Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Scienze

C.d.L in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Anno Accademico 2008-2009

RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO LINEARE E TABELLE DI YOUNG

Candidato:
Andreas Themelis

Relatore:
Prof. Giorgio Ottaviani

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è descrivere le rappresentazioni irriducibili del gruppo lineare $\mathrm{GL}(V)$ per generici spazi vettoriali di dimensione finita sul campo dei complessi. Si cercheranno tali rappresentazioni in sottospazi di potenze tensoriali di V caratterizzate da particolari condizioni di simmetria, e per questo motivo si studieranno prima le rappresentazioni irriducibili dei gruppi simmetrici per poi mostrare quanto e come queste siano legate a quelle del gruppo lineare.
Verrà introdotta la teoria dei caratteri che si rivelerà un ottimo strumento per lo studio almeno della prima parte e si daranno cenni sulle algebre di gruppi, utili per le ultime conclusioni. Prerequisiti necessari alla comprensione sono il concetto di gruppo e di omomorfismo ed una modesta familiarità con spazi vettoriali, applicazioni lineari e prodotti tensoriali.

Capitolo 1

Rappresentazioni di gruppi

1.1 Definizioni

Definizione 1.1. *Una* rappresentazione *di un gruppo G su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è un omomorfismo di gruppi $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V, \mathbb{K})$*

Il *grado* della rappresentazione è per definizione la dimensione dello spazio e si parlerà di *rappresentazione fedele* se l'omomorfismo ρ è iniettivo. Spesso con il termine rappresentazione piuttosto che all'omomorfismo si farà riferimento allo spazio vettoriale V, che dotato di tale struttura potrà anche essere chiamato *G-modulo*. Come ultima convenzione, in virtù del fatto che l'omomorfismo induce un'azione del gruppo sullo spazio, $\rho(g)(v)$ sarà spesso abbreviato con gv. Verranno trattati unicamente spazi vettoriali finitamente generati sul campo dei complessi e si ometterà di specificarlo ogni volta.

Definizione 1.2. *Una* sottorappresentazione *della rappresentazione V è un sottospazio vettoriale W di V* G-invariante*, ovvero che viene mandato in se stesso dall'azione di G. Se V non ammette sottorappresentazioni non banali, allora si dice* irriducibile*.*

Definizione 1.3. *Dati due G-moduli V e W, un'applicazione $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ si dice* G-lineare *se commuta con l'azione del gruppo, ovvero se*

$$\forall\, g \in G, v \in V \quad g\varphi(v) = \varphi(gv)$$

Il sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V, W)$ formato da tutte le applicazioni G-lineari si denota con $\mathrm{Hom}_G(V, W)$.

Due rappresentazioni V, W con le varie operazioni di somma diretta, prodotto tensoriale ecc., inducono altre rappresentazioni in cui l'azione del gruppo viene definita conformemente: ad esempio $g(v \oplus w) \stackrel{\text{def}}{=} gv \oplus gw$ e $g(v \otimes w) \stackrel{\text{def}}{=} gv \otimes gw$. Anche il duale V^* eredita una struttura di G-modulo tramite l'omomorfismo

$$\rho^*(g) \stackrel{\text{def}}{=} {}^T\!\rho\left(g^{-1}\right) \tag{1.4}$$

che conserva la relazione duale $(gv^*)\big(gv\big) = v^*\big(v\big)$. Adesso grazie all'isomorfismo $\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W$ possiamo ricavare anche la rappresentazione $\mathrm{Hom}(V,W)$ per la quale, $\forall\, \varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $v \in V$, $g \in G$

$$(g\varphi)\big(v\big) \overset{\mathrm{def}}{=} g\varphi\big(g^{-1}v\big) \tag{1.5}$$

da cui si ricava facilmente

$$\mathrm{Hom}_G(V,W) = \big\{\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W) \big|\, g\varphi = \varphi \;\forall\, g \in G\big\} \tag{1.6}$$

Un gruppo G può essere esteso all'algebra $\mathbb{C}[G]$ definita come lo spazio vettoriale complesso di base $\{e_g |\, g \in G\}$, che chiameremo *canonica*, e dotato di un'operazione interna di moltiplicazione per la quale $e_g \cdot e_h \overset{\mathrm{def}}{=} e_{gh}$. Si definisce questa nuova struttura come l'*algebra* (*complessa*) *del gruppo* G. Con un leggero abuso si può sostituire la notazione 'e_g' degli elementi della base con 'g' in modo da esplicitare il prestito dell'operazione dalla moltiplicazione del gruppo. Un generico elemento $u \in \mathbb{C}[G]$ si scrive in modo unico come $u = \sum_{g \in G} \hat{u}(g)g$ e dunque individua univocamente un'applicazione $\hat{u} \colon G \to \mathbb{C}$; nel caso di gruppi finiti l'associazione $u \longleftrightarrow \hat{u}$ definisce un isomorfismo di algebre.
Per ogni gruppo G esiste l'omomorfismo $\rho \colon G \to \mathrm{GL}\big(\mathbb{C}[\mathrm{G}]\big)$ definito per moltiplicazione destra $\rho(g)(u) \overset{\mathrm{def}}{=} gu$. $\mathbb{C}[G]$ è dunque un G-modulo, e viene definito come la *rappresentazione regolare* di G, che non è altro che una particolare *rappresentazione di permutazione* nel senso che ogni elemento del gruppo induce un riordinamento degli elementi della base dello spazio vettoriale.
Una rappresentazione $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ del gruppo G si estende per linearità alla *rappresentazione* $\tilde{\rho} \colon \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ *dell'algebra* $\mathbb{C}[G]$, e vale la seguente

Proposizione 1.7 ([BBG], p. 872)**.** *Data una rappresentazione $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ del gruppo G e la rappresentazione indotta $\tilde{\rho} \colon \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ dell'algebra $\mathbb{C}[G]$, sono equivalenti:*

- **(a)** *ρ è una rappresentazione irriducibile del gruppo G*
- **(b)** *$\tilde{\rho}$ è una rappresentazione irriducibile dell'algebra $\mathbb{C}[G]$*

La dimostrazione è banale e sfrutta il fatto che uno spazio invariante sotto delle applicazioni lineari lo è anche rispetto a tutte le loro combinazioni.

1.2 Scomposizione di una rappresentazione

Lemma 1.8 (Schur. [FH], p. 7)**.** *Un'applicazione G-lineare $\varphi \colon V \to W$ fra due rappresentazioni irriducibili del gruppo G è un isomorfismo o è identicamente nulla. Inoltre, se $V = W$ allora $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\varphi = \lambda \mathrm{I}$.*

Dimostrazione. Nucleo ed immagine di un'applicazione G-lineare sono sottorappresentazioni dei rispettivi spazi, quindi nel caso di φ corrispondono o a tutto lo spazio o a quello nullo. Se poi $V = W$ esisterà almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$, cioè tale che $\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{I})$. La tesi segue dal fatto che $\varphi - \lambda \mathrm{I}$ è ancora G-lineare. □

Mediando l'azione di un gruppo finito G su un qualsiasi prodotto scalare hermitiano di una sua rappresentazione V ne otteniamo un altro G-lineare; inoltre, data una sottorappresentazione W e detta $\pi : V \to W$ una proiezione, ne otteniamo un'altra G-lineare ponendo $v \mapsto \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} g\, \pi\big(g^{-1} v\big)$. Il nucleo della nuova proiezione è uno spazio ortogonale a W G-invariante, da cui segue

Teorema 1.9 (Semi-semplicità dei moduli di gruppi finiti)**.** *Una rappresentazione V di un gruppo finito G si scompone in modo unico in sottorappresentazioni irriducibili $V = V_1^{\oplus n_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\oplus n_k}$ dove $\sum_i n_i^2 = \mathit{dim}_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}_G(V))$.*

Dimostrazione. L'unicità della scomposizione deriva dal fatto che l'intersezione di due sottorappresentazioni è ancora G-invariante, mentre il secondo punto dal fatto che le applicazioni G-lineari sono tutte e sole quelle che mandano un vettore di V_i in un suo multiplo in un'altra copia di V_i. □

Dalla dimostrazione si conclude che se $V = V_1^{\oplus n_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\oplus n_k}$ allora

$$\mathrm{End}_G(V) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{M}(n_i, \mathbb{C}) \tag{1.10}$$

Corollario 1.11 ([FH], p. 17)**.** *Sia V una rappresentazione irriducibile del gruppo finito G, allora il numero di copie di V che compaiono in un'altra rappresentazione W è pari a $\mathit{dim}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(V, W))$.*

1.3 Caratteri

Definizione 1.12. *Il carattere della rappresentazione V del gruppo G è l'applicazione* $\chi_V : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{C} \\ g \longmapsto \mathrm{tr}(g) \end{array}$

Valgono le seguenti proprietà per i caratteri:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.}\ \chi_V(1) = \mathrm{dim}_{\mathbb{C}}(V) & \mathbf{2.}\ \chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W \\ \mathbf{3.}\ \quad \chi_{V^*} = \overline{\chi_V} & \mathbf{4.}\ \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W \end{array} \tag{1.13}$$

Dal momento che la traccia è invariante per similitudine i caratteri sono costanti sulle classi di coniugio, ovvero appartengono all'algebra delle funzioni

$$\mathbb{C}_{\mathrm{class}}[G] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \text{ costanti sulle classi di coniugio}\} \cong \langle e_{\overline{g}} \mid \overline{g} \in G/\!\sim \rangle \tag{1.14}$$

dove $G/\!\sim$ è un insieme di rappresentanti delle classi di coniugio. Nel caso di gruppi finiti, su quest'algebra si definisce il seguente prodotto scalare hermitiano

$$(\alpha, \beta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g) \tag{1.15}$$

rispetto al quale vale il seguente

Teorema 1.16 (Ortonormalità dei caratteri irriducibili. [FH], p. 16)**.** *I caratteri delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito G sono ortonormali rispetto a* (1.15) *e formano una base di* $\mathbb{C}_{\text{class}}[G]$.

Corollario 1.17. *Il numero delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito è pari al numero delle sue classi di coniugio. Ogni rappresentazione è determinata dal suo carattere, e questo ha norma unitaria se e solo se la rappresentazione è irriducibile. Inoltre, il numero di copie della rappresentazione irriducibile V_i che compaiono nella rappresentazione V è pari a* (χ_V, χ_{V_i}).

Dimostrazione. Per l'ortonormalità dei caratteri se $V = V_1^{\oplus n_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\oplus n_k}$ allora $\chi_V \overset{(1.13)}{=} n_1\chi_{V_1} + \cdots + n_k\chi_{V_k}$ e $(\chi_V, \chi_V) = {n_1}^2 + \cdots + {n_k}^2$. □

Lemma 1.18 ([Gf], p. 75)**.** *Se W_i $i=1\ldots r$ sono tutte le rappresentazioni irriducibili di G*

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}(W_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{M}(s_i, \mathbb{C}), \quad \textit{dove } s_i = \mathit{dim}_{\mathbb{C}}(W_i)$$

Dimostrazione. L'omomorfismo di gruppi $\varphi\colon \begin{array}{l} G \longrightarrow \bigoplus_i \mathrm{GL}(W_i) \\ g \longmapsto (\rho_1(g), \cdots, \rho_r(g)) \end{array}$ si estende all'omomorfismo di algebre $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{C}[G] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}(W_i)$. La nuova applicazione è ovviamente iniettiva, ed è suriettiva per motivi dimensionali. □

Capitolo 2

Rappresentazioni di S_d

Definizione 2.1. *Una* partizione *di* $d \in \mathbb{N}$ *è una* k*-upla* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k$ *tale che* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$ *e* $\sum \lambda_i = d$.

Sulle partizioni di d si definisce una relazione d'ordine totale su criterio lessicografico.
Il numero delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo è pari al numero delle sue classi di coniugio che nel caso di S_d sono caratterizzate dal tipo ciclico. Esiste quindi una corrispondenza biunivoca fra le partizioni di d e le rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico di d elementi, che verrà trattata in questo capitolo.

2.1 Tableaux di Young

Definizione 2.2. *Data una partizione* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ *di* d*, il* tableau di Young di λ *è il diagramma* T_λ *formato da* k *righe con* $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ *celle rispettivamente.*

Dato un insieme $A \subseteq \{1, \cdots, d\}$, diremo che $\sigma \in S_d$ *conserva* A se $\sigma(A) = A$. Numerando le celle di un tableau T_λ con i naturali da 1 a d si definisce una *configurazione* $\{T_\lambda\}$.

Definizione 2.3. *Data una partizione* λ *di* d *ed una sua configurazione* $\{T_\lambda\}$ *si definiscono i seguenti sottogruppi di* S_d*:*

$$\mathcal{R}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sigma \in S_d \middle| \, \sigma \text{ conserva le righe di } \{T_\lambda\} \right\}$$
$$\mathcal{C}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \tau \in S_d \middle| \, \tau \text{ conserva le colonne di } \{T_\lambda\} \right\}$$

Si noti che per qualunque scelta di partizioni e configurazioni, $\mathcal{R}_\lambda \cap \mathcal{C}_\lambda = \{1\}$. Sebbene i due sottogruppi coinvolgano anche le configurazioni, a meno di isomorfismo la scelta di tali non influenza le rappresentazioni che vedremo essi inducono e pertanto sarà omessa nella notazione.

Lemma 2.4 ([We], p. 122)**.** *Date* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ *e* $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_h)$ *due partizioni di* d *e due rispettive configurazioni* $\{T_\lambda\}$ *e* $\{T'_\mu\}$*, se* $\lambda \geq \mu$ *allora si verifica una delle seguenti alternative:*

(a) *due elementi in una riga di* $\{T_\lambda\}$ *stanno in una colonna di* $\{T'_\mu\}$

(b) $\lambda = \mu$ *e detta* $\pi \in S_d$ *la permutazione* $\{T'_\mu\} \xrightarrow{\pi} \{T_\lambda\}$*, si ha che esistono* $\sigma \in \mathcal{R}_\lambda$ *e* $\tau \in \mathcal{C}_\lambda$ *tali che* $\pi = \tau\sigma$*.*

Dimostrazione. Se $\lambda_1 > \mu_1$ allora necessariamente due elementi nella prima riga di $\{T_\lambda\}$ stanno in una stessa colonna di $\{T'_\mu\}$, altrimenti, se non accade **(a)**, si può riordinare $\{T_\lambda\}$ con una permutazione $\tau_1 \in \mathcal{C}_\lambda$ per far coincidere gli elementi della prima riga delle due configurazioni (a meno dell'ordine), ed iterare troncando la prima riga da entrambe. Qualora non si verifichi mai **(a)**, necessariamente $\lambda = \mu$ e con $\tau_k \cdots \tau_1 \in \mathcal{C}_\lambda$ si passa da $\{T_\lambda\}$ a $\{T'_\mu\}$ a meno di un riordinamento degli elementi di ogni riga della prima che può essere ottenuto con una $\sigma \in \mathcal{R}_\lambda$, da cui la voluta $\pi^{-1}\{T_\lambda\} = \{T'_\mu\} = \sigma\tau_k \cdots \tau_1\{T_\lambda\}$. □

Corollario 2.5 ([We], p. 123)**.** *Sia* λ *una partizione di* d *e* $\pi \in S_d$*. Se* $\pi \notin \mathcal{C}_\lambda\mathcal{R}_\lambda$ *allora esistono due trasposizioni* $\sigma \in \mathcal{R}_\lambda$ *e* $\tau \in \mathcal{C}_\lambda$ *tali che* $\tau\pi = \pi\sigma$*.*

Corollario 2.6 ([We], p. 123)**.** *Siano* $\lambda > \mu$ *partizioni di* d*, allora per ogni permutazione* $\pi \in S_d$ *esistono due trasposizioni* $\sigma \in \mathcal{R}_\lambda$ *e* $\tau' \in \mathcal{C}_\mu$ *tali che* $\tau'\pi = \pi\sigma$*.*

Definizione 2.7. *Dato un tableau* T_λ *(ed una configurazione* $\{T_\lambda\}$*), siano*

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}_\lambda} \sigma \quad e \quad b_\lambda = \sum_{\tau \in \mathcal{C}_\lambda} \varepsilon(\tau)\tau$$

Si definisce il simmetrizzatore di Young della partizione λ *come* $c_\lambda = b_\lambda a_\lambda$*.*

c_λ è un elemento di $\mathbb{C}[S_d]$ e pertanto può essere scritto come

$$c_\lambda = \sum_{\pi \in S_d} \hat{c_\lambda}(\pi)\pi \quad \text{dove} \quad \hat{c_\lambda}(\pi) = \begin{cases} \varepsilon(\tau) & \text{se } \exists\, \sigma \in \mathcal{R}_\lambda,\ \tau \in \mathcal{C}_\lambda \text{ t.c. } \pi = \tau\sigma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Da questo fatto si evince una poprietà importante:

$$(2.8) \qquad \forall\, \pi \in S_d \qquad \hat{c_\lambda}(\pi\sigma) = \hat{c_\lambda}(\pi)\ \forall\, \sigma \in \mathcal{R}_\lambda \ \text{ e } \ \hat{c_\lambda}(\tau\pi) = \varepsilon(\tau)\hat{c_\lambda}(\pi)\ \forall\, \tau \in \mathcal{C}_\lambda$$

Sfruttando (2.5) e (2.6) si dimostrano facilmente

Lemma 2.9 ([We], p. 124)**.** *Sia* $u \in \mathbb{C}[S_d]$*. Se* $\hat{u}$ *soddisfa* (2.8) *allora* u *è multiplo di* c_λ*.*

Lemma 2.10 ([We], p. 124)**.** *Siano* $\lambda > \mu$ *partizioni di* d *e* $v \in \mathbb{C}[S_d]$*. Se* $\hat{v}$ *soddisfa*

$$(2.11) \qquad \forall\, \pi \in S_d \qquad \hat{v}(\pi\sigma) = \hat{v}(\pi)\ \forall\, \sigma \in \mathcal{R}_\lambda \ \text{ e } \ \hat{v}(\tau'\pi) = \varepsilon(\tau')\hat{v}(\pi)\ \forall\, \tau' \in \mathcal{C}_\mu$$

allora $v = 0$*.*

Teorema 2.12 ([We], p. 124)**.** *Per ogni partizione λ di d esiste $\nu_\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $c_\lambda c_\lambda = \nu_\lambda c_\lambda$.*

Dimostrazione. Fissato $u \in \mathbb{C}[S_d]$, sia $w = b_\lambda u a_\lambda$. Si vede facilmente che $\hat{w}$ soddisfa (2.8) per ogni scelta di u, in particolare per $u = a_\lambda b_\lambda$ per la quale $w = c_\lambda c_\lambda$. La tesi segue dal Lemma (2.9). □

Analogamente si dimostra il seguente

Teorema 2.13 ([We], p. 124)**.** *Siano $\lambda > \mu$ due partizioni di d. Allora $c_\lambda c_\mu = 0$.*

Ogni c_λ induce l'applicazione lineare $\begin{aligned}\mathscr{C}_\lambda \colon \mathbb{C}[S_d] &\longrightarrow \mathbb{C}[S_d] \\ u &\longmapsto uc_\lambda\end{aligned}$.

Definizione 2.14. *Per ogni λ partizione di d si definisce $V_\lambda \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Im}\mathscr{C}_\lambda \subseteq V^{\otimes d}$.*

Studiando la traccia dell'applicazione $\mathscr{C}_\lambda$ ([We], p. 125) si osserva

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(V_\lambda) = \frac{d!}{\nu_\lambda} \tag{2.15}$$

Teorema 2.16 ([FH], p. 54)**.** *Per ogni λ partizione di d*

$$\begin{aligned}\rho_\lambda \colon S_d &\longrightarrow \mathrm{GL}(V_\lambda) \\ \pi &\longmapsto \rho_\lambda(\pi) \colon \begin{aligned}[t] V_\lambda &\to V_\lambda \\ \alpha &\mapsto \pi\alpha\end{aligned}\end{aligned}$$

è una rappresentazione irriducibile di S_d. Inoltre se $\mu \neq \lambda$ è un'altra partizione di d allora $V_\mu \ncong V_\lambda$.

Dimostrazione. ρ_λ è un omomorfismo ben definito, quindi lo spazio vettoriale V_λ è una rappresentazione di S_d. Sia $W \subseteq V_\lambda$ una sottorappresentazione, allora per la Proposizione (1.7) $\tilde{\rho_\lambda}(u)(W) \subseteq W \ \forall u$ e quindi, con ovvio significato della notazione, $\mathbb{C}[S_d]W \subseteq W$. D'altra parte

$$c_\lambda W \subseteq c_\lambda V_\lambda = c_\lambda \mathbb{C}[S_d] c_\lambda \overset{(2.12)}{=} \mathbb{C}[c_\lambda]$$

per cui $c_\lambda W = \mathbb{C}[c_\lambda]$ oppure $c_\lambda W = \{0\}$. Nel primo caso $c_\lambda \in W$ per cui $W = V_\lambda$, mentre nel secondo $W \cdot W = \{0\}$ quindi $W = \{0\}$ e questo prova che ogni V_λ è irriducibile.
Sia ora $\mu \neq \lambda$ un'altra partizione di d ed assumiamo senza perdita di generalità $\lambda > \mu$. Sia $\varphi \colon V_\mu \to V_\lambda$ un'applicazione qualsiasi:

$$\varphi\big(\tilde{\rho_\mu}(c_\mu)(V_\mu)\big) = \varphi\big(\mathbb{C}[c_\mu]\big) \quad \text{mentre} \quad \tilde{\rho_\lambda}(c_\mu)\big(\varphi(V_\mu)\big) = c_\lambda c_\mu \varphi(V_\mu) \overset{(2.13)}{=} 0$$

e ciò prova che φ non può essere un S_n-isomorfismo lineare. □

Teorema 2.17 (Caratterizzazione delle rappresentazioni di S_d)**.** *Le rappresentazioni irriducibili di S_d sono del tipo V_λ con λ partizione di d.*

Capitolo 3

Rappresentazioni di $\mathrm{GL}(V)$

Il gruppo simmetrico S_d agisce da destra su $V^{\otimes d}$ permutando i vettori dei tensori decomponibili, e tale azione può essere estesa linearmente all'algebra $\mathbb{C}[S_d]$:

Definizione 3.1. *Per ogni c_λ si definisce $\mathbb{S}_\lambda V \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes d} c_\lambda$.*

Lemma 3.2 ([FH], p. 85)**.** *Dato un gruppo finito G ed un $\mathbb{C}[G]$-modulo destro U,*

(a) $\forall\, c \in \mathbb{C}[G] \quad U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G]c \cong Uc$

(b) *Se $W = \mathbb{C}[G]c$ è un $\mathbb{C}[G]$-modulo sinistro irriducibile allora Uc è un $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(U)$-modulo destro irriducibile.*

(c) *Se $W_i = \mathbb{C}[G]c_i$ sono tutti i $\mathbb{C}[G]$-moduli sinistri irriducibili allora $U \cong \bigoplus_i U c_i^{\oplus \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(W_i)}$*

Dimostrazione. **(b)** Se U è irriducibile, essendo $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(U) = \mathbb{C}$ basta mostrare che la dimensione di $Uc \overset{\text{(a)}}{=} U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W$ non è maggiore di 1. Sfruttando il Lemma (1.18) possiamo pensare il modulo sinistro *irriducibile* W come un ideale sinistro *minimale* di $\bigoplus_i \mathrm{M}(s_i, \mathbb{C})$, ovvero un insieme formato da r-uple di matrici nulle eccetto in una componente, ed avente in questa tutte le colonne nulle eccetto la j-esima. Analogamente U sarà formato da r-uple di matrici nulle eccetto in una componente, ed avente in tale tutte le righe nulle eccetto la i-esima. Osservando che il prodotto tensoriale in quest'algebra isomorfa si comporta come prodotto matriciale, Uc sarà nullo o generato dall'elemento E^{ij} della base canonica.
Se invece $U = \bigoplus_i U_i^{\oplus n_i}$ dove gli U_i sono $\mathbb{C}[G]$-moduli destri irriducibili,

$$Uc \overset{\text{(a)}}{=} U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W = \bigoplus_i \left(U_i \otimes_{\mathbb{C}[G]} W\right)^{\oplus n_i}$$

ovvero $\{0\}$ oppure $\mathbb{C}^{\oplus n_k}$, che è un modulo destro irriducibile dell'algebra $\bigoplus_i \mathrm{M}(n_i, \mathbb{C}) \overset{(1.10)}{=} \mathrm{End}_G(U) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(U)$.

(c) Come rappresentazione regolare di G, $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_i W_i^{\oplus \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(W_i)}$ per cui

$$U \cong U \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G] = \bigoplus_i \big(U \otimes_{\mathbb{C}[G]} W_i\big)^{\oplus \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(W_i)} \overset{\text{(a)}}{\cong} \bigoplus_i U c_i^{\oplus \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(W_i)}$$

□

Applicando questo Lemma all'S_d-modulo destro $U = V^{\otimes d}$ si dimostra

Teorema 3.3 ([FH], p. 77)**.** *Posto $n_\lambda = \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}(V_\lambda)$ per ogni partizione λ di d,*

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_\lambda \mathbb{S}_\lambda V^{\oplus n_\lambda}$$

inoltre $\mathbb{S}_\lambda V$ sono tutti moduli destri irriducibili di $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[S_d]}(V^{\otimes d})$

Lemma 3.4 ([FH], p. 86)**.** *L'algebra* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[S_d]}(V^{\otimes d})$ *è generata come sottospazio lineare di* $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$ *da* $\mathrm{End}(V)$*. Inoltre un sottospazio di $V^{\otimes d}$ è un sottomodulo (irriducibile) di* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[S_d]}(V^{\otimes d})$ *se e solo se è* $\mathrm{GL}(V)$*-invariante (irriducibile).*

Dimostrazione. Considerando l'isomorfismo,

$$\mathrm{End}(V^{\otimes d}) \cong V'^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d} \cong \big(V' \otimes V\big)^{\otimes d} \cong \big(\mathrm{End}(V)\big)^{\otimes d}$$

si osserva che gli endomorfismi di $V^{\otimes d}$ che commutano con l'azione di $\mathbb{C}[S_d]$ corrispondono ai tensori di $\big(\mathrm{End}(V)\big)^{\otimes d}$ che sono invarianti per permutazione delle componenti, ovvero $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[S_d]}(V^{\otimes d}) \cong \mathsf{Sym}^d\big(\mathrm{End}(V)\big)$. $\mathrm{End}(V)$ agisce su $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$ con la mappa $A \longmapsto A \otimes \cdots \otimes A$ dove, concordemente con l'isomorfismo fra le due algebre, $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \overset{\text{def}}{=} A_1 v_1 \otimes \cdots \otimes A_n v_n$.
Lo spazio generato dalle immagini della mappa ovviamente è un sottospazio di $\mathsf{Sym}^d\big(\mathrm{End}(V)\big)$. Ora, dal momento che per ogni spazio vettoriale finitamente generato W si ha che $\mathsf{Sym}^d(W) = \langle w \otimes \cdots \otimes w | \, w \in W \rangle$, si conclude che $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[S_d]}(V^{\otimes d}) \cong \mathsf{Sym}^d\big(\mathrm{End}(V)\big)$ è proprio generato dall'azione di $\mathrm{End}(V)$ su $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$.
Il secondo punto è conseguenza del fatto che $\mathrm{GL}(V)$ è denso in $\mathrm{End}(V)$. □

Teorema 3.5 (Caratterizzazione delle rappresentazioni di $\mathrm{GL}(V)$)**.**
Sia V uno spazio vettoriale fintamente generato sui complessi, allora per ogni naturale d e per ogni sua partizione λ, $\mathbb{S}_\lambda V$ è una rappresentazione irriducibile di $\mathrm{GL}(V)$*. Se poi μ, λ sono partizioni distinte allora $\mathbb{S}_\lambda V \ncong \mathbb{S}_\mu V$.*

Dimostrazione. Per il Teorema (3.3) gli $\mathbb{S}_\lambda$ sono $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[S_d]}(V^{\otimes d})$-moduli irriducibili, quindi per il Lemma (3.4) rappresentazioni irriducibili di $\mathrm{GL}(V)$.
Se $\lambda > \mu$ sono partizioni dello stesso numero d, consideriamo $\varphi \colon \mathbb{S}_\mu V \longrightarrow \mathbb{S}_\lambda V$ un'applicazione lineare e $A \in \mathrm{GL}(V)$:

$$A\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \, c_\mu) = A\big(\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \, c_\mu\big) = A\big((w_1 \otimes \cdots \otimes w_d \, c_\lambda) c_\mu\big) = 0$$

e ciò prova che φ non può essere un $\mathrm{GL}(V)$-isomorfismo. Per generiche partizioni si può ricorrere allo studio dei polinomi di Schur, non trattati in questa tesi. □

Bibliografia

[FH] W. Fulton, J. Harris: *Representation Theory*, Springer-Verlag, 1991

[We] H. Weyl: *The Classical Groups*, Princeton University Press, 1946

[BBG] E. Berger, R. Bryant, P. Griffiths: *The Gauss equations and the* $\mathrm{GL}(n)$ *representation theory for tensors*, Duke Mathematical Journal Vol. 50 N. 3, Duke University Press, 1983 §5 pp. 870-892

[Gf] G. Gaiffi: *Appunti del corso di Teoria delle Rappresentazioni 2008-2009* a cura di E. Sacco, `http://www.dm.unipi.it/~gaiffi/Teorapp2009/main.pdf`

[Cb] C. Ciliberto: *Algebra Lineare*, Bollati Boringhieri, 1994

[Sr] J.P. Serre, *Linear representation of finite groups*, Springer-Verlag, 1977