



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E
NATURALI

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

CURVE ELLITTICHE E PUNTI CRITICI DELLA CURVATURA GAUSSIANA

Elliptic curves and critical points
of Gaussian curvature

Candidato

Francesco Civitelli (Matricola 7109687)

Relatore

Prof. Giorgio Ottaviani

Anno Accademico 2024/2025

A chi ha reso unico questo viaggio.

*Il viaggio è come una formula matematica:
richiede un punto di partenza, una direzione
e una serie di calcoli per raggiungere la meta,
ma il risultato è sempre una nuova prospettiva.*

Indice

Introduzione	1
1 Cubica di Fermat	2
1.1 Calcolo computazionale dei coefficienti come combinazione lineare di una base scelta	3
1.2 Il gruppo degli automorfismi della cubica di Fermat	4
1.3 Curvatura gaussiana	5
1.3.1 Punti critici della curvatura	8
1.4 Il gruppo di isotropia	11
2 Cubiche della forma $a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 = 0$	12
2.1 Il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{C}$	14
2.1.1 Automorfismi indotti da trasformazioni unitarie	14
3 Cubiche in forma di Hesse	16
3.1 Il gruppo degli automorfismi delle cubiche in forma di Hesse	17
3.2 Il caso λ radice cubica dell'unità	18
Bibliografia	20

Introduzione

Il presente lavoro parte dall'analisi classica della curvatura gaussiana sulla cubica di Fermat sviluppata da Linda Ness [Nes78], in cui l'autrice dimostra parzialmente la formula della curvatura gaussiana in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ dotato della metrica di Fubini-Study, la applica al caso della cubica di Fermat e approfondisce gli automorfismi della cubica per dedurre i punti critici della curvatura gaussiana.

Partendo da ciò la tesi si propone di fornire dettagli in merito alla dimostrazione della formula della curvatura gaussiana e di combinare le osservazioni analitico-geometriche con un'indagine computazionale. Nel complesso il lavoro unisce l'analisi teorica a verifiche computazionali, fornendo sia formule chiuse sia procedure algoritmiche riproducibili.

Il problema principale della tesi è trovare i punti critici della curvatura gaussiana con la metrica di Fubini-Study, che è un problema "difficile" analiticamente, ma che si semplifica con le considerazioni algebrico-geometriche sul gruppo degli automorfismi della cubica. Successivamente l'obiettivo diventa classificare i punti critici e ciò è possibile basandosi sulle proprietà delle curve ellittiche e sulla loro struttura di gruppo, ciò viene compiuto anche attraverso la rappresentazione grafica con *GeoGebra* [Hoh].

Inoltre sfruttando l'isomorfismo tramite trasformazioni lineari, il lavoro si estende all'analisi della famiglia di cubiche $a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 = 0$, mostrando come la struttura di gruppo si conserva e come si altera la funzione di curvatura.

Successivamente si studia la famiglia in forma di Hesse $x^3 + y^3 + z^3 + 6\lambda xyz = 0$ e mediante l'analisi del gruppo degli automorfismi si ottiene la nota classificazione delle curve ellittiche, armoniche ed equianarmoniche. Infine si osserva il caso di particolari curve ellittiche equianarmoniche e si confrontano con la cubica di Fermat, generalizzando le proprietà ottenute e sottolineando gli invarianti metrici.

Accanto alla trattazione analitica, la tesi costruisce strumenti computazionali, implementati in *Macaulay2* [GS], per poter calcolare la somma di punti sul gruppo della cubica, per cercare punti fissi degli automorfismi, per valutare la funzione curvatura e per determinare il gruppo di isotropia dei punti. Inoltre l'aspetto computazionale è stato utilizzato per confermare i risultati classici, permettendo di completare la dimostrazione della formula della curvatura gaussiana di Linda Ness.

Capitolo 1

Cubica di Fermat

Definizione 1.1 (Curve ellittiche). Data $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$, omogenea di grado 3 e non singolare, allora l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce una curva ellittica $\mathcal{C}$ nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Data $\mathcal{C}$ curva ellittica e fissato un punto $O \in \mathcal{C}$ si può definire un'operazione tra punti di $\mathcal{C}$; in particolare dati $A, B \in \mathcal{C}$ si definisce $A + B := R(O, R(A, B))$, in cui $R(A, B)$ è la terza intersezione (contata con molteplicità) tra la retta passante per A e B e la cubica $\mathcal{C}$. Con questa operazione $(\mathcal{C}, +)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro O [Ser00, Sezione 4.36].

Definizione 1.2. La cubica di Fermat è la curva algebrica $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ di equazione:

$$\mathcal{F} : x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

Il gradiente è

$$\nabla \mathcal{F}([x, y, z]) = \begin{bmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \\ 3z^2 \end{bmatrix} \neq 0, \forall [x, y, z] \in \mathcal{F}$$

dunque è non singolare e quindi una curva ellittica.

Osservazione. La curva Hessiana ha equazione

$$\mathcal{H} : \begin{vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{vmatrix} = 6^3 xyz = 0$$

Dunque i punti di flesso sono della forma $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H} = \mathcal{F} \cap \{xyz = 0\}$ e sono:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\rho & 0 \\ 1 & -\rho^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\rho^2 \\ 1 & 0 & -\rho \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\rho \\ 0 & 1 & -\rho^2 \end{bmatrix}$$

in cui ρ è una radice cubica primitiva dell'unità.

Per rendere la cubica $\mathcal{F}$ un gruppo abeliano è sufficiente fissare un elemento neutro, ad esempio scelgo $O = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Inoltre è possibile caratterizzare i punti di ordine 3, grazie alla seguente:

Proposizione 1.3. Data $\mathcal{C}$ curva ellittica, con elemento neutro uno dei 9 flessi, allora $3P = O \iff P$ è un flesso.

Dimostrazione. ($\implies$) Se $2P + P = O$ allora la tangente per P interseca una terza volta la cubica in P , dunque P è un punto di molteplicità 3 e quindi un flesso.
 ($\impliedby$) Se P è un flesso, allora $2P = R(O, R(P, P)) = R(O, P) = -P$, da cui segue la tesi. $\square$

Osservazione. Le curve ellittiche hanno l'importante proprietà che sono omeomorfe a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e l'omeomorfismo è anche un isomorfismo di gruppi [Mir95], considerando $\mathbb{R}^2$ con l'usuale operazione di somma.
 Dato che i flessi sono i punti di ordine 3, è possibile rappresentarli in $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ con *GeoGebra* [Hoh].

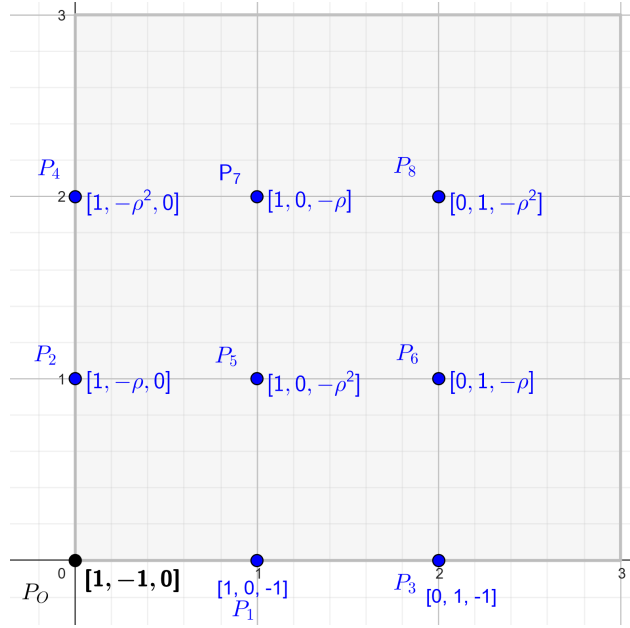


Figura 1.1. Flessi della cubica di Fermat

1.1 Calcolo computazionale dei coefficienti come combinazione lineare di una base scelta

Fissato $O = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}$ elemento neutro e $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 \end{bmatrix}$ flessi tali che $P_1 \neq -P_2$, allora $\forall Q \in \mathcal{F}$, $\exists a, b \in \mathbb{R} : Q = aP_1 + bP_2$.

In particolare considero il problema per i punti di ordine 9, allora $\forall Q \in \mathcal{F}$ di ordine 9, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} : \alpha = a + 9\mathbb{Z}$, $\beta = b + 9\mathbb{Z}$, $Q = \frac{a}{3}P_1 + \frac{b}{3}P_2$. Utilizzando un calcolatore simbolico, come *Macaulay2* [GS], è possibile costruire un algoritmo che restituisce in output tali coefficienti. Definisco le funzioni di supporto all'algoritmo.

- `equal` è una funzione che restituisce vero se P e Q sono lo stesso punto nel proiettivo, altrimenti restituisce falso.

$$\text{equal} = (P, Q) \rightarrow \text{rank}(P || Q) == 1$$

- **sumFermat** è una funzione che dati due punti distinti P e Q sulla cubica di Fermat restituisce le coordinate di $P + Q$. In particolare se $P = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$, allora

$$P + Q = \begin{bmatrix} y_1^2 x_2 z_2 - y_2^2 x_1 z_1 & x_1^2 y_2 z_2 - x_2^2 y_1 z_1 & z_1^2 y_2 x_2 - z_2^2 y_1 x_1 \end{bmatrix}$$

- **point_n** è una funzione che dato un punto P sulla cubica di Fermat e $n \in \mathbb{N}$ restituisce nP . La funzione è costruita combinando opportunamente **sumFermat** e le formule di duplicazione, ovvero se $P = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}$, allora

$$2P = \begin{bmatrix} y_1 (z_1^3 - x_1^3) & x_1 (y_1^3 - z_1^3) & z_1 (x_1^3 - y_1^3) \end{bmatrix}$$

Le formule di somma e duplicazione dei punti riportate possono essere ricavate utilizzando un calcolatore simbolico, oppure si possono ricavare facilmente dalle formule presenti in [Cas91, Sezione 6], le quali mostrano come ottenere la terza intersezione di una retta per 2 punti con la cubica.

L'algoritmo inizia scegliendo $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$ tali che $3T_1 = P_1$ e $3T_2 = P_2$, ciò implica che T_1, T_2 sono punti di ordine 9. La scelta effettuata non è unica, ma ci sono 9 possibili scelte rispettivamente per T_1 e T_2 , in particolare $T_1 = \frac{1}{3}P_1$ e $T_2 = \frac{1}{3}P_2$. Implementando la ricerca dei coefficienti in *Macaulay2* [GS] si ottiene:

```
coeff9 = P -> (
  for i from 0 to 8 do
    for j from 0 to 8 do
      if i + j != 0 then
        if equal(sumFermat(point_i T1, point_j T2), P) then
          return (i, j))
```

L'algoritmo restituisce (a, b) tali che $P = \frac{a}{3}P_1 + \frac{b}{3}P_2$. Si osserva inoltre che il procedimento è generalizzabile per punti di ordine n , $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Inoltre può essere applicato per schematizzare o raffigurare i punti sulla cubica di Fermat, come verrà svolto in seguito.

1.2 Il gruppo degli automorfismi della cubica di Fermat

Sia $\mathcal{A}$ il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{F}$, i suoi elementi sono indotti da trasformazioni lineari di $\mathbb{C}^3$ che fissano $\mathcal{F}$, a meno di moltiplicare per una costante. Dato che ogni trasformazione lineare conserva l'equazione della cubica, conserva anche la curva Hessiana, di equazione $xyz = 0$. Quindi le rette $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ vengono permutate tra loro. Ogni automorfismo è dunque indotto da una permutazione di coordinate.

Sia S_3 il gruppo simmetrico di ordine 3, dunque è possibile definire un morfismo suriettivo $\phi : \mathcal{A} \rightarrow S_3$, tale che l'immagine di ogni automorfismo sia la permutazione di 3 elementi che lo induce.

Ogni elemento che appartiene al nucleo di ϕ è una trasformazione diagonale della forma $[x, y, z] \mapsto [\alpha x, \beta y, \gamma z]$, in cui $\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3 = 1$. Quindi ogni elemento di questa

forma può essere rappresentato univocamente con $D_{(i,j)} : [x, y, z] \mapsto [x, \rho^i y, \rho^j z]$, con $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e ρ la radice cubica primitiva dell'unità.

Per il primo teorema di omomorfismo per gruppi:

$$|\mathcal{A}| = |\ker \phi| \times |S_3| = 9 \times 3! = 54$$

1.3 Curvatura gaussiana

Definizione 1.4 (Metrica di Fubini-Study). La metrica di Fubini-Study è l'unica metrica di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ invariante per trasformazioni di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ indotte da trasformazioni unitarie di $\mathbb{C}^3$, a meno di moltiplicare per una costante. Scelgo di normalizzare la metrica affinché la curvatura di una retta proiettiva sia 2 in tutti i suoi punti.

Inoltre la curva ellittica è uno spazio metrico, con la metrica indotta da $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ come sottospazio topologico.

Il Teorema Egregium di Gauss afferma che la curvatura gaussiana è intrinseca e può essere definita a partire dalla metrica su $\mathcal{C}$. Prima di ricavare la curvatura gaussiana dimostro il seguente lemma.

Lemma 1.5. *Sia $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$, polinomio omogeneo di grado d , sia f il suo deomogeneizzato rispetto ad x . Definisco l'Hessiano affine di f , come*

$$H_a := \det \begin{bmatrix} 0 & f_y & f_z \\ f_y & f_{yy} & f_{yz} \\ f_z & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix} = -f_z^2 f_{yy} - f_y^2 f_{zz} + 2f_y f_z f_{yz}$$

Sia H l'Hessiano proiettivo. Allora $H_a(d-1)^2 = H|_{x=1}$, valutato in (y, z) tali che $F(1, y, z) = 0$.

Dimostrazione. Dato che $f(y, z)$ è il deomogeneizzato rispetto ad x di F , allora $F(x, y, z) = x^d f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$. Calcolando le derivate parziali di questa identità e valutando in $x = 1$ si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} F_y(1, y, z) &= f_y(y, z), & F_x(1, y, z) &= df - yf_y - zf_z, \\ F_z(1, y, z) &= f_z(y, z), & F_{xy}(1, y, z) &= (d-1)f_y - yf_{yy} - zf_{yz}, \\ F_{yy}(1, y, z) &= f_{yy}(y, z), & F_{xz}(1, y, z) &= (d-1)f_z - yf_{yz} - zf_{zz}, \\ F_{yz}(1, y, z) &= f_{yz}(y, z), & F_{xx}(1, y, z) &= (d-1)F_x - yF_{xy} - zF_{xz}. \\ F_{zz}(1, y, z) &= f_{zz}(y, z), \end{aligned}$$

Siano C_1, C_2, C_3 le colonne della matrice Hessiana di F . Sostituendo alla colonna C_1 , la nuova colonna $C_1 + yC_2 + zC_3$ il determinante rimane invariato.

$$C_1 + yC_2 + zC_3 = \begin{pmatrix} F_{xx} + yF_{xy} + zF_{xz} \\ F_{xy} + yf_{yy} + zf_{yz} \\ F_{xz} + yf_{yz} + zf_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d-1)F_x \\ (d-1)f_y \\ (d-1)f_z \end{pmatrix}$$

Dunque l'Hessiano valutato in $x = 1$ si semplifica

$$H(1, y, z) = (d-1) \det \begin{bmatrix} F_x & F_{xy} & F_{xz} \\ f_y & f_{yy} & f_{yz} \\ f_z & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

Considerando R_1, R_2, R_3 le righe della nuova matrice ottenuta e sostituendo ad R_1 , la nuova riga $R_1 + yR_2 + zR_3$ il determinante rimane invariato. Dunque semplificando con le relazioni ottenute in precedenza:

$$\begin{aligned} H(1, y, z) &= (d-1) \det \begin{bmatrix} df & (d-1)f_y & (d-1)f_z \\ f_y & f_{yy} & f_{yz} \\ f_z & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= (d-1) \det \begin{bmatrix} 0 & (d-1)f_y & (d-1)f_z \\ f_y & f_{yy} & f_{yz} \\ f_z & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix} = (d-1)^2 H_a(y, z) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.6 (Curvatura gaussiana di $\mathcal{C}$). *Dato un punto $P \in \mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, $\mathcal{C}$ definita dall'equazione $F(x, y, z) = 0$, in cui F polinomio omogeneo di grado d e P non singolare. Allora la curvatura gaussiana indotta dalla metrica di Fubini-Study è data da*

$$K_{\mathcal{C}}(P) = 2 - \frac{\|P\|^6 |H_{\mathcal{C}}(P)|^2}{(d-1)^4 \|\nabla F(P)\|^6} \quad (1.1)$$

in cui $\|\cdot\|$ indica l'usuale norma hermitiana di $\mathbb{C}^3$.

Dimostrazione. Considero $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ come varietà differenziabile, associata alle carte locali $U_i = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid x_i \neq 0\}$, $i = 1, 2, 3$. È sufficiente dimostrare il teorema in una carta locale, ad esempio in U_1 , quindi senza perdita di generalità è possibile considerare la prima coordinata x pari ad 1. La carta è localmente omeomorfa ad $\mathbb{R}^4$ con coordinate $y, \bar{y}, z, \bar{z}$. In U_1 definisco $f(y, z) := F(1, y, z)$.

La metrica di Fubini-Study in questa carta locale e scegliendo la costante di normalizzazione uguale a 2 è data da:

$$\begin{aligned} &\sum_{z_i, z_j \in \{y, z\}} 2 \frac{\partial^2 \log(1 + |y|^2 + |z|^2)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \\ &= \frac{2}{(1 + |y|^2 + |z|^2)^2} \left((1 + |z|^2) dy d\bar{y} - \bar{y}z dy d\bar{z} - y\bar{z} dz d\bar{y} + (1 + |y|^2) dz d\bar{z} \right) \end{aligned}$$

Dato che $P \in \mathcal{C}$ è non singolare, posso supporre $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$, quindi localmente $\mathcal{C}$ può essere vista come grafico di una funzione della forma $y(z)$.

Dunque si ha che $dy = y' dz$ e $d\bar{y} = \bar{y}' d\bar{z}$. Sostituendo nella formula della metrica di Fubini-Study si ottiene:

$$2 \cdot \underbrace{\frac{(1 + |z|^2) |y'|^2 + (1 + |y|^2) - (y'\bar{y}'z + y\bar{y}'\bar{z})}{(1 + |y|^2 + |z|^2)^2}}_h dz d\bar{z}$$

Si ha dunque un cambio conforme di coordinate e la curvatura gaussiana per una metrica della forma $h dz d\bar{z}$ è data da $-\frac{2}{h} \frac{\partial^2 \log h}{\partial z \partial \bar{z}}$ [Ser94, §37], dove è sufficiente

inserire nella formula di Brioschi $F = 0$ ed $E = G = h$. h può essere espresso nella forma $h = 2\frac{B}{A^2}$, con $A = 1 + |y|^2 + |z|^2$ e $B = (1 + |z|^2)|y'|^2 + (1 + |y|^2) - (y'\bar{y}z + y\bar{y}'\bar{z})$.

Derivando la formula e sfruttando le proprietà del logaritmo si ottiene:

$$K = -\frac{A^2}{B} \left(\frac{B_{z\bar{z}}}{B} - \frac{|B_z|^2}{B^2} - 2\frac{A_{z\bar{z}}}{A} + 2\frac{|A_z|^2}{A^2} \right)$$

in cui:

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\partial A}{\partial z} = \bar{y}y' + \bar{z}; & B_z &= \frac{\partial B}{\partial z} = (1 + |z|^2)y''\bar{y}' - \bar{y}y''z; \\ A_{z\bar{z}} &= \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \bar{z}} = |y'|^2 + 1; & B_{z\bar{z}} &= \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial \bar{z}} = (1 + |z|^2)|y''|^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_z|^2 &= |y|^2|y'|^2 + |z|^2 + \bar{y}y'z + y\bar{y}'\bar{z}; \\ |B_z|^2 &= |y''|^2 \left[(1 + |z|^2)^2|y'|^2 + |y|^2|z|^2 - (1 + |z|^2)(\bar{y}'y\bar{z} + y'\bar{y}z) \right]. \end{aligned}$$

Inoltre per il Teorema delle funzioni implicite di Dini si ha:

$$y' = -\frac{f_z}{f_y}, \quad y'' = -\frac{f_{yy}f_z^2 - 2f_{yz}f_yf_z + f_{zz}f_y^2}{f_y^3}, \quad \bar{y}' = (\bar{y}')', \quad \bar{y}'' = (\bar{y}'')'$$

Implementando le formule precedenti in *Macaulay2* [GS], si ottiene:

```
R = QQ[y, bary, z, barz, fy, fz, barfz, barfy, fyy, fzz,
    barfyy, barfzz, fyz, barfyz]
yprim = - fz/fy
y2prim = - (fyy*fz^2 - 2*fyz*fy*fz + fzz*fy^2)/(fy^3)
bary2prim = - (barfyy*barfz^2 - 2*barfyz*barfy*barfz +
    barfzz*barfy^2) / (barfy^3)
baryprim = - barfz/barfy
modyprim = yprim * baryprim
mody2prim = y2prim * bary2prim
A = 1 + (y*bary) + (z*barz)
B = (1 + (z*barz)) * modyprim + (1 + (y*bary)) -
    (yprim*bary*z + y*baryprim*barz)
Bz = (1 + (z*barz)) * y2prim*baryprim - bary*y2prim*z
Bzz = (1 + (z*barz)) * mody2prim
modBz = mody2prim * ((1 + (z*barz))^2*modyprim + (y*bary)*
    (z*barz) - (1 + (z*barz))*(baryprim*y*barz + yprim*bary*z))
Az = bary*yprim + barz
Azz = modyprim + 1
modAz = (y*bary)*modyprim + (z*barz) + bary*yprim*z +
    y*baryprim*barz
K = - A^2/B*(Bzz/B - modBz/(B^2) - 2*Azz/A + 2*modAz/(A^2))
den = denominator K
```

— Scrivo K nella forma $K = 2 - x/den \Rightarrow x = -den * (K - 2)$
 $x = \mathbf{numerator}(-den * (K - 2))$
 $K = 2 - \mathbf{factor}(x/den)$

La curvatura nella carta locale U_1 risulta dunque:

$$\begin{aligned} K(y, z) &= 2 - \frac{(1 + |y|^2 + |z|^2)^3 \left| f_z^2 f_{yy} + f_y^2 f_{zz} - 2 f_y f_z f_{yz} \right|^2}{\left(|f_y|^2 (1 + |y|^2) + |f_z|^2 (1 + |z|^2) + f_y \bar{f}_z y \bar{z} + \bar{f}_y f_z \bar{y} z \right)^3} = \\ &= 2 - \frac{(1 + |y|^2 + |z|^2)^3 |H_a(y, z)|^2}{\left(|f_y|^2 + |f_z|^2 + |y f_y + z f_z|^2 \right)^3} \end{aligned}$$

L'obiettivo è cercare di estendere il risultato ottenuto a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Sfruttando il lemma 1.5 e l'identità di Eulero $F_x + y f_y + z f_z = 0$ si può semplificare la formula come segue:

$$K(y, z) = 2 - \frac{\overbrace{(1 + |y|^2 + |z|^2)^3}^{\|P\|^6} |H_C(P)|^2}{(d-1)^4 \left(|F_x|^2 + |F_y|^2 + |F_z|^2 \right)^3}$$

Generalizzando le osservazioni precedenti a tutte le carte locali si giunge alla tesi. $\square$

Osservazione. Si osserva banalmente che la funzione calcolata in P ha massimo se e solo se si annulla l'Hessiana, quindi se e solo se P è un flesso. In questi punti la curvatura è pari a 2.

Ogni curva ellittica è un sottoinsieme compatto e connesso, dunque l'immagine della curvatura gaussiana sarà un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ della forma $[a, 2]$, con $a < 2$.

Corollario 1.6.1. *La curvatura della cubica di Fermat è data dalla formula:*

$$K_{\mathcal{F}}([x, y, z]) = 2 - 4 \frac{\left(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \right)^3 |xyz|^2}{\left(|x|^4 + |y|^4 + |z|^4 \right)^3} \quad (1.2)$$

con $[x, y, z] \in \mathcal{F}$

1.3.1 Punti critici della curvatura

Per determinare la struttura dei punti critici della curvatura gaussiana per la cubica di Fermat che non sono massimi, è possibile sfruttare la seguente:

Proposizione 1.7. *Se $P \in \mathcal{C}$ è fissato da qualche automorfismo A della cubica $\mathcal{C}$ indotto da una trasformazione unitaria di $\mathbb{C}^3$ non banale, allora è un punto critico per la curvatura gaussiana.*

Dimostrazione. Sia ω un differenziale olomorfo su $\mathcal{C}$. Dato che $\mathcal{C}$ ha genere 1, lo spazio vettoriale dei differenziali olomorfi ha dimensione 1, dunque ω è unico a meno di moltiplicare per una costante complessa non nulla. Sia A l'automorfismo che fissa $\mathcal{C}$, allora $A\omega$ è un differenziale olomorfo e per le osservazioni precedenti $\exists \lambda(A) \in \mathbb{C}^*$ tale che $A\omega = \lambda(A)\omega$.

Dato che la curva ellittica è omeomorfa al toro, ogni automorfismo A è possibile sollevarlo al rivestimento del toro $\mathbb{C}$ e sarà indotto da una trasformazione lineare della forma $z \mapsto \alpha z + \beta$, con $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Il differenziale olomorfo canonico sul toro è $\omega = dz$. Quindi $A\omega = A dz = d(A(z)) = d(\alpha z + \beta) = \alpha dz$. Quindi la costante α è $\lambda(A)$. Inoltre $\lambda(A) = 1 \Leftrightarrow A$ è una traslazione e dunque non ha punti fissi, ad eccezione dell'identità.

Dato che la curvatura gaussiana K è invariante rispetto all'azione di trasformazioni unitarie allora $dK(P) \circ dA = dK(P)$. Dato che $dA = \lambda(A)I$ e $\lambda(A) \neq 1$ per le osservazioni precedenti, allora $dK(P) = 0$. $\square$

Quindi costruendo un algoritmo su *Macaulay2* [GS] per cercare i punti fissi degli automorfismi, è possibile determinare esplicitamente alcuni punti critici.

Per le osservazioni esplicitate nella sezione 1.2 ogni automorfismo è la composizione di una permutazione delle coordinate con una funzione della forma $D_{(i,j)} : [x, y, z] \mapsto [x, \rho^i y, \rho^j z]$, con $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e ρ la radice cubica primitiva dell'unità, quindi in particolare ogni automorfismo è unitario e soddisfa le ipotesi della proposizione precedente.

Il seguente algoritmo accetta in input *sigma*, ovvero una lista di 3 elementi che rappresenta la corrispondente permutazione degli assi e due interi i, j , che sono i parametri di $D_{(i,j)}$. L'algoritmo restituisce un'ideale, i cui generatori sono le equazioni che i punti fissi devono soddisfare.

```

KK = toField(QQ[r] / (r^2+r+1))
R = KK[x, y, z]
f = x^3 + y^3 + z^3
base = basis(1, R)

fixedpoints = (sigma, i, j) -> (
  u = matrix{apply(3, n->base_(0, sigma_n-1))};
  v = matrix{{1, r^i, r^j}};
  w = matrix{apply(3, n->u_(0, n)*v_(0, n))};
  saturate(ideal(f, minors(2, base || w)), ideal base))

```

Ad esempio scegliendo la permutazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$, $i = 1$, $j = 2$, si ottiene:

```

sigma = {1, 3, 2}, i = 1, j = 2
I = fixedpoints(sigma, i, j)

```

Per trovare esplicitamente i punti fissi è sufficiente determinare la varietà algebrica proiettiva dell'ideale I ottenuto. In questo esempio si ottengono i punti $\begin{bmatrix} 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -\sqrt[3]{2}\rho^k & \rho & 1 \end{bmatrix}$, con $k \in \{0, 1, 2\}$.

Si osserva che l'unione dei punti ottenuti dall'algoritmo è dato dai punti di ordine 6 e da 18 punti di ordine 9, descritti rispettivamente in [SS24] e in [MZ25], oltre i flessi. I punti di ordine 9 in questione sono:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta^2 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & \beta^4 \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta^5 \end{bmatrix}$$

e le loro permutazioni, in cui β è una radice primitiva nona dell'unità. Dunque ci sono in totale 54 punti critici e sono gli unici [Nes78].

Osservando che sono punti con coordinate che appartengono ad estensioni algebriche di $\mathbb{Q}$, è possibile utilizzare un software di calcolo simbolico come *Macaulay2* [GS] per determinare la curvatura nei punti. In particolare per i punti critici si ottiene:

- La curvatura nei 18 punti di ordine 9 è -2 e sono punti di minimo assoluto;
- La curvatura nei 27 punti di ordine 6 è $2 - 2\sqrt[3]{4} \approx -1.17$ e sono punti di sella.

Mentre la curvatura nei restanti 54 punti di ordine 9 è $-52/125\sqrt[3]{9} - 24/125\sqrt[3]{3} + 162/125 \approx 0.15$.

Fissando l'origine e 2 vettori indipendenti in $\mathbb{R}^2$ è possibile rappresentare i punti critici della curvatura con *GeoGebra* [Hoh], sfruttando anche quanto osservato nella sezione 1.1 per il calcolo dei coefficienti dei punti come combinazione lineare di una base fissata.

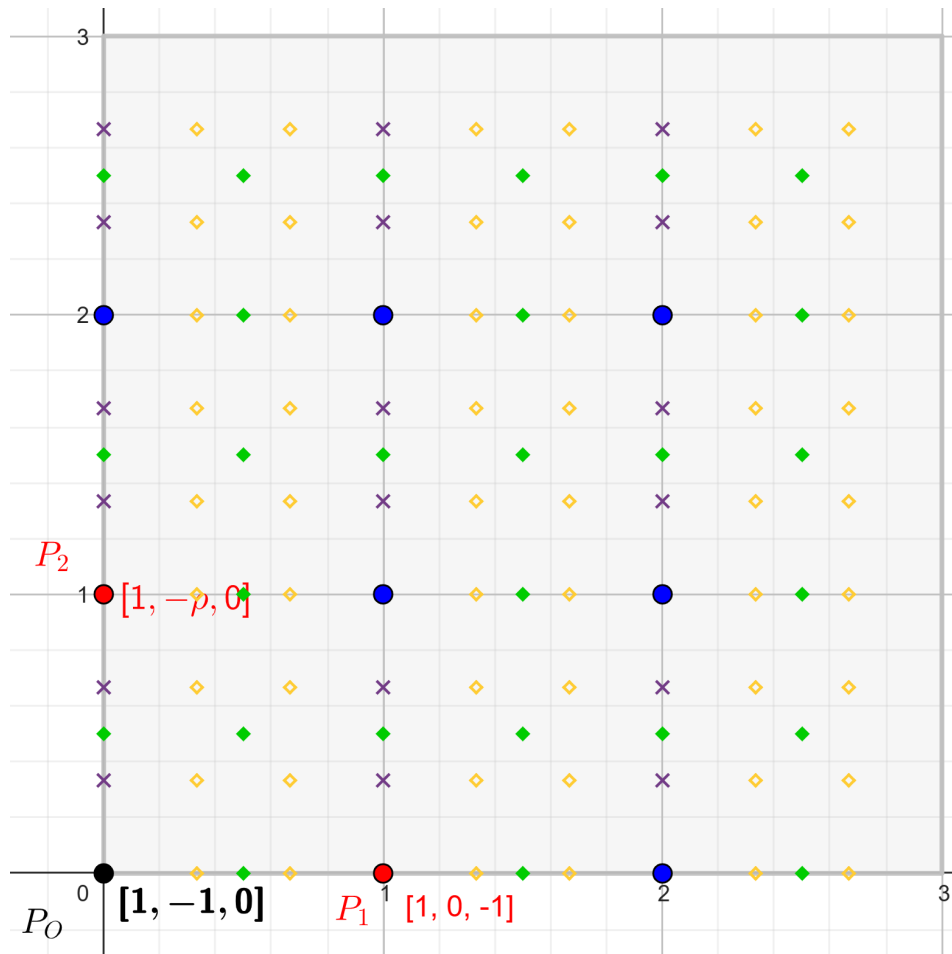


Figura 1.2. Punti critici della curvatura della cubica di Fermat

Legenda	
•	Ordine 3 Massimo della curvatura
◆	Ordine 6 Punti di sella
×	Ordine 9 Punti di minimo
◇	Ordine 9 Non critico

1.4 Il gruppo di isotropia

Definizione 1.8. Sia $P \in \mathcal{F}$, sia $\mathcal{A}$ il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{F}$. Il gruppo di isotropia di P è il sottogruppo di $\mathcal{A}$ che fissa P , ovvero:

$$G_P = \{\varphi \in \mathcal{A} \mid \varphi(P) = P\}$$

Sia $\Omega \subset \mathcal{F}$ l'insieme dei punti fissati da almeno un automorfismo non banale, per le osservazioni precedenti $|\Omega| = 54$ ed è composto da 9 punti di ordine 3, 27 punti di ordine 6 e da 18 punti di ordine 9. Quindi se $P \notin \Omega$, allora $G_P = \{1_{\mathcal{A}}\}$. Dato che nella sezione 1.2 sono esplicitati i 54 automorfismi della cubica di Fermat, con l'aiuto di un calcolatore simbolico, come *Macaulay2* [GS] è possibile determinare la cardinalità di G_P , $\forall P \in \Omega$.

```
perm_0 = (1, 2, 3); perm_1 = (1, 3, 2); perm_2 = (3, 2, 1);
perm_3 = (2, 1, 3); perm_4 = (2, 3, 1); perm_5 = (3, 1, 2);
card_isotrop = P -> (
  counter = 0;
  for k from 0 to 5 do
    for i from 0 to 2 do
      for j from 0 to 2 do(
        u = matrix{apply(3, n->P_(0, (perm_k)_n - 1))};
        v = matrix{{1, r^i, r^j}};
        w = matrix{apply(3, n->u_(0, n)*v_(0, n))};
        if rank(w|P)==1 then counter = counter + 1);
  return counter)
```

L'algoritmo produce il seguente output, ottenibile con la funzione `card_isotrop`:

- Se P ha ordine 6 allora $|G_P| = 2$, dunque $G_P \simeq C_2$, ovvero il gruppo ciclico di ordine 2.
- Se P ha ordine 9 allora $|G_P| = 3$, dunque $G_P \simeq C_3$, ovvero il gruppo ciclico di ordine 3.
- Se P ha ordine 3 allora $|G_P| = 6$. Considero ad esempio $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}$ e $\varphi \left(\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y & x & \rho z \end{bmatrix}$. Si osserva che φ fissa P ed è un elemento di ordine 6. Per ogni flesso è possibile trovare un automorfismo di ordine 6 che lo fissa, dunque $G_P \simeq C_6$, ovvero il gruppo ciclico di ordine 6.

Osservazione. È possibile definire un'azione del gruppo $\mathcal{A}$ sull'insieme Ω , nello specifico l'azione $\phi : \mathcal{A} \times \Omega \longrightarrow \Omega$ tale che $\phi(\varphi, P) = \varphi(P)$. In questo caso lo stabilizzatore di P in $\mathcal{A}$ è G_P . Per il teorema orbita-stabilizzatore:

$$|orb(P)| = \frac{|\mathcal{A}|}{|G_P|} \begin{cases} \frac{54}{6} = 9 & \text{se } P \text{ ha ordine 3} \\ \frac{54}{3} = 18 & \text{se } P \text{ ha ordine 9} \\ \frac{54}{2} = 27 & \text{se } P \text{ ha ordine 6} \end{cases}$$

Dunque i punti di Ω si suddividono in esattamente 3 orbite non banali e caratterizzate dall'ordine dei punti nel gruppo della cubica di Fermat.

Capitolo 2

Cubiche della forma $a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 = 0$

Data la curva algebrica nel piano proiettivo complesso di equazione

$$\mathcal{C} : a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 = 0 \quad a_i \in \mathbb{C}$$

affinché sia non singolare si ha che

$$\nabla \mathcal{C}([x, y, z]) = \begin{bmatrix} 3a_1x^2 \\ 3a_2y^2 \\ 3a_3z^2 \end{bmatrix} \neq 0, \forall [x, y, z] \in \mathcal{C} \iff \forall i \in \{1, 2, 3\} \ a_i \neq 0$$

Dunque $\mathcal{C}$ è una curva ellittica ed è univocamente determinata dai punti che soddisfano $[a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{xyz = 0\}$.

Osservazione. La curva Hessiana ha equazione

$$\mathcal{H} : \left| \begin{bmatrix} 6a_1x & 0 & 0 \\ 0 & 6a_2y & 0 \\ 0 & 0 & 6a_3z \end{bmatrix} \right| = 6^3 a_1 a_2 a_3 xyz = 0$$

Proposizione 2.1. *I punti della forma $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H} = \mathcal{C} \cap \{xyz = 0\}$ sono punti di flesso per $\mathcal{C}$ e hanno coordinate:*

$$\begin{bmatrix} w_2 & -w_1 & 0 \\ w_2 & -\rho w_1 & 0 \\ w_2 & -\rho^2 w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w_3 & 0 & -w_1 \\ w_3 & 0 & -\rho^2 w_1 \\ w_3 & 0 & -\rho w_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ 0 & w_3 & -\rho w_2 \\ 0 & w_3 & -\rho^2 w_2 \end{bmatrix}$$

in cui w_i è una radice cubica di a_i e ρ è la radice cubica primitiva dell'unità.

Definizione 2.2. Definisco la funzione

$$\gamma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C} \\ [x_0, y_0, z_0] \longmapsto \left[\frac{x_0}{w_1}, \frac{y_0}{w_2}, \frac{z_0}{w_3} \right]$$

in cui w_i è una radice cubica di a_i .

γ è una trasformazione lineare biettiva del piano proiettivo complesso, ma anche un isomorfismo di gruppi e ciò deriva dal seguente:

Teorema 2.3. *Date $(\mathcal{C}_1, +_1)$ e $(\mathcal{C}_2, +_2)$ curve ellittiche, con elementi neutri O_1 e O_2 rispettivamente. Sia $f : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ una biezione, che sia una trasformazione lineare del piano proiettivo complesso e tale che $f(O_1) = O_2$. Allora f è un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Dati $A, B \in \mathcal{C}_1$, dimostro che $f(A +_1 B) = f(A) +_2 f(B)$.

Dato che f è una trasformazione lineare del piano proiettivo, allora l'immagine di una retta è ancora una retta, in particolare si ha che dati $A, B \in \mathcal{C}_1$, allora $f(R_1(A, B)) = R_2(f(A), f(B))$, con le notazioni del capitolo 1. Dunque:

$$\begin{aligned} f(A +_1 B) &= f(R_1(R_1(A, B), O_1)) = R_2(f(R_1(A, B)), f(O_1)) = \\ &= R_2(R_2(f(A), f(B)), O_2) = f(A) +_2 f(B) \end{aligned}$$

□

Osservazione. La funzione γ mantiene invariata la struttura di gruppo della curva ellittica, il gruppo degli automorfismi e i punti di ordine $n \in \mathbb{N}$, quindi conserva la struttura algebrica e geometrica della curva.

Invece per quanto riguarda la curvatura gaussiana, utilizzando l'equazione 1.1 si ottiene che preso $[x, y, z] \in \mathcal{C}$ allora

$$K_C([x, y, z]) = 2 - 4 \frac{\left(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2\right)^3 |a_1 a_2 a_3 x y z|^2}{\left(|a_1|^2 |x|^4 + |a_2|^2 |y|^4 + |a_3|^2 |z|^4\right)^3} \quad (2.1)$$

Dalle osservazioni precedenti, fissati gli $a_i \in \mathbb{C}^* \forall i \in \{1, 2, 3\}$, allora la curvatura ha immagine della forma $[a, 2]$, $a < 2$. La funzione γ non conserva però la struttura della curvatura e ciò deriva dalla seguente:

Proposizione 2.4. *Sia K_C la funzione definita in 2.1 come funzione di variabili (x, y, z, a_1, a_2, a_3) . Allora esiste una successione la cui immagine attraverso K_C diverge a $-\infty$.*

Dimostrazione. Considero il punto $P = [1, \beta, \beta^2] \in \mathcal{F}$, con β una radice nona primitiva dell'unità. Considero la funzione:

$$K_C(\gamma([x, y, z])) = 2 - 4 \frac{\left(|a_1|^{-\frac{2}{3}} |x|^2 + |a_2|^{-\frac{2}{3}} |y|^2 + |a_3|^{-\frac{2}{3}} |z|^2\right)^3 |a_1 a_2 a_3|^{\frac{4}{3}} |x y z|^2}{\left(|a_1|^{\frac{2}{3}} |x|^4 + |a_2|^{\frac{2}{3}} |y|^4 + |a_3|^{\frac{2}{3}} |z|^4\right)^3}$$

Valutando in P si ottiene:

$$K_C(\gamma(P)) = 2 - 4 \frac{\left(|a_1|^{-\frac{2}{3}} + |a_2|^{-\frac{2}{3}} + |a_3|^{-\frac{2}{3}}\right)^3 |a_1 a_2 a_3|^{\frac{4}{3}}}{\left(|a_1|^{\frac{2}{3}} + |a_2|^{\frac{2}{3}} + |a_3|^{\frac{2}{3}}\right)^3}$$

Considero quest'ultima come funzione di variabili (a_1, a_2, a_3) .

Considero la successione per cui, dato $n \in \mathbb{N}^*$ allora $(a_1, a_2, a_3)_n = \left(1, 1, \frac{1}{n}\right)$ e determino:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_C(\gamma(P))((a_1, a_2, a_3)_n) = 2 - 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + n^{\frac{2}{3}}\right)^3}{n^{\frac{4}{3}} \left(2 + n^{-\frac{2}{3}}\right)^3} = -\infty$$

□

2.1 Il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{C}$

Mantenendo le notazioni precedenti, si ha che $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ è un isomorfismo di gruppi (*Teorema 2.3*), quindi conserva la struttura algebrica e geometrica, tra cui gli automorfismi che fissano $\mathcal{C}$. L'obiettivo è fornire una descrizione completa di questi automorfismi.

Osservazione. Sia $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un automorfismo che fissa $\mathcal{F}$, allora $\gamma \circ \phi \circ \gamma^{-1}$ è un automorfismo che fissa $\mathcal{C}$. Dato che γ conserva l'ordine del gruppo degli automorfismi, allora sono tutti di questa forma.

Inoltre se $P \in \mathcal{F}$ è un punto fisso di ϕ , allora $\gamma(P) \in \mathcal{C}$ è un punto fisso di $\gamma \circ \phi \circ \gamma^{-1}$.

Ogni automorfismo è indotto da una trasformazione lineare di $\mathbb{C}^3$, dunque è esprimibile tramite una matrice $A \in PGL(3, \mathbb{C})$. Sia $B \in PGL(3, \mathbb{C})$ matrice associata ad un automorfismo ϕ della cubica di Fermat, per quanto visto nella sezione 1.2 B è della forma

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^i & 0 \\ 0 & 0 & \rho^j \end{bmatrix} \Sigma$$

con Σ matrice di permutazione 3×3 , $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e ρ radice cubica primitiva dell'unità. Dato che la matrice A è associata all'automorfismo $\gamma \circ \phi \circ \gamma^{-1}$, allora sarà della forma:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}^{-1} B \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^i & 0 \\ 0 & 0 & \rho^j \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in cui w_j è una radice cubica di a_j , $\forall j \in \{1, 2, 3\}$.

2.1.1 Automorfismi indotti da trasformazioni unitarie

L'obiettivo è sfruttare la proposizione 1.7 per trovare punti critici della curvatura, dunque esplicitare quali sono le condizioni che devono valere su a_1, a_2, a_3 affinché esistano automorfismi indotti da trasformazioni unitarie.

Analizziamo gli automorfismi al variare di $\sigma \in S_3$:

- **Nel caso in cui σ sia l'identità di S_3**

La matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^i & 0 \\ 0 & 0 & \rho^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^i & 0 \\ 0 & 0 & \rho^j \end{bmatrix}$$

La matrice A è unitaria, dunque esistono sempre almeno 9 automorfismi indotti da trasformazioni unitarie.

- **Nel caso in cui σ sia un elemento di ordine 2**

Senza perdita di generalità posso supporre $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ in notazione ciclica.

La matrice A diventa:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^i & 0 \\ 0 & 0 & \rho^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho^i}{w_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^j}{w_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & w_2 & 0 \\ w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{w_2}{w_1} & 0 \\ \frac{w_2}{w_1} \rho^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quest'ultima matrice è multiplo di una matrice unitaria se e solo se

$$\left| \frac{w_2}{w_1} \right| = \left| \frac{w_1}{w_2} \rho^i \right| = \left| \rho^j \right| \iff |w_1| = |w_2| \iff |a_1| = |a_2|$$

Quindi nel caso 2 coefficienti hanno lo stesso modulo allora ci sono altri 9 automorfismi indotti da trasformazioni unitarie.

- **Nel caso in cui σ sia un elemento di ordine 3**

Senza perdita di generalità posso supporre $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ in notazione ciclica.

La matrice A diventa:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^i & 0 \\ 0 & 0 & \rho^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho^i}{w_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^j}{w_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \\ w_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{w_2}{w_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{w_3}{w_2} \rho^i \\ \frac{w_1}{w_3} \rho^j & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quest'ultima matrice è multiplo di una matrice unitaria se e solo se

$$\left| \frac{w_2}{w_1} \right| = \left| \frac{w_3}{w_2} \rho^i \right| = \left| \frac{w_1}{w_3} \rho^j \right| \iff |w_1| = |w_2| = |w_3| \iff |a_1| = |a_2| = |a_3|$$

Nel caso in cui tutti i coefficienti a_j hanno lo stesso modulo allora tutti gli automorfismi sono indotti da trasformazioni unitarie di $\mathbb{C}^3$.

Riassumiamo dunque i risultati ottenuti.

Sia $\mathcal{A}_U \subseteq \mathcal{A}$ il sottogruppo degli automorfismi che sono indotti da trasformazioni unitarie di $\mathbb{C}^3$, allora:

$$|\mathcal{A}_U| = \begin{cases} 18 & \text{se } \exists i, j, k : |a_i| = |a_j| \neq |a_k| \\ 54 & \text{se } |a_1| = |a_2| = |a_3| \\ 9 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Capitolo 3

Cubiche in forma di Hesse

Definizione 3.1. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$, sia $\mathcal{C}_\lambda$ la curva nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ di equazione

$$\mathcal{C}_\lambda : x^3 + y^3 + z^3 + 6\lambda xyz = 0,$$

affinché sia una curva ellittica, dunque non singolare si verifica che il gradiente non si annulli sui punti della cubica, in particolare con *Macaulay2* [GS] e il seguente algoritmo si ottiene la condizione da imporre su λ . Inoltre per motivi computazionali λ è sostituita nel codice dalla variabile t .

```
R = QQ[x, y, z, t]
f = x^3 + y^3 + z^3 + 6*t*x*y*z
sing = saturate(ideal(diff(matrix{{x,y,z}}, f)), ideal(x,y,z))
eliminate({x,y,z}, sing)
```

La condizione che si ottiene per $\lambda \in \mathbb{C}$ affinché $\mathcal{C}_\lambda$ sia una curva ellittica è $8\lambda^3 + 1 \neq 0$, infatti per $8\lambda^3 + 1 = 0$ si ha che $\mathcal{C}_\lambda$ si spezza in 3 rette. Quindi d'ora in avanti suppongo vera questa condizione.

Osservazione. Dato un punto $P \in \mathcal{C}_\lambda$, $P = [x \ y \ z]$ è possibile determinare la curva Hessiana, valutata in P , in particolare:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{C}_\lambda}(P) &= \det 6 \begin{bmatrix} x & z\lambda & y\lambda \\ z\lambda & y & x\lambda \\ y\lambda & x\lambda & z \end{bmatrix} = 6^3 \left[(2\lambda^3 + 1)(xyz) - \lambda^2(x^3 + y^3 + z^3) \right] = \\ &= 6^3 (8\lambda^3 + 1)(xyz) \end{aligned}$$

I flessi, ovvero i punti della forma $\mathcal{C}_\lambda \cap \mathcal{H}_{\mathcal{C}_\lambda} = \mathcal{C}_\lambda \cap \{xyz = 0\}$, sono gli stessi della cubica di Fermat $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{t \mid 8t^3 + 1 = 0\}$, esplicitati nel capitolo 1.

Osservazione. Dato un punto $P \in \mathcal{C}_\lambda$, $P = [x \ y \ z]$, una conseguenza delle osservazioni precedenti e del teorema 1.6 è il poter ricavare la formula della curvatura gaussiana valutata in P , nello specifico:

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{C}_\lambda}(P) &= 2 - \frac{\|P\|^6 |\mathcal{H}_{\mathcal{C}_\lambda}(P)|^2}{(3-1)^4 \|\nabla \mathcal{C}_\lambda(P)\|^6} = \\ &= 2 - 4 \frac{\left(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2\right)^3 |8\lambda^3 + 1|^2 |xyz|^2}{\left(|x^2 + 2\lambda yz|^2 + |y^2 + 2\lambda xz|^2 + |z^2 + 2\lambda xy|^2\right)^3} \end{aligned}$$

La funzione è difficile in generale e per poterne studiare i punti critici utilizzo la proposizione 1.7. Dunque analizzo gli automorfismi delle cubiche in forma di Hesse, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.1 Il gruppo degli automorfismi delle cubiche in forma di Hesse

Sia $\mathcal{A}_\lambda$ il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{C}_\lambda$, i suoi elementi sono indotti da trasformazioni lineari di $\mathbb{C}^3$ che fissano $\mathcal{C}_\lambda$, a meno di moltiplicare per una costante. Ogni automorfismo può essere rappresentato con un elemento di $PGL(3, \mathbb{C})$.

Impongo queste condizioni su *Macaulay2* [GS] per dedurre la struttura di questi automorfismi, al variare di λ .

```
R = QQ[x, y, z, a_1..a_9, t]
f = x^3 + y^3 + z^3 + 6*t*x*y*z
A = genericMatrix(R, a_1, 3, 3)
b = genericMatrix(R, 3, 1)
u = A*b
subf = sub(f, {x=>u_(0,0), y=>u_(1,0), z=>u_(2,0)})
powers = symmetricPower(3, transpose b)
I = minors(2, contract(powers, f) || contract(powers, subf))
J = saturate(I, ideal det A * ideal(8*t^3+1))
```

L'ideale I del listato verifica quando l'automorfismo A lascia invariata la cubica $\mathcal{C}_\lambda$. L'ideale J , ovvero la saturazione di I , garantisce che A sia invertibile e che $\mathcal{C}_\lambda$ sia non singolare.

L'ideale $J \subset \mathbb{C}[\lambda, a_1 \dots a_9]$ è difficile da analizzare, ma decomponendolo in ideali primari, con il comando **decompose**, è possibile studiare le condizioni che devono valere per λ . Inoltre, dato che $\mathbb{C}$ è un campo algebricamente chiuso, il grado dell'ideale (determinabile con il comando **degree**) corrisponde al numero di automorfismi moltiplicato al grado di λ . Riassumo dunque i risultati ottenuti.

$$|\mathcal{A}_\lambda| = \begin{cases} 54 & \lambda \text{ tale che } \lambda(\lambda^3 - 1) = 0 \\ 36 & \lambda \text{ tale che } (2\lambda^2 + 2\lambda - 1)(4\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \\ 18 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I risultati ottenuti corrispondono alla nota classificazione delle curve ellittiche. Il caso in cui il gruppo degli automorfismi ha ordine 54 la curva si dice **equianarmonica**, mentre nel caso di ordine 36 si dice **armonica**.

Osservazione. È possibile determinare esplicitamente i 18 automorfismi che appartengono a $\mathcal{A}_\lambda$, $\forall \lambda$.

Considero innanzitutto le trasformazioni lineari e diagonali, della forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha x \\ \beta y \\ \gamma z \end{bmatrix}$$

Se questa trasformazione conserva l'equazione di $\mathcal{C}_\lambda$, allora si ha:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6\lambda xyz = 0 = \alpha^3 x^3 + \beta^3 y^3 + \gamma^3 z^3 + 6\lambda \alpha \beta \gamma xyz \Rightarrow \alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3 = \alpha \beta \gamma$$

Dato che la trasformazione definita è a meno di una costante moltiplicativa, posso supporre $\alpha = 1$, $\beta = \rho^i$, $\gamma = \rho^j$ con $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e ρ radice cubica primitiva

dell'unità. Quindi $\rho^{i+j} = 1 \Rightarrow i + j \equiv 0 \pmod{3}$.

Ci sono 3 possibilità distinte per le trasformazioni diagonali. Inoltre si osserva che ogni permutazione delle coordinate conserva l'equazione di $\mathcal{C}_\lambda$, dunque sono stati esplicitati $|S_3| \times 3 = 18$ automorfismi distinti unitari.

Dato che ogni curva ellittica $\mathcal{C}_\lambda$ ha 18 automorfismi unitari, è possibile ricavare i punti fissi di ogni automorfismo e sfruttando la proposizione 1.7 si ottengono dei punti critici per la curvatura gaussiana. È possibile costruire un algoritmo analogo a quello della sezione 1.3.1 su *Macaulay2* [GS]. Escludendo i flessi, che sono banalmente punti critici della curvatura gaussiana, si ottengono i seguenti punti fissi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & z_1 \end{bmatrix}, \quad \text{tale che } z_1^3 + 6\lambda z_1 + 2 = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho & z_2 \end{bmatrix}, \quad \text{tale che } z_2^3 + 6\rho\lambda z_2 + 2 = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho^2 & z_3 \end{bmatrix}, \quad \text{tale che } z_3^3 + 6\rho^2\lambda z_3 + 2 = 0 \quad (3.3)$$

e le loro permutazioni. Si osserva che nell'ipotesi $8\lambda^3 + 1 \neq 0$ si ottengono almeno 27 punti critici distinti non banali, di cui 9 corrispondenti a (3.1) e 18 corrispondenti a (3.2).

Apparentemente (3.3) fornirebbe altri punti critici, però se $\begin{bmatrix} 1 & \rho^2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 1 & \rho z_3 \end{bmatrix}$ soddisfa (3.3) allora è una permutazione che soddisfa (3.2). In conclusione i 18 punti critici di (3.3) sono gli stessi di (3.2).

3.2 Il caso λ radice cubica dell'unità

Suppongo di fissare per tutta la seguente sezione $j \in \{0, 1, 2\}$, sia $\lambda = \rho^j$, con ρ radice cubica primitiva dell'unità e sia $\mathcal{C}_\lambda$ la curva ellittica di equazione $x^3 + y^3 + z^3 + 6\rho^j xyz = 0$. Sia $\mathcal{F}$ la curva ellittica di Fermat, definita nel capitolo 1.

Per le precedenti osservazioni la cardinalità del gruppo degli automorfismi di $\mathcal{C}_\lambda$ e di $\mathcal{F}$ è la stessa, ma in realtà ci sono molte più simmetrie tra le due cubiche. Ciò è motivato dalla seguente:

Proposizione 3.2. *Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ radice cubica primitiva dell'unità. Allora le curve ellittiche $\mathcal{C}_\lambda$ e $\mathcal{F}$ sono unitariamente isomorfe.*

Dimostrazione. Considero la trasformazione lineare $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}_\lambda$ tale che

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \rho^{-j}x + \rho^{-j}y + \rho^{-j}z \\ x + \rho y + \rho^2 z \\ x + \rho^2 y + \rho z \end{bmatrix}$$

Dimostro la buona definizione della funzione.

Sia $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{F}$, quindi tale che $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Sia $A \in PGL(3, \mathbb{C})$ la matrice associata a φ . Definisco $\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$.

Dimostro dunque che $u^3 + v^3 + w^3 + 6\rho^j uvw = 0$.

$$\begin{aligned}
u^3 + v^3 + w^3 + 6\rho^j uvw &= (\rho^{-j}x + \rho^{-j}y + \rho^{-j}z)^3 + (x + \rho y + \rho^2 z)^3 + (x + \rho^2 y + \rho z)^3 + \\
&\quad + 6\rho^j (\rho^{-j}x + \rho^{-j}y + \rho^{-j}z) (x + \rho y + \rho^2 z) (x + \rho^2 y + \rho z) = \\
&= 3x^3 + 3y^3 + 3z^3 + 18xyz + 6(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = 9x^3 + 9y^3 + 9z^3 = 0
\end{aligned}$$

Si osserva inoltre che $AA^* = 3I_3$, dunque nel piano proiettivo complesso φ induce un isomorfismo unitario tra $\mathcal{F}$ e $\mathcal{C}_\lambda$. $\square$

Grazie alla proposizione appena dimostrata e all'esistenza di un isomorfismo unitario φ è possibile giungere al seguente

Teorema 3.3. *Dato $P \in \mathcal{F}$, siano $K_{\mathcal{F}}$ e $K_{\mathcal{C}_\lambda}$ rispettivamente la curvatura gaussiana di $\mathcal{F}$ e di $\mathcal{C}_\lambda$.*

Allora P è un punto critico per $K_{\mathcal{F}} \iff \varphi(P)$ è un punto critico per $K_{\mathcal{C}_\lambda}$.

Dimostrazione. La metrica di Fubini-Study è invariante per trasformazioni unitarie, dunque φ induce un diffeomorfismo isometrico tra $\mathcal{F}$ e $\mathcal{C}_\lambda$. Dato che la curvatura gaussiana è un'invariante metrico locale, allora $K_{\mathcal{F}}(P) = K_{\mathcal{C}_\lambda}(\varphi(P))$.

Un punto $P \in \mathcal{F}$ è critico per $K_{\mathcal{F}} \iff$ il gradiente di $K_{\mathcal{F}}$ si annulla in P e dato che φ è un diffeomorfismo allora il gradiente di $K_{\mathcal{C}_\lambda}$ si annulla in $\varphi(P)$ esattamente quando il gradiente di $K_{\mathcal{F}}$ si annulla in P . $\square$

Per il teorema 2.3, si ha che φ è anche un isomorfismo di gruppi, è dunque possibile ottenere una descrizione completa della struttura di gruppo della cubica e dei punti critici della curvatura gaussiana per la curva ellittica $\mathcal{C}_\lambda$, con λ radice cubica dell'unità.

Osservazione. Considero la curve ellittiche $\mathcal{C}_\lambda$, con λ radice cubica dell'unità e $\mathcal{C}_{\lambda_\varepsilon}$, con $\lambda_\varepsilon = \lambda + \varepsilon$. Supponendo di fissare $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$, tale che $|\varepsilon|$ sia sufficientemente piccolo allora per continuità il numero dei punti critici della curvatura gaussiana rimane invariato, ma varia il numero di punti fissati dagli automorfismi di $\mathcal{C}_{\lambda_\varepsilon}$ per le osservazioni precedenti.

Dunque non vale il viceversa della proposizione 1.7, cioè possono esistere punti critici della curvatura gaussiana che non sono fissati da alcun automorfismo di $\mathcal{C}$ non banale.

Bibliografia

- [Cas91] John William Scott Cassels. *Lectures on elliptic curves*. London Mathematical Society student texts. Cambridge: Cambridge university press, 1991.
- [GS] Daniel R. Grayson e Michael E. Stillman. *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*. Available at <http://www2.macaulay2.com>.
- [Hoh] Markus Hohenwarter. *GeoGebra*. <https://geogebra.org>. Interactive geometry software.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*. Graduate studies in mathematics. American mathematical Society, 1995.
- [MZ25] Łukasz Merta e Maciej Zięba. *Sextactic and type-9 points on the Fermat cubic and associated objects*. In: *J. Algebra* 662 (2025), pp. 502–513.
- [Nes78] Linda Ness. *Curvature on the Fermat cubic*. In: *Duke Mathematical Journal* 45.4 (1978), pp. 797–807.
- [Ser00] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. 2^a ed. riveduta e ampliata. Programma di matematica, fisica, elettronica. Torino: Bollati Boringhieri, 2000.
- [Ser94] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Programma di matematica, fisica, elettronica. Torino: Bollati Boringhieri, 1994.
- [SS24] Tomasz Szemberg e Justyna Szpond. *Sextactic points on the Fermat cubic curve and arrangements of conics*. In: *J. Symbolic Comput.* 120 (2024), Paper No. 102228, 8.