



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Algoritmi per il calcolo di Radicali risolubili e Nilradicali nelle Algebre di Lie

Algorithms for computing solvable radicals and nilradicals in Lie algebras

Ilaria Chiarini

Relatore: *Prof. Giorgio Ottaviani*

Indice

1	Introduzione	2
2	Generalità sulle azioni	4
3	Ideali e sottoalgebre di Lie	7
4	Algebre di Lie semplici, risolubili, nilpotenti	10
5	Radicale risolubile e nilradicale	14

1 Introduzione

Alcune definizioni:

Definizione: 1.1. un'azione (**sinistra**) del gruppo G su un insieme X è una funzione

$$\rho : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto \rho(g, x)$$

tale che:

- $\forall x \in X \quad \rho(1_G, x) = x$
- $\forall x \in X, \forall g, h \in G \quad \rho(g, \rho(h, x)) = \rho(g \cdot h, x)$

Definizione: 1.2. data un'azione $\rho : G \times X \rightarrow X$ e dato un elemento $p \in X$ definiamo:

- lo **stabilizzatore di p** come $Stab_p = \{g \in G \mid \rho(g, p) = p\}$
- l'**orbita di p** come $G_p = \{x \in X \mid \exists g \in G \text{ tale che } \rho(g, p) = x\}$

In particolare il lavoro di questa tesi sarà riferito al caso di azioni di gruppi di matrici su varietà algebriche:

Definizione: 1.3. una **varietà algebrica** su un campo $\mathbb{K}$ è definita come luogo degli zeri di tutti i polinomi di un ideale I ovvero

$$V(I) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

dove I è un ideale dell'anello di polinomi $\mathbb{K}[x_1 \dots x_n] = \{\text{polinomi a coefficienti in } \mathbb{K} \text{ in variabili } x_1 \dots x_n\}$ nel caso nel caso affine. Nel caso proiettivo occorre limitarsi a ideali I omogenei di $\mathbb{K}[x_0 \dots x_n]$, si ha allora

$$V(I) = \{x \in \mathbb{P}^n(K) \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I \text{ omogeneo}\}$$

Un gruppo di matrici $n \times n$, come ad esempio

$$\begin{aligned} GL(n) &= \{M \in M(n, n, \mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\} \\ &\text{oppure} \\ SL(n) &= \{M \in M(n, n, \mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\} \end{aligned}$$

agisce in modo standard su $\mathbb{K}^n$ attraverso la moltiplicazione a sinistra ovvero attraverso l'azione

$$\left(\left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \right) \mapsto \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Questa azione sulle coordinate induce naturalmente un'azione sui polinomi in n variabili che posso definire come

$$\begin{aligned} \rho : G \times \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]_d &\rightarrow \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]_d, & (g, f) &\mapsto \rho(g, f) \\ \text{dove } G &\text{ è un gruppo di matrici e } \rho(g, f)(x) &= f(g^{-1} \cdot x) \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

questa funzione è un'azione, infatti:

Dimostrazione. $\forall f \in \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]$ si ha :

- $(1_G, f)(x) = f((1_G)^{-1} \cdot x) = f(x) \forall x \in \mathbb{K}^n \Rightarrow 1_G \cdot f = f$
- $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in \mathbb{K}^n$ si ha $(g_2 \cdot (g_1 \cdot f))(x) = (g_1 \cdot f)(g_2^{-1} \cdot x) = f(g_1^{-1} \cdot g_2^{-1} \cdot x) = f((g_2 \cdot g_1)^{-1} \cdot x) = ((g_2 \cdot g_1) \cdot f)(x) \Rightarrow g_2 \cdot (g_1 \cdot f) = (g_2 \cdot g_1) \cdot f$

□

Il gruppo di matrici $GL(n+1)$ agisce anche sull'insieme X delle matrici simmetriche $(n+1) \times (n+1)$ attraverso l'azione

$$\rho : GL(n+1) \times X \rightarrow X, \quad (G, M) \mapsto G \cdot M \cdot G^T$$

Dimostrazione. l'azione ρ è ben definita, infatti:

- $\forall M \in X, \forall G \in GL(n+1)$ si ha $\rho(G, M)^T = (G \cdot M \cdot G^T)^T = G \cdot M^T \cdot G^T = G \cdot M \cdot G^T = \rho(G, M)$ Quindi $\rho(G, M) \in X \forall M \in X, \forall G \in GL(n+1)$
- $\forall M \in X$ si ha $\rho(1_{GL(n+1)}, M) = \rho(Id, M) = Id \cdot M \cdot Id^T = M$
- $\forall M \in X, \forall G_1, G_2 \in GL(n+1)$ si ha $\rho(G_1, \rho(G_2, M)) = G_1 \cdot \rho(G_2, M) \cdot G_1^T = G_1 \cdot (G_2 \cdot M \cdot G_2^T) \cdot G_1^T = (G_1 \cdot G_2) \cdot M \cdot (G_1 \cdot G_2)^T = \rho(G_1 \cdot G_2, M)$

□

In particolare, se $n = 3$, l'azione

$$\rho : GL(3) \times X \rightarrow X, \quad (M, A) \mapsto M \cdot A \cdot M^T$$

di $GL(3)$ sulle matrici simmetriche 3×3 induce un'azione sulle coniche ovvero

$$\tilde{\rho} : GL(3) \times \mathbb{P}^2(C) \rightarrow \mathbb{P}^2(C)$$

tale che se $\mathcal{C}$ è la conica $X \cdot A \cdot X^T = 0$ allora $\tilde{\rho}(M, \mathcal{C})$ è la conica di equazione $(M \cdot X) \cdot A \cdot (M \cdot X)^T = 0$ ovvero la conica associata alla matrice $\rho(M, A) = M \cdot A \cdot M^T$

Proposizione: 1.1. [1] *l'azione $\tilde{\rho}$ ha solo tre orbite, in particolare due coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ stanno sulla stessa orbita $\iff rank(\mathcal{C}_1) = rank(\mathcal{C}_2)$*

Dimostrazione. elenchiamo le orbite con un loro rappresentante e otteniamo che la generica conica $\mathcal{C}$ associata alla matrice A è tale che:

- $rank(\mathcal{C}) = 3 \iff \exists M \in GL(3) \mid M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $rank(\mathcal{C}) = 2 \iff \exists M \in GL(3) \mid M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $rank(\mathcal{C}) = 1 \iff \exists M \in GL(3) \mid M^T \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Inoltre se A e B sono due matrici simmetriche tali che $rank(A) \neq rank(B)$ allora $\nexists M \in GL(3) \mid M^T \cdot A \cdot M = B$

quindi il numero di orbite è esattamente 3 e dipende solo dal rango della conica. □

2 Generalità sulle azioni

Definizione: 2.1. data una varietà X e dato un punto $p \in X$ denotiamo con $T_p(X)$ lo spazio tangente ad X in p

Definizione: 2.2. Data un'azione ρ di un gruppo G su una varietà X e dato un elemento $p \in X$ fissato, si può definire la funzione

$$F_p : G \rightarrow X, \quad g \mapsto F_p(g) = \rho(g, p)$$

e si ha che $\text{Im}(F_p) = G_p$

Se G è un gruppo di Lie di dimensione k e X una varietà di dimensione m , possiamo scrivere F_p come

$$F_p : G \rightarrow X, \quad g = (g_1 \dots g_k) \mapsto F_p(g) = (f_1(g_1 \dots g_k), \dots, f_m(g_1 \dots g_k))$$

dove $f_1, \dots, f_m$ sono funzioni in k variabili.

In questa tesi consideriamo solo azioni algebriche, ovvero azioni ρ tali che l'applicazione $\rho : G \times X \mapsto X$ è algebrica. In questi casi è sicuramente algebrica anche la funzione $F_p \forall p \in X$ ed è quindi ben definito il suo jacobiano come segue:

Definizione: 2.3. definiamo lo **jacobiano di F_p** come la matrice

$$J(F_p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial g_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial g_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial g_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial g_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(g_1, \dots, g_k) \\ \vdots \\ \nabla f_m(g_1, \dots, g_k) \end{pmatrix}$$

Si osserva che

- se $X \subset A^n$ è una varietà algebrica data da $X = V(f_1, \dots, f_m)$ e $p = (p_1, \dots, p_n) \in X$ è un punto nonsingolare, cioè $J(F_x)$ ha rango uguale alla codimensione di X , allora

$$T_p(X) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

- se $F_p : G \rightarrow X$ è l'applicazione della definizione 2.2 e $g \in G$ allora $J(F_p)|_g$ è un'applicazione da $T_g(G)$ in $T_{F_p(g)}(X)$, quindi se consideriamo $g = e$, ovvero l'elemento neutro del gruppo G , allora

$$J(F_p)|_{g=e} : T_e(G) \rightarrow T_{F_p(e)}(X) \underset{F_p(e)=\rho(e,p)=p}{=} T_p(X)$$

Da ciò segue, poichè $Im(F_p) = G_p$, che lo spazio tangente a p nella sua orbita coincide con l'immagine di $J(F_p)$ quindi, essendo l'immagine di un'applicazione lineare, si ha che $Im(J(F_p)) = T_p(G_p)$ è un sottospazio lineare di X e in particolare che $dim(T_p(G_p)) = dim(J(F_p))$ e quindi che $dim(G_p) = rank(J(F_p)|_{g=e})$. In particolare, se G è un gruppo di matrici allora $dim(G_p) = rank(J(F_p)|_{g=Id})$

Azione del gruppo delle matrici sui polinomi su Macaulay2:

consideriamo l'azione di $G = GL(n+1)$ sui polinomi di $X = \mathbb{K}[x_0 \dots x_n]$ ovvero

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, f) &\longmapsto \rho(g, f) : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}, \quad x \mapsto f(g^{-1} \cdot x) \end{aligned}$$

(abbiamo già dimostrato che questa è un'azione)

L'obiettivo è quello di costruire un programma su Macaulay2 che permetta di calcolare la dimensione delle orbite di tale azione e applicarlo ad alcuni particolari polinomi

```
R=QQ[x_0..x_n,g_(0,0)..g_(n,n)]
--g_(0,0)..g_(n,n) sono le componenti della matrice G di SL(n+1)
--per comodità chiamiamo con G la matrice inversa ovvero G^(-1)
G=transpose genericMatrix(R,g_(0,0),n,n)
Xvec=transpose matrix{{x_0..x_n}} --componenti del polinomio
azione=(G,X)->(G*X)--azione di SL(n+1) sulle componenti del polinomio
azione(G,Xvec) --vettore colonna G*Xvec
Gvec=matrix{{g_(0,0)..g_(n,n)}} --vettorizzazione della matrice G
--(vettore di (n+1)^2 componenti)
Xd=symmetricPower(d,transpose Xvec)
--vettore contenente tutti i
--monomi di grado d in variabili x_0..x_n
```

costruzione di due comandi che sostituiscono $Xvec$ con $G \cdot Xvec$ e G con l'identità:

```
listaG=apply(n+1,i->(x_i)=>sum(n+1,j->G_(i,j)*x_j))
--funzione che sostituisce Xvec con G*Xvec componente per componente
listaG --sostituzione di Xvec con G*Xvec
listaId={} --inizializzazione di una lista vuota
for i from 0 to n do for j from 0 to n do
if i==j then listaId=listaId|{g_(i,j)=>1} else
    listaId=listaId|{g_(i,j)=>0}
listaId --sostituzione di G con l'identità
```

Dato f un polinomio omogeneo di grado d in variabili $x_0, \dots, x_n$ vogliamo calcolare la dimensione della sua orbita:

```
sub(f,listaG) --f valutato in G*Xvec
--(ovvero polinomio f in seguito all'azione di G)
jac=diff(Xd,diff(transpose Gvec, sub(f,listaG)));
sub(jac,listaId) --jacobiano dell'azione indotta da G su f
--valutato nell'identità
rank(sub(jac1,listaId)) --dimensione dell'orbita di f
--rispetto all'azione di SL(n+1) sui polinomi
```

Si possono riassumere i comandi precedenti in una unica funzione che, dato un polinomio, rende la dimensione della sua orbita ovvero il rango dello jacobiano (valutato nell'identità) dell'azione di $SL(n+1)$ su tale polinomio :

```
dimorbita= h->rank(sub(diff(Xd,diff(transpose Gvec, sub(h,listaG))),
listaId))
dimorbita(f)
```

Alcuni esempi:

$$\bullet f_1: \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} 0 & x_0 & x_1 \\ x_0 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \dimorbita(f_1) = 19$$

quindi lo stabilizzatore di f_1 ha dimensione $(n+1)^2 - 19 = 25 - 19 = 6$

$$\bullet f_2: \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} 0 & x_0 & x_1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dimorbita(f_2) = 13$$

quindi lo stabilizzatore di f_2 ha dimensione $(n+1)^2 - 13 = 16 - 13 = 3$

$$\bullet f_3: \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} 0 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \Rightarrow \dimorbita(f_3) = 34$$

quindi lo stabilizzatore di f_3 ha dimensione $(n+1)^2 - 34 = 36 - 34 = 2$

$$\bullet f_4: \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_0^2 x_1 + x_2^2 x_3 \Rightarrow \dimorbita(f_4) = 14$$

quindi lo stabilizzatore di f_4 ha dimensione $(n+1)^2 - 14 = 16 - 14 = 2$

Altri esempi riguardano i polinomi omogenei di H_0 :

Definizione: 2.4. [5] sia $k \in \mathbb{N}, k \geq 5$. Si definisce il k -esimo polinomio omogeneo di H_0 come (correggendo un evidente errore di stampa in [5])

$$h_k : (x_0 \dots x_k) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix}$$

In seguito sono riportati i risultati trovati sui polinomi di H_0 per $k = 5 \dots 8$:

- $h_5: \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{orbita}(h_5) = 29$

quindi lo stabilizzatore di h_5 ha dimensione $(6)^2 - 29 = 36 - 29 = 7$

- $h_6: \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{orbita}(h_6) = 41$

quindi lo stabilizzatore di h_6 ha dimensione $(7)^2 - 41 = 49 - 41 = 8$

- $h_7: \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{orbita}(h_7) = 55$

quindi lo stabilizzatore di h_7 ha dimensione $(8)^2 - 55 = 64 - 55 = 9$

3 Ideali e sottoalgebre di Lie

Definizione: 3.1. [3] Sia $G \subset GL(n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ un sottogruppo chiuso rispetto alla topologia di Zariski indotta su $GL(n)$, allora G è detto un **gruppo di Lie**. Osserviamo che le operazioni di moltiplicazione e inversa sono algebriche.

Definizione: 3.2. [3, 4] Sia $G \subset GL(n)$ un gruppo di Lie. Allora $e = 1_{GL(n)} \in G$, quindi è ben definito lo spazio tangente a G in e , ovvero $T_e(G) = Lie(G)$ che chiamiamo **algebra di Lie di G** . L'operazione sull'algebra di Lie è il Bracket, che è definito nel modo seguente: date due matrici $A, B \in M(n, n, \mathbb{K})$, si definisce il **bracket** di A e B come

$$[A, B] = AB - BA$$

L'operazione di Bracket è interna a $Lie(G)$

Osservazione: Si osserva che $[A, B] = 0 \iff AB = BA$, ovvero se e solo se le due matrici commutano. Il bracket misura quindi quanto non commuta il prodotto di due matrici.

Definizione: 3.3. Data un'algebra di Lie $Lie(G)$, si definisce il suo centro come

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Lie}(\mathbf{G})) = \{X \in Lie(G) \mid [X, Y] = 0 \ \forall Y \in Lie(G)\} = \\ \{X \in Lie(G) \mid XY = YX \ \forall Y \in Lie(G)\}$$

Da questa definizione segue quindi che un'algebra di Lie è **abeliana** se e solo se coincide con il suo centro

Rappresentazione aggiunta di un gruppo G :

Prendiamo ora G nell'insieme delle applicazioni da G in sé, ovvero consideriamo

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Aut(G) \\ g & \longmapsto & \varphi_g : h \mapsto g^{-1} \cdot h \cdot g \end{array}$$

Consideriamo ora la derivata della funzione

$$\varphi_g : G \longrightarrow G \quad h \longmapsto g^{-1} \cdot h \cdot g$$

rispetto ad h nel punto $h = e$, ovvero la funzione

$$\nabla \varphi_g : Lie(G) \longrightarrow Lie(G) \quad h \longmapsto g^{-1} \cdot h \cdot g$$

Osserviamo che l'espressione della funzione rimane la stessa poiché

$$h \longmapsto g^{-1} \cdot h \cdot g$$

è lineare rispetto ad h però la funzione derivata non è più da G in G ma è nello spazio tangente a G in $e \in G$, ovvero in $T_e(G) = Lie(G)$

Ad ogni $g \in G$ associamo quindi l'applicazione

$$Ad_g : Lie(G) \longrightarrow Lie(G) \quad h \longmapsto g^{-1} \cdot h \cdot g$$

Definizione: 3.4. [3] Si definisce la **rappresentazione aggiunta del gruppo G** come la mappa che vede il gruppo dentro l'insieme delle applicazioni da $Lie(G)$ in sé, ovvero la rappresentazione

$$\begin{array}{ccc} Ad : G & \longrightarrow & \{\varphi : Lie(G) \rightarrow Lie(G) \mid \varphi \text{ lineare}\} \\ g & \longmapsto & Ad_g : h \mapsto g^{-1} \cdot h \cdot g \end{array}$$

Facendo la derivata di Ad rispetto a $g \in G$ otteniamo la **rappresentazione aggiunta di $Lie(G)$** ovvero

$$ad : Lie(G) \longrightarrow \text{End}(Lie(G)), \quad g \longmapsto ad(g)$$

dove

$$ad(g) : h \longmapsto \left. \frac{\partial(g^{-1} \cdot h \cdot g)}{\partial g} \right|_{g=e} = -g \cdot h + h \cdot g = [h, g]$$

In particolare si ha che

$$\ker(ad) = \{X \in Lie(G) \mid [X, Y] = 0 \ \forall Y \in Lie(G)\}.$$

ovvero che il nucleo della rappresentazione aggiunta coincide con il centro dell'algebra di Lie.

Proposizione: 3.1. *Dalla rappresentazione aggiunta di G , sappiamo che, fissato un elemento $g \in G$ l'applicazione*

$$h \mapsto -g \cdot h + h \cdot g = [h, g]$$

è un'applicazione da $Lie(G)$ in $Lie(G)$ quindi che $\forall h, g \in Lie(G)$ si ha $[h, g] \in Lie(G)$ ovvero che l'algebra di Lie è chiusa per il bracket, anche se non è assicurato che sia chiusa per il prodotto.

In particolare si ha che, data la funzione

$$F : G \rightarrow X, \quad g \mapsto \rho(g, x)$$

definita a partire dall'azione ρ , allora $Z(J(F))$ è un'algebra di Lie, quindi è chiusa per il bracket.

Osservazione: è interessante calcolare la dimensione di $Z(Lie(G))$, infatti più è grande $Z(Lie(G))$, più ci sono elementi di $Lie(G)$ che commutano.

Osservazione: data un'algebra di Lie L di dimensione m , possiamo considerare una sua base

$$\{Y_1, \dots, Y_m\}$$

e si ha che

- $[X, Y_i] \in \text{span}\{Y_1, \dots, Y_m\} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall X \in \text{span}\{Y_1, \dots, Y_m\}$
- $X \in Z(L) \iff [X, Y_i] = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

Calcolo della dimensione delle algebre di Lie e dei relativi ker su Macaulay2 (nei polinomi visti):

```
--ker dello stabilizzatore di f (algebra di Lie):
JacId=transpose(sub(diff(Xd,diff(transpose Gvec, sub(f,listaG))),listaId))
--JacId è lo jacobiano valutato nell'identità
K=gens kernel(JacId) --matrici (n+1)*(n+1) che generano il nucleo dello
--jacobiano, scritte in forma vettoriale
```

Si introduce adesso il concetto di ideale di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$:

Definizione: 3.5. una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ è detta un **ideale** di $\mathfrak{g}$ se

$$[X, Y] \in \mathfrak{h} \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

Si osserva che

- I sottogruppi connessi di un gruppo di Lie corrispondono alle sottoalgebre dell'algebra di Lie del gruppo.
- Allo stesso modo, la nozione di ideale in un'algebra di Lie corrisponde a quella di sottogruppo normale, come spiegato nella seguente proposizione:

Proposizione: 3.2. *[4] Sia G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un suo sottogruppo connesso. Siano $\mathfrak{g} = Lie(G)$ e $\mathfrak{h} = Lie(H)$. Allora*

$$H \text{ è un sottogruppo normale di } G \iff \mathfrak{h} \text{ è un ideale di } \mathfrak{g}.$$

Inoltre l'operazione di bracket su $\mathfrak{g}$ induce un'operazione di bracket su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \iff \mathfrak{h}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$.

4 Algebre di Lie semplici, risolubili, nilpotenti

Definizione: 4.1. [4] sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, allora diciamo che $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie semplice se $\mathfrak{g} > \{0\}$ e $\mathfrak{g}$ contiene solo ideali banali

Definizione: 4.2. [3] Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, definiamo due catene discendenti di sottoalgebre che partono da essa come:

- La **serie centrale inferiore** di sottoalgebre $D_k(\mathfrak{g})$ è definita in modo ricorsivo come

$$D_1(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[A, B] \mid A, B \in \mathfrak{g}\},$$

$$D_2(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, D_1(\mathfrak{g})],$$

$$\vdots$$

$$D_k(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, D_{k-1}(\mathfrak{g})] \quad \forall k \geq 2.$$

- La **serie derivata** $D^k(\mathfrak{g})$ è definita in modo ricorsivo come

$$D^1(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[A, B] \mid A, B \in \mathfrak{g}\},$$

$$D^2(\mathfrak{g}) := [D^1(\mathfrak{g}), D^1(\mathfrak{g})] = \{[A, B] \mid A, B \in D^1(\mathfrak{g})\},$$

$$\vdots$$

$$D^k(\mathfrak{g}) := [D^{k-1}(\mathfrak{g}), D^{k-1}(\mathfrak{g})] \quad \forall k \geq 2.$$

Definizione: 4.3. [3] L'algebra derivata (o derivato) di $\mathfrak{g}$ è definita come

$$D^1(\mathfrak{g}) = D_1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

Osservazione: se osserva che:

- $D_k(\mathfrak{g})$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g} \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $D^k(\mathfrak{g})$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (si dimostra con l'identità di Jacobi). Più in generale, se $\mathfrak{h}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, allora $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ è ancora un ideale di $\mathfrak{g}$ e quindi $D^k(\mathfrak{h})$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $D^k(\mathfrak{g}) \subseteq D_k(\mathfrak{g})$. In particolare vale l'uguaglianza se $k = 1$

come conseguenza di queste definizioni si possono classificare le algebre di Lie in varie categorie:

Definizione: 4.4. [3] un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice:

- **nilpotente** se $\exists k \in \mathbb{N} \mid D_k(\mathfrak{g}) = 0$
- **risolubile** se $\exists k \in \mathbb{N} \mid D^k(\mathfrak{g}) = 0$ (In particolare, poichè $D^k(\mathfrak{g}) \subseteq D_k(\mathfrak{g}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$, si ha che $\mathfrak{g}$ nilpotente $\Rightarrow \mathfrak{g}$ risolubile.)
- **perfetta** se $D_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ ovvero equivalentemente se $D^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. (perfetta $\Rightarrow$ non risolubile)
- **semisemplice** se $\mathfrak{g}$ non ha ideali risolubili non banali ($D^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ non solo è un ideale di $\mathfrak{g}$ ma è anche tale che $\mathfrak{g}/D^1(\mathfrak{g})$ è semisemplice)

In particolare l'introduzione dei concetti di risolubile e semisemplice è giustificata dal Teorema di decomposizione di Levi, ovvero:

Teorema: 4.1. (Levi, [3]) Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita in un campo $\mathbb{K}$ | $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ e sia $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ il suo massimo ideale risolubile (ovvero quello che poi chiameremo radicale risolubile di $\mathfrak{g}$). Allora $\exists \mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ sottoalgebra semisemplice, detta **sottoalgebra di Levi** di $\mathfrak{g}$ tale che $\mathfrak{g} = \text{Rad}(\mathfrak{g}) \rtimes \mathfrak{l}$

Segue quindi che

- $\mathfrak{g}$ risolubile $\iff \mathfrak{g} = \text{Rad}(\mathfrak{g}) \iff \mathfrak{l} = \{0\}$
- $\mathfrak{g}$ semisemplice $\iff \mathfrak{g} = \mathfrak{l}$ sottoalgebra di Levi $\iff \text{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$

Esempi visti su Macaulay2: in seguito al calcolo delle algebre di Lie date dai ker degli stabilizzatori dei polinomi $f_1 \dots f_4$ e $h_5 \dots h_7$ (polinomi di Ho) visti a pagina 5, è stato svolto il calcolo del derivato di tali algebre di Lie al fine di classificarle nelle categorie appena elencate, segue che:

1. l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_1 = \text{Stab}(f_1)$ ha dimensione 6 ed è generata da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$KG_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, KG_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, KG_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il derivato $D^1(\mathfrak{g}_1) = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ è generato da $KG_0 \dots KG_4$, $D^2(\mathfrak{g}_1) = [D^1(\mathfrak{g}_1), D^1(\mathfrak{g}_1)]$ è generato dai bracket di $KG_0 \dots KG_4$ ovvero da $KG_0 \dots KG_4$, $D^k(\mathfrak{g}_1) = [D^{k-1}(\mathfrak{g}_1), D^{k-1}(\mathfrak{g}_1)]$ è generato da $KG_0 \dots KG_4$ per ogni k , quindi $\mathfrak{g}_1 = \text{Stab}(f_1)$ non è risolubile. Poichè nilpotente implica risolubile, $\mathfrak{g}_1$ non è neanche nilpotente. La catena $D^k(\mathfrak{g}_1)$ si stabilizza a $D^1(\mathfrak{g}_1)$.

2. l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_2 = \text{Stab}(f_2)$ ha dimensione 3 ed è generata da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, KG_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tutti i bracket sono combinazioni lineari di KG_0 e KG_1 , quindi il derivato $D^1(\mathfrak{g}_2) = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$ è generato da KG_0 e KG_1 . Inoltre $[[KG_0, KG_1], KG_2] = 0$ quindi $D^2(\mathfrak{g}_2) = 0$, da ciò segue che $\mathfrak{g}_2$ è nilpotente, quindi anche risolubile

3. l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_3 = \text{Stab}(f_3)$ ha dimensione 2 è generata da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$D_1(\mathfrak{g}_3) = [\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_3]$ è generato da KG_0 . Si ha poi che $[KG_0, [KG_0, KG_1]] = 0$ ovvero si ha $D_2(\mathfrak{g}_3) = [\mathfrak{g}_3, D_1(\mathfrak{g}_3)] = 0$ quindi $\mathfrak{g}_3$ è risolubile. Però per ogni k si ha che $D^k(\mathfrak{g}_3)$ è generato da $[KG_0, KG_1]$ che è non nullo quindi $\mathfrak{g}_3$ non è nilpotente

4. l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_4 = \text{Stab}(f_4)$ ha dimensione 2 ed è generata da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si osserva che $[KG_0, KG_1] = 0$,

l'algebra di Lie è quindi sia nilpotente che risolubile poichè il suo derivato è banale

5. l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_5 = \text{Stab}(h_5)$ ha dimensione 7 ed è generata da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$KG_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$KG_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, KG_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$D^1(\mathfrak{g}_5) = [\mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_5]$ è generato da $KG_0 \dots KG_6$ cioè coincide con $\mathfrak{g}_5$ che quindi è un'algebra di Lie perfetta, quindi non è risolubile nè nilpotente

6. l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_6 = \text{Stab}(h_6)$ ha dimensione 8 ed è generata da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$KG_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$D^1(\mathfrak{g}_6) = [\mathfrak{g}_6, \mathfrak{g}_6]$ è generato da $KG_0 \dots KG_7$ cioè coincide con $\mathfrak{g}_6$ che quindi è un'algebra di Lie è perfetta, quindi non risolubile nè nilpotente

[illegible]

$$KG_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^1(\mathfrak{g}_7) = [\mathfrak{g}_7, \mathfrak{g}_7]$ è generato da $KG_0 \dots KG_8$ cioè coincide con $\mathfrak{g}_7$ che quindi è un'algebra di Lie perfetta, quindi non risolubile nè nilpotente

Osservazione: si osserva dallo studio dei polinomi omogenei di Ho, ovvero gli h_k nei casi $k = 5, 6, 7$ che sembra comparire un pattern, infatti risulta che la dimensione dell'algebra di Lie, ovvero dello stabilizzatore, del k -esimo polinomio omogeneo di Ho ha dimensione $k + 2$ e in tutti i casi studiati le algebre di Lie risultano perfette, e quindi non risolubili nè nilpotenti.

5 Radicale risolubile e nilradicale

Definizione: 5.1. [5] Definiamo ora, data $\mathfrak{g}$ algebra di Lie in $SL(n)$, il suo radicale risolubile e il suo nilradicale come segue:

- $Rad(\mathfrak{g})$, ovvero il **radicale risolubile** di $\mathfrak{g}$, è il massimo ideale risolubile di $\mathfrak{g}$
- $Nil(\mathfrak{g})$, ovvero il **nilradicale** di $\mathfrak{g}$, è il massimo ideale nilpotente di $\mathfrak{g}$, ed è inoltre caratterizzato come l'insieme di tutti gli elementi nilpotenti di $Rad(\mathfrak{g})$

Al fine di calcolare $Rad(\mathfrak{g})$ è utile dare la definizione di forma di Killing ed elencarne alcune proprietà:

Definizione: 5.2. [3] la **forma di Killing** di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di matrici (ad esempio $SL(n)$) a coefficienti del campo $\mathbb{K}$ è definita come

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K} \\ (X, Y) \longmapsto B(X, Y) = tr(X \cdot Y)$$

Proprietà della forma di Killing: [3]

- $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ si ha che $B(X, [Y, Z]) = B([X, Y], Z)$
- la forma di Killing può essere degenerare
- l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice $\Leftrightarrow$ la sua forma di Killing è non degenerare
- se la forma di Killing è identicamente nulla allora $\mathfrak{g}$ è risolubile

Segue il prossimo teorema, che fornisce un modo per calcolare $Rad(\mathfrak{g})$

Teorema: 5.1. [3, prop.C.22] $Rad(\mathfrak{g})$ è il complemento ortogonale di $D^1(\mathfrak{g})$ rispetto alla forma di Killing, ovvero si ha

$$Rad(\mathfrak{g}) = D^1(\mathfrak{g})^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in D^1(\mathfrak{g})\}$$

Serve inoltre ricordare che, poiché la forma di Killing può essere degenerare, non sempre vale $I \cap I^\perp = 0 \quad \forall I \subset \mathfrak{g}$, in particolare potrebbe essere non banale l'intersezione tra $Rad(\mathfrak{g}) = D^1(\mathfrak{g})^\perp$ e $D^1(\mathfrak{g})$. Inoltre vale in generale la seguente proposizione:

Proposizione: 5.1. [3] se $\mathfrak{h}$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ allora il suo complemento ortogonale rispetto alla forma di Killing, ovvero $\mathfrak{h}^\perp$ è ancora un ideale di $\mathfrak{g}$

Dimostrazione. si ha che:

- la matrice nulla $0_{\mathfrak{g}}$ è tale che $B(0_{\mathfrak{g}}, X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$ quindi $0_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{h}^\perp \Rightarrow \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset$
- siano $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}^\perp$ allora si ha $[X, Y] \in \mathfrak{h}^\perp$ infatti $\forall Z \in \mathfrak{h}$ si ha $B(Z, [X, Y]) = B([Z, X], Y) = 0$ ma $Z \in \mathfrak{h}$ che è un ideale, quindi $[Z, X] = Z \cdot X - X \cdot Z \in \mathfrak{h} \Rightarrow B([Z, X], Y) = 0$

□

Corollario: poichè $D^1(\mathfrak{g})$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ segue che $Rad(\mathfrak{g})$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, quindi risulta ben definita la caratterizzazione di $Rad(\mathfrak{g})$ come massimo ideale risolubile di $\mathfrak{g}$.

Su Macaulay2 possiamo usare questi risultati teorici per trovare il radicale risolubile di un'algebra di Lie, conoscendo $KG_0 \dots KG_m$ generatori dell'algebra di Lie e $\{kg_0 \dots kg_l\} \subset \{KG_0 \dots KG_m\}$ generatori del suo derivato in questo modo:

```
for s from 0 to m do print (s,KG_s) --stampa dei generatori dell'algebra di Lie
for i from 0 to l do print(i,kg_i) --stampa dei generatori del derivato
sum(m+1,i->a_i*(KG_i)) --generico elemento dell'algebra di Lie, scritto come
--combinazione lineare dei suoi generatori
I=ideal(trace(sum(m+1,i->a_i*(KG_i))*(kg_0)))--condizioni affinché il generico
--elemento sia ortogonale a kg_0 rispetto alla forma di Killing
for j from 1 to l do I=I+ideal(trace(sum(m+1,i->a_i*(KG_i))*(kg_j)))
--condizioni affinché il generico elemento sia ortogonale a kg_1..kg_l
--rispetto alla forma di Killing
gens gb I--ortogonale al derivato rispetto alla forma di Killing
```

Esempi su Macaulay2: usando l'algoritmo sopra, è stato possibile, partendo dalle basi delle algebre di Lie dei polinomi analizzati, calcolarne il radicale risolubile giungendo a questi risultati:

1. il radicale risolubile di $Stab(f_1)$ ha dimensione 3 ed è generato da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_4 - 2 \cdot KG_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

2. il radicale risolubile di $Stab(f_2)$ ha dimensione 3 ed è generato da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, KG_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ovvero coincide con l'intera algebra di Lie, che infatti è risolubile

3. il radicale risolubile di $Stab(f_3)$ ha dimensione 2 è generato da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ovvero coincide con l'intera algebra di Lie, che infatti è risolubile

4. poichè il derivato di $Stab(f_4)$ è banale, si ha che il radicale risolubile coincide con l'intera algebra di Lie, ovvero ha dimensione 2 ed è generato dagli elementi

$$KG_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. il radicale risolubile di $Stab(h_5)$ ha dimensione 3 ed è generato da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. il radicale risolubile di $Stab(h_6)$ ha dimensione 4 ed è generato da

$$\begin{aligned}
KG_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
KG_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad KG_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7. il radicale risolubile di $Stab(h_7)$ ha dimensione 5 ed è generato da

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$KG_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$KG_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un modo invece per calcolare $Nil(\mathfrak{g})$ consiste nell'osservare che $Nil(\mathfrak{g}) \subset Rad(\mathfrak{g})$, quindi se $X_1 \dots X_n$ è una base di $Rad(\mathfrak{g})$, allora

$$\{\sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \mid a_i \in \mathbb{K} \quad \forall i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \text{ nilpotente}\} \text{ è una base di } Nil(\mathfrak{g})$$

Inoltre vale la seguente proprietà

Proposizione: 5.2. *una generica matrice $A \in M(n, n, \mathbb{K})$ è nilpotente $\Leftrightarrow tr(A^i) = 0 \quad \forall i \leq n$*

Dimostrazione. • Sappiamo che $\forall B \in M(n, n, \mathbb{K}), \forall i \in \mathbb{N}$ gli autovalori di B^i sono della forma λ^i con λ autovalore di B , quindi $\forall i \in \mathbb{N}$ si ha che $tr(B^i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori di B .

Quindi, poiché A è nilpotente $\Leftrightarrow$ gli autovalori di A sono tutti nulli, segue che $tr(A^i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

- Sia $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ il polinomio caratteristico di A . Allora $\exists e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}$ tali che $P_A(\lambda) = e_0 \lambda^n - e_1 \lambda^{n-1} + e_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n e_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot e_k \cdot \lambda^{n-k}$ con $e_0 = 1$. Per l'identità di Newton, si ha che $k \cdot e_k = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \cdot e_{k-j} \cdot tr(A^j)$ quindi, poiché per ipotesi vale $tr(A^j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$, otteniamo per ricorrenza che $e_k = 0 \quad \forall k \geq 1$, e $e_0 = 1$. Quindi $P_A(\lambda) = \lambda^n$ ovvero A è nilpotente.

□

Usando queste considerazioni teoriche, su Macaulay2, supponendo di avere $M_0, \dots, M_t$ generatori del radicale risolubile dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = Stab(f)$, si può trovare il suo nilradicale con il seguente algoritmo:

```
for j from 0 to t do print (j,M_j) --generatori del radicale risolubile
N=(a_0)*(M_0)
for j from 1 to t do N=N+(a_j)*(M_j)--elemento generico del radicale risolubile
--(scritto come combinazione lineare dei generatori)
J=ideal(trace(N)) --tr(N)=0
for i from 2 to n do J=J+ideal(trace(N^i)) --tr(N^i)=0 per ogni i da 2 ad n
gens gb J --condizioni affinché la matrice sia nilpotente
```

Esempi su Macaulay 2:

1. il nilradicale di $Stab(f_1)$ ha dimensione 2 ed è generato da:

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. il nilradicale di $Stab(f_2)$ ha dimensione 2 ed è generato da:

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KG_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. il nilradicale di $Stab(f_3)$ ha dimensione 1 ed è generato da:

$$KG_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

4. il nilradicale di $Stab(f_4)$ ha dimensione 0, cioè solo la matrice nulla è nilpotente
 5. il nilradicale di $Stab(h_5)$ ha dimensione 3, ovvero si ha che $Nil(Stab(h_5)) = Rad(Stab(h_5))$
 6. il nilradicale di $Stab(h_6)$ ha dimensione 4 ovvero si ha che $Nil(Stab(h_6)) = Rad(Stab(h_6))$
 7. il nilradicale di $Stab(h_7)$ ha dimensione 5 ovvero si ha che $Nil(Stab(h_7)) = Rad(Stab(h_7))$

Conclusioni:

in seguito riportiamo i risultati ottenuti in corso di queste analisi sulle dimensioni degli stabilizzatori dei polinomi visti e dei loro derivati, radicali risolubili e nilradicali:

Polinomio	Orbita	Stabilizzatore	Derivato	Radicale risolubile	Nilradicale
f_1	19	6	5	3	2
f_2	13	3	2	3	2
f_3	34	2	1	2	1
f_4	14	2	0	2	0
h_5	29	7	7	3	3
h_6	41	8	8	4	4
h_7	55	9	9	5	5

Riferimenti bibliografici

- [1] Edoardo Sernesi, *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
 [2] Joe Harris, *Algebraic geometry: a first course*, Springer, New York, 1993.
 [3] William Fulton, Joe Harris, *Representation theory: a first course*, Springer, New York, 1991.
 [4] James Edward Humphreys, *Linear algebraic groups*, Springer, New York, 1975.
 [5] Siu-Ming Ho, *On the Isotropic Group of a Homogeneous Polynomial*, Transactions American Mathematical Society, 183(1973), 495–498.