UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di
Scienze Matematiche
Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in
Matematica

ORBITE IN VARIETÀ TORICHE AFFINI E PROIETTIVE

Orbits in affine and projective toric varieties

Relatore:
Prof. Giorgio Ottaviani

Candidato:
Mattia Cavicchi

Anno Accademico 2012/2013

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa relazione è studiare gli aspetti di base di una particolare classe di varietà algebriche, dette *varietà toriche*, il cui tratto distintivo è l'esistenza di un toro algebrico che vi agisce in maniera opportuna. Ciò permette di ricondurre lo studio delle proprietà di tali varietà a quello di certi poliedri convessi, riformulando quindi concetti algebrico-geometrici in termini discreti e combinatorici. La ricchezza di questa connessione, associata al fatto che numerose varietà importanti risultano essere toriche, è motivo di grande interesse.

A un breve richiamo di nozioni di base sui tori e i loro caratteri - gli strumenti essenziali per il nostro studio - seguirà l'introduzione delle varietà toriche, presentandone due costruzioni fortemente collegate, da cui emergerà la connessione con i poliedri. A partire da questa si deriveranno poi due interessanti risultati a dimostrazione di come la geometria dei poliedri permetta di ottenere informazioni sulla varietà di partenza. Quindi concluderemo utilizzando la teoria esposta per studiare due esempi classici, le varietà di Veronese e le immagini di certe immersioni di Segre, che risultano appunto essere varietà toriche.

Con *varietà*, laddove non specificato, intenderemo indistintamente varietà algebrica affine o proiettiva, e ogni varietà sarà intesa come definita sul campo complesso $\mathbb{C}$; con *morfismo* intenderemo sempre un morfismo di varietà. Denoteremo con $\mathbb{P}^{n-1}$ lo spazio proiettivo complesso $(n-1)$-dimensionale, e con $[x_1 : \ldots : x_n]$ coordinate omogenee in $\mathbb{P}^{n-1}$.

Si daranno per scontate nozioni di base su varietà algebriche affini e proiettive, algebre di semigruppo, ordini monomiali e basi di Groebner, geometria dei poliedri convessi.

1 Tori algebrici

Diamo subito due definizioni di base.

Definizione. *Un* gruppo algebrico *è una varietà G dotata di una struttura di gruppo tale che le applicazioni $m : G \times G \to G$ e $inv : G \to G$, definite rispettivamente dall'operazione di gruppo e dall'associazione a ogni elemento del suo inverso, siano morfismi.*

Definizione. *Siano G un gruppo algebrico e X una varietà, e sia $\varphi : G \times X \to X$ un'azione di G su X. Tale azione è* algebrica *(ovvero G agisce* algebricamente *su X) se φ è un morfismo.*

Consideriamo in particolare il gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^\star$ del campo complesso $\mathbb{C}$. Esso è una varietà affine, pensato come il sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$ definito dall'equazione $xy - 1 = 0$, ed è evidente come l'operazione di moltiplicazione e di inverso siano morfismi. Di conseguenza $\mathbb{C}^\star$ è un gruppo algebrico.

Considerato ora il prodotto $(\mathbb{C}^\star)^d$ di d copie di $\mathbb{C}^\star$, che è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione componente per componente, questo è a sua volta un gruppo algebrico, in quanto il prodotto di varietà affini è una varietà affine, e in quanto le applicazioni m e inv sono ancora morfismi. Diamo quindi la seguente

Definizione. *Un* toro algebrico *è una varietà affine T isomorfa a $(\mathbb{C}^\star)^d$. Il* d-toro standard *è $(\mathbb{C}^\star)^d$.*

Osserviamo esplicitamente che ogni toro algebrico è un gruppo algebrico, con moltiplicazione definita tramite l'isomorfismo a partire dalla moltiplicazione su $(\mathbb{C}^\star)^d$. D'ora in poi ci riferiremo ai tori algebrici semplicemente come *tori*.

Enunciamo una proprietà dei tori che ci sarà utile più avanti (per le dimostrazioni di questa e delle altre affermazioni riportate in questa sezione si può fare riferimento ai testi citati in [3], sezione 1.1).

Proprietà 1. *Dati tori T_1 e T_2 e un morfismo $\varphi : T_1 \to T_2$ che sia anche un omomorfismo di gruppi, l'immagine di φ è un toro ed è chiusa in T_2.*

Dato un toro, risultano di particolare interesse alcune applicazioni definite su di esso:

Definizione. *Un* carattere *del toro T è un morfismo $\chi : T \to \mathbb{C}^\star$ che sia anche un omomorfismo di gruppi.*

Nel seguito sarà fondamentale, dato un d-toro standard, la descrizione esplicita dei suoi caratteri. Allo scopo di fornirla, introduciamo un anello che avrà un ruolo centrale nella trattazione.

Definizione. *L'anello dei* polinomi di Laurent *in d variabili, indicato con $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_d, {t_1}^{-1}, \ldots, {t_d}^{-1}]$, è l'anello quoziente $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_d, z_1, \ldots, z_d]/(t_1 z_1 - 1, \ldots, t_d z_d - 1)$.*

La definizione mostra come tale anello altro non sia che l'anello delle coordinate della varietà $(\mathbb{C}^\star)^d$. D'altra parte, la notazione utilizzata suggerisce anche l'isomorfismo con il sottoanello delle funzioni razionali ottenuto aggiungendo a $\mathbb{C}$ i monomi t_i, $1/t_i$, o, da un altro punto di vista, con la $\mathbb{C}$-*algebra di semigruppo* sul semigruppo generato dai vettori di $\mathbb{Z}^d$ $\mathbf{e}_i$, $-\mathbf{e}_i$ con rispettivamente 1 o -1 sulla coordinata i-esima e 0 altrove (ovvero, l'*algebra di gruppo* su $\mathbb{C}$ del gruppo $\mathbb{Z}^d$).

Indicheremo questo anello con la notazione più sintetica $\mathbb{C}[\mathbf{t}^{\pm 1}]$. Inoltre, con *monomio di Laurent* intenderemo un elemento di $\mathbb{C}[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ del tipo $\mathbf{t}^{\mathbf{a}} = {t_1}^{a_1} \ldots {t_d}^{a_d}$, con $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Chiaramente, l'applicazione $\chi^{\mathbf{a}} : (\mathbb{C}^\star)^d \to \mathbb{C}^\star$ associata a un monomio di Laurent $\mathbf{t}^{\mathbf{a}}$ (tramite la valutazione in $(t_1, \ldots, t_d)$) definisce un carattere. Ma addirittura vale la seguente:

Proprietà 2. *Ogni carattere del d-toro standard è dato da un'applicazione $\chi^{\mathbf{a}}$ per qualche $\mathbf{t}^{\mathbf{a}} \in \mathbb{C}[\mathbf{t}^{\pm 1}]$.*

In effetti, i caratteri del d-toro formano un gruppo rispetto al prodotto puntuale, e, come suggerito da quanto sopra, si ha un'applicazione biettiva $\mathbf{a} \mapsto \chi^{\mathbf{a}}$ che risulta essere un omomorfismo di gruppi, cosicché il gruppo dei caratteri si può pensare, a meno di isomorfismo, come il gruppo $\mathbb{Z}^d$.

La rilevanza della precedente proprietà è poi messa ulteriormente in luce dalla seguente:

Proprietà 3. *Sia*

$$\begin{aligned} \phi \colon T \times W &\to W \\ (t, w) &\mapsto t.w \end{aligned}$$

un'azione lineare di un toro $T \simeq (\mathbb{C}^\star)^d$ su uno spazio vettoriale complesso n-dimensionale W. Allora le applicazioni lineari $w \mapsto t.w$, al variare di $t \in T$, sono simultaneamente diagonalizzabili.

Esplicitamente, definiti, per $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$, gli autospazi $W_{\mathbf{a}} = \{w \in W \mid t.w = \chi^{\mathbf{a}}(t)w \ \forall t \in T\}$, si ha che se $W_{\mathbf{a}} \neq \{0\}$ allora ogni $w \in W_{\mathbf{a}} \setminus \{0\}$ è un autovettore comune $\forall t \in T$, con autovalore $\chi^{\mathbf{a}}(t)$, e si dimostra che $W = \oplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d} W_{\mathbf{a}}$.

2 Varietà toriche: parametrizzazioni tramite monomi di Laurent

Introduciamo adesso il nostro principale oggetto di studio.

Definizione. *Una* varietà torica *è una varietà X tale che esista su di essa un'azione algebrica di un toro T con un'orbita aperta densa.*

Per capire quali proprietà seguano da questa definizione conviene fare alcune osservazioni.

Intanto, il d-toro standard (che è una varietà affine irriducibile) agisce in maniera naturale su se stesso per moltiplicazione, e risulta coincidere con l'orbita, rispetto a questa azione, del punto con tutte le d coordinate pari a 1. L'esempio più banale e immediato di varietà torica affine risulta quindi essere l'n-toro stesso.

D'altra parte, consideriamo un insieme finito di punti a coordinate intere $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, e definiamo, utilizzando la notazione per i monomi di Laurent introdotta nella sezione precedente,

$$\begin{aligned} \Phi_A \colon (\mathbb{C}^\star)^d &\to \mathbb{C}^n \\ \mathbf{t} &\mapsto (\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}) \end{aligned}$$

Chiamiamo Y_A la chiusura di Zariski dell'immagine dell'applicazione Φ_A: questa è una varietà affine, e risulta, in effetti, una varietà torica. (Seguiamo qui la sezione 1.1 di [3].)

Infatti, Φ_A può essere pensata come un'applicazione a valori in $(\mathbb{C}^\star)^n$, e in tal senso risulta un omomorfismo di tori; ma allora, per la precedente Proprietà 1, $T := Im(\Phi_A)$ è un toro ed è chiuso in $(\mathbb{C}^\star)^n$. Per definizione di Y_A si deve allora avere $Y_A \cap (\mathbb{C}^\star)^n = T$. Ne segue che T è un aperto di Zariski di Y_A, denso in Y_A (la sua chiusura è Y_A). Notiamo anche che Y_A risulta irriducibile, perché lo è T.

La conclusione si ottiene osservando che un toro agisce su Y_A e che T stesso coincide con un'orbita di quest'azione. Il toro in questione è $(\mathbb{C}^\star)^d$, ed agisce algebricamente su $\mathbb{C}^n$ tramite $\mathbf{t}.(x_1, \dots, x_n) = (\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}x_1, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}x_n)$, ma, considerando che $\forall\ \mathbf{t} \in (\mathbb{C}^\star)^d$ si ha che $\mathbf{t}.Y_A$ è una varietà contenente Y_A (contiene $T = \mathbf{t}.T$ e quindi la sua chiusura) e che allora $\mathbf{t}^{-1}.Y_A \subseteq Y_A$, si conclude che $\forall\ \mathbf{t} \in (\mathbb{C}^\star)^d$ vale $\mathbf{t}.Y_A = Y_A$, e si ottiene, per restrizione, un'azione ben definita su Y_A. T è l'orbita rispetto a quest'azione del punto con tutte le coordinate uguali a 1.

Questa costruzione si può ripetere praticamente parola per parola in ambito proiettivo (cfr. [2], capitolo 5, sezione 1.B). Infatti, fissato $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ come sopra, si può definire

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_A \colon (\mathbb{C}^\star)^d &\to \mathbb{P}^{n-1}\\ \mathbf{t} &\mapsto [\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1} : \dots : \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]\end{aligned}$$

Posta X_A la chiusura di Zariski (proiettiva) di $Im(\tilde{\Phi}_A)$, essa è una varietà proiettiva che risulta essere, con ragionamenti analoghi a quelli precedenti, una varietà torica.

Abbiamo quindi ottenuto una vasta famiglia di varietà toriche, sia affini, sia proiettive, semplicemente prendendo la chiusura di parametrizzazioni monomiali (razionali), ovvero, da un punto di vista leggermente diverso, considerando l'azione per moltiplicazione associata a una tale parametrizzazione e prendendo la chiusura dell'orbita del punto con coordinate (affini o omogenee) tutte uguali a 1.

In entrambi i casi Y_A e X_A sono immerse (rispettivamente in $\mathbb{C}^n$ e in $\mathbb{P}^{n-1}$) *in modo equivariante*, cioè la loro inclusione nello spazio ambiente, su cui (come si è visto sopra nel caso affine) agisce $(\mathbb{C}^\star)^d$, commuta con tale azione.

Il fatto notevole è che, nell'altra direzione, ogni varietà torica affine o proiettiva, purché immersa in modo equivariante, si ottiene da una costruzione analoga. Vediamolo nel caso proiettivo (e la dimostrazione riassumerà in sé anche il caso affine):

Proposizione 1. ***(Proposizione 1.5 di [2], cap. 5)*** *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^{m-1}$ una varietà torica proiettiva immersa in modo equivariante (rispetto all'azione di un toro $T \simeq (\mathbb{C}^\star)^d$ che si estende a $\mathbb{P}^{m-1}$), e sia $\langle X\rangle$ un sottospazio proiettivo minimale contenente X, con $dim\langle X\rangle = n-1$.*

Allora esiste un insieme di n punti $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ per cui esiste un isomorfismo equivariante $X_A \leftrightarrow X$, e quest'ultimo si estende a un isomorfismo equivariante $\mathbb{P}^{n-1} \leftrightarrow \langle X\rangle$.

Dimostrazione. Poiché l'azione di T si estende a tutto $\mathbb{P}^{m-1}$ ed è algebrica, T agisce su $\mathbb{P}^{m-1}$ per proiettività (gli automorfismi di $\mathbb{P}^{m-1}$ sono tutte e sole le proiettività; per una dimostrazione si veda, ad esempio, [4]). Tale azione, com'è noto, si può allora estendere ad un'azione lineare di T su $\mathbb{C}^m$. Ma quindi, per la precedente Proprietà 3, in appropriate coordinate e per appropriati $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{Z}^d$, l'applicazione lineare associata a ogni $\mathbf{t} \in (\mathbb{C}^\star)^d$ sarà rappresentata da

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}^{\mathbf{a}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{t}^{\mathbf{a}_m} \end{pmatrix}.$$

Preso ora $z = [z_1 : \dots : z_m] \in X$ appartenente all'orbita aperta densa del toro, dato che $X \subseteq \langle X\rangle$, con $\langle X\rangle$ minimale di dimensione $n-1$, si può supporre che z abbia esattamente n coordinate omogenee non nulle $\{z_{i1}, \dots, z_{in}\}$, e si può considerare l'insieme di n punti a coordinate intere $A = \{\mathbf{a}_{ij}\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{Z}^d$, che ci permette di costruire la varietà torica proiettiva $X_A \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \simeq \langle X\rangle$.

Abbiamo visto che questa è la chiusura dell'orbita del punto p a coordinate tutte uguali a 1 (rispetto all'azione per moltiplicazione $\mathbf{t}.[x_1 : \dots : x_n] = [\mathbf{t}^{\mathbf{a}_{i1}}x_1 : \dots : \mathbf{t}^{\mathbf{a}_{in}}x_n]$), e, considerato che a sua volta X è la chiusura dell'orbita di z (chiusura dell'insieme di punti ottenuti da z tramite $\mathbf{t}.z = [\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}z_1 : \dots : \mathbf{t}^{\mathbf{a}_m}z_m]$, tutti con esattamente n coordinate non nulle), si può costruire l'isomorfismo voluto associando a $[z_1 : \dots : z_m]$ il punto p e definendolo sugli altri punti in maniera naturale, in base all'azione per moltiplicazione, definita rispettivamente su tutto $\mathbb{P}^{m-1}$ (e in particolare su $\langle X \rangle$) e su tutto $\mathbb{P}^{n-1}$. Chiaramente, questa costruzione fornisce un isomorfismo equivariante, esteso agli spazi ambiente nella maniera voluta. $\square$

La classe delle varietà toriche costruite a partire dall'insieme A non è dunque più generale di quella delle varietà toriche definite attraverso un'immersione equivariante (che è proprio la situazione base che siamo in grado di analizzare qui). Possiamo quindi limitarci a studiare questa classe.

Definiamo allora, nel caso proiettivo, un oggetto, su cui torneremo più avanti, da cui emerge immediatamente il legame con la geometria dei politopi (con $Conv(S)$ intendiamo l'inviluppo convesso di un insieme S):

Definizione. *Il* politopo-peso *della varietà torica proiettiva X_A è il politopo convesso Q:=Conv(A).*

3 Varietà toriche: ideali torici

Prima di proseguire nello studio delle varietà Y_A e X_A conviene (seguendo [1], capitolo 4) introdurre un punto di vista diverso sulla costruzione di varietà toriche a partire dall'insieme $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$. Infatti la scelta di tale insieme ci permette di definire un omomorfismo di anelli

$$\begin{aligned} \hat{\pi} \colon \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] &\to \mathbb{C}[\mathbf{t}^{\pm 1}] \\ x_i &\mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i} \end{aligned}$$

a partire dal quale diamo la seguente

Definizione. *L'*ideale torico *di A è l'ideale $I_A := Ker\hat{\pi}$.*

L'ideale torico I_A è chiaramente un ideale primo, e la varietà $\mathcal{V}(I_A)$ è quindi una varietà affine irriducibile, che per costruzione risulta essere la chiusura di Zariski dell'insieme $\{(\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}) \mid \mathbf{t} \in (\mathbb{C}^\star)^d\}$. Quindi abbiamo ritrovato, almeno nel caso affine, la varietà Y_A, che sappiamo essere torica. (Notiamo che, come per tutte le varietà affini irriducibili, essendo ogni ideale primo radicale, per il Nullstellensatz di Hilbert si ha $I(\mathcal{V}(I_A)) = I_A$).

Questa descrizione è interessante innanzitutto perché ci permette di capire la struttura delle equazioni cartesiane della varietà torica Y_A. Se infatti osserviamo che l'applicazione $\hat{\pi}$ risulta essere l'estensione a $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e $\mathbb{C}[\mathbf{t}^{\pm 1}]$, visti come algebre di semigruppo, dell'omomorfismo di semigruppi

$$\begin{aligned} \pi \colon \mathbb{N}^n &\to \mathbb{Z}^d \\ \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) &\mapsto u_1\mathbf{a}_1 + \ldots + u_n\mathbf{a}_n \end{aligned}$$

possiamo allora provare la seguente

Proposizione 2. ***(Lemma 4.1 di [1])*** *L'ideale torico I_A è generato come spazio vettoriale complesso dall'insieme $\{\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$ con $\pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v})\}$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in I_A \iff \pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v})$, proviamo che ogni polinomio in I_A è combinazione $\mathbb{C}$-lineare di binomi di tal tipo.

Fissato un ordine monomiale $\prec$ su $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$, supponiamo che $f \in I_A$ non possa essere scritto come una simile combinazione lineare: scegliamo un polinomio f con questa proprietà in modo tale che il suo leading term $in_\prec(f) = \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ sia minimale rispetto a $\prec$.

Poiché $f(\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}) = 0$, il termine $\mathbf{t}^{\pi(\mathbf{u})} = \hat{\pi}(\mathbf{x}^{\mathbf{u}})$ deve cancellarsi, cioè deve esserci in f un altro termine $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \prec \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ tale che $\pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v})$. Ma allora si può definire il polinomio $f' = f - \mathbf{x}^{\mathbf{u}} + \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in I_A$, che non può essere scritto come combinazione lineare dei binomi in questione (altrimenti anche f sarebbe dato da una simile combinazione, contro l'ipotesi) ed è tuttavia tale che $in_\prec(f') \prec in_\prec(f)$, contraddicendo l'ipotesi su f. $\square$

Poiché ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$ si può evidentemente scrivere in modo unico come $\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$, dove $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^- \in \mathbb{N}^n$ e hanno supporto disgiunto, ponendo $ker(\pi) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n \mid \pi(\mathbf{u}^+) = \pi(\mathbf{u}^-)\}$ si può ottenere la seguente, utile riformulazione:

Corollario 1. ***(Corollario 4.3 di [1])*** $I_A = \langle\, \mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \mid \mathbf{u} \in ker(\pi)\,\rangle$.

Abbiamo quindi che ogni varietà torica affine è definita da equazioni cartesiane binomiali. Dal punto di vista computazionale, è utile chiedersi se per un ideale torico si possa sempre trovare una base di Groebner formata da simili binomi, e la risposta è sì:

Corollario 2. ***(Corollario 4.4 di [1])*** *Per ogni ordine monomiale $\prec$ esiste un insieme finito di vettori $\mathcal{G}_\prec \subset ker(\pi)$ tale che la base di Groebner ridotta di I_A rispetto a $\prec$ è data da $\{\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{G}_\prec\}$.*

Dimostrazione. Il teorema della base di Hilbert ci garantisce l'esistenza di un insieme finito di vettori di $ker(\pi)$ i cui binomi corrispondenti generano I_A. Fissato $\prec$ e applicando l'algoritmo di Buchberger a questo insieme per ottenere una base di Groebner (rispetto a $\prec$), si ha che a ogni iterazione le operazioni di riduzione e di formazione di S-coppie generano polinomi che sono ancora binomi dell'insieme $\{\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \mid \mathbf{u} \in ker(\pi)\}$, e ciò in particolare è vero per l'insieme di polinomi ottenuto al termine di tale algoritmo (cioè proprio la base di Groebner ridotta). □

L'approccio degli ideali torici, basato sull'omomorfismo di anelli $\hat{\pi}$, rende evidente come l'anello delle coordinate di Y_A sia la $\mathbb{C}$-algebra di semigruppo $\mathbb{C}[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$ del semigruppo $\mathbb{N}A$ generato da A, tramite l'isomorfismo $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_A \simeq \mathbb{C}[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$.

Osserviamo, poiché sarà utile in seguito, che $\mathbb{N}A$ è contenuto nell'intersezione con $\mathbb{Z}A$ del cono poliedrale C_A in $\mathbb{R}^d$ generato da A, e che tale inclusione può essere stretta; questo accade quando $\mathbb{N}A$ non è *saturato*, nel senso della seguente

Definizione. *Il semigruppo $\mathbb{N}A$ si dice* saturato *se $\forall\, u \in \mathbb{Z}A$ tale che $\exists\, m \in \mathbb{N}$ con $mu \in \mathbb{N}A$ si ha $u \in \mathbb{N}A$.*

La *saturazione* di $\mathbb{N}A$ è il semigruppo $\mathbb{N}A^{sat} = \{u \in \mathbb{Z}A$ tale che $\exists\, m \in \mathbb{N}$ con $mu \in \mathbb{N}A\}$, e risulta in effetti $\mathbb{N}A^{sat} = C_A \cap \mathbb{Z}A$. Chiaramente $\mathbb{N}A^{sat}$ è saturato, ed è il più piccolo sottosemigruppo saturato di $\mathbb{Z}A$ contenente $\mathbb{N}A$.

In ogni caso, si ha che gli elementi di $\mathbb{C}[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$ sono tutti e soli i caratteri del toro $(\mathbb{C}^\star)^d$ del tipo $\chi^{\mathbf{m}}$ al variare di $\mathbf{m} \in \mathbb{N}A$, e questi ultimi possono quindi essere intesi come morfismi da Y_A in $\mathbb{C}$.

Ora è naturale chiedersi che cosa si possa dire, dal punto di vista degli ideali torici, in ambito proiettivo. Se I_A risulta essere un ideale omogeneo, le equazioni cartesiane ottenute nei Corollari 1 e 2 definiscono una varietà proiettiva in $\mathbb{P}^{n-1}$, che è proprio la varietà torica proiettiva X_A, e Y_A viene ad essere il *cono affine* su X_A. Ciò che è interessante è che questo caso si può completamente caratterizzare a livello geometrico:

Proposizione 3. ***(Lemma 4.14 di [1])*** *L'ideale I_A è omogeneo $\iff$ $\exists\, w \in \mathbb{Q}^d$ tale che $\boldsymbol{a}_i \cdot w = 1\ \forall\, i = 1, \ldots, n$, ovvero $\iff$ il politopo-peso di A è contenuto in un iperpiano affine di $\mathbb{R}^d$ non passante per l'origine.*

Dimostrazione. $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$ è omogeneo $\iff$ $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ ha somma delle coordinate nulla, e quindi, per il corollario 2, I_A è omogeneo $\iff$ $\forall\, \mathbf{u} \in ker(\pi):$ $\mathbf{u}$ ha somma delle coordinate nulla.

Ora, l'applicazione π, pensata a dominio in $\mathbb{Z}^n$, è un omomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli, rappresentato dalla matrice intera $\mathcal{A}$ che ha per colonne le componenti dei vettori di A. $ker(\pi)$ è un sottomodulo di $\mathbb{Z}^n$ la cui $\mathbb{Z}$-base è anche una $\mathbb{Q}$-base per il nucleo dell'applicazione $\mathbb{Q}$-lineare da $\mathbb{Q}^n$ a $\mathbb{Q}^d$ (che con abuso di notazione indicheremo ancora con π) definita dalla matrice $\mathcal{A}$.

Tenendo conto di ciò, la condizione trovata sulla somma delle coordinate si verifica $\iff$ $(1, \ldots, 1) \in (ker(\pi))^\perp = im(\pi^T)$. L'applicazione π^T associa a $w \in \mathbb{Q}^d$ il vettore $(\mathbf{a}_1 \cdot w, \ldots, \mathbf{a}_n \cdot w)$, e quindi si ha la tesi. □

Alla luce di questa proposizione abbiamo un modo per ricostruire dal punto di vista degli ideali torici la varietà torica proiettiva X_A definita da un qualunque insieme finito $A \subset \mathbb{Z}^d$. Basterà infatti immergere A in $\mathbb{Z}^{d+1}$ considerando il nuovo insieme $\tilde{A} := A \times \{1\}$; è chiaro che $X_{\tilde{A}} = X_A$ e che $\tilde{A}$ soddisfa le ipotesi della proposizione, cosicché l'ideale $I_{\tilde{A}}$ è omogeneo. Quello che abbiamo dimostrato sulla struttura binomiale delle equazioni cartesiane di una varietà torica vale allora per tutte le varietà toriche proiettive X_A. Vale inoltre anche per X_A quanto osservato in precedenza sull'anello delle coordinate.

4 Le corrispondenze orbite-facce e volume-grado

Veniamo ora ai due risultati centrali, che dimostriamo nel caso proiettivo. Essi esplicitano come la struttura del politopo-peso della varietà torica proiettiva X_A influenza la struttura della varietà stessa.

Il primo teorema è la Proposizione 1.9 di [2], capitolo 5, ma ne diamo una dimostrazione differente. A questo scopo, necessitiamo per prima cosa di alcune proprietà che legano il semigruppo $\mathbb{N}A$ al cono poliedrale C_A; per le dimostrazioni rimandiamo ai capitoli 1 e 2 di [6], da cui traiamo anche definizioni e notazioni.

Definizione. *Una* faccia *del semigruppo $\mathbb{N}A$ è un suo sottosemigruppo F tale che $\forall\ x, y \in \mathbb{N}A$ tali che $x + y \in F$: $x, y \in F$.*

La proprietà seguente esprime il fatto che esiste una biezione tra le facce di $\mathbb{N}A$ e quelle della sua saturazione, come definita nella sezione precedente:

Proprietà 4. *Se F è una faccia di $\mathbb{N}A$, allora $\tilde{F} = \{u \in \mathbb{N}A^{sat}$ tale che $\exists\, m \in \mathbb{N}$ con $mu \in \mathbb{N}A\}$ è una faccia di $\mathbb{N}A^{sat}$; inoltre, se G è una faccia di $\mathbb{N}A^{sat}$, allora $G \cap \mathbb{N}A$ è una faccia di $\mathbb{N}A$.*

Se poi $\mathbb{N}A$ è saturato, e quindi, come osservato sopra, $\mathbb{N}A = C_A \cap \mathbb{Z}A$, si ha pure una biezione tra le facce di $\mathbb{N}A$ e quelle del cono C_A:

Proprietà 5. *Sia $\mathbb{N}A$ saturato. Se F è una sua faccia, il cono C_F da essa generato è una faccia di C_A, e viceversa se σ è una faccia del cono C_A allora $\sigma \cap \mathbb{N}A$ è una faccia di $\mathbb{N}A$.*

Diamo infine un'ultima definizione preliminare:

Definizione. *Un* sottogruppo a un parametro *di un toro $T \simeq (\mathbb{C}^\star)^d$ è un morfismo $\lambda : \mathbb{C}^\star \to T$ che sia anche un omomorfismo di gruppi.*

Chiaramente, ogni $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$ definisce un sottogruppo a un parametro $\lambda^{\mathbf{u}}$ di $(\mathbb{C}^\star)^d$ tramite $\lambda^{\mathbf{u}}(\tau) = (\tau^{u_1}, \dots, \tau^{u_d})$.

Proviamo quindi il seguente

Teorema 1. ***(di corrispondenza orbite-facce)***

Esiste una biezione tra le facce del politopo-peso Q della varietà torica proiettiva X_A e le orbite del toro in X_A, che associa ad ogni faccia $\Gamma \subset Q$ l'orbita $X^0(\Gamma) := \{[x_1 : \dots : x_n] \in X_A \mid x_i \neq 0\ \forall\, \boldsymbol{a}_i \in \Gamma,\ x_i = 0\ \forall\, \boldsymbol{a}_i \notin \Gamma\}$.

Inoltre, detta $X(\Gamma)$ la chiusura di Zariski dell'orbita $X^0(\Gamma)$, si ha che $X(\Gamma)$ è isomorfa a $X_{A\cap\Gamma}$.

Infine, se Γ, Δ sono due facce di Q vale $X(\Gamma) \subset X(\Delta) \iff \Gamma \subset \Delta$.

Dimostrazione. Definiamo $e_\Gamma = [x_1 : \dots : x_n]$ ponendo $x_i = 1\ \forall\, \mathbf{a}_i \in \Gamma,\ x_i = 0\ \forall\, \mathbf{a}_i \notin \Gamma$, e affermiamo che $(\star)$ ciascuno dei punti e_Γ appartiene alla varietà. Una volta provato questo, ricordando dalla costruzione di X_A che l'azione di $(\mathbb{C}^\star)^d$ su X_A è l'azione per moltiplicazione associata alla parametrizzazione $\tilde{\Phi}_A$, si avrà subito che ognuno degli insiemi $X^0(\Gamma)$ costruiti nell'enunciato è in effetti un'orbita, quella del punto e_Γ. Infatti, nella costruzione di X_A si è implicitamente provata la suriettività della parametrizzazione sull'orbita del punto e_Q con tutte le coordinate pari a 1, ma, ripetendo quella costruzione con un qualunque sottoinsieme di $m < n$ elementi $B \subset A$ che sia intersezione con A di una faccia Γ, si ha la suriettività della parametrizzazione $\tilde{\Phi}_B$ (a valori in $\mathbb{P}^{m-1}$) sull'orbita di e_Γ.

L'affermazione $(\star)$ si dimostra come segue. Fissata la faccia Γ, per definizione di faccia di un politopo convesso esistono un vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, con funzionale lineare associato $\varphi_{\mathbf{u}} : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}$, e $b \in \mathbb{R}$ tali che $\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \geq b\ \forall\, \mathbf{a} \in Q$ e $\Gamma = \{\mathbf{a} \in Q \mid \varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = b\}$.

Consideriamo ora il sottogruppo a un parametro $\lambda^{\mathbf{u}}$ e l'applicazione di $\mathbb{C}^\star$ in X_A definita da $\alpha := \tilde{\Phi}_A \circ \lambda^{\mathbf{u}}$. Quest'ultima è tale che $\alpha(\tau) = [\tau^{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_1} : \dots : \tau^{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_n}]$. Poiché un chiuso di Zariski è chiuso nell'usuale topologia quoziente su $\mathbb{P}^{n-1}$, si deve avere (prendendo il limite rispetto a tale topologia)

$$\lim_{\tau\to 0} \alpha(\tau) \in X_A,$$

se questo limite esiste. Per come è stato preso $\mathbf{u}$,

$$\lim_{\tau\to 0} \alpha(\tau) = \lim_{\tau\to 0} \tau^b \cdot [\dots : \tau^{\epsilon_i} : \dots],$$

dove $\epsilon_i = 0$ se $\mathbf{a}_i \in \Gamma$ e $\epsilon_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_n - b > 0$ se $\mathbf{a}_i \notin \Gamma$, cosicché,

$$\lim_{\tau \to 0} \alpha(\tau) = \lim_{\tau \to 0} \tau^b \cdot [\ldots : \tau^{\epsilon_i} : \ldots] = \lim_{\tau \to 0} [\ldots : \tau^{\epsilon_i} : \ldots] = e_\Gamma.$$

Quindi abbiamo che ad ogni faccia corrisponde un'orbita. La prima parte dell'enunciato seguirà provando che ogni orbita proviene, nel modo appena visto, da una faccia.

A questo scopo, osserviamo innanzitutto che ogni punto di X_A può avere da 0 a $n-1$ coordinate (omogenee) uguali a 0. Denotando con X_A^k gli insiemi dei punti di X_A con esattamente k coordinate uguali a 0, X_A è unione disgiunta degli X_A^k.

Notiamo che dalla costruzione di X_A segue che X_A^0 è la chiusura dell'orbita del punto e_Q. Per $k > 0$, X_A^k è unione disgiunta, al variare di ogni possibile k-upla di coordinate, degli insiemi di punti che hanno esattamente tali coordinate uguali a 0; con ragionamenti analoghi a quelli esposti sopra (applicati a generici sottoinsiemi di $n-k$ elementi $B \subset A$), ciascuno di tali insiemi, se non vuoto, coincide con l'orbita del punto che ha esattamente le altre $n-k$ coordinate uguali a 1. Infatti, se un punto con k coordinate diverse da 0 appartiene alla varietà, e soddisfa quindi tutte le equazioni cartesiane binomiali che, per quanto visto nella sezione precedente, la definiscono, allora si vede immediatamente che le soddisfa anche il punto ottenuto ponendo uguali a 1 tali coordinate. Considerata la definizione dell'azione del toro, quelle descritte sono tutte e sole le orbite di tale azione.

Per concludere basta dunque dimostrare che se $x = [x_1 : \ldots : x_n] \in X_A$ ha $n-k$ coordinate $\{x_{i1}, \ldots, x_{in-k}\}$ diverse da 0 allora i corrispondenti punti $\{\mathbf{a}_{i1}, \ldots, \mathbf{a}_{in-k}\}$ sono l'intersezione con A di una faccia Γ di Q.

Per prima cosa osserviamo che, per le osservazioni successive alla proposizione 3, si può supporre che A sia contenuto in un iperpiano affine di $\mathbb{R}^d$. La varietà affine Y_A risulterà allora essere il cono affine su X_A. Inoltre, considerata la discussione della sezione 3 sull'anello delle coordinate $\mathbb{C}[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$ della varietà affine Y_A, e utilizzando le notazioni lì fissate, scelto un punto p di Y_A ha senso, $\forall\ \mathbf{m} \in \mathbb{N}A$, considerare $\chi^{\mathbf{m}}(p)$. In particolare, se $\mathbf{m} = \mathbf{a}_h \in A$ per qualche h, $\chi^{\mathbf{m}}(p)$ è l'h-esima coordinata di p. Definiamo quindi l'insieme $\mathcal{M} := \{\mathbf{m} \mid \chi^{\mathbf{m}}(p) \neq 0\}$, che conterrà in particolare gli $\mathbf{a}_h \in A$ corrispondenti alle coordinate diverse da 0 di p.

Ora, l'applicazione $\mathbf{m} \mapsto \chi^{\mathbf{m}}$ è biettiva e risulta essere un omomorfismo di semigruppi, quindi un isomorfismo. Si ha allora facilmente che $\mathcal{M}$ è una faccia del semigruppo $\mathbb{N}A$, secondo la definizione data precedentemente: infatti notiamo che $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow 0 \neq \chi^{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}(p) = \chi^{\mathbf{m}_1}(p) \cdot \chi^{\mathbf{m}_2}(p) \Rightarrow \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathcal{M}$. Ma allora, per la Proprietà 5, esiste una e una sola faccia Λ di C_A tale che $\tilde{\mathcal{M}} = \Lambda \cap \mathbb{N}A^{sat}$. Posta $\Gamma = \Lambda \cap Q$, si ha evidentemente che Γ è una faccia di Q, e vale $\tilde{\mathcal{M}} \cap A = \Gamma \cap A$; considerato tuttavia l'insieme $\mathcal{M} \cap A$, costituito dagli $\mathbf{a}_h \in A$ corrispondenti alle coordinate diverse da 0 di p, vale $\tilde{\mathcal{M}} \cap A = \mathcal{M} \cap A$. Infatti, per come è costruita $\tilde{\mathcal{M}}$ a partire da $\mathcal{M}$ (si veda la Proprietà 4) e per definizione di $\mathcal{M}$, se $\mathbf{m} \in A$ ma $\mathbf{m} \notin \mathcal{M}$, si avrà $\chi^{k\mathbf{m}}(p) = 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, cosicché $k\mathbf{m} \notin \mathcal{M}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, e $\mathbf{m} \notin \tilde{\mathcal{M}}$.

Sia ora p un qualunque rappresentante della classe di equivalenza corrispondente al punto $x \in X_A \subset \mathbb{P}^{n-1}$ sopra definito; vale $\chi^{\mathbf{a}_h}(p) \neq 0 \iff$ l'h-esima coordinata omogenea di x è diversa da 0, indipendentemente dalla scelta di p. Quindi, in conseguenza delle argomentazioni precedenti (e tenendo conto che, poiché Y_A è il cono affine su X_A: $p \in Y_A \iff x \in X_A$) si ottiene proprio $\{\mathbf{a}_{i1}, \ldots, \mathbf{a}_{in-k}\} = \Gamma \cap A$, cioè la tesi.

Le altre affermazioni da provare discendono immediatamente da quanto esposto sopra. $\square$

L'altro teorema che proviamo ci dice invece come ottenere un fondamentale invariante della varietà torica proiettiva X_A, il suo *grado*, a partire dalle caratteristiche del politopo-peso. Prima ricordiamo qualche definizione.

Definizione. *Sia I un ideale omogeneo di* $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. $\forall\ r \in \mathbb{N}$ *siano rispettivamente* I_r, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_r$ *gli spazi vettoriali dei polinomi omogenei di I e di* $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *di grado r. La* funzione di Hilbert proiettiva *di I è definita* $\forall\ r \in \mathbb{N}$ *da* $F_I(r) = dim \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_r}{I_r}$.

Com'è noto (si veda ad esempio [5]), preso un ideale omogeneo I, esiste un naturale r_0 tale che $F_I(r)$ coincide con un polinomio per $r > r_0$, e questo è detto il *polinomio di Hilbert* (proiettivo) di I, indicato con $P_I(r)$. In particolare, tale polinomio risulta essere *numerico*, cioè i valori da esso assunti sono interi, e da questo segue che esso (se di grado d) ammette la scrittura $P_I(r) = \sum_{i=0}^d a_i \binom{r+i}{i}$, con $a_i \in \mathbb{Z}$.

In questa sede diamo la seguente definizione di grado di una varietà proiettiva:

Definizione. *Sia* $\mathcal{V}$ *una varietà proiettiva in* $\mathbb{P}^{n-1}$ *e sia* $P_{I(\mathcal{V})}(r) = \sum_{i=0}^d a_i \binom{r+i}{i}$. *Il* grado *di* $\mathcal{V}$ *è definito da deg(*$\mathcal{V}$*)* $:= a_d$ *(ovvero, se a è il coefficiente direttore di* $P_{I(\mathcal{V})}(r)$*, da deg(*$\mathcal{V}$*)* $:= a \cdot d!$*).*

Per provare il teorema che ci interessa introduciamo un secondo polinomio, che esprimerà il legame con il politopo-peso; per le proprietà riportate in quanto segue si può fare riferimento ai testi citati in [1], capitolo 4. (Con $\mid S \mid$ denotiamo la cardinalità di un insieme finito S.)

Definizione. *Sia A un sottoinsieme finito di $\mathbb{Z}^d$ e $Q = conv(A) \subset \mathbb{R}^d$. Il* polinomio di Ehrhart normalizzato *di Q è la funzione numerica*

$$\begin{aligned} E_Q \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ r &\mapsto \mid \mathbb{Z}A \cap r \cdot Q \mid \end{aligned}$$

dove $\mathbb{Z}A$ è il sottomodulo di $\mathbb{Z}^d$ generato da A.

Il termine *polinomio* è giustificato dal fatto che, anche in questo caso, è noto che $E_Q(r)$ è un polinomio numerico di grado $q = dim(Q)$ (la *dimensione* di Q è la dimensione del sottospazio affine di $\mathbb{R}^d$ generato da Q, e se l'insieme A è associato a un ideale torico omogeneo I_A la proposizione 3 della sezione precedente ci dice allora che $q \leq d - 1$). Dunque si avrà $E_Q(r) = \sum_{i=0}^{q} c_i \binom{r+i}{i}$.

Definizione. *Sia $Q = Conv(A) \subset \mathbb{R}^d$ con polinomio di Ehrhart normalizzato $E_Q(r) = \sum_{i=0}^{q} c_i \binom{r+i}{i}$. Il* volume normalizzato *di Q è definito da $Vol(Q) := c_q$ (ovvero, se c è il coefficiente direttore di $E_Q(r)$, da $Vol(Q) := c \cdot q!$).*

Il gruppo abeliano $\mathbb{Z}^{q+1}/\mathbb{Z}A$ è ciclico finito, cioè $\mathbb{Z}^{q+1}/\mathbb{Z}A \simeq \mathbb{Z}_k$ per qualche k; si può dimostrare in effetti che, posto $V(Q)$ l'usuale volume euclideo (q-dimensionale) di Q, vale $Vol(Q) = V(Q) \cdot q! \cdot k$.

Euristicamente, si può quindi pensare che definendo il volume di Q come $Vol(Q)$ si opera un riscalamento sulla misura standard q-dimensionale in modo che abbia volume unitario un q-simplesso standard di lati di lunghezza 1 rispetto al reticolo generato da A (notiamo che il cubo q-dimensionale unitario è unione a interni disgiunti di $q!$ q-simplessi standard).

Siamo ora pronti per enunciare e provare il risultato che ci interessa.

Teorema 2. ***(di corrispondenza volume-grado - teorema 4.16 di [1])***
Sia I_A un ideale torico omogeneo. Allora il grado della varietà torica proiettiva $\mathcal{V}(I_A)$ è pari al volume normalizzato del suo politopo-peso Q.

Dimostrazione. Date le definizioni di grado e di volume normalizzato, per ottenere la tesi basterà provare che $P_{I_A}(r)$ e $E_Q(r)$ hanno lo stesso grado e lo stesso coefficiente direttore.

Abbiamo già osservato nella sezione 3 che si ha l'isomorfismo $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_A \simeq \mathbb{C}[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$.

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_r/I_{A\,r}$; una sua base corrisponde, tramite l'isomorfismo, ai monomi $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$ tali che $\mathbf{b} \in \mathbb{N}A$ e $\mathbf{b} \cdot w = r$, dove $w \in \mathbb{Q}^d$ tale che $\mathbf{a}_i \cdot w = 1 \ \forall\ i = 1, \ldots, n$ (w esiste per la proposizione 3 della sezione precedente). Considerato che ogni vettore $\mathbf{q} \in Q$ è tale che $\mathbf{q} \cdot w = 1$ (essendo Q l'inviluppo convesso degli $\mathbf{a}_i$), quanto visto e la definizione di $P_{I_A}(r)$ ci dicono che, per r sufficientemente grande, $P_{I_A}(r) = \mid \mathbb{N}A \cap r \cdot Q \mid \leq E_Q(r)$.

Per ottenere una disuguaglianza dall'altro lato, definiamo l'insieme finito

$$C := \mathbb{Z}A \cap \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Q}, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ per } i = 1, \ldots, n\}.$$

Ogni $\mathbf{b} \in C$ appartiene in particolare a $\mathbb{Z}A$, dunque esiste $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tale che $\mathbf{b} = \pi(\mathbf{u})$, e poiché C è finito si può scegliere un intero $R > 0$ tale che $\forall\ \mathbf{b} \in C : \mathbf{b} = \pi(\mathbf{u})$ con $u_i > -R \ \forall\ i$.

Definiamo allora, per ogni intero $r > nR$, l'applicazione

$$\begin{aligned} \eta_r \colon \mathbb{Z}A \cap (r - nR) \cdot Q &\to \mathbb{N}A \cap r \cdot Q \\ \mathbf{b} &\mapsto \mathbf{b} + R \cdot (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

Osserviamo che η_r è ben definita. Innanzitutto $\mathbf{b} + R \cdot (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n) \in r \cdot Q$: infatti notiamo che vale

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} (r - nR)\tilde{\lambda}_i \mathbf{a}_i, \tag{4.1}$$

con $\tilde{\lambda}_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i = 1$ (per definizione di Q) e $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{Q}\, \forall\, i$ (altrimenti non si potrebbe avere $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}A$), cioè $\mathbf{b}$ è combinazione lineare a coefficienti razionali non-negativi dei vettori di A, e se denotiamo tali coefficienti con $\lambda_i := (r - nR)\tilde{\lambda}_i$, è chiaro che $\mathbf{b} + R \cdot (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + R)\mathbf{a}_i = r \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + R}{r} \mathbf{a}_i$ con $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + R}{r} = 1$ per costruzione, cioè $\mathbf{b} + R \cdot (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n) \in r \cdot Q$ come voluto.

Per mostrare che $\mathbf{b} + R \cdot (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n) \in \mathbb{N}A$, cioè che si può esprimere come combinazione lineare a coefficienti interi non-negativi dei vettori di A, procediamo nel modo seguente. Se $\lambda_i > 1$ per qualche i, sottraiamo dalla (4.1) il corrispondente $\mathbf{a}_i$ e continuiamo a sottrarre (esaminando anche gli altri i) finché, sottraendo complessivamente dalla (4.1) un vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{N}A$, otteniamo un vettore $\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b} - \mathbf{c} \in C$. Scrivendo ora

$$\tilde{\mathbf{b}} = \pi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{a}_i \tag{4.2}$$

con $u_i > -R\ \forall\, i$, per costruzione è chiaro che aggiungendo $\mathbf{c} + R \cdot (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n)$ alla (4.2) si ottiene una scrittura di $\mathbf{b} + R \cdot (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n) = \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{c} + R \cdot (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n)$ come combinazione lineare a coefficienti interi non-negativi dei vettori di A.

Verificata la buona definizione di η_r, è chiaro che essa è un'applicazione iniettiva, e ne segue che, per ogni r sufficientemente grande,

$$E_Q(r - nR) \leq P_{I_A}(r) \leq E_Q(r). \tag{4.3}$$

Considerando le funzioni reali di variabile reale associate ai polinomi in questione, e osservando che per r abbastanza grande vale $E_Q(r) > 0$, dalla (4.3) si ottiene immediatamente che

$$1 = \lim_{r \to +\infty} \frac{E_Q(r - nR)}{E_Q(r)} \leq \lim_{r \to +\infty} \frac{P_{I_A}(r)}{E_Q(r)} \leq 1, \tag{4.4}$$

il che implica $\lim_{r \to +\infty} \frac{P_{I_A}(r)}{E_Q(r)} = 1$, da cui segue che $P_{I_A}(r)$ e $E_Q(r)$ hanno lo stesso grado e lo stesso coefficiente direttore, come voluto. □

5 Due esempi: Veronese e Segre

Vogliamo adesso visualizzare concretamente in due casi particolari i risultati esposti nella sezione precedente. (Per le proprietà citate si fa riferimento a [4], capitoli 1 e 2.)

Il primo esempio che studiamo è dato dalle *varietà di Veronese*, una famiglia di varietà proiettive definite come le immagini, al variare di n e $d \in \mathbb{N}$, delle *mappe di Veronese di grado d*

$$\begin{aligned} v_d \colon \mathbb{P}^n &\to \mathbb{P}^N \\ [x_0 : \ldots : x_n] &\mapsto [\ldots : \mathbf{x}^I : \ldots] \end{aligned}$$

dove $\mathbf{x}^I$ varia tra tutti i monomi di grado d in $x_0, \ldots, x_n$, e di conseguenza, dato che il numero di tali monomi è $\binom{n+d}{d}$, l'intero N è dato da $\binom{n+d}{d} - 1$. (Le immagini di tali applicazioni sono in effetti varietà, come accade in generale per immagini di varietà proiettive tramite morfismi.)

Dalla definizione è evidente come le varietà di Veronese siano toriche: coincidono con la chiusura proiettiva dell'immagine della parametrizzazione

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_A \colon (\mathbb{C}^\star)^{n+1} &\to \mathbb{P}^N \\ \mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_n) &\mapsto [\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1} : \ldots : \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}] \end{aligned}$$

dove i punti dell'insieme $A \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ corrispondono ai monomi di grado d in $n+1$ variabili. Qual è la struttura dell'insieme A e del relativo politopo-peso $Q = Conv(A)$?

Nel caso $n = 1$ (che corrisponde alle cosiddette *curve razionali normali*), si vede immediatamente che, al variare di d, Q è il segmento in $\mathbb{R}^2$ di estremi $(d, 0), (0, d)$, e che gli altri punti di A sono tutti e soli gli altri punti di tale segmento a coordinate intere. Questo ci dice che le uniche orbite in $v_d(\mathbb{P}^1)$ corrispondono agli estremi del segmento (punti fissi dell'azione) e al segmento stesso (l'orbita densa); ad esempio, nel caso $n = 2$, in cui la varietà in questione è la conica proiettiva definita da $xz - y^2 = 0$, è evidente come $[1 : 0 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$ siano punti fissi dell'azione $(t_0, t_1).[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [t_0^2 x_0 : t_0 t_1 x_1 : t_1^2 x_2]$ e come $[0 : 1 : 0]$, corrispondente al punto medio del segmento Q e quindi non ad una sua faccia, non appartenga neppure alla varietà.

La situazione si generalizza al caso $n = 2$ (e a tutti i casi di dimensione superiore) nel modo seguente: al variare di d, Q risulta essere un n-simplesso in $\mathbb{R}^{n+1}$ giacente sul piano affine $\sum_{j=1}^{n+1} s_i = d$, con i vertici dati dall'intersezione di tale piano con gli assi coordinati, e con gli altri punti di A corrispondenti agli altri punti dei lati del simplesso a coordinate intere.

Sostanzialmente, all'aumentare del grado della mappa di Veronese l'n-simplesso standard (il caso d=1) viene sottoposto a successive omotetie. Nelle righe che seguono esplicitiamo come questo sia un riflesso della corrispondenza volume-grado.

Fissato n, determiniamo innanzitutto il grado della varietà proiettiva $\mathcal{V}_d := v_d(\mathbb{P}^n)$; per farlo, determiniamo il polinomio di Hilbert di $I(\mathcal{V}_d)$. Se consideriamo l'omomorfismo $v_d^\star \colon \mathbb{C}[y_0, \dots, y_{N-1}] \to \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tra gli anelli delle coordinate corrispondente a v_d, si ottiene una descrizione dell'anello delle coordinate di $\mathcal{V}_d$ tramite l'isomorfismo $\mathbb{C}[y_0, \dots, y_{N-1}]/I(\mathcal{V}_d) \simeq \mathbb{C}[x_0^d, \dots, \mathbf{x}^I, \dots, x_n^d]$, dove di nuovo $\mathbf{x}^I$ varia tra tutti i monomi di grado d in $x_0, \dots, x_n$, e la dimensione della r-esima componente graduata di $\mathbb{C}[y_0, \dots, y_{N-1}]/I(\mathcal{V}_d)$ è quindi data dal numero di monomi nelle $x_0, \dots, x_n$ di grado rd, ovvero $P_{I(\mathcal{V}_d)}(r) = \binom{n+rd}{rd} = \binom{n+rd}{n} = \frac{(rd+n) \cdot \ \dots \ \cdot (rd+1)}{n!}$. Dunque è chiaro che il polinomio di Hilbert ha grado n e coefficiente direttore pari a $\frac{d^n}{n!}$, da cui si ha che il grado di $\mathcal{V}_d$ è d^n.

Ma in effetti la descrizione precedente del politopo-peso Q di $\mathcal{V}_d$ ci dice che esso è un n-simplesso che si triangola con esattamente d^n n-simplessi standard, e la discussione della sezione 4 sul volume normalizzato ci dice quindi che $Vol(Q) = d^n$, proprio come ci aspettavamo.

Per finire, analizziamo cosa accade nel caso delle *immersioni di Segre*, precisamente quelle del tipo

$$\sigma_n \colon \overbrace{\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1}^{n} \to \mathbb{P}^{2^n - 1}$$
$$([x_0^1 : x_1^1], \dots, [x_o^n : x_1^n]) \mapsto [\dots : \ x_{i_1}^1 \cdot \ \dots \ \cdot x_{i_n}^n \ : \ \dots]$$

dove $x_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot x_{i_n}^n$ varia tra tutti i possibili prodotti tra n-uple di coordinate $x_{i_1}^1, \dots, x_{i_n}^n$ $(i_j = 0, 1)$, le cui immagini, come si può provare, sono varietà proiettive, che denoteremo con Σ^n. Le varietà Σ^n sono ancora una volta immediatamente identificabili come varietà toriche, prendendo la chiusura proiettiva dell'immagine della parametrizzazione

$$\tilde{\Phi}_B \colon (\mathbb{C}^\star)^{2n} \to \mathbb{P}^{2^n - 1}$$
$$(u_0^1, u_1^1, \dots, u_0^n, u_1^n) \mapsto [\dots : \ u_{i_1}^1 \cdot \ \dots \ \cdot u_{i_n}^n \ : \dots]$$

dove i punti dell'insieme $B \subset \mathbb{Z}^{2n}$ sono i vertici di un politopo $Q = Conv(B)$ che si vede essere un n-cubo unitario in $\mathbb{R}^{2n}$, contenuto nel piano affine $\sum_{j=1}^{2n} s_i = n$.

Ora, Q si triangola con $n!$ n-simplessi standard, e il suo volume normalizzato è quindi pari a $n!$. Verifichiamo che questo coincide, come deve, col grado di Σ^n: analogamente a quanto osservato per le varietà di Veronese, si ha un isomorfismo $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_{2^n-1}]/I(\Sigma^n) \simeq \mathbb{C}[\dots, \ x_{i_1}^1 \cdot \ \dots \ \cdot x_{i_n}^n, \ \dots]$ che ci dice che la dimensione dell'r-esima componente graduata dell'anello delle coordinate è data dalla dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi n-omogenei di n-grado $(r, \dots, r)$ nelle $x_0^1, x_1^1, \dots, x_0^n, x_1^n$, che è pari a $\overbrace{\binom{r+1}{r} \cdot \ \dots \ \cdot \binom{r+1}{r}}^{n} = (r+1)^n$. Quindi il polinomio di Hilbert ha grado n e coefficiente direttore pari a 1, cosicché il grado di Σ^n è in effetti $n!$.

Riferimenti bibliografici

[1] B. Sturmfels, *Groebner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series 8, Amer.Math. Soc., Providence, RI, 1996
[2] I. Gel'fand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Resultants, Discriminants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser Boston, Boston Basel Berlin, 1994
[3] D. Cox, J. Little, H. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics 124, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 2011
[4] J. Harris, *Algebraic Geometry. A First Course*, Graduate Texts in Mathematics 133, Springer, New York, 1992
[5] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, third edition, Undergraduate Texts in Math., Springer, New York, 2007
[6] M. Mustata, *Lecture notes for Topics in Algebraic Geometry I & II - Toric Varieties*, Fall 2004 - Summer 2005, disponibili online all'indirizzo http://www-personal.umich.edu/~mmustata/