_{2l+2}$$

dove abbiamo immerso $\mathbb{K}^{2l}$ in $\mathbb{K}^{2l+2}$ estendendo a 0 le componenti mancanti; abbiamo che

$$\begin{aligned}
\widetilde{J_{l+1}}^{\wedge l+1} &= \underbrace{\widetilde{J_{l+1}}\wedge ...\wedge \widetilde{J_{l+1}}}_{l+1\ volte}\\
&= \underbrace{\left(\widetilde{J_l}+e_{2l+1}\wedge e_{2l+2}\right)\wedge ...\wedge\left(\widetilde{J_l}+e_{2l+1}\wedge e_{2l+2}\right)}_{l+1\ volte}\\
&= \sum_{i=0}^{l+1}\binom{l+1}{i}\widetilde{J_l}^{\wedge i}\wedge\left(e_{2l+1}\wedge e_{2l+2}\right)^{\wedge l+1-i},
\end{aligned}$$

essendo

$$\widetilde{J_l}\wedge e_{2l+1}\wedge e_{2l+2}=e_{2l+1}\wedge e_{2l+2}\wedge\widetilde{J_l}.$$

Poichè

$$(e_{2l+1} \wedge e_{2l+2})^{\wedge k} = 0 \text{ per ogni } k > 1,$$

risulta

$$\widetilde{J_{l+1}}^{\wedge l+1} = \widetilde{J_l}^{\wedge l+1} + (l+1)\, \widetilde{J_l}^{\wedge l} \wedge e_{2l+1} \wedge e_{2l+2}$$

da cui, per ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned} \widetilde{J_{l+1}}^{\wedge l+1} &= l! e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_{2l} \wedge \widetilde{J_l} + (l+1)\, l! e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_{2l} \wedge e_{2l+1} \wedge e_{2l+2} \\ &= (l+1)! e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_{2l+2}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{\widetilde{J_l}^{\wedge l}}{l!} = \frac{l! e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_{2l}}{l!} = e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_{2l},$$

da cui

$$Pf\,(J_l) = 1.$$

□

Le proposizioni precedenti ci consentono di provare che la definizione *alternante* di Pfaffiano è equivalente a quella fornita all'inizio del paragrafo.

A tal riguardo vale la seguente:

Proposizione 1.4.8 *Sia* $A \in M\,(2l, \mathbb{K})$ *tale che* $A = -A^t$; *allora*

$$[Pf\,(A)]^2 = \det\,(A)\,. \tag{23}$$

Dimostrazione. Analizziamo in primo luogo il caso in cui A sia non degenere: per la proposizione 1.4.3 esiste $g \in GL\,(2l, \mathbb{K})$ tale che

$$g^t A g = J_l. \tag{24}$$

Quindi, essendo $Pf\,(J_l) = 1$, dalla proposizione 1.4.1 segue che

$$Pf\,(A) = \frac{1}{\det(g)}. \tag{25}$$

D'altronde, per il teorema di Binet,

$$\det\left(g^t A g\right) = \det\left(g^t\right)\det(A)\det(g) = [\det(g)]^2\det(A)$$

da cui, per (24),

$$\det(A) = \frac{\det(J_l)}{[\det(g)]^2}. \tag{26}$$

Così, poichè valgono (25) e (26), per ottenere la tesi è sufficiente provare che

$$\det(J_l) = 1. \tag{27}$$

Procediamo per induzione su l: se $l = 1$ allora

$$\det(J_1) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Se $l > 1$ supponiamo che (27) valga per l, vogliamo provare che vale anche per $l + 1$: osserviamo che

$$J_{l+1} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & J_l & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

quindi, sviluppando rispetto all'ultima colonna e applicando l'ipotesi induttiva, otteniamo

$$
\begin{aligned}
\det\left(J_{l+1}\right) &= (-1)^{2l+1+2l+2} \times 1 \times \left[\det \begin{pmatrix} & & 0 \\ & J_l & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \\
&= -\left[(-1)^{2l+1+2l+1} \times (-1) \times \det\left(J_l\right)\right] \\
&= -\left[-\det\left(J_l\right)\right] = 1,
\end{aligned}
$$

da cui (23).

Se, invece, A è degenere dalla proposizione 1.4.3 segue che esistono $g \in GL\left(2l, \mathbb{K}\right)$ e $r < l$ tali che

$$g^t A g = J_r.$$

In virtù della proposizione 1.4.1 sappiamo che

$$Pf\left(g^t A g\right) = \det\left(g\right) Pf(A),$$

quindi, essendo

$$Pf\left(J_r\right) = 0,$$

abbiamo

$$Pf\left(A\right) = 0,$$

da cui (23). $\square$

1.5 Varietà algebriche proiettive

In questo paragrafo richiamiamo alcune nozioni di base di geometria algebrica.

Sia $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ lo spazio proiettivo complesso di dimensione N e siano $Z_0, .., Z_N$ le sue coordinate omogenee.

Definizione 1.5.1 Sia $F \in \mathbb{C}[Z_0, .., Z_N]$ e sia $d \in \mathbb{N}$, F si dice **omogeneo di grado d** se per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $Z \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ vale

$$F(\lambda Z) = \lambda^d F(Z).$$

Osservazione 1.5.1 È facile verificare che $F \in \mathbb{C}[Z_0, .., Z_N]$ non definisce una funzione su $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, ma se F è omogeneo (di grado d) ha senso parlare del suo luogo di zeri.

Poniamo la seguente:

Definizione 1.5.2 Una **varietà algebrica proiettiva** $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è il luogo degli zeri di una collezione di polinomi omogenei $\{F_\alpha(Z_0, .., Z_N)\}$.

Per poter parlare di dimensione di una varietà algebrica proiettiva sono necessarie alcune definizioni preliminari.

Definizione 1.5.3 Una **varietà complessa** M è una varietà differenziabile che ammette un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ e delle mappe coordinate

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^m$$

con la seguente proprietà: per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ l'applicazione

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^m \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^m$$

è olomorfa.

Il numero m è detto **dimensione complessa** di M e si denota $m = \dim_{\mathbb{C}} M$.

Sia M una varietà complessa, diamo le seguenti:

<u>Definizione</u> 1.5.4 Una **sottovarietà complessa** della varietà M è un sottoinsieme S di M dato localmente come luogo di zeri di una collezione di funzioni olomorfe $f_1, ..., f_k$ tali che

$$rank J(f_1, ..., f_k) = k.$$

<u>Definizione</u> 1.5.5 Una **sottovarietà analitica** della varietà M è un sottoinsieme N di M dato localmente come luogo di zeri di una collezione finita di funzioni olomorfe.

Sia N una sottovarietà analitica di M; poniamo la seguente:

<u>Definizione</u> 1.5.6 $p \in N$ si dice **punto liscio** se N è una sottovarietà complessa di M in un intorno di p. L'**insieme dei punti lisci** di N si denota con N^*.

$p \in N \backslash N^*$ si dice **punto singolare**. $N \backslash N^*$ si chiama **insieme dei punti singolari** di N e si denota con N_s.

<u>Osservazione</u> 1.5.2 Se $N = N^*$ allora N è una sottovarietà complessa di M e si dice **liscia**.

<u>Osservazione</u> 1.5.3 ([7]) N_s è contenuto in una sottovarietà analitica di M non uguale a N.

Poniamo inoltre la seguente:

<u>Definizione</u> 1.5.6 N si dice **irriducibile** se per ogni coppia di sottovarietà analitiche N_1 e N_2 di N tali che $N = N_1 \cup N_2$ accade che $N_1 = \emptyset$ e $N_2 = N$ (o viceversa).

A tal riguardo vale il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a [7]:

Proposizione 1.5.1 *Una sottovarietà analitica N è irriducibile se e solo se N^* è connesso.*

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per dare la seguente:

Definizione 1.5.7 Sia N una sottovarietà analitica irriducibile di M, si dice **dimensione** di N la dimensione della varietà complessa N^*.

In particolare, il concetto di dimensione suddetto si applica ad una varietà algebrica proiettiva in virtù del seguente:

Teorema 1.5.2 *Se $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è una varietà algebrica proiettiva allora X è una sottovarietà analitica di $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.*

Per completezza riportiamo anche il viceversa del teorema precedente:

Teorema 1.5.3 (**Chow**, [7]) *Ogni sottovarietà analitica di $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è una varietà algebrica proiettiva.*

Infine poniamo la seguente:

Definizione 1.5.8 Una varietà algebrica proiettiva $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ si dice **omogenea** se esiste un gruppo G che agisce transitivamente su di essa.

Osservazione 1.5.4 È facile verificare che se X è omogenea allora X è liscia.

1.6 Algebra di Clifford

Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2 (principalmente ci occuperemo del caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione pari $n = 2h > 0$ e sia Q una forma quadratica su V con forma bilineare associata B non degenere.

Poniamo la seguente:

Definizione 1.6.1 Sia $T(V)$ l'algebra tensoriale su V e sia $I_Q(V) \subset T(V)$ l'ideale generato da tutti gli elementi della forma

$$v \otimes v - Q(v) \cdot 1$$

al variare di $v \in V$. L'**algebra di Clifford** $Cl(V, Q)$ **associata a** (V, Q) è una $\mathbb{K}$-algebra con unità definita come il quoziente

$$Cl(V, Q) = T(V) / I_Q(V).$$

Proposizione 1.6.1 *Siano* $v, w \in V$, *allora*

$$v \otimes w + w \otimes v - 2B(v, w) \cdot 1 \in I_Q(V).$$

Dimostrazione. Poichè $v, w, v + w \in V$, abbiamo che

$$v \otimes v - Q(v) \cdot 1,\ w \otimes w - Q(w) \cdot 1,\ (v + w) \otimes (v + w) - Q(v + w) \cdot 1$$

sono generatori di $I_Q(V)$, quindi sono elementi di $I_Q(V)$.

Dunque, essendo $I_Q(V)$ un ideale, risulta

$$\begin{aligned} & (v + w) \otimes (v + w) - Q(v + w) \cdot 1 - [v \otimes v - Q(v) \cdot 1 + w \otimes w - Q(w) \cdot 1] \\ = \ & v \otimes w + w \otimes v - [Q(v + w) - Q(v) - Q(w)] \cdot 1 \\ = \ & v \otimes w + w \otimes v - 2B(v, w) \cdot 1 \in I_Q(V). \qquad \square \end{aligned}$$

Analogamente al caso dell'algebra tensoriale, anche nell'algebra di Clifford ci sono elementi pari ed elementi dispari.

In tal senso vale il seguente:

Teorema 1.6.2 *Siano*

$$T(V)_+ = \underset{r\ pari}{\oplus} T^r(V) \ \ e\ T(V)_- = \underset{r\ dispari}{\oplus} T^r(V)\,;$$

poniamo

$$\begin{aligned} Cl(V,Q)_+ &= T(V)_+ / I_Q(V) \cap T(V)_+ \\ Cl(V,Q)_- &= T(V)_- / I_Q(V) \cap T(V)_- \,. \end{aligned}$$

Risulta:

i) $Cl(V,Q) = Cl(V,Q)_+ \oplus Cl(V,Q)_-$;

ii) $Cl(V,Q)_+$ *è una sottoalgebra di* $Cl(V,Q)$.

In particolare chiamiamo **pari** *gli elementi di* $Cl(V,Q)_+$ *e* **dispari** *gli elementi di* $Cl(V,Q)_-$.

Dimostrazione. È ovvio che

$$T(V) = T(V)_+ \oplus T(V)_-$$

e che valgono le seguenti inclusioni:

$$\begin{aligned} T(V)_+ \otimes T(V)_+ &\subset T(V)_+ \\ T(V)_+ \otimes T(V)_- &\subset T(V)_- \\ T(V)_- \otimes T(V)_+ &\subset T(V)_- \\ T(V)_- \otimes T(V)_- &\subset T(V)_+ \,. \end{aligned}$$

Ora, i generatori di $I_Q(V)$ sono elementi di $T(V)_+$ e poichè $T(V)$ ha una base composta da elementi omogenei (di gradi diversi) risulta che

$$I_Q(V) = \left[I_Q(V) \cap T(V)_+\right] \oplus \left[I_Q(V) \cap T(V)_-\right].$$

Quindi i sottospazi vettoriali $Cl(V,Q)_+$ e $Cl(V,Q)_-$ di $Cl(V,Q)$ verificano l'affermazione i) e valgono le seguenti relazioni:

$$Cl(V,Q)_+ \cdot Cl(V,Q)_+ \subset Cl(V,Q)_+ \tag{28}$$

$$Cl(V,Q)_+ \cdot Cl(V,Q)_- \subset Cl(V,Q)_-$$

$$Cl(V,Q)_- \cdot Cl(V,Q)_+ \subset Cl(V,Q)_-$$

$$Cl(V,Q)_- \cdot Cl(V,Q)_- \subset Cl(V,Q)_+.$$

L'affermazione ii) segue da (28) e dal fatto che $Cl(V,Q)_+$ contiene $1_{Cl(V,Q)}$. $\square$

<u>Osservazione</u> 1.6.1 $Cl(V,Q)_-$ non è una sottoalgebra di $Cl(V,Q)$.

Costruiamo adesso l'*antiautomorfismo principale* di $Cl(V,Q)$.

Sia $r \geq 0$ e sia

$$\alpha_r : \underbrace{V \times ... \times V}_{r\ volte} \to T^r(V)$$

l'applicazione r-lineare definita da

$$\alpha_r(v_1, ..., v_r) = v_r \otimes ... \otimes v_1$$

per ogni $v_1, ..., v_r \in V$. In virtù della generalizzazione del teorema 1.3.1 esiste un'unica applicazione lineare

$$\alpha_r^T : T^r(V) \to T^r(V)$$

tale che

$$\alpha_r^T (v_1 \otimes ... \otimes v_r) = v_r \otimes ... \otimes v_1$$

per ogni $v_1, ..., v_r \in V$.

Proposizione 1.6.3 *Estendendo per linearità tutte le applicazioni* α_r^T *otteniamo un'applicazione lineare*

$$\alpha^T : T(V) \to T(V)$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

i) $\left(\alpha^T\right)^2 = id\,(T(V))$;

ii) $\alpha^T(\mathbb{K}) = id\,(\mathbb{K})$ *e* $\alpha^T(V) = id\,(V)$;

iii) α^T *è un antiautomorfismo di* $T(V)$;

iv) $\alpha^T(I_Q(V)) = I_Q(V)$.

Dimostrazione. Le affermazioni i) e ii) sono ovvie.

Siano

$$t = v_1 \otimes ... \otimes v_r \text{ e } t' = w_1 \otimes ... \otimes w_s$$

con $v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s \in V$.

Risulta

$$\alpha^T(t \otimes t') = w_s \otimes ... \otimes w_1 \otimes v_r \otimes ... \otimes v_1 = \alpha^T(t') \otimes \alpha^T(t)$$

da cui la iii).

Proviamo ora la iv): innanzitutto dalla linearità di α^T e dalle proprietà ii) e iii) segue che α^T porta i generatori di $I_Q(V)$ in sé; infatti, per ogni $v \in V$, vale

$$\begin{aligned}\alpha^T(v \otimes v - Q(v) \cdot 1) &= \alpha^T(v \otimes v) - \alpha^T(Q(v) \cdot 1) \\ &= v \otimes v - Q(v) \cdot 1.\end{aligned}$$

Sia ora $i \in I_Q(V)$: i è somma di prodotti della forma

$$t \otimes [v \otimes v - Q(v) \cdot 1] \otimes t'$$

con $t, t' \in T(V)$ e $v \in V$. Si ha che

$$\alpha^T(t \otimes [v \otimes v - Q(v) \cdot 1] \otimes t) = \alpha^T(t') \otimes [v \otimes v - Q(v) \cdot 1] \otimes \alpha^T(t).$$

Dunque, per la linearità di α^T e poichè $I_Q(V)$ è un ideale, risulta che $\alpha^T(i) \in I_Q(V)$, da cui la tesi. □

Corollario 1.6.4 α^T *induce un'applicazione lineare*

$$\alpha : Cl(V, Q) \to Cl(V, Q)$$

tale che:

i) $(\alpha)^2 = id(Cl(V, Q))$;

ii) α *è un antiautomorfismo di* $Cl(V, Q)$;

iii) $\alpha\left(Cl(V, Q)_+\right) = Cl(V, Q)_+$;

iv) $\alpha\left(Cl(V, Q)_-\right) = Cl(V, Q)_-$.

α *è l'***antiautomorfismo principale** *di* $Cl(V, Q)$.

Per l'algebra di Clifford vale un risultato simile al teorema 1.3.1:

<u>Teorema</u> 1.6.5 (**Proprietà universale dell'algebra di Clifford**) *Sia A una $\mathbb{K}$-algebra con unità 1 e sia $f : V \to A$ un'applicazione lineare tale che*

$$(f(v))^2 = Q(v) \cdot 1 \text{ per ogni } v \in V. \tag{29}$$

Valgono i seguenti fatti:

i) *è possibile estendere f ad un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre*

$$\psi : Cl(V, Q) \to A;$$

ii) *se inoltre $f(V)$ genera A allora ψ è suriettivo.*

<u>Dimostrazione</u>. Poichè V genera $T(V)$ (osservazione 1.3.3), f può essere estesa ad un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre

$$\Phi : T(V) \to A.$$

Su $T^r(V)$ Φ è definito da

$$\Phi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = f(v_1) \cdot \ldots \cdot f(v_r),$$

per ogni $v_1, \ldots, v_r \in V$. È facile verificare che $I_Q(V) \subset \ker \Phi$: infatti, sia $v \in V$, dalle proprietà di Φ e da (29) si ottiene

$$\begin{aligned} \Phi(v \otimes v - Q(v) \cdot 1) &= \Phi(v \otimes v) - Q(v) \cdot \Phi(1) \\ &= \Phi(v) \cdot \Phi(v) - Q(v) \cdot 1 \\ &= (f(v))^2 - (f(v))^2 = 0. \end{aligned}$$

Dal teorema fondamentale degli omomorfismi di anelli segue che, indicata con π la proiezione canonica di $T(V)$ in $Cl(V, Q)$, esiste un unico omomorfismo

$$\psi : Cl(V, Q) \to A$$

tale che $\psi \circ \pi = \Phi$, da cui i).

Per dimostrare l'affermazione ii) procediamo nel modo seguente: sia $a \in A$, poichè A è generato da $f(V)$, a è somma di prodotti del tipo

$$\lambda f(v_1) \cdot ... \cdot f(v_s)$$

con $v_1, ..., v_s \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Posto

$$\varphi = \pi(\lambda v_1 \otimes ... \otimes v_s)$$

abbiamo

$$\psi(\varphi) = \Phi(\lambda v_1 \otimes ... \otimes v_s) = \lambda f(v_1) \cdot ... \cdot f(v_s),$$

da cui la tesi per la linearità di ψ. $\square$

Il teorema 1.6.5 è molto importante perchè consente di dimostrare moltissimi altri risultati sull'algebra di Clifford, primo tra tutti l'*isomorfismo di spazi vettoriali con l'algebra esterna*:

Teorema 1.6.6 *Sia* $\Lambda(V)$ *l'algebra esterna su* V *e sia* B_0 *una forma bilineare su* V *tale che*

$$B_0(v,v) = Q(v) \ \textit{per ogni}\ v \in V. \tag{30}$$

$\Lambda(V)$ *e* $Cl(V,Q)$ *sono isomorfi come spazi vettoriali.*

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in tre passi principali.

1. *Costruzione di un'applicazione lineare* $\vartheta : Cl(V,Q) \to \Lambda(V)$.

Sia B_0 una forma bilineare su V che soddisfa (30): per ogni $v \in V$

$$B_0(v,\ ) : V \to \mathbb{K}$$

è un'applicazione lineare. Quindi, per il teorema 1.3.4, esiste un'unica antiderivazione δ_v su $\Lambda(V)$ con le seguenti proprietà:

i) $\delta_v(w) = B_0(v,w)\cdot 1$, per ogni $w \in V$;

ii) $(\delta_v)^2 = 0$;

iii) δ_v è omogenea di grado -1.

Inoltre, per ogni $v \in V$, denotiamo con L_v la moltiplicazione a sinistra per v in $\Lambda(V)$, cioè

$$L_v(\gamma) = v \wedge \gamma \text{ per ogni } \gamma \in \Lambda(V).$$

Sia

$$f : V \to End(\Lambda(V))$$

l'applicazione lineare definita da

$$f(v) = \delta_v + L_v \text{ per ogni } v \in V.$$

È facile verificare che f soddisfa (29); infatti, dato $\gamma \in \Lambda(V)$, dalle proprietà di $\wedge$ e di δ_v otteniamo che

$$\begin{aligned}
(f(v))^2(\gamma) &= (\delta_v)^2(\gamma) + (\delta_v \circ L_v)(\gamma) + (L_v \circ \delta_v)(\gamma) + (L_v)^2(\gamma) \\
&= \delta_v(v \wedge \gamma) + v \wedge \delta_v(\gamma) \\
&= \delta_v(v) \wedge \gamma = B_0(v,v) \wedge \gamma = Q(v)\gamma.
\end{aligned}$$

Dunque, per il teorema 1.6.5, esiste un unico omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre

$$\psi : Cl(V,Q) \to End(\Lambda(V))$$

che fa commutare il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & End\left(\Lambda\left(V\right)\right) \\ \pi_{|\,V} \searrow & \circlearrowleft & \nearrow \psi \\ & Cl\left(V,Q\right) & \end{array}$$

dove $\pi_{|V}$ è la restrizione a V della proiezione canonica

$$\pi : T\left(V\right) \to Cl\left(V,Q\right).$$

Osserviamo che, se $v \in V$ allora

$$f\left(v\right)\left(1\right) = \delta_v\left(1\right) + L_v\left(1\right) = v$$

da cui

$$f\left(v\right) = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

cioè

$$f : V \to f\left(V\right)$$

è un isomorfismo. Pertanto $\psi \circ \pi_{|V}$ è un isomorfismo di V; necessariamente

$$\pi : V \to \pi\left(V\right)$$

è un isomorfismo, cioè V è identificabile con un sottospazio vettoriale di $Cl\left(V,Q\right)$.

Inoltre

$$\psi_{|\,\pi(V)} : \pi\left(V\right) \to f\left(V\right)$$

è un isomorfismo, da cui

$$v^2 = Q\left(v\right) \cdot 1 \text{ per ogni } v \in V. \tag{31}$$

Infatti

$$\begin{aligned} v^2 &= \pi(v)^2 = \psi^{-1}_{|\,\pi(V)}\left(\psi(\pi(v))^2\right) = \psi^{-1}_{|\,\pi(V)}\left(f(v)^2\right) \\ &= \psi^{-1}_{|\,\pi(V)}\left(Q(v)\cdot 1\right) = Q(v)\cdot 1. \end{aligned}$$

Quindi, per ogni $v, w \in V$, abbiamo che

$$Q(v+w)\cdot 1 = (v+w)^2 = Q(v)\cdot 1 + vw + wv + Q(w)\cdot 1$$

cioè

$$v\cdot w + w\cdot v = 2B(v,w)\cdot 1. \tag{32}$$

Sia ora

$$\vartheta : Cl(V,Q) \to \Lambda(V)$$

l'applicazione lineare definita da

$$\vartheta(\varphi) = \psi(\varphi)(1) \text{ per ogni } \varphi \in Cl(V,Q).$$

Osserviamo che ϑ coincide con l'applicazione identica su $\mathbb{K}\cdot 1$ e V.

Vogliamo dimostrare che ϑ è l'isomorfismo cercato.

2. *Suriettività di* ϑ.

Per costruzione, $\vartheta(Cl(V,Q)) \subset \Lambda(V)$; resta da provare che

$$\Lambda(V) \subset \vartheta(Cl(V,Q)). \tag{33}$$

Siano $v_1, ..., v_r \in V$, risulta

$$\begin{aligned} \psi(v_1\cdot ...\cdot v_r) &= \psi(v_1)\circ ...\circ \psi(v_r) = f(v_1)\circ ...\circ f(v_r) \\ &= (\delta_{v_1} + L_{v_1})\circ ...\circ (\delta_{v_r} + L_{v_r}); \end{aligned}$$

essendo i δ_{v_i} omogenei di grado -1 e gli L_{v_i} omogenei di grado $+1$, per ogni $i \in \{1, ...r\}$, dall'osservazione 1.3.6 segue che

$$\psi\left(v_1 \cdot ... \cdot v_r\right) = L_{v_1} \circ ... \circ L_{v_r} + \sum_{g=-r}^{r-1} f_g$$

con $f_g \in End\left(\Lambda\left(V\right)\right)$ omogeneo di grado g.

Quindi

$$\vartheta\left(v_1 \cdot ... \cdot v_r\right) = v_1 \wedge ... \wedge v_r + \sum_{g=0}^{r-1} f_g\left(1\right). \tag{34}$$

Poniamo

$$F_r = \begin{cases} \{0\} & \text{se} \quad r = 0 \\ \bigoplus_{g=0}^{r-1} \Lambda^g\left(V\right) & \text{se} \quad r \in \mathbb{Z}^+ \end{cases};$$

poichè $\Lambda^r\left(V\right)$ è generato dai prodotti di r elementi di V, (34) implica che

$$\Lambda^r\left(V\right) \subset \vartheta\left(Cl\left(V, Q\right)\right) + F_r \text{ per ogni } r \geq 0. \tag{35}$$

Così, procedendo per induzione su r otteniamo che

$$\Lambda^r\left(V\right) \subset \vartheta\left(Cl\left(V, Q\right)\right) \text{ per ogni } r \geq 0. \tag{36}$$

Infatti, se $r = 0$ l'enunciato è ovvio; supponiamo che $r > 0$ e che (36) valga fino a $r - 1$, vogliamo mostrare che vale anche per r. Da (35) e dall'ipotesi induttiva segue che

$$\begin{aligned} \Lambda^r\left(V\right) &\subset \vartheta\left(Cl\left(V, Q\right)\right) + F_r = \vartheta\left(Cl\left(V, Q\right)\right) + \Lambda^0\left(V\right) + ... + \Lambda^{r-1}\left(V\right) \\ &\subset \underbrace{\vartheta\left(Cl\left(V, Q\right)\right) + ... + \vartheta\left(Cl\left(V, Q\right)\right)}_{r \text{ volte}} = \vartheta\left(Cl\left(V, Q\right)\right). \end{aligned}$$

Dunque vale (33), da cui segue che ϑ è suriettiva.

Osserviamo che, per il teorema di nullità e rango,

$$\dim_{\mathbb{K}} Cl\,(V,Q) = \dim_{\mathbb{K}} \ker \vartheta + 2^n \geq 2^n. \tag{37}$$

3. *Iniettività di ϑ.*

In virtù di (37) è sufficiente provare che

$$\dim_{\mathbb{K}} Cl\,(V,Q) \leq 2^n. \tag{38}$$

Sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V, sia $\sigma = \{i_1, ..., i_r\}$ una sequenza di interi tale che $1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n$ e sia $P\,(\sigma)$ il prodotto $v_{i_1} \cdot ... \cdot v_{i_r}$ in $Cl\,(V,Q)$ (se indichiamo con σ_0 la sequenza vuota, per convenzione poniamo $P\,(\sigma_0) = 1$). Per ogni $r \in \mathbb{Z}_0^+$ indichiamo con $Cl\,(V,Q)_r$ lo spazio generato dai $P\,(\sigma)$ per le sequenze σ lunghe r e poniamo

$$D_r = \bigoplus_{r'=0}^{r} Cl\,(V,Q)_{r'}\,.$$

Per ottenere (38) basta dimostrare che

$$D_n = Cl\,(V,Q)\,;$$

infatti, i prodotti $P\,(\sigma)$ sono un sistema di generatori di D_n costituito da 2^n elementi, da cui

$$\dim_{\mathbb{K}} D_n \leq 2^n.$$

È ovvio che $D_n \subset Cl\,(V,Q)$, resta da provare che

$$Cl\,(V,Q) \subset D_n. \tag{39}$$

Per prima cosa dimostriamo che se $\sigma = \{i_1, ..., i_r\}$ allora $v_i \cdot P\,(\sigma)$ è combinazione lineare degli elementi $P\,(\sigma')$, dove $\sigma' = \{j_1, ..., j_{r'}\}$ con $r' \leq r+1$ e $j_1 \geq \min\{i, i_1, ..., i_r\}$, per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ e $r \geq 0$. Procediamo per induzione su r: se $r = 0$ allora, ponendo $j_1 = 1$, $r' = 1$ e $\sigma' = \{i\}$, otteniamo

$$v_i \cdot P(\sigma_0) = v_i \cdot 1 = P(\sigma').$$

Supponiamo quindi che $r > 0$ e che l'affermazione sia vera fino a $r - 1$, vogliamo provare che è vera anche per r:

1° caso: se $i < i_1$ allora, ponendo $j_1 = i$, $r' = r + 1$ e $\sigma' = \{i, i_1, ..., i_r\}$, otteniamo

$$v_i \cdot P(\sigma) = v_i \cdot v_{i_1} \cdot ... \cdot v_{i_r} = P(\sigma').$$

2° caso: se $i = i_1$ allora, ponendo $j_1 = i_2$, $r' = r - 1$ e $\sigma' = \{i_2, ..., i_r\}$, da (31) otteniamo che

$$v_i \cdot P(\sigma) = v_i^2 \cdot v_{i_2} \cdot ... \cdot v_{i_r} = Q(v_i) P(\sigma').$$

3° caso: se $i > i_1$ allora da (32) otteniamo che

$$\begin{aligned} v_i \cdot P(\sigma) &= (v_i \cdot v_{i_1}) \cdot P(\{i_2, ..., i_r\}) \\ &= 2B(v_i, v_{i_1}) P(\{i_2, ..., i_r\}) - v_{i_1} v_i P(\{i_2, ..., i_r\}); \end{aligned}$$

ora, per ipotesi induttiva, $v_i P\{i_2, ..., i_r\}$ è combinazione lineare dei $P(\sigma'')$, dove $\sigma'' = \{k_1, ..., k_{r''}\}$ con $r'' \leq (r-1)+1 = r$ e $k_1 \geq \min\{i, i_2, ..., i_r\} > i_1$. Quindi, per quanto dimostrato nel 1° caso,

$$v_{i_1} P(\sigma'') = P(\{i_1, k_1, ..., k_{r''}\})$$

da cui la tesi.

Dunque, poichè i $P(\sigma)$ sono un sistema di generatori per D_n,

$$v_i \cdot D_n \subset D_n \text{ per ogni } i \in \{1, ..., n\}$$

da cui, essendo $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V,

$$v \cdot D_n \subset D_n \text{ per ogni } v \in V.$$

Ora, poichè V genera $Cl\,(V, Q)$, risulta che

$$\varphi \cdot D_n \subset D_n \text{ per ogni } \varphi \in Cl\,(V, Q)\,;$$

quindi, se $\varphi \in Cl\,(V, Q)$ allora $\varphi = \varphi \cdot 1 \in D_n$, cioè vale (39).

Pertanto ϑ è un isomorfismo di spazi vettoriali tra $Cl\,(V, Q)$ e $\Lambda\,(V)$. $\square$

Osservazione 1.6.2 Dalla dimostrazione del teorema 1.6.6 emergono alcuni fatti che saranno molto utili in seguito:

i) V è identificabile con un sottospazio vettoriale di $Cl\,(V, Q)$;

ii) $v^2 = Q\,(v) \cdot 1$ per ogni $v \in V$;

iii) $v \cdot w + w \cdot v = 2B\,(v, w) \cdot 1$ per ogni $v, w \in V$.

Osservazione 1.6.3 In generale θ non è un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre: infatti, dati $\varphi_1, \varphi_2 \in Cl\,(V, Q)$, non è sempre vero che

$$\vartheta\,(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = [\psi\,(\varphi_1) \circ \psi\,(\varphi_2)]\,(1)$$

coincide con

$$\vartheta\,(\varphi_1) \wedge \vartheta\,(\varphi_2) = \psi\,(\varphi_1)\,(1) \wedge \psi\,(\varphi_2)\,(1)\,.$$

Dal teorema 1.6.6 discendono i seguenti:

Corollario 1.6.7 *$Cl\,(V, Q)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione 2^n.*

Corollario 1.6.8 *Se $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V allora*

$$\overline{\mathcal{B}} = \{v_{i_1} \cdot ... \cdot v_{i_r} \mid i_1, .., i_r \in \mathbb{N},\, 1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n\}$$

è una base di $Cl\,(V,Q)$.

In particolare, da (34) si ha immediatamente il seguente:

Corollario 1.6.9 *Sia* $\widetilde{Cl\,(V,Q)}_r$ *il sottospazio vettoriale di* $Cl\,(V,Q)$ *generato dai prodotti di al più* r *elementi di* V *e siano* $v_1,...,v_r \in V$. *Valgono i seguenti fatti*:

i) $\widetilde{Cl\,(V,Q)}_r = \bigoplus_{r'=0}^{r} \Lambda^{r'}(V)$;

ii) *se* $r \geq 2$ *allora* $v_1 \cdot ... \cdot v_r \equiv v_1 \wedge ... \wedge v_r \bmod \widetilde{Cl\,(V,Q)}_{r-2}$;

iii) $Cl\,(V,Q)_+ = \underset{r\ pari}{\oplus} \Lambda^r(V)$ *e* $Cl\,(V,Q)_- = \underset{r\ dispari}{\oplus} \Lambda^r(V)$.

Inoltre:

Corollario 1.6.10 *Sia* A *una* $\mathbb{K}$-*algebra con unità* 1 *e sia* $f : V \to A$ *un'applicazione lineare tale che*

$$(f(v))^2 = Q(v) \cdot 1 \text{ per ogni } v \in V.$$

Se $f(V)$ *genera* A *e* $\dim_{\mathbb{K}} A \geq 2^n$ *allora è possibile estendere* f *ad un isomorfismo di* $\mathbb{K}$-*algebre*

$$\psi : Cl\,(V,Q) \to A.$$

Dimostrazione. Dal teorema 1.6.5 segue che ψ è omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre suriettivo. Inoltre ψ è iniettivo, infatti se, per assurdo, ψ non lo fosse, per il corollario 1.6.7 e per il teorema di nullità e rango si avrebbe

$$\begin{aligned} 2^n &= \dim_{\mathbb{K}} Cl\,(V,Q) = \dim_{\mathbb{K}} \ker \psi + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} \psi \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \ker \psi + \dim_{\mathbb{K}} A > 2^n, \end{aligned}$$

e ciò è assurdo. Quindi ψ è un isomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre. □

Il teorema 1.6.6 ci consente anche di descrivere l'*operazione di moltiplicazione* in $Cl(V,Q)$:

Teorema 1.6.11 *Sia* B_0 *una forma bilineare su* V *tale che*

$$B_0(v,v) = Q(v) \text{ per ogni } v \in V.$$

Fissato $v \in V$, *siano* L_v *la moltiplicazione a sinistra per* v *in* $\Lambda(V)$ *e* δ_v *l'antiderivazione su* $\Lambda(V)$ *tale che*

$$\delta_v(w) = B_0(v,w) \cdot 1 \text{ per ogni } w \in V.$$

La moltiplicazione a sinistra per v *in* $Cl(V,Q)$ *è* $L_v + \delta_v$, *cioè per ogni* $\varphi \in Cl(V,Q)$ *si ha che*

$$v \cdot \varphi = v \wedge \varphi + \delta_v(\varphi).$$

Dimostrazione. Siano $v \in V$ e $\varphi \in Cl(V,Q)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} v \cdot \varphi &= \vartheta(v \cdot \varphi) = \psi(v \cdot \varphi)(1) = [\psi(v) \circ \psi(\varphi)](1) \\ &= [f(v) \circ \psi(\varphi)](1) = (L_v + \delta_v)(\vartheta(\varphi)) \\ &= L_v(\varphi) + \delta_v(\varphi) = v \wedge \varphi + \delta_v(\varphi). \qquad \square \end{aligned}$$

Osservazione 1.6.4 Nonostante che $Cl(V,Q)$ e $\Lambda(V)$ siano lo stesso sottospazio vettoriale di $T(V)$, la moltiplicazione in $Cl(V,Q)$ differisce da quella in $\Lambda(V)$ per un termine derivante dall'introduzione su V di una forma quadratica. Se quest'ultima è la forma nulla allora $Cl(V,Q)$ e $\Lambda(V)$ sono esattamente la stessa algebra.

Vediamo adesso altre due conseguenze del teorema 1.6.5: la prima riguarda l'*algebra di Clifford di un sottospazio vettoriale di* V e la seconda l'*algebra di Clifford di un'estensione di* V.

<u>Teorema</u> 1.6.12 *Sia W un sottospazio vettoriale di V, la sottoalgebra di $Cl\,(V,Q)$ generata da W è isomorfa come $\mathbb{K}$-algebra a $Cl\left(W,Q_{|W}\right)$.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $m=\dim_{\mathbb{K}}W$ e sia D la sottoalgebra di $Cl\,(V,Q)$ generata da W; inoltre sia $\{v_1,...,v_n\}$ una base di V contenente una base di W $\{v_1,...,v_m\}$. Per il corollario 1.6.8 i prodotti $v_{i_1}\cdot...\cdot v_{i_r}$, con $1\leq i_1<...<i_r\leq m$, sono linearmente indipendenti in D, da cui

$$\dim_{\mathbb{K}}D\geq 2^m.$$

Consideriamo ora la restrizione a W della proiezione canonica

$$\pi:T\,(V)\to Cl\,(V,Q)\,;$$

è ovvio che $\pi_{|\,W}$ è lineare e che $\pi_{|\,W}\,(W)$ genera D. Inoltre, per ogni $w\in W$ vale che

$$\left[\pi_{|\,W}\,(w)\right]^2=w^2=Q_{|\,W}\,(w)\cdot 1.$$

Dal corollario 1.6.10 segue la tesi. $\square$

<u>Teorema</u> 1.6.13 *Sia $\widetilde{\mathbb{K}}$ un'estensione di $\mathbb{K}$, sia $\widetilde{V}$ lo spazio vettoriale definito da V estendendo $\mathbb{K}$ a $\widetilde{\mathbb{K}}$ e sia $\widetilde{Q}$ la corrispondente forma quadratica su $\widetilde{V}$. L'algebra $\widetilde{Cl\,(V,Q)}$ definita da $Cl\,(V,Q)$ estendendo $\mathbb{K}$ a $\widetilde{\mathbb{K}}$ è isomorfa come $\mathbb{K}$-algebra a $Cl\left(\widetilde{V},\widetilde{Q}\right)$.*

<u>Dimostrazione</u>. Per ipotesi abbiamo che

$$\widetilde{V}=V\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\mathbb{K}}$$

e

$$\widetilde{Cl\,(V,Q)}=Cl\,(V,Q)\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\mathbb{K}},$$

in particolare, per l'osservazione 1.3.1,

$$\dim_{\mathbb{K}} \widetilde{Cl\left(V,Q\right)} = \dim_{\mathbb{K}} Cl\left(V,Q\right) \cdot \dim_{\mathbb{K}} \widetilde{\mathbb{K}} = 2^n \dim_{\mathbb{K}} \widetilde{\mathbb{K}}$$

e

$$\dim_{\widetilde{\mathbb{K}}} \widetilde{Cl\left(V,Q\right)} = 2^n.$$

Siano ora $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e

$$\widetilde{f} : \widetilde{V} \to \widetilde{Cl\left(V,Q\right)}$$

l'applicazione definita da

$$\widetilde{f}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi\left(v_i\right)$$

con $a_1, ..., a_n \in \widetilde{\mathbb{K}}$. Chiaramante $\widetilde{f}$ è lineare e $\widetilde{f}\left(\widetilde{V}\right)$ genera $\widetilde{Cl\left(V,Q\right)}$. Inoltre dalle osservazioni 1.6.2 e 1.1.7 otteniamo che

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{f}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right)\right]^2 &= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \pi\left(v_i\right)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 v_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_i a_j \left(v_i v_j + v_j v_i\right) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 Q\left(v_i\right) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_i a_j B\left(v_i, v_j\right)\right] \cdot 1 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \widetilde{Q}\left(v_i\right) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_i a_j \widetilde{B}\left(v_i, v_j\right)\right] \cdot 1 \\
&= \widetilde{Q}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \cdot 1.
\end{aligned}$$

Quindi, per il corollario 1.6.10, $Cl\left(\widetilde{V}, \widetilde{Q}\right)$ e $\widetilde{Cl\left(V,Q\right)}$ sono isomorfe come $\mathbb{K}$-algebre.

$\square$

Siamo ora in grado di descrivere la *struttura dell'algebra di Clifford*:

Teorema 1.6.14 *$Cl(V,Q)$ è una $\mathbb{K}$-algebra centrale semplice.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo assumere che Q abbia indice massimale. Infatti, nel caso in cui Q non abbia indice h, sia $\widetilde{\mathbb{K}}$ un campo algebricamente chiuso che estende $\mathbb{K}$, sia $\widetilde{V}$ lo spazio vettoriale definito da V estendendo $\mathbb{K}$ a $\widetilde{\mathbb{K}}$ e sia $\widetilde{Q}$ la corrispondente forma quadratica su $\widetilde{V}$. Risulta che la forma bilineare $\widetilde{B}$ associata a $\widetilde{Q}$ è ancora non degenere, da cui, per i corollari 1.1.9 e 1.1.11, $\widetilde{Q}$ ha indice h. Quindi, se dimostriamo che $Cl\left(\widetilde{V},\widetilde{Q}\right)$ è un'algebra centrale semplice allora, per il teorema 1.6.13, anche $\widetilde{Cl(V,Q)}$ lo è. Segue che $Cl(V,Q)$ è un'algebra centrale semplice: infatti, se non fosse semplice esisterebbe un ideale bilatero proprio $\mathcal{I}$ di $Cl(V,Q)$ tale che $\mathcal{I}\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\mathbb{K}}$ è un ideale bilatero proprio di $\widetilde{Cl(V,Q)}$, assurdo. Se, inoltre, $Cl(V,Q)$ non fosse centrale allora, detto Z il suo centro, avremmo che $Z\otimes_{\mathbb{K}}\widetilde{\mathbb{K}}$ contiene elementi che non stanno in $\widetilde{\mathbb{K}}$, ma questo non può accadere perchè $\widetilde{Cl(V,Q)}$ è centrale.

Sotto questa ipotesi costruiamo un isomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre tra $Cl(V,Q)$ e $M\left(2^h,\mathbb{K}\right)$; quest'ultima algebra è centrale semplice per la proposizione 1.2.2.

Sia E un sottospazio vettoriale di V totalmente isotropo massimale; per il teorema 1.1.7 esiste un sottospazio vettoriale, F, di V totalmente isotropo massimale tale che

$$V = E \oplus F.$$

Inoltre, se $\{e_1,e_2,...,e_h\}$ è una base di E allora esiste una base di F, $\{f_1,f_2,...,f_h\}$, tale che

$$B(e_i,f_j) = \delta_{ij} \text{ per ogni } i,j\in\{1,...,h\}.$$

Sia ora B_0 la forma bilineare su V definita da

$$\begin{cases} B_0(e_i, e_j) = B_0(f_i, f_j) = B_0(e_i, f_j) = 0 \\ B_0(f_i, e_j) = 2\delta_{ij} \end{cases} \quad \text{per ogni } i, j \in \{1, ..., h\};$$

risulta che

$$B_0(v, v) = Q(v) \text{ per ogni } v \in V. \tag{40}$$

Infatti, siano $a_1, ..., a_h, b_1, ..., b_h \in \mathbb{K}$ e sia $v = \sum_{i=1}^{h} a_i e_i + \sum_{j=1}^{h} b_j f_j \in V$, abbiamo che

$$\begin{aligned} B_0(v, v) &= B_0\left(\sum_{i=1}^{h} a_i e_i + \sum_{j=1}^{h} b_j f_j, \sum_{i=1}^{h} a_i e_i + \sum_{j=1}^{h} b_j f_j\right) \\ &= B_0\left(\sum_{j=1}^{h} b_j f_j, \sum_{i=1}^{h} a_i e_i\right) = \sum_{j=1}^{h}\sum_{i=1}^{h} b_j a_i B_0(f_j, e_i) \\ &= 2\sum_{i=1}^{h} a_i b_i \end{aligned}$$

e, per l'osservazione 1.1.7, si ha

$$\begin{aligned} Q(v) &= Q\left(\sum_{i=1}^{h} a_i e_i + \sum_{j=1}^{h} b_j f_j\right) = 2\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{h} a_i b_j B(e_i, f_j) \\ &= 2\sum_{i=1}^{h} a_i b_i \end{aligned}$$

da cui (40).

Così, per il teorema 1.6.6, mediante B_0 è possibile costruire un isomorfismo di spazi vettoriali tra $Cl(V, Q)$ e $\Lambda(V)$. Inoltre, siano $\Lambda(E)$ e $\Lambda(F)$ le sottoalgebre di $\Lambda(V)$ generate rispettivamente da E ed F. Per costruzione abbiamo che

$$B_{0_{|E\times E}} = B_{0_{|E\times F}} = B_{0_{|F\times F}} = 0 \tag{41}$$

e che $B_{0_{|F\times E}}$ è non degenere, in particolare

$$\delta_v(\Lambda(E)) = \{0\} \text{ per ogni } v \in E.$$

Quindi, per il teorema 1.6.11,

$$v \cdot \gamma = v \wedge \gamma \text{ per ogni } v \in E \text{ e } \gamma \in \Lambda(E),$$

da cui $\Lambda(E)$ è isomorfa come $\mathbb{K}$-algebra alla sottoalgebra di $Cl(V,Q)$ generata da E.

Dal teorema 1.6.12 segue che $\Lambda(E)$ e $Cl\left(E, Q_{|E}\right)$ sono isomorfe come $\mathbb{K}$-algebre.

Analogamente si prova che $\Lambda(F)$ e $Cl\left(F, Q_{|F}\right)$ sono la stessa $\mathbb{K}$-algebra.

Sia $f = f_1 \cdot ... \cdot f_h$, consideriamo l'ideale sinistro $Cl(V,Q)\, f$ di $Cl(V,Q)$; per il corollario 1.6.8

$$\{e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_l} \cdot f_{j_1} \cdot ... \cdot f_{j_m} \mid 1 \leq i_1 < ... < i_l \leq h \text{ e } 1 \leq j_1 < ... < j_m \leq h\}$$

è una base di $Cl(V,Q)$. Inoltre, per ogni $j \in \{1,...,h\}$, risulta

$$f_j f = f_j f_1 \cdot ... \cdot f_h = f_j \wedge f_1 \wedge ... \wedge f_h = 0$$

da cui

$$\{e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_l} f \mid 1 \leq i_1 < ... < i_l \leq h\}$$

è una base di $Cl(V,Q)\, f$. Quindi, a livello di spazi vettoriali si ha l'isomorfismo

$$Cl\left(E, Q_{|E}\right) \backsimeq Cl(V,Q)\, f$$

e

$$Cl(V,Q)\, f = Cl\left(E, Q_{|E}\right) f.$$

Sia ora

$$\widetilde{\rho} : Cl(V,Q) \to End(\Lambda(E))$$

l'applicazione lineare definita da

$$[\widetilde{\rho}(\varphi)(\gamma)]\, f = (\varphi \cdot \gamma)\, f \text{ per ogni } \varphi \in Cl(V,Q) \text{ e } \gamma \in \Lambda(E).$$

È facile verificare che $\widetilde{\rho}$ è un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre: infatti, per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in Cl(V,Q)$ e $\gamma \in \Lambda(E)$ vale che

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\rho}(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(\gamma)] f &= [(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \cdot \gamma] f = [\varphi_1 \cdot \widetilde{\rho}(\varphi_2)(\gamma)] f \\
&= [(\widetilde{\rho}(\varphi_1) \circ \widetilde{\rho}(\varphi_2))(\gamma)] f
\end{aligned}$$

e

$$[\widetilde{\rho}(1)(\gamma)] f = (1 \cdot \gamma) f = id(\gamma) f.$$

Vogliamo dimostrare che $\widetilde{\rho}$ è l'isomorfismo cercato.

Innanzitutto osserviamo che, se $\varphi \in \Lambda(E)$ allora $\widetilde{\rho}(\varphi)$ è la moltiplicazione a sinistra per φ in $\Lambda(E)$. Inoltre, se $v \in E$ da (41) abbiamo che

$$\delta_v(\Lambda(F)) = \{0\}, \tag{42}$$

da cui, per il teorema 1.6.11,

$$v \cdot \lambda = v \wedge \lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda(F);$$

in particolare

$$\gamma f = \gamma \wedge f \text{ per ogni } \gamma \in \Lambda(E). \tag{43}$$

Dunque, se $w \in F$ da (42) e (43) otteniamo che, per ogni $\gamma \in \Lambda(E)$,

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\rho}(w)(\gamma)] f &= w \cdot (\gamma f) = w \wedge \gamma f + \delta_w(\gamma f) \\
&= w \wedge \gamma \wedge f + \delta_w(\gamma \wedge f) = \delta_w(\gamma) \wedge f.
\end{aligned}$$

Poichè $\delta_w(E) = \mathbb{K}\cdot 1$, risulta che $\delta_w(\Lambda(E)) \subset \Lambda(E)$, da cui

$$\widetilde{\rho}(w)(\gamma) = \delta_w(\gamma). \tag{44}$$

Poniamo ora $e = e_h \cdot ... \cdot e_1$, da (44) si ha che

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(f)(e) &= [\widetilde{\rho}(f_1) \circ ... \circ \widetilde{\rho}(f_h)](e_h \cdot ... \cdot e_1) \\ &= (\delta_{f_1} \circ ... \circ \delta_{f_h})(e_h \cdot ... \cdot e_1) = 2^h; \end{aligned}$$

inoltre, essendo $\widetilde{\rho}(f)$ un elemento omogeneo di grado $-h$, esso porta ogni elemento di $\Lambda(E)$ di grado minore di h in 0.

Indichiamo con Σ l'insieme delle sequenze strettamente crescenti di interi, compresi tra 1 e h e sia

$$\xi(\sigma) = e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_r},$$

con $\sigma = \{i_1, ..., i_r\} \in \Sigma$. Per ogni $\sigma, \sigma_1 \in \Sigma$ esiste $\varphi \in Cl(V, Q)$ tale che

$$\widetilde{\rho}(\varphi)(\xi(\sigma')) = \begin{cases} \xi(\sigma_1) & \text{se} \quad \sigma' = \sigma \\ 0 & \text{se} \quad \sigma' \neq \sigma \end{cases}; \tag{45}$$

infatti, sia r la lunghezza di σ e sia $\tau \in \Sigma$ la sequenza costituita dagli interi che non compaiono in σ, è facile verificare che

$$\widetilde{\rho}(\xi(\tau))(\xi(\sigma')) = \begin{cases} \pm e & \text{se } \sigma' = \sigma \\ 0 & \text{se la lunghezza di } \sigma' \text{ è almeno } r \text{ e } \sigma' \neq \sigma \\ \widetilde{\gamma} & \text{se la lunghezza di } \sigma' \text{ è minore di } r \end{cases} \tag{46}$$

dove $\widetilde{\gamma} \in \Lambda(E)$ è un elemento omogeneo di grado minore di h.

Da (46) e dalle proprietà di $\widetilde{\rho}(f)$ segue che

$$\widetilde{\rho}(\pm f \cdot \xi(\tau))(\xi(\sigma')) = \begin{cases} 2^h & \text{se} \quad \sigma' = \sigma \\ 0 & \text{se} \quad \sigma' \neq \sigma \end{cases};$$

quindi

$$\varphi = \pm 2^{-h} \xi(\sigma_1) \cdot f \cdot \xi(\tau)$$

soddisfa (45).

Ora, poichè gli elementi $\xi(\sigma)$ al variare di $\sigma \in \Sigma$ costituiscono una base di $\Lambda(E)$, quanto appena dimostrato implica che $\widetilde{\rho}$ è suriettivo; inoltre, essendo

$$\dim_{\mathbb{K}} Cl(V,Q) = 2^{2h} = \dim_{\mathbb{K}} End(\Lambda(E)),$$

abbiamo che $\widetilde{\rho}$ è un isomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre, da cui la tesi. □

Osservazione 1.6.5 Dalla dimostrazione del teorema 1.6.14 emergono i seguenti fatti:

i) $Cl(V,Q)f = Cl\left(E, Q_{|E}\right)f$ e $fCl(V,Q) = fCl\left(E, Q_{|E}\right)$ sono rispettivamente un ideale sinistro minimale e un ideale destro minimale di $Cl(V,Q)$;

ii) $\widetilde{\rho}$ è una rappresentazione semplice di $Cl(V,Q)$ con spazio di rappresentazione $Cl\left(E, Q_{|E}\right)$;

iii) se $v \in E$ allora $\widetilde{\rho}(v)$ è la moltiplicazione a sinistra per v in $Cl\left(E, Q_{|E}\right)$;

iv) se $w \in F$ allora

$$\widetilde{\rho}(w)(\gamma) = \delta_w(\gamma) \text{ per ogni } \gamma \in Cl\left(E, Q_{|E}\right)$$

dove δ_w è l'antiderivazione omogenea di grado -1 di $Cl\left(E, Q_{|E}\right)$ tale che

$$\delta_w(v) = B_0(w,v) \cdot 1 = 2B(v,w) \cdot 1 \text{ per ogni } v \in E.$$

Per quanto riguarda la *struttura dell'algebra* $Cl(V,Q)_+$ vale il seguente:

Teorema 1.6.15 *L'algebra* $Cl(V,Q)_+$ *è semplice oppure è somma diretta di due ideali semplici.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{I} \subset Cl(V,Q)$ un ideale sinistro minimale e sia

$$\overline{\rho} : Cl(V,Q) \to End(\mathcal{I})$$

la rappresentazione di $Cl\,(V,Q)$ su $\mathcal{I}$ definita da

$$\overline{\rho}\,(\varphi)\,(\omega) = \varphi \cdot \omega$$

per ogni $\varphi \in Cl\,(V,Q)$ e $\omega \in \mathcal{I}$. Essendo $\mathcal{I}$ un ideale sinistro minimale di $Cl\,(V,Q)$, $\overline{\rho}$ è una rappresentazione semplice.

Sia $\overline{\rho}_+ = \overline{\rho}_{|Cl(V,Q)_+}$ la rappresentazione di $Cl\,(V,Q)_+$ su $\mathcal{I}$ indotta da $\overline{\rho}$ e sia $\mathcal{I}_1 \neq \{0\}$ un sottospazio di $\mathcal{I}$ invariante per tutte le operazioni di $\overline{\rho}_+\left(Cl\,(V,Q)_+\right)$ minimale. Inoltre sia $v \in V$ non singolare, allora $v \in Cl\,(V,Q)_-$ e, per (31), è invertibile da cui

$$Cl\,(V,Q)_- = vCl\,(V,Q)_+ = Cl\,(V,Q)_+\,v \tag{47}$$

e

$$Cl\,(V,Q)_+ = Cl\,(V,Q)_-\,v = vCl\,(V,Q)_-\,.$$

Quindi, posto $\mathcal{I}_2 = \overline{\rho}\,(v)\,(\mathcal{I}_1)$, valgono i seguenti risultati:

i) $\mathcal{I}_2$ è invariante per tutte le operazioni di $\overline{\rho}_+\left(Cl\,(V,Q)_+\right)$;

ii) $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ è invariante per tutte le operazioni di $\overline{\rho}\,(Cl\,(V,Q))$.

Infatti, siano $\widetilde{\varphi} \in Cl\,(V,Q)_+$ e $\widetilde{\omega} = \overline{\rho}\,(v)\,(\omega) \in \mathcal{I}_2$, con $\omega \in \mathcal{I}_1$, risulta

$$\overline{\rho}_+\,(\widetilde{\varphi})\,(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\varphi} \cdot \overline{\rho}\,(v)\,(\omega) = \widetilde{\varphi} \cdot (v \cdot \omega) = (\widetilde{\varphi} \cdot v) \cdot \omega;$$

poichè $\widetilde{\varphi} \cdot v \in Cl\,(V,Q)_+\,v$, da (47) segue che esiste $\widetilde{\varphi}_1 \in Cl\,(V,Q)_+$ tale che $\widetilde{\varphi} \cdot v = v \cdot \widetilde{\varphi}_1$. Perciò

$$\overline{\rho}_+\,(\widetilde{\varphi})\,(\widetilde{\omega}) = v \cdot (\widetilde{\varphi}_1 \cdot \omega) \in \overline{\rho}\,(v)\,(\mathcal{I}_1)$$

da cui i). Inoltre siano $\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \in Cl\,(V,Q)$ con $\varphi^+ \in Cl\,(V,Q)_+\,, \varphi^- \in Cl\,(V,Q)_-$ e $\omega_1 + v \cdot \omega_2 \in \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ con $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{I}_1$, risulta

$$\overline{\rho}\,(\varphi)\,(\omega_1 + v \cdot \omega_2) = \varphi^+ \cdot \omega_1 + \varphi^- \cdot \omega_1 + \varphi^+ \cdot v \cdot \omega_2 + \varphi^- \cdot v \cdot \omega_2;$$

poichè $\varphi^- \in Cl\,(V,Q)_-$, da (47) segue che esiste $\widetilde{\varphi} \in Cl\,(V,Q)_+$ tale che $\varphi^- = v \cdot \widetilde{\varphi}$.

Così, essendo $\mathcal{I}_1$ ed $\mathcal{I}_2$ invarianti per tutte le operazioni di $\overline{\rho}_+\left(Cl\,(V,Q)_+\right)$, si ha che

$$\begin{aligned} \overline{\rho}\,(\varphi)\,(\omega_1 + v \cdot \omega_2) &= \left(\varphi^+ \cdot \omega_1 + \left(\varphi^- \cdot v\right) \cdot \omega_2\right) + \left(\varphi^+ \cdot (v \cdot \omega_2) + v \cdot (\widetilde{\varphi} \cdot \omega_1)\right) \\ &\in \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \end{aligned}$$

da cui ii).

Poichè $\overline{\rho}$ è semplice, da ii) segue che $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$.

Se $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \neq \{0\}$ allora $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1$: infatti, se $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \subsetneq \mathcal{I}_1$ avremmo che $\overline{\rho}_+\left(Cl\,(V,Q)_+\right)(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) \subset \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, il che contraddice la minimalità di $\mathcal{I}_1$.

Quindi, essendo $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{I}_1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{I}_2$, abbiamo che

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}.$$

Se, invece, $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{0\}$ allora

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2.$$

Segue che $\overline{\rho}_+$ è semplice oppure è somma di due rappresentazioni semplici, da cui la tesi. $\square$

<u>Osservazione</u> 1.6.6 La rappresentazione $\overline{\rho}$ di $Cl\,(V,Q)$ che abbiamo utilizzato nella dimostrazione del teorema precedente è semplice. Poichè $Cl\,(V,Q)$ è un'algebra semplice, dai teoremi 1.2.3 e 1.6.15 segue che ogni rappresentazione di $Cl\,(V,Q)_+$ indotta da una rappresentazione semplice di $Cl\,(V,Q)$ è semplice oppure è somma di due rappresentazioni semplici.

1.7 Gruppo di Clifford

Come nel paragrafo precedente, sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione pari $n = 2h > 0$ e sia Q una forma quadratica su V con forma bilineare associata B non degenere. Inoltre sia $Cl\,(V,Q)$ l'algebra di Clifford associata a (V,Q), sia $O(n,Q)$ il gruppo ortogonale di Q e sia $SO(n,Q)$ il gruppo ortogonale speciale di Q.

Diamo la seguente:

Definizione 1.7.1 Si dice **gruppo di Clifford associato a** (V,Q) e si denota con $\Gamma\,(V,Q)$ il gruppo degli elementi invertibili φ di $Cl\,(V,Q)$ tali che

$$\varphi \cdot v \cdot \varphi^{-1} \in V, \text{ per ogni } v \in V.$$

Inoltre si dice **gruppo di Clifford speciale** il gruppo definito da

$$\Gamma^{+}\,(V,Q) = Cl\,(V,Q)_{+} \cap \Gamma\,(V,Q)\,.$$

Teorema 1.7.1 *L'applicazione*

$$\chi : \Gamma\,(V,Q) \to Aut\,(V)$$

definita da

$$\chi\,(\varphi)\,(v) = \varphi \cdot v \cdot \varphi^{-1},$$

per ogni $\varphi \in \Gamma\,(V,Q)$ *e* $v \in V$*, è una rappresentazione di* $\Gamma\,(V,Q)$ *con spazio di rappresentazione* V *ed è detta* **rappresentazione vettoriale di** $\Gamma\,(V,Q)$.

Dimostrazione. Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma\,(V,Q)$ e sia $v \in V$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \chi\,(\varphi_1 \cdot \varphi_2)\,(v) &= (\varphi_1 \cdot \varphi_2) \cdot v \cdot (\varphi_1 \cdot \varphi_2)^{-1} = \varphi_1 \cdot \left(\varphi_2 \cdot v \cdot \varphi_2^{-1}\right) \cdot \varphi_1^{-1} \\ &= \varphi_1 \cdot \chi\,(\varphi_2)\,(v) \cdot \varphi_1^{-1} = (\chi\,(\varphi_1) \circ \chi\,(\varphi_2))\,(v)\,, \end{aligned}$$

cioè χ è un omomorfismo di gruppi, da cui la tesi. $\square$

Vediamo le proprietà principali di tale rappresentazione:

Teorema 1.7.2 *L'immagine di* $\Gamma(V,Q)$ *tramite* χ *coincide con il gruppo ortogonale di* Q, *cioè*

$$\chi(\Gamma(V,Q)) = O(n,Q).$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \Gamma(V,Q)$, dal punto ii) dell'osservazione 1.6.2 si ha che, per ogni $v \in V$,

$$\begin{aligned} Q(\chi(\varphi)(v)) \cdot 1 &= Q\left(\varphi \cdot v \cdot \varphi^{-1}\right) \cdot 1 = \left(\varphi \cdot v \cdot \varphi^{-1}\right)^2 \\ &= \varphi \cdot v^2 \cdot \varphi^{-1} = Q(v) \cdot 1, \end{aligned}$$

da cui $\chi(\varphi) \in O(n,Q)$. Quindi risulta

$$\chi(\Gamma(V,Q)) \subset O(n,Q). \tag{48}$$

Sia ora $\sigma \in O(n,Q)$; utilizzando ancora il punto ii) dell'osservazione 1.6.2 otteniamo che, per ogni $v \in V$,

$$(\sigma(v))^2 = Q(\sigma(v)) \cdot 1 = Q(v) \cdot 1.$$

Così, per il teorema 1.6.5, è possibile estendere σ ad un automorfismo Σ di $Cl(V,Q)$; essendo $Cl(V,Q)$ un'algebra semplice, dal teorema di Skolem-Noether, [11], segue che Σ è un automorfismo interno. Quindi esiste un elemento $\alpha \in Cl(V,Q)$ invertibile tale che, per ogni $\varphi \in Cl(V,Q)$,

$$\Sigma(\varphi) = \alpha \cdot \varphi \cdot \alpha^{-1}. \tag{49}$$

Poichè $\Sigma(V) = \sigma(V) = V$, da (49) abbiamo che $\alpha \in \Gamma(V,Q)$ e $\chi(\alpha) = \sigma$, da cui $\sigma \in \chi(\Gamma(V,Q))$. Dunque

$$O(n,Q) \subset \chi(\Gamma(V,Q)). \tag{50}$$

La tesi segue da (48) e (50). $\square$

<u>Teorema</u> 1.7.3 *Il nucleo di χ coincide con il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili del centro di $Cl(V,Q)$, cioè*

$$\ker(\chi) = (\mathbb{K} \cdot 1)^*.$$

<u>Dimostrazione</u>. È ovvio che

$$(\mathbb{K} \cdot 1)^* \subset \ker(\chi);$$

così resta da provare l'altra inclusione.

Sia $\overline{\varphi} \in \ker(\chi)$; per ogni $v \in V$, si ha che

$$\chi(\overline{\varphi})(v) = \overline{\varphi} \cdot v \cdot \overline{\varphi}^{-1} = v,$$

da cui

$$\overline{\varphi} \cdot v = v \cdot \overline{\varphi}. \tag{51}$$

Poichè V genera $Cl(V,Q)$, da (51) abbiamo che $\overline{\varphi} \in (\mathbb{K} \cdot 1)^*$. Quindi

$$\ker(\chi) \subset (\mathbb{K} \cdot 1)^*,$$

da cui la tesi. $\square$

<u>Teorema</u> 1.7.4 *Sia $v \in V$ un vettore non singolare, allora $v \in \Gamma(V,Q)$ e $-\chi(v)$ è la simmetria rispetto a $v^{\perp}$.*

Dimostrazione. Poichè $Q(v) \neq 0$, dal punto ii) dell'osservazione 1.6.2 abbiamo che v è invertibile, in particolare

$$v^{-1} = Q(v)^{-1} v. \tag{52}$$

Inoltre, dal punto iii) dell'osservazione 1.6.2 e da (52) segue che, per ogni $w \in V$,

$$v \cdot w \cdot v^{-1} = (2B(v,w) \cdot 1 - w \cdot v) \cdot v^{-1} = 2Q(v)^{-1} B(v,w) v - w \in V,$$

da cui $v \in \Gamma(V,Q)$. Inoltre, per ogni $w \in V$,

$$\chi(v)(w) = v \cdot w \cdot v^{-1} = -\sigma(w)$$

dove σ è la simmetria rispetto a $v^{\perp}$, da cui la tesi. $\square$

Dai teoremi 1.7.2, 1.7.3 e 1.7.4 otteniamo il seguente:

Corollario 1.7.5 $(\mathbb{K} \cdot 1)^* \cup (\Gamma(V,Q) \cap V)$ *è un insieme di generatori di* $\Gamma(V,Q)$. *Quindi se* $\varphi \in \Gamma(V,Q)$ *allora* $\varphi = k\widetilde{\varphi}$ *con* $k \in \mathbb{K}^*$ *e* $\widetilde{\varphi} \in \Gamma^+(V,Q)$ *oppure* $\widetilde{\varphi} \in Cl(V,Q)_- \cap \Gamma(V,Q)$.

Dimostrazione. Sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V B-ortogonale (esiste per il teorema 1.1.6); per il teorema 1.7.4 abbiamo che

$$\chi(v_i)(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{se} \quad i = j \\ -v_j & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

per ogni $i, j \in \{1, ..., n\}$. Inoltre sia

$$\zeta : V \to V$$

l'applicazione lineare definita da

$$\zeta(v) = -v$$

per ogni $v \in V$; è facile verificare che $\zeta \in O(n,Q)$ e che

$$\zeta = \chi(v_1 \cdot ... \cdot v_n). \tag{53}$$

Sia ora $\varphi \in \Gamma(V,Q)$, per il teorema 1.7.2 $\chi(\varphi) \in O(n,Q)$; quindi, per il teorema 1.1.15 esistono $w_1, ..., w_r$ vettori di V non singolari tali che

$$\chi(\varphi) = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_r$$

dove σ_i è la simmetria rispetto a $w_i^{\perp}$, per ogni $i \in \{1, ..., r\}$. Dal teorema 1.7.4 e da (53) segue che

$$\begin{aligned} \chi(\varphi) &= [-\chi(w_1)] \circ ... \circ [-\chi(w_r)] = \zeta(\chi(w_1)) \circ ... \circ \zeta(\chi(w_r)) \\ &= \zeta^r \circ \chi(w_1 \cdot ... \cdot w_r) = \chi((v_1 \cdot ... \cdot v_n)^r \cdot w_1 \cdot ... \cdot w_r). \end{aligned}$$

Dunque, per il teorema 1.7.3, esiste $k \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che

$$\varphi = k(v_1 \cdot ... \cdot v_n)^r \cdot w_1 \cdot ... \cdot w_r,$$

da cui la tesi. $\square$

Abbiamo immediatamente i seguenti:

Corollario 1.7.6 $\Gamma^+(V,Q)$ *è generato dai prodotti di coppie di vettori non singolari di* V.

Corollario 1.7.7 $\chi(\Gamma^+(V,Q))$ *è un sottogruppo di indice* 2 *di* $O(n,Q)$ *e vale*

$$\chi\left(\Gamma^+(V,Q)\right) = SO(n,Q).$$

Dimostrazione. Sia $v \in V$ non singolare; per il teorema 1.7.4, $v \in Cl(V,Q)_- \cap \Gamma(V,Q)$, da cui

$$\Gamma^+(V,Q) \subsetneq \Gamma(V,Q).$$

Inoltre, essendo $\mathbb{K}\cdot 1 \subset Cl\,(V,Q)_+$ il centro di $Cl\,(V,Q)$, dal corollario 1.7.5 segue che $\chi\,(\Gamma^+\,(V,Q))$ ha indice 2 in $O\,(n,Q)$.

Sia ora $\varphi \in \Gamma\,(V,Q)$; sempre per il corollario 1.7.5, esistono $v_1,...,v_s \in \Gamma\,(V,Q)\cap V$ tali che $\varphi = v_1\cdot ...\cdot v_s$. Dato che, per ogni $i\in\{1,...,s\}$,

$$\det\chi\,(v_i) = -1,$$

risulta

$$\det\chi\,(\varphi) = (-1)^s\,;$$

in particolare, $\det\chi\,(\varphi) = 1$ se $\varphi \in \Gamma^+\,(V,Q)$, $\det\chi\,(\varphi) = -1$ altrimenti. Quindi

$$\chi\left(\Gamma^+\,(V,Q)\right) \subset SO\,(n,Q)$$

ed essendo $SO\,(n,Q)$ di indice 2 in $O\,(n,Q)$, abbiamo la tesi. $\square$

Definiamo adesso una *norma* nel gruppo di Clifford. In tal senso, ricordando le proprietà dell'antiautomorfismo principale α di $Cl\,(V,Q)$ (corollario 1.6.4), otteniamo la seguente:

Proposizione 1.7.8 *Sia* $\varphi \in \Gamma\,(V,Q)$, *allora*:

i) $\alpha\,(\varphi) \in \Gamma\,(V,Q)$;

ii) $\alpha\,(\varphi)\,\varphi \in \mathbb{K}\cdot 1$.

Dimostrazione. È facile verificare che $\alpha\,(\varphi)$ è invertibile; inoltre, per ogni $v\in V$, vale che

$$\alpha\,(\varphi)^{-1}\cdot v\cdot\alpha\,(\varphi) = \alpha\left(\varphi^{-1}\right)\cdot v\cdot\alpha\,(\varphi) = \alpha\left(\varphi\cdot v\cdot\varphi^{-1}\right) \in V,$$

da cui i).

Per provare l'affermazione ii) procediamo come segue: sia $\sigma = \chi(\varphi)$, per ogni $v \in V$, abbiamo che

$$\varphi \cdot v = \sigma(v) \cdot \varphi. \tag{54}$$

Essendo

$$\alpha(\varphi \cdot v) = \alpha(v) \cdot \alpha(\varphi) = v \cdot \alpha(\varphi)$$

e

$$\alpha(\sigma(v) \cdot \varphi) = \alpha(\varphi) \cdot \alpha(\sigma(v)) = \alpha(\varphi) \cdot \sigma(v),$$

da (54) otteniamo

$$v \cdot \alpha(\varphi) = \alpha(\varphi) \cdot \sigma(v). \tag{55}$$

Moltiplicando a destra per φ ambo i membri di (55) e tenendo conto di (54), abbiamo che, per ogni $v \in V$,

$$v \cdot \alpha(\varphi) \cdot \varphi = \alpha(\varphi) \cdot \varphi \cdot v,$$

cioè $\alpha(\varphi) \cdot \varphi$ commuta con gli elementi di V. Poichè V genera $Cl(V, Q)$, si ha che $\alpha(\varphi) \cdot \varphi$ appartiene al centro di $Cl(V, Q)$, da cui ii). □

Osservazione 1.7.1 Dall'affermazione ii) della proposizione 1.7.8 segue che per ogni $\varphi \in \Gamma(V, Q)$ esiste $\lambda(\varphi) \in \mathbb{K}$ tale che

$$\alpha(\varphi) \cdot \varphi = \lambda(\varphi) \cdot 1.$$

Quindi è ben definito l'omomorfismo di gruppi moltiplicativi

$$\begin{array}{cccc} \lambda : & \Gamma(V, Q) & \rightarrow & \mathbb{K}^* \\ & \varphi & \rightarrow & \lambda(\varphi) \end{array};$$

λ si chiama **omomorfismo norma** e per ogni $\varphi \in \Gamma(V, Q)$ lo scalare $\lambda(\varphi)$ si chiama **norma di** φ. In particolare abbiamo che:

i) per ogni $k \in \mathbb{K}^*$, $\lambda(k \cdot 1) = k^2$;

ii) per ogni $v \in V$ tale che $Q(v) \neq 0$, $\lambda(v) = Q(v)$.

Infine poniamo la seguente:

Definizione 1.7.2 Si dice **gruppo Pin di** (V, Q) e si denota con $\Gamma_0(V, Q)$ il sottogruppo di $\Gamma(V, Q)$ costituito dagli elementi di norma 1, cioè

$$\Gamma_0(V, Q) = \{\varphi \in \Gamma(V, Q) \mid \lambda(\varphi) = 1\}.$$

Inoltre si dice **gruppo Spin di** (V, Q) e si denota con $\Gamma_0^+(V, Q)$ il gruppo definito da

$$\Gamma_0^+(V, Q) = \Gamma^+(V, Q) \cap \Gamma_0(V, Q).$$

Osservazione 1.7.2 Dal corollario 1.7.5 segue che

$$\Gamma_0(V, Q) = \langle v \in V \mid Q(v) = 1 \rangle.$$

1.8 Rappresentazioni Spin e Spinori

In base al teorema 1.6.14 sappiamo che $Cl\,(V,Q)$ è un'algebra semplice, quindi, per il teorema 1.2.3, tutte le rappresentazioni semplici di $Cl\,(V,Q)$ sono equivalenti.

Diamo la seguente:

Definizione 1.8.1 Sia ρ una rappresentazione semplice di $Cl\,(V,Q)$, ρ è detta **rappresentazione spin di** $Cl\,(V,Q)$ e il suo spazio di rappresentazione $S\,(V,Q)$ è detto **spazio degli spinori di** Q.

Osservazione 1.8.1 ρ induce delle rappresentazioni di $Cl\,(V,Q)_+$, $\Gamma\,(V,Q)$, $\Gamma^+\,(V,Q)$ e $\Gamma_0^+\,(V,Q)$ che si chiamano ancora **rappresentazioni spin** e si indicano rispettivamente con ρ_+, ρ_Γ, ρ^+ e ρ_0^+.

Proposizione 1.8.1 *Le rappresentazioni spin indotte da ρ soddisfano le seguenti proprietà*:

i) ρ_+ *è semplice oppure è somma di due rappresentazioni semplici*;

ii) ρ_Γ *è una rappresentazione semplice*;

iii) ρ^+ *è semplice oppure è somma di due rappresentazioni semplici*;

iv) ρ_0^+ *è semplice oppure è somma di due rappresentazioni semplici.*

Per provare la proposizione 1.8.1 è necessario il seguente risultato, per la cui dimostrazione si rimanda a [3]:

Lemma 1.8.2 *Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e sia $\overline{Q}$ una forma quadratica su W con forma bilineare associata $\overline{B}$ non degenere.*

Inoltre sia $\overline{w} \in W \setminus \{0\}$ *e sia*

$$U = \left\langle w \in W \,\middle|\, \overline{Q}\,(w) = \overline{Q}\,(\overline{w}) \right\rangle .$$

Allora

$$U = W.$$

Siamo ora in grado di provare la proposizione 1.8.1:

Dimostrazione. L'affermazione i) è diretta conseguenza dell'osservazione 1.6.6, essendo ρ una rappresentazione semplice di $Cl\,(V, Q)$.

Consideriamo ora ρ_Γ: dal teorema 1.7.4 sappiamo che $\Gamma\,(V, Q)$ contiene tutti i vettori non singolari di V, quindi, per il lemma 1.8.2, V è generato da $\Gamma\,(V, Q) \cap V$. Segue che $\Gamma\,(V, Q)$ genera $Cl\,(V, Q)$ ed essendo ρ una rappresentazione semplice, anche ρ_Γ lo è, da cui la ii).

Al punto precedente abbiamo osservato che V è generato dai suoi vettori non singolari; d'altra parte $Cl\,(V, Q)_+$, per come è definita, è generata dai prodotti di coppie di elementi di V, quindi anche dai prodotti di coppie di vettori non singolari di V. Per il teorema 1.7.4, tali prodotti appartengono a $\Gamma^+\,(V, Q)$; segue che $\Gamma^+\,(V, Q)$ è un insieme di generatori di $Cl\,(V, Q)_+$. Dunque dall'affermazione i) otteniamo la iii).

Infine proviamo la iv): sia $\overline{v}$ un vettore non singolare di V e sia

$$U = \langle v \in V \mid Q\,(v) = Q\,(\overline{v}) \rangle .$$

Per il lemma 1.8.2, si ha che

$$U = V,$$

quindi $Cl\,(V,Q)_+$ è generata dagli elementi del tipo $Q\,(\overline{v})^{-1}\cdot v\cdot w$, con v e $w\in U$. Osserviamo che un tale elemento appartiene a $\Gamma_0^+\,(V,Q)$, poichè sta in $\Gamma^+\,(V,Q)$ e, per l'osservazione 1.7.1, vale

$$\begin{aligned}\lambda\left(Q\,(\overline{v})^{-1}\cdot v\cdot w\right) &= \lambda\left(Q\,(\overline{v})^{-1}\cdot 1\right)\lambda\,(v)\,\lambda\,(w)\\ &= Q\,(\overline{v})^{-2}\,Q\,(v)\,Q\,(w)=1.\end{aligned}$$

Segue che $\Gamma_0^+\,(V,Q)$ è un insieme di generatori di $Cl\,(V,Q)_+$ (e anche di $\Gamma^+\,(V,Q)$), da cui la iv). $\square$

Concentriamoci adesso sulla rappresentazione spin ρ_+ di $Cl\,(V,Q)_+$: se $Cl\,(V,Q)_+$ è somma diretta di due ideali semplici allora ρ_+ è somma di due rappresentazioni semplici non equivalenti. Segue che $S\,(V,Q)$ può essere rappresentato in uno e in un solo modo come somma di due suoi sottospazi vettoriali $S_1\,(V,Q)$ e $S_2\,(V,Q)$ ognuno dei quali è lo spazio di rappresentazione per una rappresentazione semplice di $Cl\,(V,Q)_+$.

Poniamo la seguente:

Definizione 1.8.2 $S_1\,(V,Q)$ e $S_2\,(V,Q)$ si dicono gli spazi dei **semi-spinori** di (V,Q). Le corrispondenti rappresentazioni di $Cl\,(V,Q)_+$ si chiamano **rappresentazioni semi-spin**.

Osservazione 1.8.2 Le rappresentazioni semi-spin di $Cl\,(V,Q)_+$ inducono delle rappresentazioni dei gruppi $\Gamma^+\,(V,Q)$ e $\Gamma_0^+\,(V,Q)$ che si chiamano ancora **rappresentazioni semi-spin**.

In modo analogo a quanto visto prima abbiamo la seguente:

Proposizione 1.8.2 *Le rappresentazioni semi-spin di* $\Gamma^+(V,Q)$ *e* $\Gamma_0^+(V,Q)$ *sono semplici e tra di loro non equivalenti.*

1.9 Spinori Puri

In questo paragrafo assumiamo che la forma quadratica Q abbia indice h.

Indichiamo con E ed F due sottospazi vettoriali di V totalmente isotropi massimali tali che $V = E \oplus F$ (esistono per il teorema 1.1.7) e con f il prodotto degli elementi di una base di F.

Inoltre, sia $\widetilde{\rho}$ la rappresentazione semplice di $Cl\,(V,Q)$ con spazio di rappresentazione $Cl\left(E,Q_{|E}\right)$ costruita nella dimostrazione del teorema 1.6.14, cioè tale che

$$[\widetilde{\rho}\,(\varphi)\,(\gamma)]\,f = (\varphi \cdot \gamma)\,f$$

per ogni $\varphi \in Cl\,(V,Q)$ e $\gamma \in Cl\left(E,Q_{|E}\right)$. Le principali proprietà di tale rappresentazione sono riassunte nell'osservazione 1.6.5.

In base alla definizione 1.8.1, possiamo assumere che $\widetilde{\rho}$ sia la *rappresentazione spin* di $Cl\,(V,Q)$ (da qui in poi la indicheremo semplicemente con ρ) e che $Cl\left(E,Q_{|E}\right)$ sia lo *spazio degli spinori* di (V,Q).

<u>Osservazione</u> 1.9.1 Nella dimostrazione del teorema 1.6.14 abbiamo provato che è possibile identificare le algebre $Cl\left(E,Q_{|E}\right)$ e $\Lambda\,(E)$. Quindi, per l'affermazione iii) del corollario 1.6.9, risulta che

$$Cl\left(E,Q_{|E}\right) \cap Cl\,(V,Q)_+ = \underset{r\ pari}{\oplus} Cl\left(E,Q_{|E}\right)_r \tag{56}$$

e

$$Cl\left(E,Q_{|E}\right) \cap Cl\,(V,Q)_- = \underset{r\ dispari}{\oplus} Cl\left(E,Q_{|E}\right)_r \tag{57}$$

dove $Cl\left(E,Q_{|E}\right)_r$ è lo spazio generato dagli elementi omogenei di grado r di $Cl\left(E,Q_{|E}\right)$.

Denotiamo (56) e (57) rispettivamente con $Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{+}$ e $Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{-}$: essi sono lo spazio degli elementi **pari** e lo spazio degli elementi **dispari** di $Cl\left(E,Q_{|E}\right)$.

Vale il seguente:

Teorema 1.9.1 *La rappresentazione spin ρ_{+} di $Cl\,(V,Q)_{+}$ non è semplice.*

Dimostrazione. Per le affermazioni iii) e iv) dell'ossevazione 1.6.5, abbiamo che, fissato $v \in V$,

$$\rho\,(v)\left(Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{+}\right) \subset Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{-}$$

e

$$\rho\,(v)\left(Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{-}\right) \subset Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{+}.$$

Quindi, per ogni $\varphi \in Cl\,(V,Q)_{+}$, si ha che

$$\rho_{+}\,(\varphi)\left(Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{+}\right) \subset Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{+}$$

e

$$\rho_{+}\,(\varphi)\left(Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{-}\right) \subset Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{-}.$$

Dunque $Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{+}$ e $Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{-}$ sono due sottospazi non banali di $Cl\left(E,Q_{|E}\right)$ che sono invarianti per tutte le operazioni di $\rho_{+}\left(Cl\,(V,Q)_{+}\right)$, da cui la tesi. $\square$

Otteniamo così il seguente:

Corollario 1.9.2 *$Cl\,(V,Q)_{+}$ è somma diretta di due ideali semplici.*

Osservazione 1.9.2 Ricordando la definizione 1.8.2 ed essendo

$$Cl\left(E,Q_{|E}\right) = Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{+} \oplus Cl\left(E,Q_{|E}\right)_{-}$$

abbiamo che $Cl\left(E, Q_{|E}\right)_+$ e $Cl\left(E, Q_{|E}\right)_-$ sono gli spazi dei semi-spinori di (V, Q). In particolare diciamo che

$$S(V,Q)_p = Cl\left(E, Q_{|E}\right)_+$$

è lo **spazio dei semi-spinori pari** e che

$$S(V,Q)_d = Cl\left(E, Q_{|E}\right)_-$$

è lo **spazio dei semi-spinori dispari**.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per introdurre il concetto di *spinore puro.*

Sia W un sottospazio vettoriale totalmente isotropo massimale di V e sia f_W il prodotto degli elementi di una base di W: f_W è determinato da W a meno di una costante moltiplicativa non nulla, dato che vale l'isomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre

$$Cl\left(W, Q_{|W}\right) \backsimeq \Lambda\left(W\right).$$

Inoltre, per l'affermazione i) dell'osservazione 1.6.5, si ha che $f_W Cl\left(V, Q\right)$ è un ideale destro minimale di $Cl\left(V, Q\right)$.

È noto il seguente:

Teorema 1.9.2 *Sia I un ideale sinistro minimale di $Cl\left(V, Q\right)$ e sia J un ideale destro minimale di $Cl\left(V, Q\right)$. Allora $I \cap J$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ tale che*

$$\dim_{\mathbb{K}} I \cap J = 1. \tag{58}$$

Per provare questo teorema serve il seguente risultato intermedio, per la cui dimostrazione rimandiamo a [4]:

<u>Lemma</u> 1.9.3 *Sia A un anello con unità artiniano e sia $\mathcal{I}$ un ideale sinistro non nilpotente di A, allora $\mathcal{I}$ possiede un idempotente non nullo a.*

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema 1.9.2:

<u>Dimostrazione</u>. È ovvio che $I \cap J$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, resta da provare (58). Per l'osservazione 1.2.4, $Cl\,(V, Q)$ è un'algebra semisemplice, da cui segue che I è un ideale non nilpotente. Quindi, per il lemma 1.9.3, esiste $a \in I \setminus \{0\}$ tale che $a^2 = 1$ ed essendo I minimale abbiamo che

$$I = Cl\,(V, Q)\,a.$$

Poichè a è idempotente, anche l'operazione $\rho\,(a)$ lo è, quindi si tratta di una proiezione. È facile verificare che

$$I = \{\overline{\varphi} \in Cl\,(V, Q) \mid \rho\,(\overline{\varphi})\,(\ker \rho\,(a)) = \{0\}\}\,. \tag{59}$$

Infatti, è chiaro che, per ogni $\varphi \in Cl\,(V, Q)$,

$$\rho\,(\varphi \cdot a)\,(\ker \rho\,(a)) = \{0\}\,.$$

Viceversa, sia $\overline{\varphi} \in Cl\,(V, Q)$ tale che $\rho\,(\overline{\varphi})\,(\ker \rho\,(a)) = \{0\}$; allora si ha che $\rho\,(\overline{\varphi}) = \rho\,(\overline{\varphi} \cdot a)$ ed essendo ρ un isomorfismo risulta

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi} \cdot a \in I$$

da cui (59).

Sia ora S' un sottospazio vettoriale di $S(V, Q)$; valgono i seguenti fatti:

1) l'insieme $I' = \{\overline{\varphi} \in Cl\,(V, Q) \mid \rho\,(\overline{\varphi})\,(S') = \{0\}\}$ è un ideale sinistro di $Cl\,(V, Q)$;

2) se $\ker \rho(a) \subset S'$ allora $I' \subset I$.

Poichè, per ipotesi, I è minimale, abbiamo che $\ker \rho(a)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione 2^{h-1}, cioè è un iperpiano.

Ripetendo i ragionamenti fatti per I otteniamo che

$$J = \widetilde{a}Cl\,(V,Q)\,,$$

con $\widetilde{a}$ elemento idempotente non nullo di J, e che

$$J = \{\overline{\varphi} \in Cl\,(V,Q) \mid \rho(\overline{\varphi})\,(S(V,Q)) \subset \operatorname{Im} \rho(\widetilde{a})\}\,. \tag{60}$$

Inoltre, se S'' è un sottospazio vettoriale di $S(V,Q)$ allora valgono i seguenti fatti:

1) l'insieme $J' = \{\overline{\varphi} \in Cl\,(V,Q) \mid \rho(\overline{\varphi})\,(S(V,Q)) \subset S''\}$ è un ideale destro di $Cl\,(V,Q)$;

2) se $S'' \subset \operatorname{Im} \rho(\widetilde{a})$ allora $J' \subset J$.

Poichè J è minimale, abbiamo che $\operatorname{Im} \rho(\widetilde{a})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione 1, cioè una retta.

Da (59) e (60) segue che

$$I \cap J = \{\overline{\varphi} \in Cl\,(V,Q) \mid \rho(\overline{\varphi})\,(\ker \rho(a)) = \{0\} \text{ e } \rho(\overline{\varphi})\,(S(V,Q)) \subset \operatorname{Im} \rho(\widetilde{a})\}\,.$$

Quindi, se $s \in S(V,Q) \setminus \ker \rho(a)$ e $s' \in \operatorname{Im} \rho(\widetilde{a}) \setminus \{0\}$ allora $\overline{\varphi} \in I \cap J$ implica che

$$\rho(\overline{\varphi})\,(s) = ks'$$

con $k \in \mathbb{K}$, ed essendo ρ un isomorfismo, $\overline{\varphi}$ è determinato in modo univoco quando è noto k, da cui (58). $\square$

Dal teorema 1.9.2 segue che $Cl\,(V,Q)\,f \cap f_W Cl\,(V,Q)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione 1; quindi possiamo scrivere

$$Cl\,(V,Q)\,f \cap f_W Cl\,(V,Q) = S(V,Q)_W f$$

dove $S(V,Q)_W$ è un sottospazio vettoriale di $S(V,Q)$ tale che

$$\dim_{\mathbb{K}} S(V,Q)_W = 1.$$

Poniamo le seguenti:

Definizione 1.9.1 Sia $s_W \in S(V,Q)_W \setminus \{0\}$, s_W è detto **rappresentante spin** di W.

Definizione 1.9.2 Si dice **spinore puro** ogni elemento di $S(V,Q)$ che sia un rappresentante spin di un sottospazio vettoriale totalmente isotropo massimale di V.

Vediamo le proprietà principali degli spinori puri:

Teorema 1.9.4 *Sia W un sottospazio vettoriale totalmente isotropo massimale di V e sia s_W un suo rappresentante spin. Valgono i seguenti fatti:*

i) *esiste $\widetilde{\varphi} \in \Gamma(V,Q)$ tale che*

$$\widetilde{\varphi} F \widetilde{\varphi}^{-1} = W; \tag{61}$$

ii) *se φ soddisfa* (61) *allora $\rho(\varphi)(1)$ è un rappresentante spin di W;*

iii) *per ogni $\varphi \in \Gamma(V,Q)$, $\rho(\varphi)(s_W)$ è un rappresentante spin di $\varphi W \varphi^{-1}$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, F e W sono due sottospazi totalmente isotropi massimali di V; quindi esiste $\sigma \in O(n,Q)$ tale che

$$\sigma(F) = W.$$

Segue che, per il teorema 1.7.2, esiste $\widetilde{\varphi} \in \Gamma(V,Q)$ tale che $\chi(\widetilde{\varphi}) = \sigma$, da cui la i). Se $\varphi \in \Gamma(V,Q)$ è come in (61) allora

$$f_W = \varphi \cdot f \cdot \varphi^{-1}$$

è non nullo ed è il prodotto degli elementi di una base di W. In particolare abbiamo che φf genera $Cl\,(V,Q)\, f \cap f_W Cl\,(V,Q)$ ed essendo

$$\varphi f = [\rho\,(\varphi)\,(1)]\, f$$

otteniamo la ii).

Infine, sia $\varphi \in \Gamma\,(V,Q)$ e siano f_W e $f_{\varphi W \varphi^{-1}}$ rispettivamente il prodotto degli elementi di una base di W e di $\varphi W \varphi^{-1}$; abbiamo che

$$[\rho\,(\varphi)\,(s_W)]\, f = (\varphi \cdot s_W)\, f = \varphi \cdot (s_W f) \in \varphi f_W Cl\,(V,Q)$$

ed essendo

$$\varphi f_W Cl\,(V,Q) = \varphi f_W \varphi^{-1} \varphi Cl\,(V,Q) = f_{\varphi W \varphi^{-1}} Cl\,(V,Q)$$

si ottiene che

$$[\rho\,(\varphi)\,(s_W)]\, f \in f_{\varphi W \varphi^{-1}} Cl\,(V,Q)\,.$$

Inoltre è ovvio che

$$[\rho\,(\varphi)\,(s_W)]\, f \in Cl\,(V,Q)\, f$$

e che $\rho\,(\varphi)\,(s_W) \neq 0$, da cui la iii). $\square$

Abbiamo così il seguente risultato fondamentale:

Teorema 1.9.5 *Sia W un sottospazio vettoriale totalmente isotropo massimale di V e sia s_W un suo rappresentante spin. Valgono i seguenti fatti*:

i) $W = \{v \in V \mid \rho\,(v)\,(s_W) = 0\}$;

ii) *se $s \in S(V,Q)$ e $\rho\,(v)\,(s) = 0$, per ogni $v \in W$, allora esiste $k \in \mathbb{K}$ tale che $s = k s_W$, cioè anche s è un rappresentante spin di W.*

Dimostrazione. Siano $s \in S(V,Q)$, $v \in V$ e $\varphi \in \Gamma(V,Q)$; allora

$$\rho(v)(s) = 0 \Leftrightarrow \left[\rho\left(\varphi^{-1} \cdot v \cdot \varphi\right) \circ \rho\left(\varphi^{-1}\right)\right](s) = 0. \tag{62}$$

Quindi, per il teorema 1.9.4, possiamo assumere che $W = F$ e che $s_W = 1$.

Dobbiamo provare che, fissato $v \in V$,

$$\rho(v)(1) = 0 \Leftrightarrow v \in F. \tag{63}$$

Procediamo come segue: sia $\{e_1, ..., e_h\}$ una base di E e sia $\{f_1, ..., f_h\}$ una base di F; se $v \in V$ si ha che $v = \sum_{i=1}^{h} a_i e_i + \sum_{j=1}^{h} b_j f_j$, quindi, ricordando le affermazioni iii) e iv) dell'osservazione 1.6.5, abbiamo che

$$\rho(v)(1) = \rho\left(\sum_{i=1}^{h} a_i e_i + \sum_{j=1}^{h} b_j f_j\right)(1) = \sum_{i=1}^{h} a_i e_i,$$

da cui (63).

Proviamo ora l'affermazione ii): ripetendo i primi passi della dimostrazione del teorema 1.9.4 abbiamo che esiste $\widehat{\varphi} \in \Gamma(V,Q)$ tale che

$$\widehat{\varphi} E \widehat{\varphi}^{-1} = W,$$

quindi, in virtù di (62), possiamo assumere che $W = E$.

Sia $s \in S(V,Q)$ tale che

$$\rho(v)(s) = 0, \text{ per ogni } v \in E;$$

essendo $\rho(v)(s) = v \wedge s$, abbiamo che

$$s = k_1 e$$

dove $k_1 \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ ed e è il prodotto degli elementi di una base di E. Poichè vale i), possiamo applicare questo ragionamento anche ad s_E ottenendo che esiste $k_2 \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ tale che

$$s_E = k_2 e.$$

Ponendo $k = k_1 k_2^{-1}$ si ha che

$$s = k s_E$$

da cui la ii). $\square$

<u>Osservazione</u> 1.9.3 In base al teorema 1.9.5, ogni spinore puro determina univocamente il sottospazio totalmente isotropo massimale di cui è rappresentante spin.

Come diretta conseguenza otteniamo che l'insieme degli spinori puri è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei sottospazi vettoriali totalmente isotropi massimali di V. In tal senso vale il seguente:

<u>Corollario</u> 1.9.6 *Sia* $s \in S(V,Q)\setminus\{0\}$ *e sia*

$$Ann(s) = \{v \in V \mid \rho(v)(s) = 0\}$$

l'annullatore sinistro di s. *Allora* s *è uno spinore puro se e solo se* $Ann(s)$ *è un sottospazio vettoriale totalmente isotropo massimale di* V.

<u>Osservazione</u> 1.9.4 Se $s \in S(V,Q)\setminus\{0\}$ allora $Ann(s)$ è un sottospazio vettoriale di V totalmente isotropo. Infatti, è ovvio che $Ann(s)$ è un sottospazio vettoriale di V. Inoltre, se $v \in Ann(s)$ allora, per l'affermazione ii) dell'osservazione 1.6.2,

$$0 = v \cdot (v \cdot s) = Q(v)s.$$

Quindi, essendo $s \neq 0$,

$$Q(v) = 0,$$

cioè $Ann(s)$ è totalmente isotropo.

Dal corollario 1.9.6 e dall'osservazione 1.9.4 otteniamo la seguente *caratterizzazione degli spinori puri*:

Proposizione 1.9.7 *Sia $s \in S(V,Q) \setminus \{0\}$, s è uno spinore puro se e solo se*

$$\dim_{\mathbb{K}} Ann(s) \geq h.$$

Questo implica che possiamo parlare di *varietà degli spinori puri*, come descritto nel seguente:

Teorema 1.9.8 *L'insieme degli spinori puri è una varietà algebrica proiettiva.*

Dimostrazione. Sia $s \in S(V,Q) \setminus \{0\}$ e sia

$$\psi_s : V \to Cl\left(E, Q_{|E}\right)$$

l'applicazione lineare definita da

$$\psi_s(v) = \rho(v)(s), \text{ per ogni } v \in V.$$

È facile verificare che

$$\ker(\psi_s) = Ann(s);$$

quindi, dalla proposizione 1.9.7 e dal teorema di nullità e rango, abbiamo che s è uno spinore puro se e solo se

$$rank(\psi_s) \leq h,$$

cioè se e solo se i minori di ordine $h+1$ di una qualsiasi matrice associata a ψ_s hanno determinante zero.

Segue che l'insieme degli spinori puri è il luogo degli zeri comuni a un certo numero di polinomi omogenei di grado $h+1$, da cui la tesi. $\square$

Concludiamo questo paragrafo con alcuni esempi.

Esempio 1.9.1 Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4; è noto che, [7], il luogo di zeri della forma quadratica Q definisce la sottovarietà

$$Q_2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C}).$$

In questo caso la varietà degli spinori puri è $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Esempio 1.9.2 Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 6; è noto che, [8], il luogo di zeri della forma quadratica Q definisce la sottovarietà

$$Q_4 = Gr(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{P}^3(\mathbb{C})) \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C}).$$

In questo caso la varietà degli spinori puri è $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

1.10 Varietà degli Spinori Puri

In questo paragrafo riportiamo le proprietà geometriche principali delle varietà spinoriali.

Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione pari $n = 2h > 0$ e sia Q una forma quadratica su V con forma bilineare associata B non degenere (poichè lavoriamo sui complessi, Q ha indice massimale).

Inoltre, siano E ed F due sottospazi totalmente isotropi massimali di V tali che

$$V = E \oplus F$$

e siano $\{e_1, ..., e_h\}$ e $\{f_1, ..., f_h\}$ una base di E e una base di F tali che

$$B(e_i, f_j) = \frac{\delta_{ij}}{2}$$

per ogni $i, j \in \{1, ..., h\}$ (esistono per il teorema 1.1.7); in particolare poniamo

$$f = f_1 \cdot ... \cdot f_h.$$

Indichiamo con $PS(V, Q)$ la *varietà degli spinori puri* associata a (V, Q).

Ricordando che $O(n, Q)$ agisce transitivamente sulla varietà dei sottospazi totalmente isotropi massimali di V, abbiamo immediatamente il seguente:

<u>Teorema</u> 1.10.1 *$PS(V, Q)$ è una varietà omogenea.*

Dall'osservazione 1.5.4 si ottiene il seguente:

<u>Corollario</u> 1.10.2 *$PS(V, Q)$ è una varietà liscia.*

Per quanto riguarda la dimensione delle varietà spinoriali vale il seguente:

Teorema 1.10.3

$$\dim_{\mathbb{C}} PS(V,Q) = \frac{h(h-1)}{2}.$$

Dimostrazione. È facile verificare che, indicata con B la matrice della forma B rispetto alla base di V $\{e_1, ..., e_h, f_1, ..., f_h\}$, risulta

$$B = \begin{bmatrix} O_h & \frac{I_h}{2} \\ \frac{I_h}{2} & O_h \end{bmatrix}$$

dove O_h e I_h sono rispettivamente la matrice nulla e la matrice identica di ordine h.

Sia ora W un sottospazio vettoriale di V tale che $\dim_{\mathbb{C}} W = h$, cioè W è un elemento della Grassmanniana $Gr\,(h-1, n-1)$ (per maggiori dettagli sulle varietà di Grassmann si veda il paragrafo 2.2). Quindi, per (71), possiamo associare a W la matrice $h \times 2h$

$$\omega = [I_h \, | U_W]$$

con $U_W \in M\,(h, \mathbb{C})$. Abbiamo che W è totalmente isotropo se e solo se

$$\omega \cdot B \cdot \omega^t = O_h$$

ed essendo

$$\begin{aligned} \omega \cdot B \cdot \omega^t &= [I_h \, | U_W] \cdot \begin{bmatrix} O_h & \frac{I_h}{2} \\ \frac{I_h}{2} & O_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_h \\ U_W^t \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{U_W}{2} \middle| \frac{I_h}{2} \right] \cdot \begin{bmatrix} I_h \\ U_W^t \end{bmatrix} = \frac{U_W}{2} + \frac{U_W^t}{2} \end{aligned}$$

risulta che

$$W \in PS(V,Q) \Leftrightarrow U_W = -U_W^t$$

da cui la tesi. $\square$

Inoltre vale il seguente:

Teorema 1.10.4 *$PS(V,Q)$ è riducibile con componenti irriducibili*

$$PS(V,Q)_+ = PS(V,Q) \cap \mathbb{P}\left(S(V,Q)_p\right)$$

e

$$PS(V,Q)_- = PS(V,Q) \cap \mathbb{P}\left(S(V,Q)_d\right).$$

$PS(V,Q)_+$ si dice **varietà degli spinori puri pari** *e $PS(V,Q)_-$ si dice* **varietà degli spinori puri dispari***.*

Osservazione 1.10.2 ([12]) $PS(V,Q)_+$ e $PS(V,Q)_-$ sono isomorfe. In tal senso considereremo solo la varietà degli spinori puri pari.

Sia ora $U = \{u_{ij}\}$ una matrice antisimmetrica di ordine h a elementi in $\mathbb{C}$ e sia

$$s = \left(e_1 + \sum_{j=1}^{h} u_{1j} f_j\right) \cdot \left(e_2 + \sum_{j=1}^{h} u_{2j} f_j\right) \cdot \ldots \cdot \left(e_h + \sum_{j=1}^{h} u_{hj} f_j\right)$$

un elemento di $PS(V,Q)_+$ in un intorno di

$$s_E = e_1 \cdot \ldots \cdot e_h.$$

Valutiamo sf in alcuni casi particolari (utilizziamo le affermazioni iii) e iv) dell'osservazione 1.6.2).

1) Se $h = 2$ allora

$$\begin{aligned}
sf &= (e_1 + u_{11} f_1 + u_{12} f_2) \cdot (e_2 + u_{21} f_1 + u_{22} f_2) \cdot f_1 \cdot f_2 \\
&= (e_1 + u_{12} f_2) \cdot (e_2 - u_{12} f_1) \cdot f_1 \cdot f_2 \\
&= \big(e_1 \cdot e_2 - u_{12} e_1 \cdot f_1 + u_{12} f_2 \cdot e_2 - u_{12}^2 f_2 \cdot f_1\big) \cdot f_1 \cdot f_2 \\
&= e_1 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 + u_{12} f_2 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 \\
&= e_1 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 + u_{12} (1 - e_2 \cdot f_2) \cdot f_1 \cdot f_2 \\
&= (e_1 \cdot e_2 + u_{12}) \cdot f_1 \cdot f_2
\end{aligned}$$

da cui

$$s = e_1 \cdot e_2 + u_{12}.$$

2) Se $h = 4$ allora

$$\begin{aligned}
sf &= \left(e_1 + \sum_{j=1}^{4} u_{1j} f_j\right) \cdot \ldots \cdot \left(e_4 + \sum_{j=1}^{4} u_{4j} f_j\right) \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \\
&= (e_1 + u_{12} f_2 + u_{13} f_3 + u_{14} f_4) \cdot (e_2 - u_{12} f_1 + u_{23} f_3 + u_{24} f_4) \cdot \\
&\quad \cdot (e_3 - u_{13} f_1 - u_{23} f_2 + u_{34} f_4) \cdot e_4 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \\
&= (e_1 + u_{12} f_2 + u_{13} f_3 + u_{14} f_4) \cdot (e_2 - u_{12} f_1 + u_{23} f_3 + u_{24} f_4) \cdot \\
&\quad \cdot (e_3 \cdot e_4 + u_{34}) \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \\
&= (e_1 + u_{12} f_2 + u_{13} f_3 + u_{14} f_4) \cdot (e_2 \cdot e_3 \cdot e_4 + u_{34} e_2 + u_{23} e_4 - u_{24} e_3) \cdot \\
&\quad \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \\
&= (e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4 + u_{34} e_1 \cdot e_2 + u_{23} e_1 \cdot e_4 + u_{24} e_3 \cdot e_1 + u_{12} e_3 \cdot e_4 + \\
&\quad u_{12} u_{34} + u_{13} e_4 \cdot e_2 - u_{13} u_{24} + u_{14} e_2 \cdot e_3 + u_{14} u_{23}) \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} s &= e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4 + u_{12} e_3 \cdot e_4 + u_{13} e_4 \cdot e_2 + u_{14} e_2 \cdot e_3 + u_{23} e_1 \cdot e_4 + \\ & \quad + u_{24} e_3 \cdot e_1 + u_{34} e_1 \cdot e_2 + (u_{12} u_{34} - u_{13} u_{24} + u_{14} u_{23}) \, . \end{aligned}$$

Un calcolo diretto prova che in generale vale la seguente formula:

$$s = \sum_{l(K)\ pari} Pf_K(U) e_{K^c}$$

dove $K = \{k_1, ..., k_l\}$ è una sequenza di interi tra 1 e h di lunghezza $l = l(K)$ pari, $K^c = \{1, ..., h\} \setminus K$ e $Pf_K(U)$ è lo pfaffiano della sottomatrice di U ottenuta prendendo le righe e le colonne con indici gli elementi di K.

Pertanto abbiamo il seguente:

Teorema 1.10.5 ([12]) *Gli Pfaffiani principali di una matrice antisimmetrica di ordine h parametrizzano la varietà $PS(V, Q)_+$.*

Osservazione 1.10.3 In base all'osservazione 1.4.1 abbiamo la seguente inclusione:

$$PS(V, Q)_+ \hookrightarrow \mathbb{P}^{2^{h-1}-1}(\mathbb{C}) \, .$$

II VARIETÀ SECANTI

2.1 Coni, joins e multisecanti

Sia $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ lo spazio proiettivo complesso di dimensione N; su di esso lavoreremo con la **topologia di Zariski**, cioè con quella in cui i chiusi sono i luoghi di zeri di polinomi omogenei. Osserviamo che gli insiemi chiusi (risp. aperti) nella topologia di Zariski sono chiusi (risp. aperti) anche nella topologia standard. Inoltre gli aperti sono "enormi" rispetto a quelli della topologia standard, cosìcchè $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ con la topologia di Zariski non è uno spazio di Hausdorff.

Per descrivere le multisecanti di una varietà algebrica sono necessarie alcune nozioni preliminari. Iniziamo con la seguente:

Definizione 2.1.1 Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva e sia $q \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ un punto. Si dice **cono su X con vertice** q e si denota con $J(q, X)$ la chiusura, nella topologia di Zariski, dell'insieme di tutti i punti su tutte le rette contenenti q e un punto di X, cioè

$$J(q, X) = \overline{\bigcup_{x \in X} \mathbb{P}^1_{xq}(\mathbb{C})}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbb{P}^1_{xq}(\mathbb{C})$ la retta proiettiva passante per x e q.

Osserviamo che se $q \in X$, $J(q, X)$ contiene anche i punti delle rette tangenti a X in

q. Inoltre $J(q,X) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è una varietà algebrica proiettiva tale che

$$\dim_{\mathbb{C}} J(q,X) = \dim_{\mathbb{C}} X + 1$$

a meno che X non sia uno *spazio lineare*, cioè X non sia luogo di zeri di polinomi lineari omogenei, e $q \notin X$.

La nozione di cono su una varietà con vertice un punto si può generalizzare ponendo:

Definizione 2.1.2 Siano $X, Y \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ due varietà algebriche proiettive. Si dice **join di** X **e** Y e si denota con $J(X,Y)$ la chiusura, nella topologia di Zariski, dell'insieme di tutti i punti su tutte le rette passanti per un punto di X e un punto di Y non coincidenti, cioè

$$J(X,Y) = \overline{\bigcup_{x \in X, y \in Y, x \neq y} \mathbb{P}^1_{xy}(\mathbb{C})}.$$

Come anticipato, possiamo pensare $J(X,Y)$ come la chiusura dell'unione dei coni su Y con vertici punti di X (o, equivalentemente, come la chiusura dell'unione dei coni su X con vertici punti di Y), cioè vale la seguente catena di uguaglianze:

$$J(X,Y) = \overline{\bigcup_{x \in X} J(x,Y)} = \overline{\bigcup_{y \in Y} J(y,X)}.$$

Inoltre $J(X,Y) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è una varietà algebrica proiettiva tale che

$$\dim_{\mathbb{C}} J(X,Y) \leq \min\{\dim_{\mathbb{C}} X + \dim_{\mathbb{C}} Y + 1, N\}. \tag{64}$$

Infatti, un punto $z \in J(X,Y)$ è ottenuto prendendo un punto $x \in X$, un punto $y \in Y$ e un punto su $\mathbb{P}^1_{xy}(\mathbb{C})$, quindi per individuare z servono al più $\dim_{\mathbb{C}} X + \dim_{\mathbb{C}} Y + 1$ gradi di libertà. Inoltre $J(X,Y)$ è ancora immersa in $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, quindi la sua dimensione non può superare N. Dunque ci aspetteremo per $J(X,Y)$ una dimensione data da

$\min\{\dim_{\mathbb{C}} X + \dim_{\mathbb{C}} Y + 1, N\}$; in particolare se un punto generale di $J(X,Y)$ giace su una famiglia di rette che intersecano X e Y allora in (64) vale la disuguaglianza stretta. Un esempio significativo di join si ha quando le due varietà coincidono:

Definizione 2.1.3 Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva. Si dice **varietà secante di** X e si denota con $\sigma_2(X)$ il join di X con sé stessa, cioè

$$\sigma_2(X) = J(X,X).$$

Dalla definizione segue che possiamo esprimere la varietà secante di X mediante

$$\sigma_2(X) = \overline{\bigcup_{x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2} \mathbb{P}^1_{x_1x_2}(\mathbb{C})},$$

cioè $\sigma_2(X)$ contiene tutti i punti di tutte le rette secanti e tangenti a X. Inoltre $\sigma_2(X) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è una varietà algebrica proiettiva la cui dimensione, in base a (64), soddisfa la relazione

$$\dim_{\mathbb{C}} \sigma_2(X) \leq \min\{2\dim_{\mathbb{C}} X + 1, N\}; \tag{65}$$

come prima, se un punto generale di $\sigma_2(X)$ giace su una famiglia di rette secanti X allora in (65) vale il minore stretto.

La nozione di join introdotta in precedenza si può generalizzare nel modo seguente:

Definizione 2.1.4 Siano $X_1, ..., X_k \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ varietà algebriche proiettive. Si dice **join di** $X_1, ..., X_k$ e si denota con $J(X_1, ..., X_k)$ l'insieme definito da

$$J(X_1, ..., X_k) = \overline{\bigcup_{x_1\in X_1,...,x_k\in X_k, \dim_{\mathbb{C}}\langle x_1,...,x_k\rangle = k-1} \mathbb{P}^{k-1}_{x_1...x_k}(\mathbb{C})}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbb{P}^{k-1}_{x_1...x_k}(\mathbb{C})$ lo spazio proiettivo generato da $x_1, ..., x_k$.

In alternativa il join di $X_1, ..., X_k$ si può definire induttivamente mediante la relazione

$$J(X_1, ..., X_k) = J(X_1, J(X_2, ..., X_k)). \tag{66}$$

Usando (66) è facile verificare che $J(X_1, ..., X_k)$ è una varietà algebrica proiettiva ancora immersa in $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Inoltre ripetendo il ragionamento fatto per dimostrare (64) otteniamo la stima seguente:

$$\dim_{\mathbb{C}} J(X_1, ..., X_k) \leq \min\{\dim_{\mathbb{C}} X_1 + ... + \dim_{\mathbb{C}} X_k + k - 1, N\}. \tag{67}$$

In particolare, se un punto generale di $J(X_1, ..., X_k)$ giace su una famiglia di $\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{C})$ che intersecano $X_1, ..., X_k$ allora $J(X_1, ..., X_k)$ ha dimensione inferiore alla massima possibile. Grazie alla precedente definizione è possibile generalizzare il concetto di varietà secante come segue:

<u>Definizione</u> 2.1.5 Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva. Si dice **k-esima varietà secante di** X e si denota con $\sigma_k(X)$ il join di k copie di X, cioè

$$\sigma_k(X) = J(\underbrace{X, ..., X}_{k});$$

se $k = 1$ per convenzione poniamo $\sigma_1(X) = X$.

Come prima, $\sigma_k(X)$ si può esprimere mediante

$$\sigma_k(X) = \overline{\bigcup_{x_1,...,x_k \in X, \dim_{\mathbb{C}}\langle x_1,...,x_k\rangle = k-1} \mathbb{P}^{k-1}_{x_1...x_k}(\mathbb{C})}.$$

Chiaramente $\sigma_k(X) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è una varietà algebrica proiettiva e da (67) otteniamo

$$\dim_{\mathbb{C}} \sigma_k(X) \leq \min\{k \dim_{\mathbb{C}} X + k - 1, N\}; \tag{68}$$

inoltre se un punto generale di $\sigma_k(X)$ giace su una famiglia di $\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{C})$ secanti X allora in (68) vale la disuguaglianza stretta.

2.2 Il problema della difettività

Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva. Il problema che ci porremo consiste nel determinare la dimensione della k-esima varietà secante $\sigma_k(X)$: si tratta del cosiddetto **problema della difettività** per la varietà X.

Ricordiamo che X si dice **non degenere** se genera $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, cioè se non è contenuta in un iperpiano.

Poniamo la seguente:

Definizione 2.2.1 Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva non degenere.

1. Se $\dim_{\mathbb{C}} \sigma_k(X) = \min\{k \dim_{\mathbb{C}} X + k - 1, N\}$ allora diciamo che $\sigma_k(X)$ ha la **dimensione aspettata**.

2. Se $\dim_{\mathbb{C}} \sigma_k(X) < \min\{k \dim_{\mathbb{C}} X + k - 1, N\}$ allora diciamo che X ha una **varietà k-secante difettiva**.

3. Se esiste k tale che $\dim_{\mathbb{C}} \sigma_k(X) < \min\{k \dim_{\mathbb{C}} X + k - 1, N\}$ allora diciamo che X è **difettiva**.

Osserviamo che X è difettiva se esiste k tale che X ha una varietà k-secante difettiva. Inoltre, poichè X è non degenere, possiamo porre:

$$\widetilde{k} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sigma_k(X) = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})\right\}$$

e si ottiene una catena ascendente di varietà proiettive:

$$X = \sigma_1(X) \subset \sigma_2(X) \subset \sigma_3(X) \subset ... \subset \sigma_{\widetilde{k}}(X) = \mathbb{P}^N(\mathbb{C}).$$

L'intero $\widetilde{k}$ prende il nome di **rango tipico** ed è indicato con $\underline{R}(X)$.

Analizziamo i concetti appena introdotti nel caso delle curve.

Sia $C \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ una curva non contenuta in un piano, è facile verificare che

$$\sigma_2(C) = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$$

cioè la varietà secante di C ha la dimensione aspettata; in particolare abbiamo che $\underline{R}(C) = 2$. Se invece C è una curva di $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ non contenuta in un iperpiano, allora $\sigma_k(C)$ ha la dimensione aspettata, vale cioè:

$$\dim_{\mathbb{C}} \sigma_k(C) = \min\{2k-1, N\}.$$

Da questi primi esempi potrebbe sembrare che le varietà multisecanti di una varietà algebrica proiettiva abbiano sempre la dimensione aspettata; in realtà ciò non è vero, come possiamo evincere dal prossimo risultato che riguarda le superfici:

<u>Teorema</u> 2.2.1 (**Severi**, 1901) *Se $S \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ è una superficie non contenuta in un iperpiano allora*

$$\sigma_2(S) = \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$$

a meno che S non sia la superficie di Veronese.

Ci concentreremo quindi sulla varietà secante della superficie di Veronese.

Ricordiamo che la **superficie di Veronese** è l'immagine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tramite la **mappa quadratica di Veronese** cioè tramite l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \nu_2 : & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \\ & [Z_0, Z_1, Z_2] & \to & [Z_0^2, Z_1^2, Z_2^2, Z_0Z_1, Z_0Z_2, Z_1Z_2] \end{array}$$

dove Z_0, Z_1, Z_2 sono le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

È facile verificare che la superficie di Veronese $\nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ è una varietà algebrica proiettiva immersa in $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$, infatti risulta

$$\nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right) = \left\{ [X_0, ..., X_5] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \,\middle|\, rank \begin{pmatrix} X_0 & X_3 & X_4 \\ X_3 & X_1 & X_5 \\ X_4 & X_5 & X_2 \end{pmatrix} = 1 \right\}. \tag{69}$$

Segue che un generico elemento di $\sigma_2(\nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$ è combinazione lineare di due matrici di rango 1 e quindi può avere al più rango 2. Dunque abbiamo che $\sigma_2(\nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$ è contenuta nell'ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ definita dall'equazione

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & X_3 & X_4 \\ X_3 & X_1 & X_5 \\ X_4 & X_5 & X_2 \end{pmatrix} = 0;$$

essendo tale ipersuperficie irriducibile, $\sigma_2(\nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$ è proprio uguale ad essa. Quindi

$$\dim_{\mathbb{C}} \sigma_2\left(\nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right)\right) = 4 < \min\left\{2\dim_{\mathbb{C}} \nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right) + 1, N\right\} = 5,$$

cioè $\nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ è difettiva.

Concludiamo questa lista di esempi con le *Grassmanniane*.

Dati due interi positivi a e b tali che $a \leq b$, chiamiamo **Grassmanniana** $Gr(a, b)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{C}^{b+1}$ aventi dimensione $a + 1$.

Osserviamo che i sottospazi $(a+1)$-dimensionali di $\mathbb{C}^{b+1}$ sono in corrispondenza biunivoca con i sottospazi proiettivi a-dimensionali di $\mathbb{P}^b(\mathbb{C})$, quindi possiamo pensare $Gr(a, b)$ come l'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione a di $\mathbb{P}^b(\mathbb{C})$.

È facile verificare che $Gr\,(a,b)$ è una varietà algebrica proiettiva immersa in $\mathbb{P}^{\binom{b+1}{a+1}-1}(\mathbb{C})$.

Infatti, sia

$$\psi : Gr\,(a,b) \to \mathbb{P}\left(\Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}\right)$$

l'applicazione definita da

$$\psi\left(\langle v_1, ..., v_{a+1}\rangle\right) = [v_1 \wedge ... \wedge v_{a+1}]$$

dove $v_1, ..., v_{a+1}$ sono $(a+1)$ vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{C}^{b+1}$.

Questa applicazione è ben definita poichè se $w_1, ..., w_{a+1}$ sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{C}^{b+1}$ tali che $\langle v_1, ..., v_{a+1}\rangle = \langle w_1, ..., w_{a+1}\rangle$ allora $v_1 \wedge ... \wedge v_{a+1} = cw_1 \wedge ... \wedge w_{a+1}$, dove c è il determinante della matrice del cambiamento di base. Inoltre ψ è un'inclusione e prende il nome di **immersione di Plücker** di $Gr\,(a,b)$. In particolare chiamiamo **coordinate di Plücker** su $Gr\,(a,b)$ le coordinate omogenee su $\mathbb{P}^{\binom{b+1}{a+1}-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}\left(\Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}\right)$.

Per provare che $Gr\,(a,b) \subset \mathbb{P}^{\binom{b+1}{a+1}-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}\left(\Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}\right)$ è una sottovarietà algebrica, seguendo Harris in [8], procediamo nel modo seguente: innanzitutto ricordiamo che un multivettore $\omega \in \Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}$ si dice **totalmente scomponibile** se esistono $v_1, ..., v_{a+1} \in \mathbb{C}^{b+1}$ tali che $\omega = v_1 \wedge ... \wedge v_{a+1}$. Inoltre diciamo che un vettore $v \in \mathbb{C}^{b+1}$ **divide** ω se esiste $\varphi \in \Lambda^a\mathbb{C}^{b+1}$ tale che $\omega = v \wedge \varphi$.

Quindi, se $v \in \mathbb{C}^{b+1}$ e $\omega \in \Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}$, non è difficile dimostrare che, [14]:

1. v *divide* $\omega \Leftrightarrow \omega \wedge v = 0$;

2. ω *è totalmente scomponibile* $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}}\left\{w \in \mathbb{C}^{b+1} \mid w \textit{ divide } \omega\right\} = a+1$.

Ora osserviamo che, essendo ψ un'inclusione, è possibile identificare $Gr\,(a,b)$ con

$$\operatorname{Im}\psi = \left\{[\omega] \in \mathbb{P}\left(\Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}\right) \mid \omega \text{ è totalmente scomponibile}\right\}.$$

Segue che un punto $[\omega] \in \mathbb{P}\left(\Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}\right)$ appartiene a $Gr\,(a,b)$ se e solo se l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \varphi\,(\omega) & : & \mathbb{C}^{b+1} & \rightarrow & \Lambda^{a+2}\mathbb{C}^{b+1} \\ & & v & \rightarrow & \omega \wedge v \end{array}$$

ha rango $b-a$. In particolare, poichè il rango di $\varphi\,(\omega)$ non può essere strettamente minore di $b-a$, abbiamo che

$$[\omega] \in Gr\,(a,b) \Leftrightarrow rank\varphi\,(\omega) \leq b-a.$$

Quindi, consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1} & \rightarrow & Hom\left(\mathbb{C}^{b+1}, \Lambda^{a+2}\mathbb{C}^{b+1}\right) \\ & & \omega & \rightarrow & \varphi\,(\omega) \end{array};$$

la matrice associata a Φ ha per coefficienti le coordinate omogenee su $\mathbb{P}\left(\Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}\right)$.

Dunque abbiamo che $Gr\,(a,b)$ è la sottovarietà di $\mathbb{P}\left(\Lambda^{a+1}\mathbb{C}^{b+1}\right)$ definita dall'annullarsi dei determinanti dei minori di ordine $b-a+1$ di questa matrice.

Per quanto riguarda la dimensione della varietà di Grassmann, è noto che

$$\dim_{\mathbb{C}} Gr\,(a,b) = (a+1)\,(b-a)\,. \tag{70}$$

Infatti, sia W un elemento di $Gr\,(a,b)$, ad esso possiamo associare la matrice $(a+1)\times(b+1)$ a elementi in $\mathbb{C}$

$$A_W = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{a+1,1} & \cdots & \alpha_{a+1,b+1} \end{pmatrix}$$

le cui righe corrispondono alle coordinate di una base $\{v_1, ..., v_{a+1}\}$ di W. Chiaramente questa rappresentazione non è unica: infatti, se scegliamo un'altra base di W dobbiamo moltiplicare a sinistra A_W per la matrice del cambiamento di base, che appartiene a $GL(a+1, \mathbb{C})$.

Poichè $rank\ A_W = a+1$, per semplicità possiamo assumere che il minore corrispondente alle prime $a+1$ colonne di A_W sia invertibile; quindi, a meno di moltiplicare per un elemento di $GL(a+1, \mathbb{C})$, W si rappresenta univocamente con una matrice del tipo

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} & \beta_{1,a+2} & \cdots & \beta_{1,b+1} \\ I_{a+1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \beta_{a+1,a+2} & \cdots & \beta_{a+1,b+1} \end{array} \right), \tag{71}$$

dove abbiamo indicato con I_{a+1} la matrice identica di ordine $a+1$.

In particolare abbiamo che $Gr(a, b)$ ha per coordinate locali $\beta_{1,a+2}, ..., \beta_{a+1,b+1}$, da cui (70).

Con questa identificazione le coordinate di Plücker sono esattamente i determinanti dei minori $(a+1) \times (a+1)$ di A, che a sua volta coincidono con i minori della matrice

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,a+2} & \cdots & \beta_{1,b+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{a+1,a+2} & \cdots & \beta_{a+1,b+1} \end{pmatrix}.$$

Veniamo adesso alle multisecanti di $Gr(a, b)$.

Sia $\sigma_k(Gr(a, b))$ la k-esima varietà secante di $Gr(a, b)$, per (68) essa ha dimensione aspettata pari a

$$\min\left\{ k(a+1)(b-a) + k - 1, \binom{b+1}{a+1} - 1 \right\}.$$

Per quanto riguarda le Grassmanniane delle rette, cioè $Gr\,(1,b)$, esse sono difettive finchè non riempiono lo spazio ambiente: per dimostrare ciò si procede in modo analogo al caso della superficie di Veronese, dato che ogni elemento di $\sigma_k\,(Gr\,(1,n))$ è una matrice antisimmetrica di rango al più k.

Se, invece, $a \geq 2$ conosciamo pochi casi in cui $Gr\,(a,b)$ è difettiva.

Ad esempio sappiamo che $\sigma_3\,(Gr\,(2,6))$ non ha la dimensione aspettata.

Per provare ciò procediamo come segue (si veda anche [1]): sia $\omega \in \Lambda^3\mathbb{C}^7$ e sia

$$A_\omega : \Lambda^2\mathbb{C}^7 \to \Lambda^5\mathbb{C}^7$$

l'applicazione lineare definita da

$$A_\omega\,(v) = v \wedge \omega$$

per ogni $v \in \Lambda^2\mathbb{C}^7$. Osserviamo che se ω è totalmente scomponibile allora $rank\,(A_\omega) = 6$. Infatti, sia $e_1, ..., e_7$ una base di $\mathbb{C}^7$ e supponiamo che $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, risulta che

$$\mathrm{Im}\,A_\omega = \{v \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \mid v \text{ è un bivettore in } e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

da cui

$$rank\,(A_\omega) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\,A_\omega = \binom{4}{2} = 6.$$

Inoltre è facile verificare che l'applicazione che ad $\omega \in \Lambda^3\mathbb{C}^7$ associa $A_\omega \in Hom\,(\Lambda^2\mathbb{C}^7, \Lambda^5\mathbb{C}^7)$ è lineare.

Quindi, se $\omega \in \sigma_3\,(Gr\,(2,6))$, cioè se $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ con ω_i totalmente scomponibile, allora $A_\omega = A_{\omega_1} + A_{\omega_2} + A_{\omega_3}$, da cui

$$rank\,(A_\omega) \leq rank\,(A_{\omega_1}) + rank\,(A_{\omega_2}) + rank\,(A_{\omega_3}) \leq 18.$$

Da questo discende che $\sigma_3\left(Gr\left(2,6\right)\right)$ è una ipersuperficie determinantale, in particolare non riempie lo spazio ambiente $\mathbb{P}^{34}\left(\mathbb{C}\right)$ e $Gr\left(2,6\right)$ è difettiva.

Più in generale, per $a \geq 2$ è stata proposta la congettura seguente:

Congettura 2.2.1 (**Baur-Draisma-de Graaf**) *Sia* $a \geq 2$. *Allora* $\sigma_k\left(Gr\left(a,b\right)\right)$ *ha la dimensione aspettata tranne che nei seguenti casi*:

$\boxed{(a,b,k)}$	$\boxed{\dim_{\mathbb{C}}\sigma_k\left(Gr\left(a,b\right)\right)}$	$\boxed{\exp\dim_{\mathbb{C}}\sigma_k\left(Gr\left(a,b\right)\right)}$
$(2,6,3)$	33	$\min\left\{3\times 12+3-1, \binom{7}{3}-1\right\} = \min\{38,34\} = 34$
$(3,7,3)$	49	$\min\left\{3\times 16+3-1, \binom{8}{4}-1\right\} = \min\{50,69\} = 50$
$(3,7,4)$	63	$\min\left\{4\times 16+4-1, \binom{8}{4}-1\right\} = \min\{50,69\} = 67$
$(2,8,4)$	73	$\min\left\{4\times 18+4-1, \binom{9}{3}-1\right\} = \min\{75,83\} = 75$

Questa congettura è stata verificata sperimentalmente da McGillivray per $b \leq 14$, [13], e successivamente da Baur-Draisma-de Graaf per $b = 15$, [1].

Inoltre Abo, Ottaviani e Peterson hanno classificato le Grassmanniane con varietà k-secanti difettive per valori di k piccoli, [1] . A tal riguardo hanno dimostrato il teorema seguente:

Teorema 2.2.2 *Siano* $a \geq 2$ *e* $k \leq 6$. *Allora* $\sigma_k\left(Gr\left(a,b\right)\right)$ *ha la dimensione aspettata tranne che nei casi elencati nella congettura di Baur-Draisma-de Graaf*.

È molto probabile che questo risultato possa essere esteso a valori di k grandi, cosicchè possiamo pensare che tutte le Grassmanniane difettive siano state trovate.

Nel prossimo paragrafo vedremo una spiegazione geometrica anche del fatto che $\sigma_3(Gr(3,7))$ e $\sigma_4(Gr(3,7))$ non hanno la dimensione aspettata.

2.3 Spazio tangente ad una varietà algebrica proiettiva e Lemma di Terracini

Introduciamo ora due nozioni correlate di spazio tangente ad una varietà algebrica proiettiva, quella di *spazio tangente affine* e quella di *spazio tangente embedded.* Cominciamo con la seguente:

Definizione 2.3.1 Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva e sia

$$\pi : \mathbb{C}^{N+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$$

la proiezione canonica. Si dice **cono affine su** X e si indica con $\widehat{X}$ l'immagine inversa di X tramite π unita a 0, cioè

$$\widehat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}.$$

È facile verificare che $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{N+1}$ è una varietà algebrica affine tale che

$$\dim_{\mathbb{C}} \widehat{X} = \dim_{\mathbb{C}} X + 1.$$

Ricordiamo ora la definizione di spazio tangente ad una varietà differenziabile:

Definizione 2.3.2 Sia $M \subset \mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ una sottovarietà, sia $p \in M$ e sia $\alpha(t) \subset M$ una curva tale che $\alpha(0) = p$. Si dice **vettore tangente a** M **in** p la derivata $\alpha'(0)$ considerata come vettore di $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ con origine in p. Si dice **spazio tangente a** M **in** p e si denota con $\widehat{T}_pM$ l'insieme dei vettori tangenti a M in p traslati nell'origine di $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$.

Osserviamo che $\widehat{T}_p M$ è un sottospazio lineare di $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$; inoltre se M è un cono per l'origine di $\mathbb{A}^N(\mathbb{C})$ allora $\widehat{T}_p M$ è costante lungo i raggi del cono. Grazie a quest'ultima considerazione siamo in grado di dare la seguente:

Definizione 2.3.3 Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva e sia $p \in X^*$, dove $X^* \subset X$ è l'aperto dei punti lisci di X. Si dice **spazio tangente affine a** X **in** p e si denota con $T_p X$ lo spazio tangente a $\widehat{X}$ in un qualsiasi $\widehat{p} \in \pi^{-1}(p)$, cioè

$$T_p X = \widehat{T}_{\widehat{p}} \widehat{X}.$$

Per quanto abbiamo detto prima $T_p X$ è ben definito cioè non dipende dalla scelta di $\widehat{p} \in \pi^{-1}(p)$. Infine diamo la seguente:

Definizione 2.3.4 Sia $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva e sia $p \in X^*$. Si dice **spazio tangente embedded a** X **in** p e si denota con $\widetilde{T}_p X$ il proiettivizzato dello spazio tangente affine a X in p, in simboli

$$\widetilde{T}_p X = \mathbb{P} T_p X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C}).$$

Osserviamo che se $\widehat{p} \neq 0$ è un punto tale che $\pi(\widehat{p}) = p$ allora

$$\pi\left(\widehat{T}_{\widehat{p}} \widehat{X}\right) = \widetilde{T}_p X.$$

Ricordiamo che un'inclusione tra spazi vettoriali $W \simeq \mathbb{C}^{r+1} \hookrightarrow U \simeq \mathbb{C}^{s+1}$ induce un'applicazione $\mathbb{P}W \hookrightarrow \mathbb{P}U$; l'immagine di tale applicazione prende il nome **sottospazio lineare** di dimensione r di $\mathbb{P}U$.

Ogni sottospazio lineare $L \simeq \mathbb{P}^r(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ può essere descritto come luogo di zeri di polinomi lineari omogenei e quindi è una varietà algebrica proiettiva immersa in $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$. Viceversa, ogni varietà definita da polinomi lineari è un sottospazio lineare.

Inoltre, se $L_1 = \mathbb{P}W_1$ e $L_2 = \mathbb{P}W_2$ sono due sottospazi lineari, lo **spazio** da essi **generato** è il sottospazio associato alla somma $W_1 + W_2 \subset \mathbb{C}^{s+1}$ e si indica con $\langle L_1, L_2 \rangle$.

Per quanto riguarda la dimensione di $\langle L_1, L_2 \rangle$, vale la **formula di Grassmann**:

$$\dim_{\mathbb{C}} \langle L_1, L_2 \rangle = \dim_{\mathbb{C}} L_1 + \dim_{\mathbb{C}} L_2 - \dim_{\mathbb{C}} L_1 \cap L_2. \tag{72}$$

Quanto detto finora si può estendere al caso in cui si hanno $k > 2$ sottospazi lineari.

Consideriamo ora l'operazione di somma tra spazi vettoriali

$$\begin{array}{cccc} + & : & \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}^{N+1} & \to & \mathbb{C}^{N+1} \\ & & (v, w) & \to & v + w \end{array};$$

vale che:

1. *se* W_1 *e* W_2 *sono sottospazi vettoriali di* C^{N+1} e $L_i = \pi(W_i)$, *per* $i \in \{1, 2\}$, *allora*

$$\langle L_1, L_2 \rangle = \pi(W_1 + W_2);$$

2. *il differerenziale della somma coincide con l'operazione stessa*;

3. *se* X e Y *sono varietà algebriche proiettive di* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *allora*

$$\overline{\widehat{X} + \widehat{Y}} = \widehat{J(X, Y)}.$$

Enunciamo adesso il teorema che costituisce lo strumento fondamentale per studiare il problema della difettività:

<u>Lemma</u> 2.3.1 (**Terracini**) *Sia* $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *una varietà algebrica proiettiva e sia* $z \in \sigma_k(X)^*$ *un punto generale, allora*

$$\widetilde{T}_x \sigma_k(X) = \left\langle \widetilde{T}_{x_1} X, ..., \widetilde{T}_{x_k} X \right\rangle$$

dove $x_1, ..., x_k \in X^*$ *sono punti generali e* $z \in \mathbb{P}^{k-1}_{x_1 ... x_k}(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Siano $\widehat{z} \in \pi^{-1}(z)$ e $\widehat{x_i} \in \pi^{-1}(x_i)$ punti generali, per $i \in \{1, ..., k\}$, tali che

$$\widehat{z} = \sum_{i=1}^{k} \widehat{x_i};$$

dalle proprietà dell'operazione di somma descritte sopra discende che

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{T}_{x_1}X, ..., \widetilde{T}_{x_k}X \right\rangle &= \pi\left(\pi^{-1}\left(\widetilde{T}_{x_1}X\right) + ... + \pi^{-1}\left(\widetilde{T}_{x_k}X\right)\right) \\
&= \pi\left(\widehat{T}_{\widehat{x_1}}\widehat{X} + ... + \widehat{T}_{\widehat{x_k}}\widehat{X}\right) \\
&= \pi\left(\widehat{T}_{\widehat{x_1}+...+\widehat{x_k}}\left(\underbrace{\widehat{X} + ... + \widehat{X}}_{k\ volte}\right)\right) \\
&= \pi\left(\widehat{T}_{\widehat{z}}\left(\overline{\underbrace{\widehat{X} + ... + \widehat{X}}_{k\ volte}}\right)\right) \\
&= \pi\left(\widehat{T}_{\widehat{z}}\left(\widehat{\sigma_k(X)}\right)\right) = \widetilde{T}_z\sigma_k(X),
\end{aligned}$$

da cui la tesi. $\square$

Corollario 2.3.2

$$\dim_{\mathbb{C}} \sigma_k(X) = \dim_{\mathbb{C}} \left\langle \widetilde{T}_{x_1}X, ..., \widetilde{T}_{x_k}X \right\rangle$$

dove $x_1, ..., x_k \in X^*$.

Per semicontinuità, dal corollario precedente, segue che se esistono $x_1, ..., x_k \in X^*$ tali che gli spazi tangenti $\widetilde{T}_{x_1}X, ..., \widetilde{T}_{x_k}X$ sono linearmente indipendenti, oppure

$$\left\langle \widetilde{T}_{x_1}X, ..., \widetilde{T}_{x_k}X \right\rangle = \mathbb{P}^N(\mathbb{C}),$$

allora $\sigma_k(X)$ ha la dimensione aspettata. Quindi per dimostrare che X non ha una varietà k-secante difettiva è sufficiente provare che esistono k punti lisci di X tali che gli spazi tangenti embedded nei punti sono linearmente indipendenti, oppure generano lo spazio ambiente.

Nel caso della superficie di Veronese possiamo fare le seguenti considerazioni.

Ricordiamo che $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ parametrizza le coniche piane di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, quindi, per (69), $\nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ è l'insieme delle rette doppie. Segue che se $r^2 \in \nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ allora

$$\widetilde{T}_{r^2}\nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right) = \{sr \mid s \text{ retta}\}. \tag{73}$$

Siano ora $l_1^2, l_2^2 \in \nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))^*$, da (73) si ha che

$$\widetilde{T}_{l_1^2}\nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right) \cap \widetilde{T}_{l_2^2}\nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right) = \{l_1 l_2\}.$$

Quindi, per il lemma di Terracini,

$$\dim_{\mathbb{C}} \sigma_2\left(\nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right)\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left\langle \widetilde{T}_{l_1^2}\nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right), \widetilde{T}_{l_2^2}\nu_2\left(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\right)\right\rangle = 4.$$

Questa è una dimostrazione alternativa del fatto che $\sigma_2(\nu_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})))$ non ha la dimensione aspettata.

Vediamo adesso un metodo per provare che una varietà algebrica ha una k-secante difettiva. A questo proposito ricordiamo che, dato un intero positivo d, si dice **curva razionale normale** l'immagine di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tramite l'applicazione

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_d & : & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{P}^d(\mathbb{C}) \\ & & [Z_0, Z_1] & \to & \left[Z_0^d, Z_0^{d-1}Z_1, ..., Z_0 Z_1^{d-1}, Z_1^d\right] \end{array};$$

è facile verificare che $\gamma_d\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right) = [X_0, ..., X_d] \in \mathbb{P}^d(\mathbb{C})$ tali che

$$rank \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{k-1} & X_k \\ X_1 & X_2 & \cdots & \cdots & \cdots & X_{k+1} \\ X_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & X_{d-1} \\ X_{d-k} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & X_d \end{pmatrix} = 1 \text{ con } 1 \leq k \leq d-1,$$

cioè $\gamma_d\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)$ è una varietà algebrica proiettiva immersa in $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$. Inoltre osserviamo che, se sostituiamo i monomi $Z_0^d, Z_0^{d-1}Z_1, ..., Z_0Z_1^{d-1}, Z_1^d$ con una base arbitraria $F_0, F_1, ..., F_{d-1}, F_d$ dello spazio dei polinomi omogenei di grado d su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, otteniamo un'applicazione la cui immagine è proiettivamente equivalente a $\gamma_d\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)$. Così possiamo chiamare questa nuova curva ancora curva razionale normale.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per enunciare il prossimo risultato:

Teorema 2.3.3 *Sia* $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *una varietà algebrica proiettiva tale che* $k \dim_{\mathbb{C}} X + k - 1 \leq N$. *Se esiste una curva razionale normale di* X *che giace in* $\mathbb{P}^{2k-2}(\mathbb{C})$ *e che contiene* k *punti generali di* X *allora* X *è* k*-difettiva.*

Dimostrazione. Siano $x_1, ..., x_k$ punti generali di X e siano $T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X$ gli spazi tangenti affini in essi. Dall' ipotesi segue che, per ogni $i = \{1, ..., k\}$,

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(T_{x_i}X \cap \mathbb{C}^{2k-1}\right) = 2$$

poichè $T_{x_i}X$ contiene lo spazio tangente affine alla curva in x_i. Sia ora $\pi_{|\langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X\rangle}$

la restrizione a $\langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X\rangle$ della proiezione canonica

$$\pi : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}^{N+1}/\mathbb{C}^{2k-1}.$$

Osserviamo che π è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, quindi, per il teorema di nullità e rango,

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X\rangle &= \dim_{\mathbb{C}} \ker \pi_{|\left\langle T_{x_1}X,...,T_{x_k}X\right\rangle} + \\
&\quad + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} \pi_{|\left\langle T_{x_1}X,...,T_{x_k}X\right\rangle} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \left(\langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X\rangle \cap \mathbb{C}^{2k-1}\right) + \\
&\quad + \dim_{\mathbb{C}} \pi \langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X\rangle \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \left(\langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X\rangle \cap \mathbb{C}^{2k-1}\right) + \\
&\quad + \dim_{\mathbb{C}} \langle \pi\left(T_{x_1}X\right), ..., \pi\left(T_{x_k}X\right)\rangle,
\end{aligned}$$

da cui, per (72),

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X\rangle &\leq 2k - 1 + \\
&\quad + \dim_{\mathbb{C}} \pi\left(T_{x_1}X\right) + ... + \dim_{\mathbb{C}} \pi\left(T_{x_k}X\right).
\end{aligned} \tag{74}$$

Ora sia $\pi_{|T_{x_i}X}$ la restrizione di π a $T_{x_i}X$; per il teorema di nullità e rango, da (74) segue che

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X\rangle &\leq 2k - 1 + \\
&\quad + \dim_{\mathbb{C}} T_{x_1}X - \dim_{\mathbb{C}} \left(T_{x_1}X \cap \mathbb{C}^{2k-1}\right) + ... \\
&\quad ... + \dim_{\mathbb{C}} T_{x_k}X - \dim_{\mathbb{C}} \left(T_{x_k}X \cap \mathbb{C}^{2k-1}\right) \\
&= 2k - 1 + k(\dim_{\mathbb{C}} X + 1) - 2k \\
&= k \dim_{\mathbb{C}} X + k - 1.
\end{aligned}$$

Dunque, per il lemma di Terracini, abbiamo che

$$\dim_{\mathbb{C}} \widehat{\sigma_k(X)} = \dim_{\mathbb{C}} \langle T_{x_1}X, ..., T_{x_k}X \rangle \leq k \dim_{\mathbb{C}} X + k - 1 < \exp \dim_{\mathbb{C}} \widehat{\sigma_k(X)},$$

cioè X è k-difettiva. □

Come anticipato, vediamo ora una spiegazione geometrica della difettività di $Gr(3,7)$ che fa uso del risultato precedente; più precisamente mostreremo che $\sigma_3(Gr(3,7))$ e $\sigma_4(Gr(3,7))$ non hanno la dimensione aspettata (si veda anche [1]).

Sia $e_1, ..., e_8$ una base di $\mathbb{C}^8$ e siano

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle \\ P_2 &= \langle e_5, e_6, e_7, e_8 \rangle \\ P_3 &= \langle e_1 + e_5, e_2 + e_6, e_3 + e_7, e_4 + e_8 \rangle \end{aligned}$$

tre punti generali di $Gr(3,7)$. In base a quanto detto nel paragrafo precedente, possiamo associare a questi punti rispettivamente le matrici

$$A_{P_1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A_{P_2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A_{P_3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e lavorare su di esse.

Sia ora C la curva razionale normale definita da

$$C(t) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right);$$

è facile verificare che C giace in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$, è interamente contenuta in $Gr\,(3,7)$ e vale che

$$C\,(0) = A_{P_1},\; C\,(1) = A_{P_3},\; C\,(\infty) = A_{P_2}.$$

Quindi, essendo $3\dim_{\mathbb{C}} Gr\,(3,7) + 2 = 3 \times 16 + 2 = 50 < \binom{8}{4} - 1 = 69$, dal teorema precedente si ha che $Gr\,(3,7)$ è 3-difettiva.

Da questo risultato discende immediatamente che $Gr\,(3,7)$ è anche 4-difettiva.

III SECANTI DELLA VARIETÀ DEGLI SPINORI PURI

3.1 Algoritmo probabilistico

L'oggetto principale del nostro studio è il cosiddetto *problema della difettività per le varietà spinoriali*, precisamente siamo interessati al problema seguente:

$$\begin{aligned} &\text{"}\textit{data la varietà degli spinori puri, } PS(V,Q)_+, \\ &\textit{calcolare } \dim_{\mathbb{C}} \sigma_k \left(PS(V,Q)_+ \right) \text{".} \end{aligned} \tag{75}$$

Finora pochi sono i risultati noti in questo ambito. Sappiamo ad esempio che la varietà secante di $PS(V,Q)_+$ ha la dimensione aspettata (si veda [12]), cioè risulta

$$\dim_{\mathbb{C}} \sigma_2 \left(PS(V,Q)_+ \right) = \min \left\{ 2 \dim_{\mathbb{C}} \left(PS(V,Q)_+ \right) + 1, N \right\}$$

dove:

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(PS(V,Q)_+ \right) = \frac{h(h-1)}{2}$$

e

$$N = 2^{h-1} - 1.$$

Questo fatto vale qualunque sia lo spazio vettoriale complesso V di dimensione pari $n = 2h$ e qualunque sia la forma quadratica Q definita su V.

Tutavia, se $k \geq 3$ la questione descritta in (75) è ancora aperta, almeno per h "grande" ($h \geq 6$).

Per affrontare questo problema, mediante il software Macaulay2, abbiamo elaborato l'algoritmo probabilistico **secantips.m2,** le cui istruzioni sono riportate qui di seguito:

```
h = value read "h?"
p = value read "p?"
S = QQ[x_0..x_(p-1)]
X = vars S
M = X -> genericSkewMatrix(S,x_0,h)
par = X -> apply(floor(h/2)+1,i->generators pfaffians(2*i,M(X)))
f = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a|(l#i););a)
PS = f(par(x))
J = jacobian PS
g = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a||(l#i););a)
k = value read "k?"
r = value read "r?"
punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))
puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i})
PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})))
Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})))
```

JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i))

JJPS = g(JPS)

rank JJPS.

Questo algoritmo si basa essenzialmente sul *lemma di Terracini* e sulla rappresentazione parametrica di $PS(V,Q)_+$ mediante gli *Pfaffiani* ed è stato pensato per qualsiasi h e k interi.

Illustriamo brevemente il modo in cui opera **secantips.m2**. Si procede secondo i passi seguenti:

1. *Preliminari.*

Assegnato il valore di h e calcolata la dimensione p di $PS(V,Q)_+$, costruiamo l'anello di polinomi S a coefficienti razionali nelle variabili $\{x_0, ..., x_{p-1}\}$ su cui lavoreremo.

$$\begin{aligned} \text{INPUT } h &= \frac{n}{2},\, p = \frac{h(h-1)}{2} \\ S &= \mathbb{Q}\left[x_0, ..., x_{p-1}\right] \\ X &= (x_0, ..., x_{p-1}) \end{aligned}$$

2. *Parametrizzazione di* $PS(V,Q)_+$.

Definiamo la parametrizzazione della varietà degli spinori puri pari, cioè la funzione che, data una p-upla $\{y_0, ..., y_{p-1}\}$, calcola gli Pfaffiani principali della matrice $h \times h$

$$\begin{pmatrix} 0 & y_0 & y_1 & \cdots & y_{h-1} \\ -y_0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -y_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & y_{p-1} \\ -y_{h-1} & \cdots & \cdots & -y_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Più precisamente, prima costruiamo la funzione che ad ogni p-upla $\{y_0, ..., y_{p-1}\}$ associa la matrice antisimmetrica di ordine h che ha per coefficienti gli elementi della p-upla, ossia

$$M : \{\text{vettori } 1 \times p\} \to \{\text{matrici } h \times h\}$$

$$Y = (y_0, ..., y_{p-1}) \to M(Y) = \begin{pmatrix} 0 & y_0 & y_1 & \cdots & y_{h-1} \\ -y_0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -y_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & y_{p-1} \\ -y_{h-1} & \cdots & \cdots & -y_{p-1} & 0 \end{pmatrix};$$

successivamente calcoliamo gli Pfaffiani principali di tale matrice mediante l'applicazione

$$par : \{\text{vettori } 1 \times p\} \to \left\{\text{vettori } 1 \times 2^{h-1}\right\}$$

$$Y = (y_0, ..., y_{p-1}) \to par(Y) = (\text{Pfaffiani principali di } M(Y)).$$

Osserviamo che, data una matrice antisimmetrica A, il comando *pfaffians*(a,A)) produce l'ideale generato da suoi Pfaffiani $a \times a$. Applicando ad esso il comando *generators* otteniamo una matrice riga costituita dai generatori dell'ideale.

3. *Definizione di* $PS(V,Q)_+$.

Per il teorema 1.10.5, la varietà $PS(V,Q)_+$ è data dall'immagine della funzione par, cioè è una matrice riga con 2^{h-1} elementi:

$$PS = par\,(X) = (ps_i)_{i=0,\dots,2^{h-1}-1}\,.$$

In particolare, poichè *par* è definita mediante *apply*, essa restituisce una lista di $\left\lfloor \frac{h}{2} \right\rfloor + 1$ matrici riga. Così, è stato necessario costruire la funzione f per compattare tutti gli Pfaffiani in un'unica matrice riga.

4. *Matrice jacobiana della parametrizzazione.*

Applicando *jacobian* a PS otteniamo la matrice $p \times 2^{h-1}$ contenente le derivate delle 2^{h-1} funzioni parametriche rispetto alle p variabili.

$$J = (\partial_j ps_i)_{i=0,\dots,2^{h-1}-1;j=0,\dots,p-1}$$

5. *Scelta di k punti casuali in PS e calcolo delle loro coordinate.*

Per poter studiare $\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$, usando il *lemma di Terracini*, dobbiamo prendere k punti generici nella varietà degli spinori puri pari: per fare ciò consideriamo una lista di k insiemi (*punti*) di p elementi scelti a caso in $\mathbb{Q}$ (il campo dei numeri razionali è l'approssimazione del campo dei numeri complessi su cui può lavorare il computer), costruiamo le matrici antisimmetriche $h \times h$ ad essi associate e ne calcoliamo gli Pfaffiani principali. In questo modo otteniamo $PSpunti$, la lista delle coordinate parametriche dei k punti scelti.

INPUT k, r

$$
\begin{aligned}
punti &= \{punti_0, ..., punti_{k-1}\} \\
punti_i &= \left(q_0^i, ..., q_{p-1}^i\right), \; q_j^i \in \mathbb{Q} \text{ random}, \; q_j^i \leq r \\
PSpunti &= \{PS\,(punti_0)\,, ..., PS\,(punti_{k-1})\} = \{P_0, ..., P_{k-1}\}
\end{aligned}
$$

6. *Spazi tangenti affini a PS nei k punti.*

Valutiamo la matrice jacobiana J nei punti considerati, cioè sostituiamo alle variabili i valori dei parametri della lista *punti*. Otteniamo così una lista di matrici ($Jpunti$) le cui immagini corrispondono agli spazi vettoriali tangenti a $PS(V,Q)_+$; anteponendo ad ognuna di esse la riga con le coordinate del punto in questione abbiamo lo spazio tangente affine a $PS(V,Q)_+$ in quel punto.

$$
\begin{aligned}
Jpunti &= \left\{J|_{X=punti_0}, ..., J|_{X=punti_{k-1}}\right\} = \{JP_0, ..., JP_{k-1}\} \\
JPS &= \{P_0|JP_0, ..., P_{k-1}|JP_{k-1}\}
\end{aligned}
$$

7. *Calcolo della dimensione di $\sigma_k\,(PS(V,Q)_+)$.*

Infine, incolonniamo le matrici $JP_0, ..., JP_{k-1}$ di forma $(p+1) \times 2^{h-1}$ e otteniamo $JJPS$, la matrice $k\,(p+1) \times 2^{h-1}$ associata allo spazio generato dai tangenti affini. In virtù del *lemma di Terracini*, il rango di $JJPS$ fornisce la dimensione affine di

$\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$. Diminuendo di uno l'output abbiamo la dimensione cercata.

$$\begin{aligned} g \quad &: \quad \{\text{liste di matrici}\} \quad \to \quad \{\text{matrici}\} \\ & \quad\quad B=\{B_1,B_2,...\} \quad \to \quad g(B)=(B_1|B_2|...)^t \\ g(JPS) \quad &= \quad \begin{pmatrix} JPS_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ JPS_{k-1} \end{pmatrix} \quad = \quad JJPS \end{aligned}$$

OUTPUT $rank\left(JJPS\right)$

Osserviamo che, se troviamo una dimensione aspettata (cioè se $JJPS$ ha rango massimo) allora, in virtù delle considerazioni seguenti il corollario 2.3.2, la dimensione effettiva è proprio questo valore. Se, invece, emerge una difettività allora sono necessarie altre verifiche per concludere che $PS(V,Q)_+$ è k-difettiva.

In tal senso **secantips.m2** è un algoritmo di tipo probabilistico.

Nei casi in cui $h \leq 5$ è facile verificare direttamente che $PS(V,Q)_+$ non è difettiva. Infatti:

1) se $h=2$ la matrice jacobiana è

$$J=\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui $\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)=\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right)$, per ogni k;

2) se $h = 3$ la matrice jacobiana è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui $\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right) = \mathbb{P}^3\left(\mathbb{C}\right)$, per ogni k;

2) se $h = 4$ la matrice jacobiana è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_0 \end{pmatrix}$$

da cui $\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right) = \mathbb{P}^7\left(\mathbb{C}\right)$, per ogni $k \geq 2$.

Se $h = 5$ si procede in modo analogo.

Così abbiamo applicato l'algoritmo a partire da $(h,k) = (6,2)$ e ci siamo fermati a $(h,k) = (9,5)$: oltre questi valori non siamo riusciti ad ottenere il risultato richiesto per problemi di memoria del computer.

Di seguito riassumiamo i nostri risultati.

$\boxed{\mathbf{k=2}}$

h	p	N	$\exp\dim\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$	$\dim\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$	difettiva
6	15	31	31	31	NO
7	21	63	43	43	NO
8	28	127	57	57	NO
9	36	255	73	73	NO
10	45	511	91	91	NO
11	55	1023	111	111	NO

$\boxed{\mathbf{k=3}}$

h	p	N	$\exp\dim\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$	$\dim\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$	difettiva
7	21	63	63	58	?
8	28	127	86	85	?
9	36	255	110	110	NO
10	45	511	137	137	NO
11	55	1023	167	167	NO
12	66	2047	200	200	NO

$\boxed{\mathbf{k=4}}$

h	p	N	$\exp\dim\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$	$\dim\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$	difettiva
7	21	63	63	63	NO
8	28	127	115	111	?
9	36	255	147	147	NO
10	45	511	183	183	NO

$\boxed{\mathbf{k=5}}$

h	p	N	$\exp\dim\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$	$\dim\sigma_k\left(PS(V,Q)_+\right)$	difettiva
8	28	127	127	127	NO
9	36	255	184	184	NO

Da queste tabelle emerge che se $h \geq 6$ la varietà $\sigma_2\left(PS(V,Q)_+\right)$ ha la dimensione aspettata e ciò concorda con i risultati teorici già noti.

Abbiamo riscontrato, invece, delle "anomalie" per $(h,k) = \{(7,3),(8,3),(8,4)\}$. Così abbiamo eseguito più volte l'algoritmo con questi dati in ingresso (variando anche il limite superiore r per i numeri random, a partire da $r = 1000$), ma i valori ottenuti sono stati sempre gli stessi. Questo ci ha portato a congetturare che effettivamente tali varietà non abbiano la dimensione aspettata. Più avanti vedremo una dimostrazione teorica del fatto che, se $h = 8$, $PS(V,Q)_+$ ha le varietà 3-secante e 4-secante difettive e che, se $h = 7$, $PS(V,Q)_+$ ha la varietà 3-secante difettiva.

Vediamo come opera **secantips.m2** quando $h = 7$ e $h = 8$, per valori di k crescenti.

Per ognuno dei casi anomali riportiamo due dei numerosi tentativi svolti.

Macaulay 2, version 0.9.2

–Copyright 1993-2001, D. R. Grayson and M. E. Stillman

–Singular-Factory 1.3b, copyright 1993-2001, G.-M. Greuel, et al.

–Singular-Libfac 0.3.2, copyright 1996-2001, M. Messollen

i1 : h = 7;

i2 : p = 21;

i3 : S = QQ[x_0..x_(p-1)];

i4 : X = vars S;

o4 : Matrix S^1 <— S^{21}

i5 : M = X -> genericSkewMatrix(S,x_0,h);

i6 : par = X -> apply(floor(h/2)+1,i->generators pfaffians(2*i,M(X)));

i7 : f = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a|(l#i););a);

i8 : PS = f(par(x)) ;

o8 : Matrix S^1 <— S^{64}

i9 : J = jacobian PS;

o9 : Matrix S^{21} <— S^{64}

i10 : g = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a||(l#i););a);

i11 : k = 2;

i12 : r = 1000;

i13 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o13 = {{991, 76, 991, 979, 661, 343, 818, 363, 574, 203, 329, 450, 536, 259, 269, 295, 22, 832, 655, 876, 909}, {104, 635, 408, 727, 333, 644, 657, 729, 614, 308, 466, 326, 599, 27, 61, 975, 86, 834, 690, 499, 982}}

o13 : List

i14 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i15 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i16 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i17 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i18 : JJPS = g(JPS);

o18 : Matrix S^{44} <— S^{64}

i19 : rank JJPS

o19 = 44

i20 : k = 3;

i21 : r = 1000;

i22 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o23 = {{729, 614, 308, 466, 326, 599, 27, 61, 975, 86, 834, 690, 499, 982,
440, 654, 514, 735, 413, 392, 323}, {759, 47, 462, 465, 30, 207, 374, 295,
171, 237, 801, 541, 645, 643, 117, 842, 841, 775, 6, 911, 91}, {29, 24, 215,
978, 7, 452, 484, 739, 875, 653, 676, 138, 621, 691, 416, 972, 183, 558,
620, 77, 138}}

o23 : List

i24 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i25 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten
entries puntibis#i})));

i26 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i27 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i28 : JJPS = g(JPS);

o28 : Matrix S^{66} <— S^{64}

i29 : rank JJPS

o29 = 59

i30 : r=1000000000;

i31 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o31 = {{420849823, 559325590, 842246789, 222560277, 801546112, 213565331, 740322558, 873960166, 7848129, 345475145, 752464174, 927153813, 532792459, 783534070, 280369664, 386799908, 306032865, 64006068, 653656307, 622697344, 779427355}, {978287363, 940908509, 927217902, 255431213, 212586538, 676639205, 142186148, 159247481, 500767583, 205333466, 826320911, 198806028, 995841511, 413709237, 806580920, 81721154, 683858354, 274876934, 619305041, 954070725, 599261504}, {89793298, 622439292 737314685, 860246183, 90664655, 673424371, 4583707, 521930835, 768329497, 287665246, 597078703, 703657468, 178620647, 42559270, 767553595, 131982214, 667441925, 389345194, 134981727, 688133035, 45458728}}

o31 : List

i32 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i33 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i34 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i35 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i36 : JJPS = g(JPS);

o36 : Matrix S^{66} <— S^{64}

i37 : rank JJPS

o37 = 59

i38 : k = 4;

i39 : r = 1000;

i40 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o40 = {{930, 691, 415, 872, 761, 841, 610, 337, 598, 441, 94, 780, 926, 396, 810, 788, 159, 805, 984, 14, 826}, {213, 83, 154, 187, 341, 546, 337, 653, 219, 860, 451, 654, 478, 594, 376, 691, 956, 460, 294, 762, 880}, {7, 937, 766, 490, 407, 412, 458, 926, 426, 540, 714, 236, 745, 414, 999, 845, 87, 220, 846, 318, 297}, {775, 12, 128, 803, 871, 896, 311, 3, 129, 112, 552, 831, 383, 792, 322, 268, 65, 753, 673, 476, 794}}

o40 : List

i41 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i42 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i43 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i44 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i45 : JJPS = g(JPS);

o45 : Matrix S^{88} <— S^{64}

i46 : rank JJPS

o46 = 64.

Macaulay 2, version 0.9.2

–Copyright 1993-2001, D. R. Grayson and M. E. Stillman

–Singular-Factory 1.3b, copyright 1993-2001, G.-M. Greuel, et al.

–Singular-Libfac 0.3.2, copyright 1996-2001, M. Messollen

i1 : h = 8;

i2 : p = 28;

i3 : S = QQ[x_0..x_(p-1)];

i4 : X = vars S;

o4 : Matrix S^1 <— S^{28}

i5 : M = X -> genericSkewMatrix(S,x_0,h);

i6 : par = X -> apply(floor(h/2)+1,i->generators pfaffians(2*i,M(X)));

i7 : f = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a|(l#i););a);

i8 : PS = f(par(x));

o8 : Matrix S^1 <— S^{128}

i9 : J = jacobian PS;

o9 : Matrix S^{28} <— S^{128}

i10 : g = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a||(l#i););a);

i11 : k = 2;

i12 : r = 1000;

i13 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o13 = {{440, 654, 514, 735, 413, 392, 323, 759, 47, 462, 465, 30, 207, 374,

295,171, 237, 801, 541, 645, 643, 117, 842, 841, 775, 6, 911, 91}, {29, 24,

215, 978, 7, 452, 484, 739, 875, 653, 676, 138, 621, 691, 416, 972, 183,

558, 620, 77, 138, 823, 590, 789, 277, 112, 331, 558}}

o13 : List

i14 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i15 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries

puntibis#i})));

i16 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i17 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i18 : JJPS = g(JPS);

o18 : Matrix S^{58} <— S^{128}

i19 : rank JJPS

o19 = 58

i20 : k = 3;

i21 : r = 1000;

i22 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o22 = {{930, 691, 415, 872, 761, 841, 610, 337, 598, 441, 94, 780, 926, 396,

810, 788, 159, 805, 984, 14, 826, 213, 83, 154, 187, 341, 546, 337}, {653, 219, 860, 451, 654, 478, 594, 376, 691, 956, 460, 294, 762, 880, 7, 937, 766, 490, 407, 412, 458, 926, 426, 540, 714, 236, 745, 414}, {999, 845, 87, 220, 846, 318, 297, 775, 12, 128, 803, 871, 896, 311, 3, 129, 112, 552, 831, 383, 792, 322, 268, 65, 753, 673, 476, 794}}

o22 : List

i23 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i24 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i25 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i26 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i27 : JJPS = g(JPS);

o27 : Matrix S^{87} <— S^{128}

i28 : rank JJPS

o28 = 86

i29 : r = 1000000000;

i30 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o30 = {{820366416, 53339972, 777207183, 171078558, 984204620, 253494077, 14880138, 420849823, 559325590, 842246789, 222560277, 801546112, 213565331, 740322558, 873960166, 7848129, 345475145, 752464174, 927153813, 532792459, 783534070, 280369664, 386799908, 306032865, 64006068, 653656307, 622697344, 779427355}, {978287363, 940908509, 927217902, 255431213, 212586538, 676639205, 142186148, 159247481,

500767583, 205333466, 826320911, 198806028, 995841511, 413709237,

806580920, 81721154, 683858354, 274876934, 619305041, 954070725,

599261504, 89793298, 622439292, 737314685, 860246183, 90664655,

673424371, 4583707}, {521930835, 768329497, 287665246, 597078703,

703657468, 178620647, 42559270, 767553595, 131982214, 667441925,

389345194, 134981727, 688133035, 45458728, 106620320, 759335220,

444706997, 947407019, 626009475, 611838250, 806744492, 535908464,

467138930, 3783078, 305166183, 530067223, 870627783, 480556801}}

o30 : List

i31 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i32 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i33 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i34 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i35 : JJPS = g(JPS);

o35 : Matrix S^{87} <— S^{128}

i36 : rank JJPS

o36 = 86

i37 : k = 4;

i38 : r = 1000;

i39 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o30 = {{40, 883, 901, 378, 337, 950, 74, 46, 294, 440, 883, 875, 36, 928, 843, 493, 480, 424, 134, 535, 275, 210, 952, 262, 222, 404, 908, 690}, {576, 859, 395, 829, 675, 949, 525, 750, 577, 8, 294, 267, 815, 638, 403, 446, 231, 80, 355, 422, 431, 514, 935, 97, 821, 47, 905, 441}, {985, 45, 538, 750, 510, 990, 491, 721, 282, 68, 433, 885, 896, 840, 945, 494, 314, 71, 201, 461, 11, 230, 946, 518, 364, 893, 672, 882}, {709, 805, 146, 761, 444, 958, 140, 290, 197, 786, 508, 142, 764, 917, 676, 915, 188, 666, 545, 498, 277, 29, 514, 715, 759, 987, 639, 97}}

o39 : List

i40 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i41 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i42 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i43 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i44 : JJPS = g(JPS);

o44 : Matrix S^{116} <— S^{128}

i45 : rank JJPS

o45 = 112

i46 : r = 1000000000;

i47 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r)) o47 = {{520932930, 28925691, 822784415, 890459872, 145532761, 132723841, 40043610, 643550337, 68362598, 66433441, 2830094, 906706780, 269870926, 28169396, 789614810, 400151788, 579802159, 247074805, 500357984, 763654014, 370738826, 950367213, 631361083, 569022154, 810662187, 163120341, 19932546, 146335337}, {27706653, 809249219, 830665860, 2898451, 115120654, 97549478, 422527594, 840335376, 309696691, 719408956, 566369460, 116969294, 393860762, 73226880, 9021007, 85187937, 968021766, 205711490, 91824407, 838023412, 461728458, 57271926, 496586426, 6609540, 210367714, 892086236, 710028745, 679469414}, {671889999, 779175845, 46126087, 792526220, 294600846, 52107318, 741849297, 764058775, 731106012, 590294128, 846443803, 42297871, 669187896, 462087311, 793547003, 64010129, 514888112, 158379552, 152891831, 55540383, 897787792, 899316322, 819516268, 797288065, 515529753, 559526673, 926881476, 250591794}, {480849991, 664835076, 525706991, 809673979, 734177661, 675891343, 664792818, 608455363, 139642574, 359072203, 290446329, 94100450, 791277536, 428300259, 77268269, 567674295, 425011022, 629636832, 654306655, 461172876, 664044909, 130272104, 197415635, 895321408, 248989727, 472197333, 61478644, 917892657}}

o47 : List

i48 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i49 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i50 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i51 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i52 : JJPS = g(JPS);

o52 : Matrix S^{116} <— S^{128}

i53 : rank JJPS

o53 = 112

i54 : k = 5;

i55 : r = 1000;

i56 : punti = apply(k,i->for j from 1 to p list random(r))

o56 = {{166, 129, 145, 174, 813, 459, 70, 664, 908, 865, 68, 307, 344, 355, 363, 509, 902, 213, 538, 205, 148, 481, 583, 466, 911, 28, 511, 237}, {920, 154, 354, 934, 41, 725, 504, 298, 292, 685, 183, 655, 371, 707, 835, 497, 246, 703, 468, 647, 270, 595, 214, 925, 194, 727, 35, 728}, {320, 220, 997, 19, 475, 250, 492, 464, 930, 78, 183, 223, 783, 801, 40, 883, 901, 378, 337, 950, 74, 46, 294, 440, 883, 875, 36, 928}, {843, 493, 480, 424, 134, 535, 275, 210, 952, 262, 222, 404, 908, 690, 576, 859, 395, 829, 675, 949, 525, 750, 577, 8, 294, 267, 815, 638}, {403, 446, 231, 80, 355, 422, 431, 514, 935, 97, 821, 47, 905, 441, 985, 45, 538, 750, 510, 990, 491, 721, 282, 68, 433, 885, 896, 840}}

o56 : List

i57 : puntibis = apply(k,i->matrix{punti#i});

i58 : PSpunti = apply(k,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i59 : Jpunti = apply(k,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries puntibis#i})));

i60 : JPS = apply(k,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

i61 : JJPS = g(JPS);

o61 : Matrix S^{145} <— S^{128}

i62 : rank JJPS

o62 = 128.

3.2 I casi difettivi

I dati sperimentali che abbiamo esaminato nel precedente paragrafo ci hanno fornito due probabili varietà degli spinori puri difettive, quelle relative a $h = 7$ e $h = 8$.

La dimostrazione teorica del fatto che, per $h = 8$, $\sigma_3 (PS(V,Q)_+)$ e $\sigma_4 (PS(V,Q)_+)$ non hanno la dimensione aspettata si basa sul seguente:

<u>Lemma</u> 3.2.1 *Se h è pari l'azione di $SO(n,Q)$ su $PS(V,Q)_+$ è genericamente 3-transitiva, cioè $SO(n,Q)$ ha un'orbita densa in $PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+$.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_h, f_1, ..., f_h\}$ una base di $V = E \oplus F$, con $\{e_1, ..., e_h\}$ base di E e $\{f_1, ..., f_h\}$ base di F, tale che

$$B(e_i, f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} ;$$

in particolare la matrice B della forma B rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$B = \begin{bmatrix} O_h & I_h \\ I_h & O_h \end{bmatrix}$$

dove abbiamo indicato con O_h la matrice nulla di ordine h e con I_h la matrice identica di ordine h.

Ora, siano

$$s_0 = e_1 \cdot ... \cdot e_h, \; s_1 = \prod_{i=1}^{\frac{h}{2}} (1 + e_{2i-1} e_{2i}), \; s_{-1} = \prod_{i=1}^{\frac{h}{2}} (1 - e_{2i-1} e_{2i})$$

tre elementi di $PS(V,Q)_+$: essi sono *rappresentanti spin* rispettivamente di

$$\begin{aligned} E &= \langle e_1, ..., e_h \rangle \\ G &= \left\langle e_{2i-1} + f_{2i}, e_{2i} - f_{2i-1}, 1 \leq i \leq \frac{h}{2} \right\rangle \\ H &= \left\langle e_{2i-1} - f_{2i}, e_{2i} + f_{2i-1}, 1 \leq i \leq \frac{h}{2} \right\rangle . \end{aligned}$$

Quindi ad essi possiamo associare, rispettivamente, le matrici $h \times 2h$

$$\begin{aligned} P_0 &= [I_h \,| O_h] \\ P_1 &= \left[I_h \middle| J_{\frac{h}{2}} \right] \\ P_{-1} &= \left[I_h \middle| -J_{\frac{h}{2}} \right] \end{aligned}$$

dove denotiamo con $J_{\frac{h}{2}}$ la matrice antisimmetrica di ordine $2h$ costituita da h blocchi diagonali del tipo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vogliamo provare che l'orbita di (P_0, P_1, P_{-1}) è densa in $PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+$, cioè che essa ha dimensione pari a

$\dim_{\mathbb{C}} PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ = \dfrac{3h(h-1)}{2}$.

Procediamo nel modo seguente: sia P un elemento di $PS(V,Q)_+$, ossia

$$P = [I_h \,| U_h] \,,$$

con U_h matrice antisimmetrica $h \times h$, e sia

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \in SO(n,Q)$$

con $g_{ij} \in M\left(h, \mathbb{C}\right)$, per $i,j \in \{1,2\}$. L'azione di g su P è data da

$$g\left(P\right) := Pg^t \sim \left[I_h \middle| \left(g_{11}^t + U_h g_{12}^t\right)^{-1} \left(g_{21}^t + U_h g_{22}^t\right) \right] .$$

È facile verificare che questa azione è ben definita: infatti, poichè g conserva la forma quadratica e P è totalmente isotropo, abbiamo che

$$g\left(P\right)Bg\left(P\right)^{t}=Pg^{t}BgP^{t}=PBP^{t}=O_{h},$$

da cui $g\left(P\right)$ è totalmente isotropo; inoltre, per definizione, $rank g(P)=h$. Segue che $g\left(P\right)\in PS(V,Q)_{+}$. Il fatto che g conservi B garantisce che la matrice

$$\left(g_{11}^{t}+U_{h}g_{12}^{t}\right)^{-1}\left(g_{21}^{t}+U_{h}g_{22}^{t}\right)$$

sia antisimmetrica, per qualsiasi U_h. Infatti, essendo

$$\begin{aligned} g^{t}Bg &= \begin{bmatrix} g_{11}^{t} & g_{21}^{t} \\ g_{12}^{t} & g_{22}^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{h} & I_{h} \\ I_{h} & O_{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{21}^{t} & g_{11}^{t} \\ g_{22}^{t} & g_{12}^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{21}^{t}g_{11}+g_{11}^{t}g_{21} & g_{21}^{t}g_{12}+g_{11}^{t}g_{22} \\ g_{22}^{t}g_{11}+g_{12}^{t}g_{21} & g_{22}^{t}g_{12}+g_{12}^{t}g_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

da

$$g^{t}Bg=B$$

discendono le seguenti condizioni:

$$g_{21}^{t}g_{11}+g_{11}^{t}g_{21}=O_{h} \tag{76}$$

$$g_{21}^{t}g_{12}+g_{11}^{t}g_{22}=I_{h}$$

$$g_{22}^{t}g_{11}+g_{12}^{t}g_{21}=I_{h}$$

$$g_{22}^{t}g_{12}+g_{12}^{t}g_{22}=O_{h}.$$

Quindi, se ad esempio $U_h = O_h$ (cioè $P = P_0$), da (76) si ha che

$$\begin{aligned} \left(g_{11}^t\right)^{-1} g_{21}^t &= \left(g_{11}^t\right)^{-1} \left(-g_{11}^t g_{21} g_{11}^{-1}\right) \\ &= -g_{21} g_{11}^{-1} = -\left[\left(g_{11}^t\right)^{-1} g_{21}^t\right]^t, \end{aligned}$$

cioè $\left(g_{11}^t\right)^{-1} g_{21}^t$ è antisimmetrica.

Consideriamo ora l'applicazione

$$\begin{array}{ccccc} f & : & SO(n,Q) & \rightarrow & PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \\ & & g & \rightarrow & \left(g\left(P_0\right), g\left(P_1\right), g\left(P_{-1}\right)\right) \end{array},$$

dove

$$\begin{aligned} g\left(P_0\right) &= \left[I_h \middle| \left(g_{11}^t\right)^{-1} g_{21}^t\right] \\ g\left(P_1\right) &= \left[I_h \middle| \left(g_{11}^t + J_{\frac{h}{2}} g_{12}^t\right)^{-1} \left(g_{21}^t + J_{\frac{h}{2}} g_{22}^t\right)\right] \\ g\left(P_{-1}\right) &= \left[I_h \middle| \left(g_{11}^t - J_{\frac{h}{2}} g_{12}^t\right)^{-1} \left(g_{21}^t - J_{\frac{h}{2}} g_{22}^t\right)\right]; \end{aligned}$$

osserviamo che

$$\operatorname{Im} f = \left\{\left(g\left(P_0\right), g\left(P_1\right), g\left(P_{-1}\right)\right) \mid g \in SO(n,Q)\right\}$$

è l'orbita della terna (P_0, P_1, P_{-1}). Se prendiamo $g = I_n$ (applicazione identica) e passiamo agli spazi tangenti otteniamo l'applicazione lineare tra spazi vettoriali

$$df_{I_n} : so\left(n,Q\right) \rightarrow T_{(P_0,P_1,P_{-1})} PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+,$$

dove $so\left(n,Q\right)$ è l'algebra di Lie di $SO(n,Q)$, cioè

$$so\left(n,Q\right) = \left\{A \in SO(n,Q) \,\middle|\, A^t B = -BA\right\}; \tag{77}$$

osserviamo che $\operatorname{Im} df_{I_n}$ è lo spazio tangente all'orbita di (P_0, P_1, P_{-1}) in (P_0, P_1, P_{-1}). Vogliamo dimostrare che df_{I_n} è suriettiva, o equivalentemente, per il teorema di nullità e rango, che

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \ker df_{I_n} &= \dim_{\mathbb{C}} so\,(n,Q) - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Im} df_{I_n} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{3h(h-1)}{2} \\
&= \frac{h(h+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Per studiare $\ker df_{I_n}$, sviluppiamo in serie di Taylor attorno ad $I_n = \begin{bmatrix} I_h & O_h \\ O_h & I_h \end{bmatrix}$ le tre componenti (f_1, f_2, f_3) di f, limitandoci a considerare i termini del primo ordine. Quindi, se

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \in so\,(n,Q)$$

è l'incremento infinitesimo, con $H_{ij} \in M\,(h,\mathbb{C})$, per $i,j \in \{1,2\}$, abbiamo che

$$f_1\,(I_n + H) = P_0\,(I_n + H)^t \sim \left[I_h \left| \left(I_h + H_{11}^t \right)^{-1} H_{21}^t \right. \right] = \left[I_h \left| H_{21}^t + \ldots \right. \right]$$

$$\begin{aligned}
f_2\,(I_n + H) &= P_1\,(I_n + H)^t \\
&\sim \left[I_h \left| \left(I_h + H_{11}^t + J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t \right)^{-1} \left(H_{21}^t + J_{\frac{h}{2}} \left(I_h + H_{22}^t \right) \right) \right. \right] \\
&= \left[I_h \left| J_{\frac{h}{2}} + H_{21}^t + J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} - J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} + \ldots \right. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3\,(I_n + H) &= P_{-1}\,(I_n + H)^t \\
&\sim \left[I_h \left| \left(I_h + H_{11}^t - J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t \right)^{-1} \left(H_{21}^t - J_{\frac{h}{2}} \left(I_h + H_{22}^t \right) \right) \right. \right] \\
&= \left[I_h \left| -J_{\frac{h}{2}} + H_{21}^t - J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t + H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} - J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} + \ldots \right. \right],
\end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\ker df_{I_n} &= \left\{ H \in so\,(n,Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = O_h \\[2ex] H_{21}^t + J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} - J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} = O_h \\[2ex] H_{21}^t - J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t + H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} - J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} = O_h \end{array} \right\} \\
&= \left\{ H \in so\,(n,Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = O_h \\[2ex] J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} - J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} = O_h \\[2ex] -J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t + H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} - J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} = O_h \end{array} \right\} \\
&= \left\{ H \in so\,(n,Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = O_h \\[2ex] J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} = J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} \\[2ex] -J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t + H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} = J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ H \in so\,(n,Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = O_h \\[2ex] J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} = J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} \\[2ex] -J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t + H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} = J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ H \in so\,(n,Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = O_h \\[2ex] J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} = J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} \\[2ex] J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} = O_h \end{array} \right\} \\
&= \left\{ H \in so\,(n,Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = O_h \\[2ex] J_{\frac{h}{2}} H_{12}^t J_{\frac{h}{2}} = O_h \\[2ex] J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t - H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} = O_h \end{array} \right\} \\
&= \left\{ H \in so\,(n,Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = O_h \\[2ex] H_{12}^t = O_h \\[2ex] J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t = H_{11}^t J_{\frac{h}{2}} \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

Ora, poichè $H \in so\,(n, Q)$, risulta

$$\begin{bmatrix} H_{11}^t & H_{21}^t \\ \\ H_{12}^t & H_{22}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_h & I_h \\ \\ I_h & O_h \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} O_h & I_h \\ \\ I_h & O_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{bmatrix} H_{21}^t & H_{11}^t \\ \\ H_{22}^t & H_{12}^t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{21} & H_{22} \\ \\ H_{11} & H_{12} \end{bmatrix}.$$

Così otteniamo le condizioni seguenti:

$$\begin{aligned} H_{21}^t &= -H_{21} \\ H_{11}^t &= -H_{22} \\ H_{12}^t &= -H_{12}. \end{aligned} \tag{78}$$

Quindi, applicando (78) risulta

$$\begin{aligned} \ker df_{I_n} &= \left\{ H \in so\,(n, Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = H_{12}^t = O_h \\ J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t = -H_{22} J_{\frac{h}{2}} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ H \in so\,(n, Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = H_{12}^t = O_h \\ J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t = -\left(J_{\frac{h}{2}}^t H_{22}^t \right)^t \end{array} \right\} \\ &= \left\{ H \in so\,(n, Q) \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{21}^t = H_{12}^t = O_h \\ J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t = \left(J_{\frac{h}{2}} H_{22}^t \right)^t \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

da cui

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker df_{I_n} = \dim_{\mathbb{C}} \left\{ A \in M\,(h, \mathbb{C}) \;\middle|\; J_{\frac{h}{2}} A = \left(J_{\frac{h}{2}} A \right)^t \right\}.$$

Procedendo per induzione su h, con $h \geq 2$ numero pari, è facile provare che

$$\dim_{\mathbb{C}} \left\{ A \in M\,(h, \mathbb{C}) \;\middle|\; J_{\frac{h}{2}} A = \left(J_{\frac{h}{2}} A \right)^t \right\} = \frac{h(h+1)}{2}, \tag{79}$$

o, equivalentemente, esistono $\dfrac{h(h-1)}{2}$ vincoli tra i parametri.

Infatti, sia $h=2$ e sia $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C})$; allora la matrice

$$J_1A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ -\alpha & -\beta\end{pmatrix}$$

è simmetrica se e solo se

$$\alpha=-\delta,$$

da cui

$$\dim_{\mathbb{C}}\left\{A\in M(2,\mathbb{C})\,\middle|\,J_1A=(J_1A)^t\right\}=4-1=3=\frac{2(2+1)}{2}.$$

Ora, supponiamo che (79) valga fino ad h e dimostriamo che vale anche per $h+2$.

Innanzitutto osserviamo che

$$J_{\frac{h+2}{2}}=\begin{bmatrix} & & & 0 & 0\\ & J_{\frac{h}{2}} & & \vdots & \vdots\\ & & & 0 & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0\end{bmatrix},$$

dove $J_{\frac{h}{2}}$ è la matrice antisimmetrica $h\times h$ con $\dfrac{h}{2}$ blocchi del tipo $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; inoltre possiamo rappresentare ogni $A \in M(h+2, \mathbb{C})$ mediante

$$A = \begin{bmatrix} & & \mathcal{B}_1 \\ & \mathcal{A} & \vdots \\ & & \mathcal{B}_{\frac{h}{2}} \\ \mathcal{C}_1 & \dots \quad \mathcal{C}_{\frac{h}{2}} & \mathcal{D} \end{bmatrix},$$

con $\mathcal{A} \in M(h, \mathbb{C})$ e $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_{\frac{h}{2}}, \mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_{\frac{h}{2}}, \mathcal{D} \in M(2, \mathbb{C})$. Quindi, posto

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice

$$J_{\frac{h+2}{2}} A = \begin{bmatrix} & & J_2\mathcal{B}_1 \\ & J_{\frac{h}{2}}\mathcal{A} & \vdots \\ & & J_2\mathcal{B}_{\frac{h}{2}} \\ J_2\mathcal{C}_1 & \dots \quad J_2\mathcal{C}_{\frac{h}{2}} & J_2\mathcal{D} \end{bmatrix}$$

è simmetrica se e solo se

$$J_{\frac{h}{2}}\mathcal{A} = \left(J_{\frac{h}{2}}\mathcal{A}\right)^t \tag{80}$$

$$J_2\mathcal{D} = (J_2\mathcal{D})^t \tag{81}$$

$$J_2\mathcal{B}_i = (J_2\mathcal{C}_i)^t \text{ per ogni } i \in \left\{1, ..., \frac{h}{2}\right\}. \tag{82}$$

Applicando l'ipotesi induttiva a (80) e quanto dimostrato al passo base a (81) abbiamo

$$\frac{h(h-1)}{2} + 1 + 4\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{(h+2)(h+1)}{2}$$

parametri vincolati, da cui

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \left\{ A \in M(h+2, \mathbb{C}) \,\middle|\, J_{\frac{h+2}{2}} A = \left(J_{\frac{h+2}{2}} A\right)^t \right\} &= (h+2)^2 - \frac{(h+2)(h+1)}{2} \\ &= \frac{(h+2)(h+3)}{2} \end{aligned}$$

cioè la tesi. $\square$

Osserviamo che il lemma 3.2.1 vale anche nel caso in cui h è dispari, [12]; sempre in [12] si trova una dimostrazione alternativa del caso in cui h è pari.

Corollario 3.2.2 *Se h è pari allora*

$$s_0 = e_1 \cdot \ldots \cdot e_h,\ s_1 = \prod_{i=1}^{\frac{h}{2}} (1 + e_{2i-1}e_{2i}),\ s_{-1} = \prod_{i=1}^{\frac{h}{2}} (1 - e_{2i-1}e_{2i})$$

sono punti generali di $PS(V,Q)_+$ (diversi da quelli scelti da Manivel in [12]).

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per dimostrare il seguente:

Teorema 3.2.3 *Se $h = 8$ allora la varietà $PS(V,Q)_+$ è 3-difettiva.*

Dimostrazione. In base al corollario precedente,

$$s_0 = e_1 \cdot \ldots \cdot e_8,\ s_1 = \prod_{i=1}^{4} (1 + e_{2i-1}e_{2i}),\ s_{-1} = \prod_{i=1}^{4} (1 - e_{2i-1}e_{2i})$$

sono punti generali di $PS(V,Q)_+$ e possono essere rappresentati, rispettivamente, tramite le matrici 8×16

$$\begin{aligned} P_0 &= [I_8 \,| O_8] \\ P_1 &= [I_8 \,| J_4] \\ P_{-1} &= [I_8 \,| -J_4]\,. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la curva razionale normale C data da

$$C(t) = [I_8 \,| tJ_4]\,;$$

per come è definita, C giace in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ ed è costituita da punti di $PS(V,Q)_+$; inoltre risulta che

$$C(0) = P_0,\ C(1) = P_1,\ C(-1) = P_{-1}.$$

Quindi, poichè

$$3\dim_{\mathbb{C}} PS(V,Q)_+ + 2 = 3\frac{8\,(8-1)}{2} + 2 = 86 < 2^{8-1} = 128,$$

dal teorema 2.3.3 discende che $\sigma_3\left(PS(V,Q)_+\right)$ non ha la dimensione aspettata, cioè la tesi. $\square$

Corollario 3.2.4 *Se $h = 8$ allora la varietà $PS(V,Q)_+$ è 4-difettiva.*

Per quanto riguarda il caso in cui $h = 7$ vale il seguente:

Teorema 3.2.5 *Se $h = 7$ allora la varietà $PS(V,Q)_+$ è 3-difettiva.*

Dimostrazione. Sia $U_7 \in M\left(7,\mathbb{C}\right)$ una matrice antisimmetrica e sia

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \in SO(14,Q)$$

con $g_{ij} \in M\left(7,\mathbb{C}\right)$, per $i,j \in \{1,2\}$. Ricordiamo che g agisce su $[I_7\,|U_7] \in PS(V,Q)_+$ nel modo seguente:

$$g\left([I_7\,|U_7]\right) := [I_7\,|U_7]\,g^t \sim \left[I_7 \left| \left(g_{11}^t + U_7 g_{12}^t\right)^{-1}\left(g_{21}^t + U_7 g_{22}^t\right)\right.\right].$$

Siano ora $P_0, P_1, P_2 \in PS(V,Q)_+$ e sia

$$f : SO(14,Q) \to PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+$$

l'applicazione definita da

$$f\left(g\right) = \left(g\left(P_0\right), g\left(P_1\right), g\left(P_2\right)\right) \text{ per ogni } g \in SO(14,Q);$$

se poniamo $g = I_{14}$ e passiamo agli spazi tangenti otteniamo l'applicazione lineare

$$df_{I_{14}} : so\left(14,Q\right) \to T_{(P_0,P_1,P_2)} PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+.$$

Osserviamo che per ottenere la tesi è sufficiente trovare $P_0 = [I_7 \,|U_{0,7}]\,, P_1 = [I_7 \,|U_{1,7}]\,, P_2 = [I_7 \,|U_{2,7}] \in PS(V,Q)_+$ con le seguenti proprietà:

i) l'orbita di (P_0, P_1, P_2) è densa in $PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+ \times PS(V,Q)_+$;

ii) $\dim_{\mathbb{C}} \left\langle \widetilde{T}_{P_0} PS(V,Q)_+, \widetilde{T}_{P_1} PS(V,Q)_+, \widetilde{T}_{P_2} PS(V,Q)_+ \right\rangle = 58$.

Ricordiamo che 58 è il valore che abbiamo ottenuto per $\dim_{\mathbb{C}} \sigma_3 \left(PS(V,Q)_+\right)$ applicando l'algoritmo **secantips.m2** al caso $h = 7$.

Innanzitutto, affinchè i tre punti soddisfino la condizione i) deve accadere che la matrice 91×63 associata a $df_{I_{14}}$ abbia rango massimo.

Per determinare tale matrice, sviluppiamo in serie di Taylor al primo ordine con centro in

$$I_{14} = \begin{bmatrix} I_7 & O_7 \\ O_7 & I_7 \end{bmatrix}$$

la i-esima componente f_i di f, con $i \in \{1,2,3\}$: se

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \in so\,(14, Q)$$

è l'incremento infinitesimo, con $H_{ij} \in M\,(7, \mathbb{C})$, per $i, j \in \{1,2\}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} f_i\,(I_{14} + H) &= P_i\,(I_{14} + H)^t \\ &\sim \left[I_7 \left| \left(I_7 + H_{11}^t + U_{i,7} H_{12}^t\right)^{-1} \left(H_{21}^t + U_{i,7}\left(I_h + H_{22}^t\right)\right)\right.\right] \\ &= \left[I_7 \left| U_{i,7} + H_{21}^t + U_{i,7} H_{22}^t - H_{11}^t U_{i,7} - U_{i,7} H_{12}^t U_{i,7} + \ldots \right.\right]. \end{aligned}$$

Ora, poichè $H \in so\,(14, Q)$, risulta

$$H_{21}^t = -H_{21}$$

$$H_{11}^t = -H_{22}$$

$$H_{12}^t = -H_{12}$$

da cui si ottiene l'antisimmetria della matrice

$$H_{21}^t + U_{i,7}H_{22}^t - H_{11}^t U_{i,7} - U_{i,7}H_{12}^t U_{i,7}^t. \tag{83}$$

Calcolando lo jacobiano degli Pfaffiani di ordine 2 (che sono quelli caratterizzanti) di (83), per ogni $i \in \{0,1,2\}$, si ottiene la matrice 91×63 associata a $df_{I_{14}}$.

Per trovare P_0, P_1, P_2 con le proprietà richieste ci siamo serviti del sistema di calcolo Macaulay2.

Di seguito riportiamo le istruzioni relative al calcolo dei punti, del rango della matrice jacobiana corrispondente e di

$\dim_{\mathbb{C}} \left\langle \widetilde{T}_{P_0} PS(V,Q)_+, \widetilde{T}_{P_1} PS(V,Q)_+, \widetilde{T}_{P_2} PS(V,Q)_+ \right\rangle$:

```
Macaulay 2, version 0.9.2
–Copyright 1993-2001, D. R. Grayson and M. E. Stillman
–Singular-Factory 1.3b, copyright 1993-2001, G.-M. Greuel, et al.
–Singular-Libfac 0.3.2, copyright 1996-2001, M. Messollen

i1 : R = QQ[x_0..x_(90)];

i2 : X = vars R;

o2 : Matrix R^1 <— R^91

i3 : A = X -> genericMatrix(R,x_42,7,7);

i4 : A(X)
```

```
o4 = | x_42 x_49 x_56 x_63 x_70 x_77 x_84 |
     | x_43 x_50 x_57 x_64 x_71 x_78 x_85 |
     | x_44 x_51 x_58 x_65 x_72 x_79 x_86 |
     | x_45 x_52 x_59 x_66 x_73 x_80 x_87 |
     | x_46 x_53 x_60 x_67 x_74 x_81 x_88 |
     | x_47 x_54 x_61 x_68 x_75 x_82 x_89 |
     | x_48 x_55 x_62 x_69 x_76 x_83 x_90 |

o4 : Matrix R^7 <--- R^7

i5 : B = X -> genericSkewMatrix(R,x_21,7);

i6 : B(X)

o6 = | 0 x_21 x_22 x_23 x_24 x_25 x_26 |
     | -x_21 0 x_27 x_28 x_29 x_30 x_31 |
     | -x_22 -x_27 0 x_32 x_33 x_34 x_35 |
     | -x_23 -x_28 -x_32 0 x_36 x_37 x_38 |
     | -x_24 -x_29 -x_33 -x_36 0 x_39 x_40 |
     | -x_25 -x_30 -x_34 -x_37 -x_39 0 x_41 |
     | -x_26 -x_31 -x_35 -x_38 -x_40 -x_41 0 |

o6 : Matrix R^7 <--- R^7

i7 : C = X -> genericSkewMatrix(R,x_0,7);

i8 : C(X)

o8 = | 0 x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 |
     | -x_0 0 x_6 x_7 x_8 x_9 x_10 |
```

| -x_1 -x_6 0 x_11 x_12 x_13 x_14 |

| -x_2 -x_7 -x_11 0 x_15 x_16 x_17 |

| -x_3 -x_8 -x_12 -x_15 0 x_18 x_19 |

| -x_4 -x_9 -x_13 -x_16 -x_18 0 x_20 |

| -x_5 -x_10 -x_14 -x_17 -x_19 -x_20 0 |

o8 : Matrix R^7 <— R^7

i9 : f1 = X -> transpose C(X);

i10 : P0 = for j from 1 to 21 list 0

o10 = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

o10 : List

i11 : P1 = for j from 1 to 21 list random(100)

o11 = {30, 91, 15, 72, 61, 41, 10, 37, 98, 41, 94, 80, 26, 96,
10, 88, 59, 5, 84, 14, 26}

o11 : List

i12 : P2 = for j from 1 to 21 list random(100)

o12 = {13, 83, 54, 87, 41, 46, 37, 53, 19, 60, 51, 54, 78, 94,
76, 91, 56, 60, 94, 62, 80}

o12 : List

i13 : p1 = matrix{{0,30,91,15,72,61,41},{-30,0,10,37,98,41,94},
{-91,-10,0,80,26,96,10},{-15,-37,-80,0,88,59,5},{-72,-98,-26,-88,
0,84,14},{-61,-41,-96,-59,-84,0,26},{-41,-94,-10,-5,-14,-26,0}}

o13 = | 0 30 91 15 72 61 41 |

| -30 0 10 37 98 41 94 |

| -91 -10 0 80 26 96 10 |

| -15 -37 -80 0 88 59 5 |

| -72 -98 -26 -88 0 84 14 |

| -61 -41 -96 -59 -84 0 26 |

| -41 -94 -10 -5 -14 -26 0 |

o13 : Matrix ZZ^7 <— ZZ^7

i14 : p2 = matrix{{0,13,83,54,87,41,46},{-13,0,37,53,19,60,51},

{-83,-37,0,54,78,94,76},{-54,-53,-54,0,91,56,60},{-87,-19,-78,

-91,0,94,62},{-41,-60,-94,-56,-94,0,80},{-46,-51,-76,-60,-62,-80,0}}

o14 = | 0 13 83 54 87 41 46 |

| -13 0 37 53 19 60 51 |

| -83 -37 0 54 78 94 76 |

| -54 -53 -54 0 91 56 60 |

| -87 -19 -78 -91 0 94 62 |

| -41 -60 -94 -56 -94 0 80 |

| -46 -51 -76 -60 -62 -80 0 |

o14 : Matrix ZZ^7 <— ZZ^7

i15 : f2 = X -> f1(X)+(p1)*B(X)*(p1)-(p1)*A(X)-transpose ((p1)*A(X));

i16 : f2(X);

o16 : Matrix R^7 <— R^7

i17 : f3 = X -> f1(X)+(p2)*B(X)*(p2)-(p2)*A(X)-transpose ((p2)*A(X));

i18 : f3(X);

o18 : Matrix R^7 <— R^7

i19 : f1bis = generators pfaffians(2,f1(X));

o19 : Matrix R^1 <— R^{21}

i20 : f2bis = generators pfaffians(2,f2(X));

o20 : Matrix R^1 <— R^{21}

i21 : f3bis = generators pfaffians(2,f3(X));

o21 : Matrix R^1 <— R^{21}

i22 : J1 = jacobian f1bis;

o22 : Matrix R^{91} <— R^{21}

i23 : J2 = jacobian f2bis;

o23 : Matrix R^{91} <— R^{21}

i24 : J3 = jacobian f3bis;

o24 : Matrix R^{91} <— R^{21}

i25 : J = J1|J2|J3;

o25 : Matrix R^{91} <— R^{63}

i26 : rank J

o26 = 63

i27 : S = QQ[y_0..y_(20)];

i28 : Y = vars S;

o28 : Matrix $S^{1} \longleftarrow S^{21}$

i29 : M = Y -> genericSkewMatrix(S,y_0,7);

i30 : M(Y);

o30 : Matrix $S^{7} \longleftarrow S^{7}$

i31 : par = Y -> apply(floor(7/2)+1,i->generators pfaffians(2*i,M(Y)));

i32 : f = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a|(l#i););a);

i33 : PS = f(par(Y));

o33 : Matrix $S^{1} \longleftarrow S^{64}$

i34 : JAC = jacobian PS;

o34 : Matrix $S^{21} \longleftarrow S^{64}$

i35 : P0bis = matrix{P0};

o35 : Matrix $ZZ^{1} \longleftarrow ZZ^{21}$

i36 : P1bis = matrix{P1};

o36 : Matrix $ZZ^{1} \longleftarrow ZZ^{21}$

i37 : P2bis = matrix{P2};

o37 : Matrix $ZZ^{1} \longleftarrow ZZ^{21}$

i38 : PS0 = substitute(PS,matrix(S,{flatten entries P0bis}));

o38 : Matrix $S^{1} \longleftarrow S^{64}$

i39 : PS1 = substitute(PS,matrix(S,{flatten entries P1bis}));

o39 : Matrix $S^{1} \longleftarrow S^{64}$

i40 : PS2 = substitute(PS,matrix(S,{flatten entries P2bis}));

o40 : Matrix S^{1} <— S^{64}

i41 : JAC0 = substitute(JAC,matrix(S,{flatten entries P0bis}));

o41 : Matrix S^{21} <— S^{64}

i42 : JAC1 = substitute(JAC,matrix(S,{flatten entries P1bis}));

o42 : Matrix S^{21} <— S^{64}

i43 : JAC2 = substitute(JAC,matrix(S,{flatten entries P2bis}));

o43 : Matrix S^{21} <— S^{64}

i44 : JPS0 = (PS0)||(JAC0);

o44 : Matrix S^{22} <— S^{64}

i45 : JPS1 = (PS1)||(JAC1);

o45 : Matrix S^{22} <— S^{64}

i46 : JPS2 = (PS2)||(JAC2);

o46 : Matrix S^{22} <— S^{64}

i47 : JJPS = (JPS0)||(JPS1)||(JPS2);

o47 : Matrix S^{66} <— S^{64}

i48 : rank JJPS

o48 = 59

I valori ottenuti provano l'enunciato. $\square$

3.3 I casi non difettivi

I dati raccolti con l'algoritmo probabilistico hanno dimostrato che, per $h \in \{9, 10, 11, 12\}$, la varietà $\sigma_3(PS(V,Q)_+)$ ha la dimensione aspettata. Per i casi in cui $h = 10$ e $h = 12$ siamo in grado di fornirne una dimostrazione alternativa. In tal senso valgono i seguenti:

Teorema 3.3.1 *Se $h = 10$ allora la varietà $\sigma_3(PS(V,Q)_+)$ ha la dimensione aspettata.*

Dimostrazione. Consideriamo i punti di $PS(V,Q)_+$

$$s_0 = e_1 \cdot \ldots \cdot e_{10},\ s_1 = \prod_{i=1}^{5}(1 + e_{2i-1}e_{2i}),\ s_{-1} = \prod_{i=1}^{5}(1 - e_{2i-1}e_{2i});$$

come sappiamo, ad essi corrispondono le matrici 10×20

$$\begin{aligned} P_0 &= [I_{10}\,|O_{10}] \\ P_1 &= [I_{10}\,|J_5] \\ P_{-1} &= [I_{10}\,|-J_5]. \end{aligned} \tag{84}$$

Mediante l'algoritmo seguente (**rangomassimo10.m2)**

```
h = 10;

p = 45;

S = QQ[x_0..x_(p-1)];

X = vars S;

M = X -> genericSkewMatrix(S,x_0,h);

par = X -> apply(floor(h/2)+1,i->generators pfaffians(2*i,M(X)));
```

```
f = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a|(l#i););a);

PS = f(par(X));

J = jacobian PS;

g = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a||(l#i););a);

punti = t -> {t,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,t,0,0,0,0,
                    0,0,0,0,0,0,0,0,t,0,0,0,0,0,0,0,0,t,0,0,0,0,t};

puntibis = {punti(0),punti(1),punti(-1)};

PUNTI = apply(3,i->matrix{puntibis#i});

PSpunti = apply(3,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries PUNTI#i})));

Jpunti = apply(3,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries PUNTI#i})));

JPS = apply(3,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

JJPS = g(JPS);

rank JJPS
```

otteniamo che lo spazio generato dai tangenti affini a $PS(V,Q)_+$ nei punti (84) ha dimensione 138. Essendo

$$\min\left\{3\dim_{\mathbb{C}} PS(V,Q)_+ + 3, 2^{h-1}\right\} = \min\left\{3 \times 45 + 3, 2^9\right\} = \min\{138, 512\} = 138,$$

in virtù del lemma di Terracini il teorema è dimostrato. $\square$

<u>Teorema</u> 3.3.2 *Se $h = 12$ allora la varietà $\sigma_3\left(PS(V,Q)_+\right)$ ha la dimensione aspettata.*

<u>Dimostrazione</u>. Analogamente al caso precedente, se consideriamo le matrici 12×24

$$\begin{aligned} P_0 &= [I_{12}\,|O_{12}\,] \\ P_1 &= [I_{12}\,|J_6\,] \\ P_{-1} &= [I_{16}\,|-J_6\,] \end{aligned} \tag{85}$$

e eseguiamo l'algoritmo **rangomassimo12.m2** con istruzioni

```
h = 12;

p = 66;

S = QQ[x_0..x_(p-1)];

X = vars S;

M = X -> genericSkewMatrix(S,x_0,h);

par = X -> apply(floor(h/2)+1,i->generators pfaffians(2*i,M(X)));

f = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a|(l#i););a);

PS = f(par(X));

J = jacobian PS;

g = l -> (a=l#0;for i from 1 to #(l)-1 do(a=a||(l#i););a);

punti = t -> {t,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,t,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
              0,0,0,0,0,0,t,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,t,0,0,0,0,0,0,0,0,t,0,0,0,0,t};

puntibis = {punti(0),punti(1),punti(-1)};

PUNTI = apply(3,i->matrix{puntibis#i});

PSpunti = apply(3,i->substitute(PS,matrix(S,{flatten entries PUNTI#i})));
```

```
Jpunti = apply(3,i->substitute(J,matrix(S,{flatten entries PUNTI#i})));

JPS = apply(3,i->(PSpunti#i)||(Jpunti#i));

JJPS = g(JPS);

rank JJPS
```

abbiamo che lo spazio generato dai tangenti affini a $PS(V,Q)_+$ nei punti (85) ha dimensione 201. Poichè

$$\min\left\{3\dim_{\mathbb{C}} PS(V,Q)_+ + 3, 2^{h-1}\right\} = \min\left\{3\times 66+3, 2^{11}\right\} = \min\{201, 2048\} = 201,$$

in virtù del lemma di Terracini l'enunciato è dimostrato. $\square$

Si noti che **rangomassimo10.m2** e **rangomassimo10.m2** operano allo stesso modo di **secantips.m2** ma con una differenza: mentre **secantips.m2** lavora con elementi random di $PS(V,Q)_+$, gli algoritmi delle dimostrazioni precedenti utilizzano punti di $PS(V,Q)_+$ estremamente semplici (vedi (84) e (85)) e questo li rende più veloci.

3.4 Problemi aperti

Alla luce dei risultati precedenti siamo portati a formulare le seguenti congetture:

Congettura 3.4.1 *Se* h *è dispari e* $h \geq 9$ *allora* $\sigma_3\left(PS(V,Q)_+\right)$ *ha la dimensione aspettata.*

Congettura 3.4.2 *Se* h *è pari e* $h \geq 10$ *allora* $\sigma_3\left(PS(V,Q)_+\right)$ *ha la dimensione aspettata.*

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Abo, G. Ottaviani, C. Peterson, *Non defectivity of Grassmannians of planes,* arXiv:0901.2601v1 [math.AG] apparirà in Journal of Alg. Geom.

[2] M. Burrow, *Representation Theory of Finite Groups,* Academic Press (1965)

[3] C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors,* Columbia University Press (1954)

[4] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras,* Pure and Applied Mathematics vol. XI (1962)

[5] P. De Bartolomeis, *Algebra lineare,* La Nuova Italia (1993)

[6] D.R. Grayson, M.E. Stillman, *Macaulay 2,* Software system disponibile sul sito www.math.uiuc.edu.

[7] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry,* Wiley-Interscience (1978)

[8] J. Harris, *Algebraic Geometry, a first course,* Springer-Verlag (1992)

[9] F.R. Harvey, *Spinors and Calibrations,* Academic Press (1990)

[10] J.M. Landsberg, J. Morton, *The Geometry of Tensors: Application to complexity, statistics and engineering,* Preprint (2009)

[11] N. Jacobson, *Basic Algebra II,* Freeman and Company (1980)

[12] L. Manivel, *On spinor varieties and their secants,* SIGMA 5 (2009) 078, volume speciale "Elie Cartan and Differential Geometry"

[13] B. McGillivray, *A probabilistic algorithm for the secant* d*efect of Grassmann varieties,* Linear Algebra and its Applications 418 (2006) 708-718

[14] B. McGillivray, *Metodi computazionali per lo studio delle varietà di Grassmann,* Tesi di Laurea, Firenze (2004)

[15] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics,* Graduate student series in physics (1990)