Università degli Studi di Firenze
Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2012-2013

Il Geopiano: strumento per una didattica attiva nel biennio di un istituto tecnico superiore

(The Geoboard, a tool for active learning in Technical High School)

Tesi di Laurea Magistrale
29 Aprile 2014

Relatore:
Prof. Giorgio Maria Ottaviani

Candidata:
Moira Paggini

Tutor:
Prof. Gian Lodovico Miari Pelli Fabbroni

"Non é la conoscenza,
ma l'atto di imparare;
non il possesso,
ma l'atto di arrivarci,
che dá la gioia maggiore."
Gauss.

Indice

1 Introduzione **4**
1.1 Presentazione del lavoro . . . 4
1.2 Il tirocinio . . . 7
1.3 L'insegnamento della geometria . . . 9
1.3.1 Didattica per competenze e metodologie di Didattica Attiva . 11

2 Progettazione e obiettivi della sperimentazione **16**
2.1 Descrizione e obiettivi del progetto . . . 17
2.2 Programmazione didattica e MATERIALI . . . 18
2.2.1 Griglie stampate su carta . . . 19
2.2.2 Programma Lezioni I A . . . 21
2.2.3 SCHEDE I A . . . 23
2.2.4 Programma lezioni II A . . . 32
2.2.5 SCHEDE II A . . . 34
2.2.6 Punti in comune tra l'attività con il Geopiano e la programmazione didattica delle classi . . . 46

3 Diario di bordo **48**

I Classe I A **49**
3.1 Lezione 1: Introduzione al Geopiano, parte 1 . . . 50
3.2 Lezione 2: Introduzione al Geopiano, parte 2 . . . 54
3.3 Lezione 3: Numeri figurati di Pitagora . . . 59
3.4 Lezione 4: Teorema di Pick . . . 66
3.5 Lezione 5: Proporzionalità tra grandezze geometriche . . . 70
3.6 Lezione 6: Approssimazione di aree con Pick: l'Antartide . . . 74

II Classe II A **80**
3.7 Lezione 1: Introduzione al Geopiano . . . 81
3.8 Lezione 2: Verso il teorema di Pick . . . 86
3.9 Lezione 3: Dimostrazione del teorema di Pick . . . 92
3.10 Lezione 4: Equivalenza e teorema di Pitagora . . . 98
3.11 Lezione 5: Proporzionalità e incommensurabilità . . . 102

4 Diario di bordo di altre classi **106**
4.1 Classe I B . . . 107
4.1.1 Lezione 1: Introduzione al Geopiano . . . 108
4.2 Classe II B . . . 110

4.2.1 Lezione 1: Introduzione al Geopiano 111
4.2.2 Lezione 2: Teorema di Pick ed equivalenza 112
4.2.3 Lezione 3: Pitagora standard e generalizzato,paradossi di Curry 115

5 Analisi della sperimentazione 117
5.1 Valutazione delle verifiche finali 118
5.1.1 I A 119
5.1.2 II A 124
5.1.3 Osservazioni 127
5.2 Cosa ne pensano i ragazzi 129
5.3 Commenti finali 136

6 Approfondimenti teorici 137
6.1 Il Geopiano di Gattegno 137
6.2 Reticoli e teorema di Pick 140
6.2.1 Reticolo quadrato 143
6.2.2 Reticolo triangolare (o esagonale) 145
6.2.3 Teorema di Pick 148
6.2.4 Ogni poligono è triangolabile? 153
6.2.5 Generalizzazione del teorema di Pick: reticolo qualsiasi . . . 155
6.2.6 Generalizzazione del teorema di Pick: poligoni intrecciati . . 155
6.2.7 Applicazione del teorema di Pick 161
6.2.8 Generalizzazione del teorema di Pick: poliedri reticolari . . . 163
6.2.9 Teoria di Ehrhart 165
6.2.10 I risultati di Reeve 170
6.3 Razionali e reticolo quadrato 171
6.4 Massimo Comun Divisore nel reticolo quadrato 173
6.5 Sparizioni geometriche 176
6.5.1 Paradossi geometrici 176
6.5.2 Paradossi geometrici e serie di Fibonacci 178
6.5.3 Paradossi e Geopiano 182
6.6 La Taxi-geometria 183
6.6.1 T-asse di un T-segmento 185
6.6.2 T-bilateri 186
6.6.3 T-trilateri 186
6.6.4 T-quadrilateri 188
6.6.5 T-circonferenza 189
6.6.6 T-parabola 190
6.6.7 T-ellisse 191
6.6.8 T-iperbole 191
6.6.9 Altri risultati euclidei che non sono veri nella Taxi-geometria 192

Bibliografia **194**

Sitografia **195**

1 Introduzione

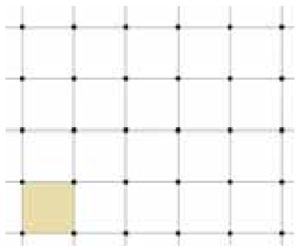
1.1 Presentazione del lavoro

Questa tesi riporta un'**esperienza didattica** rivolta ad alunni di scuola secondaria superiore in vista di un loro avvicinamento alla Geometria, verso la quale, oggi, c'è un atteggiamento di trascuratezza. Infatti il suo studio è sempre più ridotto, per motivi di tempo o per una sempre minor disposizione degli studenti.

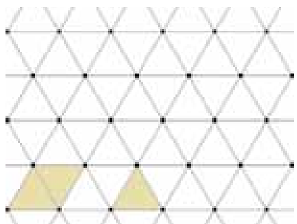
L'approccio utilizzato per lo svolgimento dell'esperienza si avvicina a quello di tipo laboratoriale: i ragazzi, divisi in gruppi, lavorano insieme per il conseguimento di un compito assegnato, utilizzando le loro conoscenze, strategie e il supporto di uno strumento inconsueto, il **Geopiano**. Si tratta di una tavoletta di legno o di plastica, sulla quale troviamo dei reticoli ottenuti evidenziando dei pioli, che chiameremo *nodi*, tra i quali è possibile tendere elastici per creare varie situazioni di tipo geometrico e non solo.

Volendo rappresentare qui i due reticoli presenti nel nostro Geopiano, possiamo distinguere tra:

- Reticolo quadrato



- Reticolo triangolare



Solitamente questo strumento è utilizzato nella scuola elementare come primo approccio alle diverse figure geometriche, mentre, in questo lavoro, è stato introdotto in alcune classi di un Istituto Tecnico superiore accompagnato da attività adatte al loro livello scolastico. Non sempre questo è stato facile: sia perchè è si trattava di un argomento nuovo anche per noi, sia perchè strutturare attività di tipo laboratoriale richiede sempre molta inventiva e impegno.

Alcuni degli argomenti trattati nelle classi erano previsti dal programma scolastico, come la teoria dell'equivalenza delle figure geometriche, il teorema di Pitagora, la proporzionalità tra aree e perimetri, i problemi di approssimazione. Alcuni di questi erano già stati affrontati in classe prima della sperimentazione, altri sono stati invece presentati durante i mesi passati insieme.

Le lezioni non sono state le usuali lezioni frontali, ma, come abbiamo detto precedentemente,i ragazzi dovevano costruire, manipolare e utilizzare il Geopiano per completare le varie attività assegnate.

Questo approccio ha diversi vantaggi: si inserisce in quell' ambito di ″problem solving″ molto efficace nella creazione di competenze individuali, stimola il confronto con i coetanei e, tra le altre cose, costringe gli alunni ad una revisione concreta dei fondamenti delle loro conoscenze matematiche. Si parla quindi di **didattica attiva**, come metodologia dove si pone il soggetto attivo e non passivo al centro del proprio processo di apprendimento.

Sono stati introdotti anche argomenti non previsti dalla programmazione, come *il teorema di Pick*, i numeri figurati dei Pitagorici e la Taxi-geometria. Questi ultimi si collegavano molto bene al Geopiano e permettevano di sviluppare ulteriori considerazioni. Ad esempio, il teorema di Pick, sconosciuto da tutti, ha suscitato molto interesse come è stato anche possibile verificare attreverso un test di valutazione finale sull'esperienza.

Grazie al teorema di Pick è possibile calcolare l'area di qualsiasi poligono P, convesso o concavo, avente vertici nel reticolo quadrato, con la seguente formula molto semplice:

$$Area(P) = A(P) = \frac{B}{2} + I - 1$$

Dove:
I=numero dei nodi interni al poligono P
B=numero dei nodi contenuti nel bordo di P

Sono molteplici e talvolta inaspettate le riflessioni che abbiamo potuto fare a posteriori sul lavoro svolto, per le quali rimandiamo ai prossimi capitoli.

Voglio adesso esporre brevemente la struttura vera e propria di questa tesi.

Nel **Capitolo I** saranno descritte l'attività di tirocinio svolta che ha reso possibile la stesura di questa tesi ed un quadro teorico sull'insegnamento della geometria.

Nel **Capitolo II** è esposto tutto il progetto che abbiamo costruito, dagli obiettivi alla programmazione didattica, compresi i “MATERIALI” utilizzati in classe durante le lezioni. Gli argomenti delle lezioni proposti nelle due classi a volte sono stati gli stessi: le differenze che ci sono state le evidenzieremo, motivandole, nell’esposizione.

Nel **Capitolo III** è riportata la traccia commentata dell’esperienza, lezione per lezione, comprendente osservazioni, domande, riflessioni dei ragazzi e nostre, emerse durante le ore in cui abbiamo lavorato insieme alle classi IA e IIA. Nel **Capitolo IV** ci sono spunti di lezioni svolte in altre classi, diverse dalle due principali.

Nel **Capitolo V** faremo un’analisi della sperimentazione attraverso i risultati, gli errori e le valutazioni dei test finali. Un’altra sezione si occuperà invece di esporre i risultati di un questionario valutativo dell’esperienza e finiremo con alcuni commenti conclusivi al lavoro.

L’ultimo capitolo della tesi,**Capitolo VI**, è di carattere teorico. In esso si trovano approfondimenti di tipo matematico su alcuni argomenti trattati, rivolti agli specialisti in materia e non ai ragazzi. Ci saranno anche spunti per la creazione di alcune lezioni che non sono state direttamente sperimentate in classe.

1.2 Il tirocinio

Il tirocinio si è svolto con la supervisione del Prof. GianLodovico Miari e della Prof.ssa Roberta Chiosi, entrambi docenti di Matematica nell'Istituto ISIS " Vasari" di Figline Valdarno.

L'istituto Vasari, nell'ambito dell'Istruzione superiore, propone un'offerta formativa ampia e differenziata, articolata in quattro diversi indirizzi:

- ISTITUTO TECNICO GEOMETRI (indirizzo tradizionale o indirizzo Costruzioni, ambiente e territorio)
- RAGIONERIA (Indirizzo giuridico economico aziendale o indirizzo amministrazione, finanza e marketing)
- IPSSAR (Istituto professionale servizi per l'enogastronomia e l'ospitalità alberghiera)
- LICEO SCIENTIFICO + opzione scienze applicate

Il tirocinio, aldilà di qualche ora presso il Liceo scientifico, si è svolto principalmente nelle due sezioni dell' *Indirizzo Tecnico Geometri.* Questo indirizzo è quello che permette di conseguire il diploma di Geometra o anche di proseguire gli studi universitari in tutti i settori, in particolare nel settore ingegneristico-archittettonico.

Gli studenti, a conclusione del percorso di studi:

- avranno competenze nel campo dei materiali, macchine e dispositivi utilizzati nell'industria delle costruzioni, nell'impiego degli strumenti di rilievo, nell'uso dei mezzi informatici per la rappresentazione grafica e per il calcolo e nell'utilizzo ottimale delle risorse ambientali.
- possederanno competenze grafiche e progettuali in campo edilizio, nell'organizzazione di un cantiere, nella gestione degli impianti e nel rilievo topografico
- avranno competenza nella stima di terreni, fabbricati e altre componenti del territorio.

Nonostante la grande quantità di classi e quindi di personale, all'interno dell'Istituto vige un'aria molto familiare: già dai primi giorni ogni collega si è mostrato molto accogliente e curioso verso il mio lavoro.

E' stato sicuramente un bel modo per confrontarmi con altri docenti di Matematica e di altre materie. Immersa completamente in questo ambiente ho potuto sperimentare sulla pelle tutto il bello e il difficile che può derivare da un mestiere come quello dell'insegnante: dalle risate con gli studenti alle arrabbiature dei più irruenti fino alle lacrime per un compito andato male, dalle mille circolari e impegni post lezione alla libertà e passione dei docenti nel strutturare un ambiente di apprendimento il più efficiente e coinvolgente possibile.

Il tirocinio si è sviluppato nell'arco di due mesi, per un totale di circa 150 ore e si è articolato nei seguenti due momenti:

- TIROCINIO OSSERVATIVO, effettuato nelle classi IA, IIA, IIIA, IVA del prof.Miari e IB e IIB della Prof.essa Chiosi.
- TIROCINIO ATTIVO, effettuato pricipalmente nelle classi IA e IIA e con solo alcune lezioni in IIIA, IB e IIB.

Durante i primi giorni in classe non è stato facile capire bene quale fosse esattamente il ruolo di tirocinante, sia perché è stata la mia prima esperienza di tirocinio sia perché gli anni hanno un po' contribuito alla mia estraneità dal mondo scolastico. Ma dopo il primo emozionante impatto con le classi, grazie all'accoglienza cordiale e collaborativa del Prof. Miari e della Prof.essa Chiosi e al coinvolgimento dei ragazzi, ho imparato ad entrare nella dinamica della classe come una specie di insegnante "ausiliaria", con quel pizzico di complicità che il mio insegnare "non ufficiale" ha potuto permettere.

L'attività di tipo laboratoriale che abbiamo costruito è stata presentata in classi di differenti livelli. Questa scelta ci ha permesso di confrontare le reazioni agli argomenti proposti da parte di ragazzi che hanno un'età differente, una diversa base matematica e, generalmente, un diverso modo di ragionare, di lavorare e di affrontare certi argomenti. In due di queste abbiamo lavorato maggiormente:

- **La classe I A**, composta da 14 studenti, tra cui 2 con DSA(Disturbi Specifici di Apprendimento[1]) e uno studente disabile. Si tratta di una classe abbastanza omogenea e non è difficile avere l'attenzione di tutti. Credo sia dovuto al numero esiguo dei ragazzi e al loro atteggiamento molto tranquillo ed interessato.
- **La classe II A**, composta da 23 ragazzi, tra cui alcuni ripetenti, è una classe un po' più difficile da gestire, in particolare alcuni di loro manifestano una certa pigrizia verso la matematica e il suo studio. Come ovvia conseguenza anche l'attenzione in classe è più bassa rispetto alla I A.

[1]Si tratta di disturbi nell'apprendimento di alcune abilità specifiche che non permettono una completa autosufficienza nell'apprendimento poiché le difficoltà si sviluppano sulle attività che servono per la trasmissione della cultura, come, ad esempio, la lettura, la scrittura e/o il contare

1.3 L'insegnamento della geometria

La matematica è nata da problemi classici associati al calcolo, alla geometria e alla fisica ma molti hanno difficoltà in questa materia. Viene da chiedersi: perché?

Questa domanda ha portato, dal dopoguerra ad oggi, a cercare di riformare l'insegnamento della matematica, sia nei contenuti che nei metodi.

Non intendo delineare la situazione dei programmi di geometria attuali nella scuola italiana, né scrivere un decalogo del buon insegnamento della geometria; mi interessa piuttosto sottolineare gli aspetti dell'attività svolta che risultano conformi alle indicazioni sollevate nell'ultimo decennio davanti all'evidente crisi dell'insegnamento della matematica.

Dopo il trionfo dell'algebra e dell'analisi, la geometria nelle scuole è sempre meno presente e sempre più trascurata. Di questo ne risente molto il pensiero geometrico di ogni ragazzo. Essi amano le "tecniche" didattiche da imparare e riprodurre, ma non si può insegnare ad imparare solo tecniche, non sono sufficienti e sono prive di ragionamenti. La matematica è molto di più che una tecnica, ma purtroppo sempre più spesso questo sfugge ai ragazzi e in casi estremi, anche a qualche docente. Apprendere la matematica significa acquistare l'attitudine ad un *comportamento matematico* che permette di affiliare l'ingegno. Il valore formativo della Matematica sta proprio in questo: nello sviluppo di quelle procedure che l'alunno mette in atto quando fa Matematica.

A conferma di quanto detto è interessante considerare la premessa del documento 'Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica' [1] redatto dall'Unione Matematica Italiana nel 2003, ove si precisa che *"l'educazione matematica, insieme a tutte le altre discipline, deve contribuire alla formazione culturale del cittadino"*, infatti, sono rinvenibili obiettivi non solo didattici, ma anche educativi e formativi.

La commissione Kahane [2] ha inoltre evidenziato il contributo fornito dalla geometria allo sviluppo delle capacità di ragionamento[2], quelle stesse capacità che aiutano i cittadini ad assumere responsabilità in maniera consapevole ed a partecipare in modo attivo alla vita politica, sociale ed economica del Paese.

E' invece opinione comune che la geometria, in particolare quella del biennio delle scuole superiori, sia costituita esclusivamente da un insieme di teoremi e dimostrazioni. Le conoscenze geometriche sono cioè viste come un insieme di "fatti"

[2]Su richiesta di varie associazioni matematiche francesi (SMF-Società Matematica di Francia, SMAI-Società di Matematica Applicata e Industriale, APMEP-Associazione degli Insegnanti delle Scuole Pubbliche, UPS), il Ministero francese dell'Istruzione Pubblica ha istituito nel 1999 una Commissione di riflessione sull'insegnamento della Matematica,(CREM) con l'obiettivo di ripensare in un'ottica globale e a lungo termine tutto l'insieme dei programmi, dalla scuola elementare all'università. Questa Commissione, nota anche come Commissione Kahane dal nome del suo presidente, ha prodotto una serie di rapporti molto corposi e di notevolissimo interesse (anche per i non francesi) che sono reperibili in rete all'indirizzo http://smf.emath.fr/Enseignements/CommisionKahane

e di “regole” da ricordare all’occorrenza e le lezioni articolate in una sequenza di teoremi e dimostrazioni proposte alla lavagna. Una simile impostazione non può di certo stimolare processi di assimilazione, rielaborazione ed appropriazione né tanto meno far acquisire il sopra citato comportamento matematico nè perseguire obiettivi educativi e formativi.

E’ essenziale altresì tener presente che l’apprendimento della Matematica in generale, della Geometria in particolare, è complesso e richiede un investimento intellettuale notevole. Questa difficoltà non può e non deve essere ignorata dall’insegnante, che deve stimolare ed incuriosire il ragazzo, evitando di ridurre il ragionamento geometrico all’apprendimento formale di una dimostrazione.

Tra le molte altre difficoltà legate all’apprendimento della geometria, durante l’esperienza ne abbiamo riscontrate in particolare alcune: tra cui le crazione di immagini mentali sbagliate e l’utilizzo di un linguaggio matematico poco rigoroso.

La costruzione di modelli mentali, ritenuti dall’allievo stabili e definitivi, può dar luogo ad un conflitto cognitivo allorquando riceve informazioni su un nuovo concetto non convalidato dall’immagine che aveva. Alla base dei conflitti vi sono **misconcezioni** ovvero *“concezioni momentaneamente non corrette, in attesa di risistemazione cognitiva più elaborata e critica”* (B.D’Amore [3]).

Vi sono misconcezioni “inevitabili”, derivanti indirettamente dalla trasposizione didattica dell’insegnante, imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere da dover comunicare. Esistono poi misconcezioni “evitabili” derivanti, invece, dall’abitudine a presentare al ragazzo una figura, un concetto sempre nella stessa maniera. Esempi di questo tipo sono riscontrabili in geometria, dove la difficoltà dell’allievo a comprendere problemi, indicazioni, spiegazioni dell’insegnante, dipendono dal forte legame delle sue concezioni geometriche con modelli concreti utilizzati come supporto visivo.

Le figure geometriche, ad esempio, rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurali. Ciononostante la loro armonizzazione deve essere fra gli obiettivi didattici di un insegnante. Quest’ultimo deve aver presente che la “fusione fra concetto e figura”, con la predominanza del primo sul secondo, non è un processo naturale e necessita quindi di una particolare attenzione.

Solo con un atto mentale, un disegno può essere interpretato e può arrivare a condividere con il concetto che rappresenta anche la generalità. Se ciò non avviene, c’è il rischio che la rappresentazione iconica venga identificata con il concetto geometrico (D’Amore [4]),

Credo che tale confusione abbia indotto in errore alcuni studenti quando, durante l’esperienza, non hanno riconosciuto alcuni quadrati solo perché in posizioni differenti da quelle usualmente viste in classe o nei libri di testo.

Fra gli ostacoli di natura didattica, anche quelli derivanti dal **linguaggio** rivestono uno spessore notevole in Matematica.

Nella scelta del linguaggio da utilizzare si è di fronte a:

- il linguaggio adoperato in aula: atto a favorire, e non ostacolare, l'apprendimento degli allievi

- linguaggio matematico: fra gli obiettivi dell'insegnante deve esserci quello di far acquisire agli studenti tale linguaggio specifico.

Seguendo Laborde [5], un discorso matematico deve rispondere a caratteristiche di precisione, concisione e universalità, ma spesso i ragazzi, nel tentativo di ripetere frasi quanto più simili a quelle pronunciate dall'insegnante, ne producono altre completamente prive di senso.

Ho avuto modo di riscontrare tale fenomeno quando, alla mia richiesta di enunciare un dato teorema, uno studente ha risposto che 'un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza congruente'. Sollecitato a completare l'enunciato, l'alunno è rimasto sorpreso, non riuscendo a comprendere l'origine della mia richiesta.

Come abbiamo mostrato non sono poche le difficoltà legate all'apprendimento e alla didattica della Geometria. Vediamo adesso alcune metodologie da poter applicare in classe, in grado di migliorare l'approccio a questa materia e di metterne in risalto tutti gli aspetti vantaggiosi del suo studio.

1.3.1 Didattica per competenze e metodologie di Didattica Attiva

La più grande sfida educativa che gli insegnanti si trovano ad affrontare da sempre è quella di creare una scuola in cui coesistono *"qualità e riuscita per tutti"*, che ha l'obiettivo dell'apprendere per competenze. Vanno verso questa direzione anche le ultime indicazioni nazionali, che sottolineano gli scarsi risulati degli apprendimenti degli studenti (OCSE PISA[3]) e auspicano una didattica per competenze.

L'apprendimento della matematica degli studenti è basato sulla memorizzazione di informazioni, enunciati, descrizioni e diventano così abili esecutori di procedure che imparano per imitazione, ma non le padroneggiano e quindi non sono in grado di trasferirle in altri ambiti.

L'apprendimento della matematica deve comportare l'uso *creativo* dell'insieme di tali elementi.

Agli insegnati si chiede di stimolare negli studenti :

[3] Il Programma per la valutazione internazionale dell'allievo (PISA) è un'indagine internazionale promossa dall'OCSE (Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico), nata con lo scopo di valutare con periodicità triennale il livello di istruzione degli adolescenti.

- capacità di creare modelli matematici di pensiero e di rapprensentazione grafica e simbolica
- comprendere ed esprimere adeguatamente informazioni qualitative e quantitative
- porsi problemi e proporre soluzioni
- analizzare, ragionare e comunicare idee matematiche in modo efficace
- applicare conoscenze in ambiti diversi nel modo reale (ambiente naturale, sociale e culturale in cui l'individuo vive)
- utilizzare un approccio didattico partecipato, condiviso di problem solving
- progettare attività che valorizzino i ritmi lenti della riflessione

E' necessario che si dia importanza anche ad aspetti come:

- comprensione ed importanza della matematica
- fiducia in sé stessi e la curiosità
- desiderio di fare e di capire

Ovvero è importante tenere di conto deglii atteggiamenti e le emozioni che la matematica suscita: in generale è improbabile che la conoscenza si attivi senza la loro presenza.

Ricordiamo la differenza tra:

Conoscenze: risultato dell'assimilazione di informazioni attraverso l'apprendimento, relative ad un settore di studio. Possono essere teoriche o pratiche.

Competenza: " Comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale." (Decreto Ministeriale 22 Agosto 2007 n.139)

"Non si possono esprimere abilità senza l'utilizzo di conoscenze, ma è possibile esprimere conoscenze senza possedere le abilità per usarle" (Comoglio [6])

Gli attuali programmi didattici si pongono come obiettivo lo sviluppo degli assi culturali con il fine di costruire la base, in termini di conoscenza e abilità/capacità, per il raggiungimento di competenze trasversali .

Per il biennio si individuano 4 assi culturali: asse dei linguaggi, asse matematico, asse scientifico-tecnologico, asse storico-sociale.

Per quanto riguarda l'*asse matematico* le competenze previste sono:

- Utilizzare tecniche e procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche in forma grafica

- Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni

- Individuare strategie appropriate per la soluzione dei problemi

- Analizzare i dati ed interpretarli, sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni di tipo informatico.

La competenza matematica non si esaurisce quindi nel sapere disciplinare, consiste nell'abilità di individuare e applicare le procedure che consentono di esprimere ed affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati. Queste competenze devono permettere ai giovani di applicare i prinicipi e i processi matematici al contesto quotidiano della sfera geometrica, sul lavoro, di seguire e vagliare la coerenza logica della proprie argomentazioni e altrui in molteplici contesti di indagine conoscitiva e di decisione.

Si passa dal sapere al saper agire e si dà più importanza alla costruzione di apprendimenti piuttosto che alla loro assimilazione.

Attenzione però, la programmazione per competenze non si pone come alternativa ai saperi disciplinari: le competenze si basano su solide conoscenze disciplinari consolidate, ma l'obiettivo dell'insegnanmento non può consistere nella sola interiorizzazione dei saperi.

Vediamo alcuni punti e metodolgogie guida verso una didattica per competenze.

1) ***Motivazione degli studenti***

   Gli studenti sono motivati da:

   - situazioni che li coinvolgono personalmente e attivamente nel loro apprendimento,
   - attività con livello di difficoltà adeguato, tale da consentire di svolgerle con successo
   - situazioni che sono legate direttamente o indirettamente ad esigenze, interessi, obiettivi personali e alla realtà che vivono e conoscono.
   - ricordare che la matematica è un'attività di pensiero che aiuta a sviluppare la capacità di intuire, immaginare, progettare, ipotizzare, dedurre, controllare, organizzare.

Bruner privilegia *"le motivazioni intrinseche e, tra queste, privilegia soprattutto la curiosità"..."bisogna favorire il porre domande e il cercare risposte"*[7], altrimenti insegnare si riduce ad un dare risposte a chi non ha posto domande.

2) ***Il Problem Solving*** (Didattica per problemi) è molto utile poiché lo sviluppo del pensiero si promuove impegnando gli alunni nella soluzoine di problemi.

   I problemi sono intesi come situazioni nuove in cui c'è da raggiungere un obiettivo e non c'è una procedura meccanica per raggiungerlo.

   Questa metodologia prevede diversi momenti, durante i quali possono essere sviluppati anche processi di controllo propri delle abilità metacognitive:

   i ragazzi saranno in grado di monitorare i processi e di valutare i gradi di utilità, necessità, appropriatezza dei diversi processi risolutivi, nonché di classificare le rappresentazioni personali di procedure.

3) ***Il Cooperative learning*** (Apprendimento cooperativo) invece costituisce una specifica metodologia di insegnamento che consente agli studenti di apprendere in piccoli gruppi, aiutandosi reciprocamente e sentendosi corresponsabili del reciproco percorso. L'insegnante assume un ruolo di facilitatore ed organizzatore delle attività, strutturando "ambienti di apprendimento" in cui gli studenti trasformano ogni attività di apprendimento in un processo di "problem solving di gruppo", conseguendo obiettivi la cui realizzazione richiede il contributo personale di tutti.
   Quali vantaggi presenta? Rispetto ad un'impostazione del lavoro tradizionale, la ricerca mostra che il Cooperative Learning presenta di solito questi vantaggi:

   - Migliori risultati degli studenti: tutti gli studenti lavorano più a lungo sul compito e con risultati migliori, migliorando la motivazione intrinseca e sviluppando maggiori capacità di ragionamento e di pensiero critico;
   - Relazioni più positive tra gli studenti: gli studenti sviluppano pertanto il rispetto reciproco e lo spirito di squadra;
   - Maggiore benessere psicologico: gli studenti sviluppano un maggiore senso di autoefficacia e di autostima, sopportano meglio le difficoltà e lo stress.

   Alcuni aspetti del Cooperative Learning sono ancora oggetto di discussione e di approfondimento, come ad esempio la situazione dei più dotati e l'inserimento di alunni con disabilità.

Quindi per una didattica per competenze è bene che si abbia un apprendimento attivo, in cui si ponga lo studente al centro dell'azione didattica. Si parla quindi di

didattica attiva, indicando con questa terminologia un insieme articolato di metodologie di insegnamento che pongono l'utente come soggetto attivo e non passivo del proprio successo di apprendimento.

Ovviamente l'ideale sarebbe un approccio che racchiuda più di uno di questi tre punti della didattica attiva elencati precedentemente, ed è quello che potremmo chiamare *"metodologia laboratoriale"*: a questo termine spesso viene attribuito un significato ambiguo, che porta a confondere l'attività in laboratorio di chimica, fisica con la metodologia laboratoriale, ovvero una proposta educativa in cui il processo di apprendimento si realizza attraverso l'azione e la sperimentazione di situazioni, compiti, ruoli in cui il soggetto, attivo protagonista, da solo o in gruppi, si trova a mettere in campo le proprie risorse e competenze per l'elaborazione e/o riorganizzazione di teorie e concetti volti al raggiungimento di un obiettivo.

Altro importate vantaggio della metodologia laboratoriale è l'importanza della manualità per promuovere gli apprendimenti. A lungo è stata la parola lo strumento più usato per promuovere gli apprendimenti: è lo strumento più economico e che nel minor tempo consente di trasmettere un alto numero di informazioni, ma invece è opportuno mettere gli allievi nella condizione di essere immersi nelle esperienze concrete, attraverso la possibilità di maneggiare strumenti strutturati.

Chi apprende è pertanto un protagonista attivo e non un recettore passivo delle idee di chi insegna. Si richiede che l'insegnante divenga solo un appoggio al processo di apprendimento. Piaget afferma :*"L'insegnante non dà lezioni, ma organizza situazioni che destano curiosità e voglia di ricercare la soluzione. L'insegnante deve favorire questo"*[8]

Utilizzando la metodologia laboratoriale attraverso un problem solving a gruppi, possiamo anche evidenziare il valore della interazione tra pari accanto a quella dell'allievo con l'insegnante.

E' tuttavia necessario esaminarne anche gli aspetti problematici. Non è sempre facile tenere sotto controllo una situazione laboratoriale e soprattutto non è semplice per l'insegnante assolvere alla sua funzione di guida pertinente ed efficace nei confronti di tutti gli allievi. Per cercare di ovviare a questo, l'ideale, che solo raramente è raggiungibile visto la numerosità delle classi, sarebbe che si pensi insieme, affrontando una situazione condivisa di problem solving, discutendo e comunicando i vari pensieri, le varie ipotesi. Inoltre predisporre delle esperienze di questo tipo richiede un dispendio di tempo notevole sia per la fase di progettazione da parte dell'insegnante sia durante l'orario scolastico, di cui spesso non c'è disponibilità.

2 Progettazione e obiettivi della sperimentazione

Istituto	Isis "Giorgio Vasari" di Figline Valdarno
Titolo del progetto	Il Geopiano: spunti di didattica attiva nel biennio di un Istituto Tecnico superiore
Descrizione generale di argomento e contenuto	Questo percorso didattico si propone di affrontare varie situazioni e argomenti di tipo geometrico, utilizzando il Geopiano.
Classi o età degli alunni	Classe prima e seconda di scuola secondaria superiore
Discipline coinvolte	Scienze Matematiche
Strategia e tecnica didattica	• Attività laboratoriale in piccoli gruppi(2-3 alunni) • Problem solving
Articolazione del progetto (tempi, fasi, materiali ed elaborati prodotti, logistica)	• Attività laboratoriale da svolgere in piccoli gruppi e con l'utilizzo di un Geopiano a gruppo, guidata da una scheda da compilare (5-6 ore per ogni classe: 1 ora a lezione) • Test scritto di valutazione (1 ora)
Dotazione tecnologica e altri materiali necessari	• Geopiani di plastica 22x22cm con reticolo quadrato e triangolare • busta con elastici di vari colori e dimensioni • griglie stampate su carta o su lucido • righello, lapis
Valutazione	1. Relazione scritta su un argomento svolto a lezione 2. Prova scritta comprendente: ○ semplici quesiti in cui applicare le conoscenze apprese ○ quesiti più complessi in cui è necessario applicare le conoscenze e sfruttare le competenze acquisite

2.1 Descrizione e obiettivi del progetto

Basandoci su quanto detto nel quadro didattico descritto nel capitolo precedente, abbiamo cercato di strutturare un'attività di tipo laboratoriale, in cui intervenissero:

1) *lavoro a gruppi*

2) *problem solving*

3) *manipolazione concreta di strumenti*

L'obiettivo principale è rendere il soggetto attivo del suo apprendimento in modo da avviarlo alle competenze che deve acquisire.

Le lezioni sono state organizzate in modo tale che l'allievo potesse, a partire da un'esperienza concreta, elaborare congetture, argomentarle e formalizzarle con un linguaggio appropriato, quello di cui parlavamo nel capitolo precedente.

Questa attività sarà inoltre un valido sussidio affinché i ragazzi non si limitino solo alla risoluzione del problema, ma riflettano sulle strategie utilizzate.

Essendo l'intento dell' Istituto Tecnico quello di creare dei futuri geometri, anche la conoscenza dei concetti base della geometria è fondamentale, così come trovare la miglior strategia risolutiva davanti ad una situazione o ad un problema. Ma, come analizzato nel Capitolo 1, sono frequenti misconcetti e lacune in ambito geometrico e, l'eventuale presenza di entrambi, causerebbe non poche problematiche. Ci siamo posti, quindi, tra gli altri scopi, quello di colmare alcune di queste lacune.

L'uso del Geopiano, gli accenni storici, oltre ad arricchire il bagaglio culturale degli studenti, ci hanno aiutato a mostrare una matematica differente, in modo da risvegliare l'interesse nei ragazzi verso le geometria ed in generale rendere meno passivo il loro atteggiamento nei confronti del lavoro scolastico.

Inoltre il fatto di lavorare a gruppi risulta utile nello stimolare l'interazione tra gli studenti, nonché tra studenti ed insegnanti.

Con questa attività di laboratorio l'insegnante ha il solo compito di stimolare mentre al ragazzo è lasciata tutta la responsabilità di costruzione

Quindi un approccio di questo tipo evoca delle competenze: essere competenti significa proprio "saper cosa fare, come, quando e perché". Infatti la competenza non è uno stato, ma un processo e consiste nella mobilitazione delle risorse dell'individuo quali: sapere teorico e procedurale, saper scegliere, saper riflettere su quanto si è fatto.

Una scuola che fornisca conoscenza o abilità è necessaria ma non sufficiente per permettere agli allievi di raggiungere traguardi di competenza. La competenza viene sviluppata solo in attività in cui l'allievo è protagonista: ecco perché una didattica laboratoriale costituisce un contesto adatto per promuovere competenze, per svilupparle, valutarle e convalidarle.

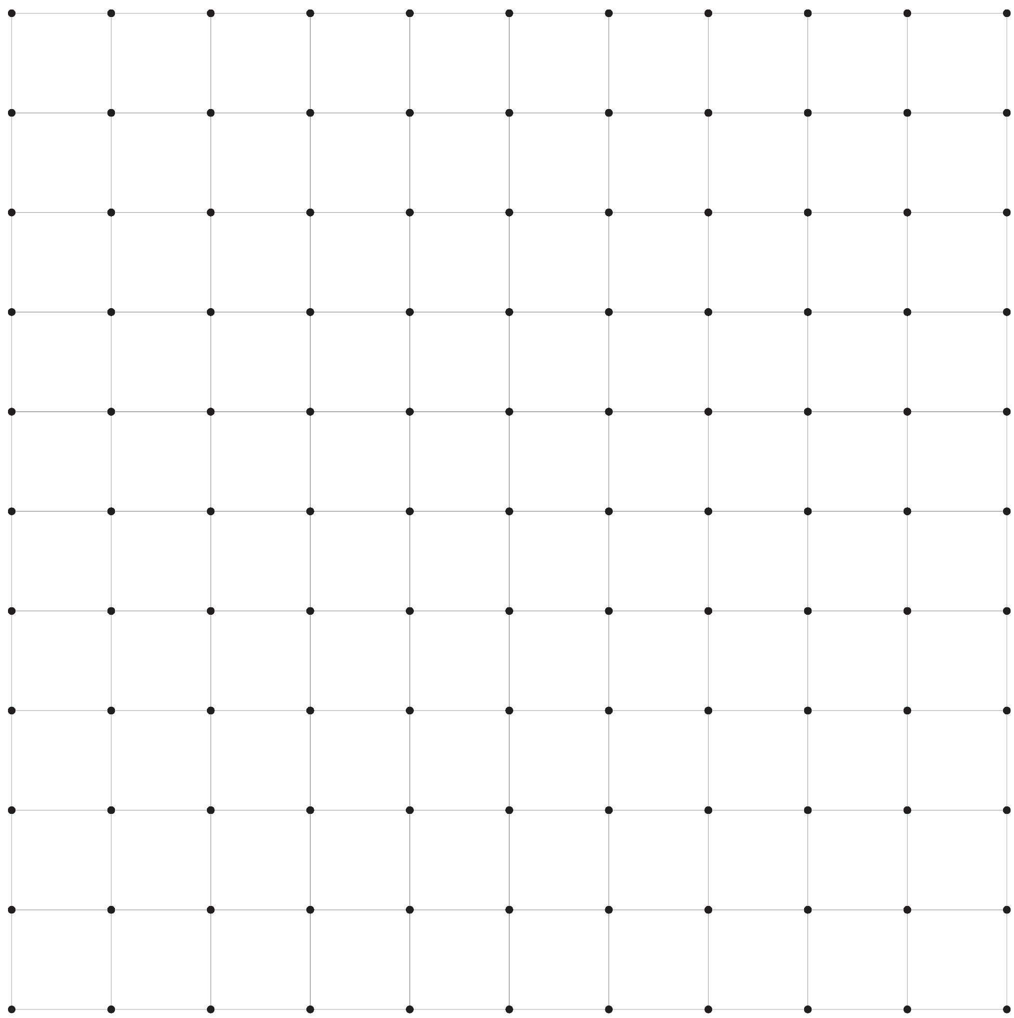
2.2 Programmazione didattica e MATERIALI

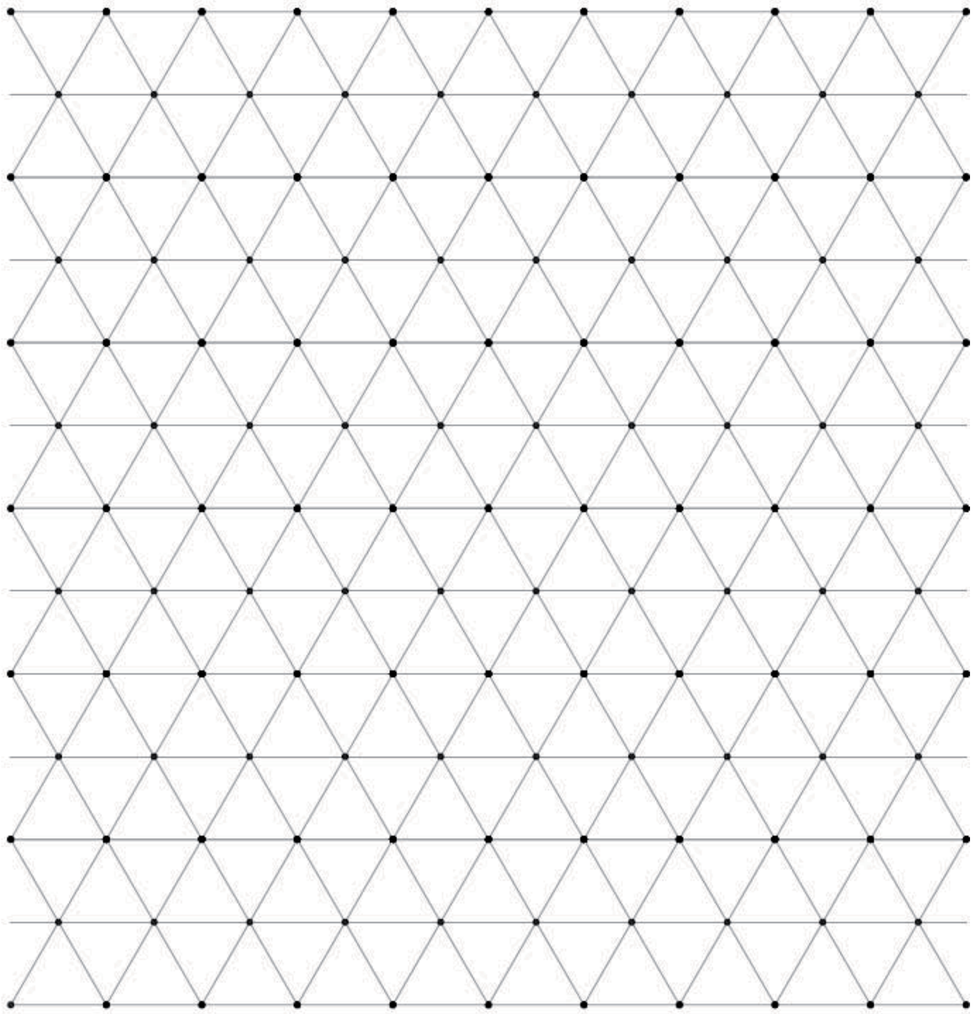
Tutte le lezioni di tirocinio, come era naturale che fosse, sono state precedute da uno studio dell'argomento da trattare. La domanda che mi sono costantemente posta era quale fosse il giusto approccio da utilizzare e quale attività aiutasse i ragazzi a comprendere ed in futuro a padroneggiare l'argomento.

Un approccio di questo tipo è stato seguito non solo nella speranza di una "riappacificazione" dell'allievo con la matematica, ma con la ragionevole convinzione che esso potesse aiutare lo sviluppo ed il raffinamento delle capacità di ragionamento del ragazzo.

La scelta degli argomenti e dei criteri di presentazione del progetto è stata fatta adattandosi alle esigenze della classe e quanto più possibile ai programmi previsti dal POF e dalla programmazione didattica per competenze elaborata dai docenti dell'isituto. Riportiamo qui di seguito la programmazione didattica della nostra attività, elencando per ogni lezione i contentuti, gli obiettivi e i materiali utilizzati. Alla fine della sezione abbiamo fatto un confronto tra progammazione didattatica delle classi e la programmazione dell'attività con il Geopiano, elencando i punti in cui esse si incontrano.

2.2.1 Griglie stampate su carta





2.2.2 Programma Lezioni I A

LEZIONE 1: INTRODUZIONE AL Geopiano:

- conoscere il Geopiano evidenziandone caratteristiche, potenzialità e limiti
- iniziare a prendere confidenza con gli elastici per la rappresentazione di situazioni geometriche
- rappresentare alcune figure geometriche sia nel reticolo quadrato che in quello triangolare, mettendone in evidenza le loro proprietà
- ripassare i concetti di figura,poligono, poligono regolare e classificazione di triangoli e quadrilateri
- disegnare alcune figure geometriche in posizioni non usuali per evidenziare eventuali misconcetti dovuti al binomio concetto/immagine mentale e per capire quali proprietà delle figure sono invarianti

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 1

LEZIONE 2: NUMERI FIGURATI:

- far conoscere il metodo di rappresentazione dei numeri naturali dei Pitagorici: tramite pietre o puntini nella sabbia
- utilizzare l'artimo-geometria per studiare alcune relazioni tra numeri, come ad esempio la somma dei primi n numeri naturali
- metodo induttivo: partire da una regola che vale per alcuni casi e generalizzarla
- affrontare il concetto di dimostrazione geometrica e per induzione

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 2
LEZIONE 3: FORMULA DI PICK

- data la definizione di triangolazione applicarla ad alcuni poligoni
- saper definire e distinguere i concetti di area e perimetro
- conoscere e saper applicare le formule per il calcolo dell'area di poligoni convessi
- saper distinguere in quali situazioni problematiche è necessario calcolare il perimetro e in quali l'area di una figura piana
- saper scomporre figure piane

- individuare i contesti reali in cui è possibile applicare la formula del teorema di Pick
- saper dedurre una formula a partire da un certo numero di osservazioni
- presentazione della formula per il calcolo di aree su un reticolo quadrato

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 3+ Presentazione Power Point

LEZIONE 4: RAPPORTI TRA AREE E PERIMETRI

- decidere se ci sono relazioni tra perimetro e area di una figura
- confrontare varie figure di uno stesso tipo
- osservare relazioni tra area e perimetro attraverso grafici cartesiani
- uso dei polinomi per la scrittura delle relazioni tra enti geometrici

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + testo prova Invalsi 2011

LEZIONE 5: APPROSSIMAZIONE DELLA SUPERFICIE DELL'ANTARTIDE

- applicare il teorema di Pick
- utilizzare scale numeriche per le carte geografiche
- confronto tra scale numeriche diverse
- spprossimare una figura con un poligono
- strategie per migliorare l'approssimazione di aree
- discussione sugli errori e sull'errore relativo

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta , cartina Antartide con scala, griglie stampate su lucido+ SCHEDA 4

2.2.3 SCHEDE I A

Data ____________________ **Classe** __________________
Nomi dei componenti del gruppo____

Scheda 1: Introduzione al Geopiano

Cosa faremo:

- Scopriremo o riscopriremo uno strumento per fare matematica: il Geopiano
- Sperimenteremo modalità per rappresentare alcune figure geometriche

Cosa è un GEOPIANO (Geoboard)

E' stato ideato dal matematico e pedagogista inglese Caleb Gattegno (1911-1988) e consiste in una tavoletta di plastica o di legno (se avremo tempo potremmo provare a costruirne qualcuno) , su cui è disegnato un *reticolo* i cui vertici sono messi in evidenza con dei chiodi o delle viti, che chiameremo *nodi.* Fra i chiodi si possono tendere degli elastici (di diverso colore e grandezza) e si possono rappresentare situazioni geometriche di natura talmente varia da permettere lo studio di numerosi problemi. Esistono diversi tipi di Geopiani: possono essere realizzati con <u>reticoli di quadrati,</u> formati da 9, 16, 25, o più chiodi, oppure con <u>reticoli di triangoli equilateri</u>.	Reticolo: ripetizione di una stessa figura affiancata fino a ricoprire il piano

Nel nostro Geopiano di plastica che tipo di reticoli abbiamo? ____________________________________
Da quanti nodi è formato ciascun reticolo? ____

Il nostro <u>Geopiano di plastica</u> e il <u>reticolo stampato:</u>

- ➢ Sul Geopiano di plastica con reticolo quadrato (utilizzando gli elastici) e poi sul foglio con il reticolo (utilizzando la riga) proviamo a costruire:
- un triangolo rettangolo,
- un quadrato,
- una figura formata da un quadrato e un triangolo rettangolo con un cateto coincidente con uno dei lati del quadrato.
- ➢ Osserviamo le figure ottenute, in particolare:
- I nodi lungo i lati delle figure: ____
- Il lato in comune tra triangolo e quadrato della terza figura ________________________

Dunque il nostro Geopiano di plastica ha dei **limiti**:
ad esempio se costruiamo due figure adiacenti nel reticolo stampato non riscontriamo nessun problema, mentre nel Geopiano,poiché ogni nodo ha uno spessore ,cioè occupa un certo volume , __________________
____

Possiamo rappresentare tutte le figure?______________________________________
Un quadrato lo possiamo rappresentare in entrambi i reticoli ? _________________________
Possiamo rappresentare tutti i poligoni? _____________________________________
Possiamo rappresentare tutti i triangoli? _____________________________________

- **Costruisci le seguenti figure nel reticolo quadrato del Geopiano:**
  - Un triangolo rettangolo isoscele
  - Un quadrato con le diagonali parallele ai bordi del Geopiano
  - Due triangoli che abbiano come altezza un segmento contenente 6 nodi.

- **Costruisci le seguenti figure nel reticolo triangolare del Geopiano:**
  - Un trapezio rettangolo
  - Un triangolo equilatero
  - Un triangolo con nessun lato parallelo ai bordi del Geopiano
  - Un parallelogramma con lo stesso numero di nodi in ogni lato.

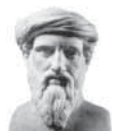
Cosa abbiamo imparato: **Prova a cercare degli esempi di Geopiano:**

Data ______________________ **Classe** ________________________

Nomi dei componenti del gruppo ____

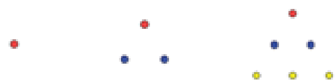
Scheda 2: I numeri figurati

Cosa faremo: Utilizzeremo il Geopiano per studiare alcune caratteristiche dei numeri naturali



Un po' di STORIA: Rappresentando **i numeri naturali con configurazioni geometriche di punti** possiamo ottenere conoscenze di tipo aritmetico. Tali configurazioni sono dette numeri figurati o poligonali. Fu uno dei filoni di ricerca di Pitagora di Samo (572 circa a.C. – fine VI sec a.C.) e della sua scuola.
I Pitagorici erano soliti rappresentare i numeri mediante punti sulla sabbia o mediante ciottoli e classificavano i numeri a seconda delle forme che si ottenevano disponendo nei vari modi i punti o i ciottoli che li rappresentavano;

1) I numeri 1, 3, 6,10, … erano detti numeri ***TRIANGOLARI*** perché i corrispondenti punti potevano essere disposti a triangolo.



SUL RETICOLO TRIANGOLARE:

Esercizio 1) Riproduci alcuni numeri triangolari nel Geopiano, riportali nella griglia stampata e completa la tabella. Sia n il numero triangolare n-esimo:

n-esimo numero triangolare	n=1	n=2	n=3				
Numero di nodi	1	3	6				

Esercizio 2) Quanti nodi vengono aggiunti ad ogni passaggio? (Aiutati con il Geopiano)

1 3 6 …… …… …… ……

1 2 _____ _____ _____ _____ _____

Noti qualche particolarità nella sequenza di numeri appena trovata? ______________________________

Esercizio 3) Cerchiamo di arrivare alla formula per un generico numero triangolare.

- Partiamo dal primo numero _____ con _____ nodo
- Il secondo numero triangolare è ____ con ____ nodi, lo otteniamo a partire dal primo numero ____ aggiungendo ____ , ovvero 1+2=3
- Il terzo numero triangolare è ____ con _____ nodi, lo otteniamo a partire dal secondo numero ____ aggiungendo ____, ovvero ____=6 e ritornando a ritroso 1+2+3=6
- Prova a continuare tu
  - il quarto numero triangolare è______e si ottiene sommando 1+2+3+4= _________
  - ____
  - ____
  - ____

Proviamo a formulare a parole una regola: *per ottenere l'n-imo numero triangolare* ________________________
Proviamo a scrivere in formule la regola espressa sopra ______________________________________

- Esiste un modo per calcolare n-esimo numero triangolare conoscendo solo n?

Teorema : Ogni n-esimo numero triangolare si ottiene con la somma dei primi n numeri naturali, e cioè con la formula $$\mathbf{T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Esercizio 4) Verificare la formula per un numero triangolare a piacere.

Esercizio 5) Qual è il 24-esimo (n=24) numero triangolare? ________

Esercizio 6) Qual è il numero triangolare che rappresenta il triangolo con 9 nodi in ogni lato?__________

Data _______________ Classe _______________

Nomi dei componenti del gruppo ____

Scheda 3: Il Teorema di Pick

Cosa faremo: cercheremo di triangolare alcuni poligoni e cercheremo delle relazioni "particolari" tra nodi

Triangolare un poligono: scomporlo in triangoli, non necessariamente congruenti tra loro. I triangoli non devono sovrapporsi l'un con l'altro e i loro lati non devono intrecciarsi.

Esercizio 1) Triangola le seguenti figure nel reticolo quadrato del Geopiano:

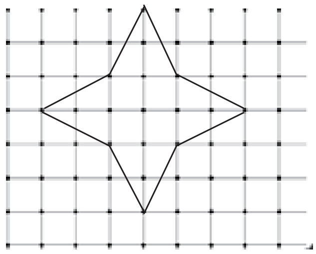


Figura **a)**

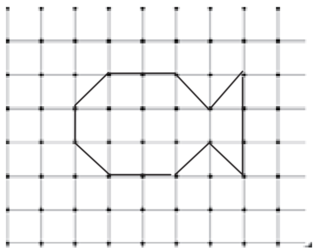


Figura **b)**

- **Ogni poligono è triangolabile?**___________________________________
- **Che metodo hai usato per triangolare?**___________________________________

Chiamiamo :
- *NODI **INTERNI:*** i nodi che non toccano nessun lato del poligono. Li indicheremo con la lettera "**I**".
- *NODI sul **BORDO**:* i nodi che toccano (internamente o esternamente) un lato. Li indicheremo con **"B"**

Esercizio 2) Cerchiamo di vedere se esiste una relazione tra **I , B** e **l'area di un poligono.** Osserva le seguenti figure e completa la tabella:

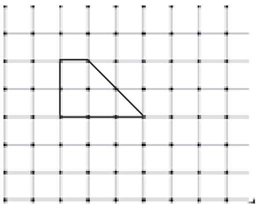


Figura **d)**

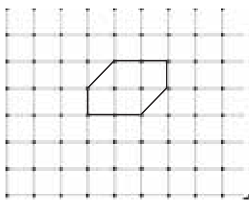


Figura **e)**

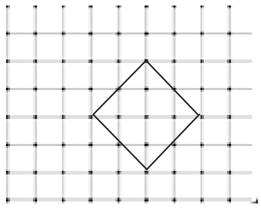


Figura **f)**

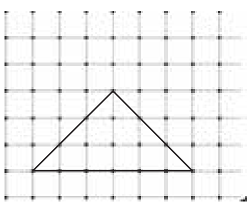


Figura **g)**

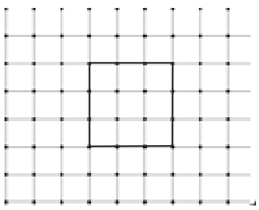


Figura **h)**

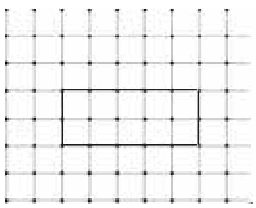


Figura **i)**

	Nodi interni = **I**	Nodi sul bordo = **B**	AREA	* AREA +1
Figura **d)**	1	8		
Figura **e)**				
Figura **f)**				
Figura **g)**				
Figura **h)**				
Figura **i)**				

- **Noti qualche relazione particolari tra i nodi?**____

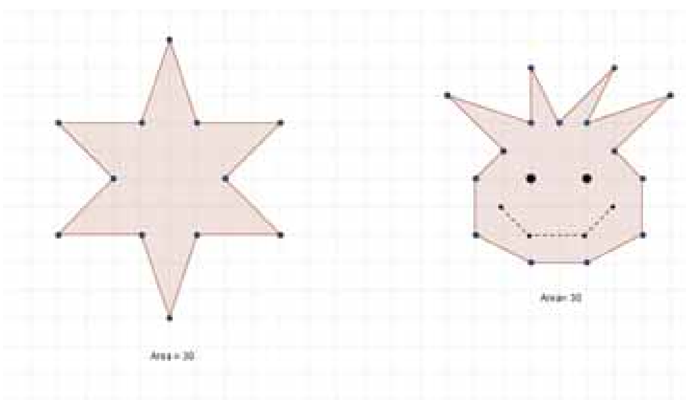
- **vedi delle relazioni particolari tra i nodi e l'area dei poligoni?** ____________________________________

Teorema di Pick : ***Sia P poligono semplice (lati non intrecciati) con <u>vertici nel reticolo quadrato</u>. La sua area è data dalla formula:***

Area(P)=

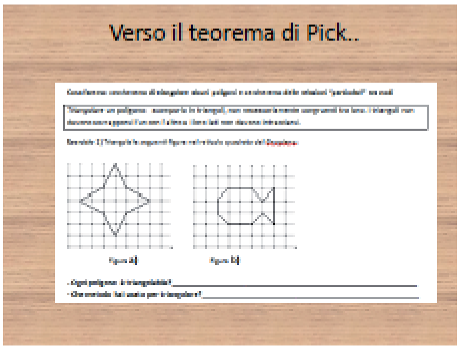
Con : B = nodi sul bordo del poligono
I =nodi interni al poligono

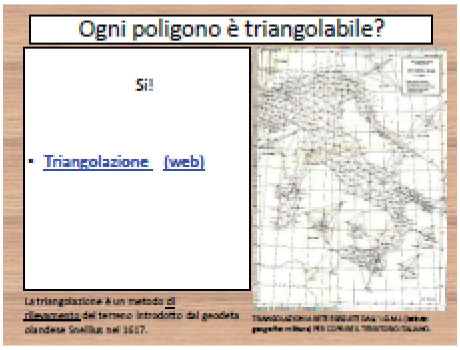
Esercizio 3) Verifica la formula di Pick uno dei seguenti poligoni:

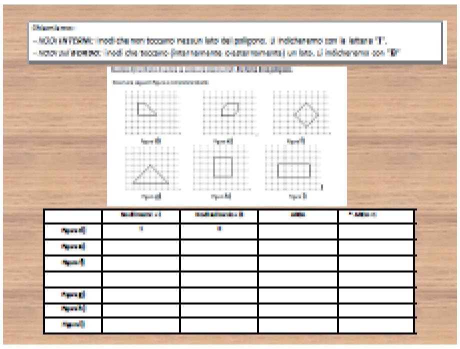


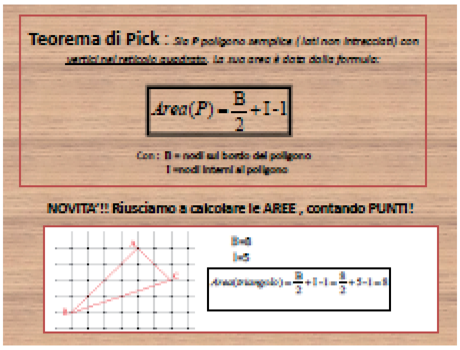
I	
B	
Area con Pick	

PRESENTAZIONE in Power Point









Data ______________________ **Classe** ____________________

Nomi dei componenti del gruppo ____

Scheda 4: Approssimazioni

Una *carta* è una rappresentazione piana, ridotta, approssimata e simbolica della superficie terrestre o una parte di essa.
La *scala* numerica di una carta è il rapporto tra le distanze grafiche sulla carta e le corrispondenti distanze naturali n . E' espressa nella forma :

1 : n

ESERCIZIO 1) Riportare nel geopiano un segmento contenente 6 nodi.

- Da quante unità u (intese come segmenti tra 2 nodi orizzontali o verticali) è costituito? __________ u
- Se scegliamo 3 cm come valore di un'unità, ovvero 1 u =3 cm, quando misurerebbe il segmento in cm?__________ cm

-Utilizzando la griglia 1) trasparente e la rispettiva scala, provare a stimare la distanza tra i due luoghi dell'Antartide indicati dagli asterischi. La distanza tra essi è e di _________________________ Km.

ESERCIZIO 2) Riportare nel geopiano un quadrato di lato un'unità.

-Il suo perimetro è di ____________ unità

-La sua area è di _____ u x _____ u = ______u^2

Se assumiamo che un'unità del geopiano corrisponda a 3 cm reali, ovvero 1:3, avremo che:

-il perimetro del quadrato è di ___________ cm

-l'area del quadrato è di ______________cm^2

ESERCIZIO 3) Riportare nel geopiano un rettangolo di base 2 u e altezza 1 u. Se quella fosse l'immagine in scala di un campo da calcio, con dimensioni 1:50 m, cioè un'unità del geopiano vale 50 metri nella realtà

-quanto è il perimetro del campo in metri?_________________________

-quanto è la sua area?_______________________________

ESERCIZIO 4) Riporta nel geopiano un poligono simile alla forma dell'Antartide. Utilizzando la formula di Pick otteniamo:

AREA = ____=___________ u^2

Per stimare la superficie reale dell'Antartide, ha senso parlare di unità? SI NO

Perchè?____

ESERCIZIO 5) Utilizzando le due griglie trasparenti 1) e 2), stimare l'area dell'Antartide utilizzando le rispettive scale per le dimensioni e il teorema di Pick.

- *nella griglia 1 l'approssimazione dell'area è*__________________________________ Km^2
- *nella griglia 2 l'approssimazione dell'area è*__________________________________ Km^2

Otterremo un'approssimazione migliore con la griglia 1 o con la 2?____________________

Perchè?____

errore assoluto= | area esatta – area calcolata | = ____

errore relativo= errore assoluto / area calcolata =____

errore relativo in percentuale= errore relativo x 100= _______________________________


ANTARTICO
Polo Sud
Mt. Menzies

2.2.4 Programma lezioni II A

LEZIONE 1: INTRODUZIONE AL Geopiano

- introdurre questo strumento evidenziandone caratteristiche, potenzialità e limiti
- iniziare a prendere mano con gli elastici per la costruzione di figure
- rappresentare alcune figure geometriche sia nel reticolo quadrato che in quello triangolare, mettendone in evidenza le loro proprietà
- ripassare i concetti di figura,poligono, poligono regolare e classificazione di triangoli e quadrilateri
- disegnare alcune figure geometriche in posizioni non usuali per evidenziare eventuali misconcetti dovuti al binomio concetto/immagine mentale e per capire quali proprietà delle figure sono invarianti

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 1

LEZIONE 2: VERSO IL TEOREMA DI PICK

- strategie di triangolazione dei poligoni
- data la definizione di triangolazione applicarla a dei poligoni
- metodo induttivo: partire da una regola che vale per alcuni casi e generalizzarla

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 2

LEZIONE 3: FORMULA DI PICK e DIMOSTRAZIONE

- utilizzo di Geogebra per applicare il Teorema di Pick
- capire i punti salienti della dimostrazione del Teorema di Pick
- individuare i contesti reali in cui è possibile applicare la formula del teorema di Pick

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 3 + Presentazione Powe Point

LEZIONE 4: EQUIVALENZA, CONGRUENZA, EQUISCOMPONIBILTA' e TEOREMA DI PITAGORA

- decidere se ci sono relazioni tra aree delle figure

- confrontare varie figure di uno stesso tipo
- capire la differenza tra equivalenza, congruenza ed equiscomponibilità facendo esempi
- leggenda sul teorema di Pitagora
- dimostrazione geometrica e algebraica del teorema di Pitagora
- applicazione del teorema di Pick per verificare il teorema di Pitagora

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 4

LEZIONE 5: PROPORZIONALITA' TRA AREE ed INCOMMENSURABILITA'

- Capire come variano le aree e i perimetri
- rapporti tra aree
- cenno al Dialogo del Menone riguardo lo sdoppiamento del quadrato
- numeri irrazionali
- dimostrazione dell'irrazionalità di radice di 2

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 5

2.2.5 SCHEDE II A

Data ______________________ **Classe** ____________________

Nomi dei componenti del gruppo ____

Scheda 1: Introduzione al Geopiano

Cosa faremo:

- Scopriremo o riscopriremo uno strumento per fare matematica: il Geopiano
- Sperimenteremo modalità per rappresentare alcune figure geometriche

Cosa è un GEOPIANO (Geoboard)

E' stato ideato dal matematico e pedagogista inglese Caleb Gattegno (1911-1988) e consiste in una tavoletta di plastica o di legno (se avremo tempo potremmo provare a costruirne qualcuno) , su cui è disegnato un *reticolo* i cui vertici sono messi in evidenza con dei chiodi o delle viti, che chiameremo *nodi.* Fra i chiodi si possono tendere degli elastici (di diverso colore e grandezza) e si possono rappresentare situazioni geometriche di natura talmente varia da permettere lo studio di numerosi problemi. Esistono diversi tipi di Geopiani: possono essere realizzati con <u>reticoli di quadrati,</u> formati da 9, 16, 25, o più chiodi, oppure con <u>reticoli di triangoli equilateri</u>.	Reticolo: ripetizione di una stessa figura affiancata fino a ricoprire il piano

Nel nostro Geopiano di plastica che tipo di reticoli abbiamo? ____

Da quanti nodi è formato ciascun reticolo? ____

Il nostro <u>Geopiano di plastica</u> e il <u>reticolo stampato:</u>

- ➢ Sul Geopiano di plastica con reticolo quadrato (utilizzando gli elastici) e poi sul foglio con il reticolo (utilizzando la riga) proviamo a costruire:
- \- un triangolo rettangolo,
- \- un quadrato,
- \- una figura formata da un quadrato e un triangolo rettangolo con un cateto coincidente con uno dei lati del quadrato.
- ➢ Osserviamo le figure ottenute, in particolare:
- \- I nodi lungo i lati delle figure: ____
- \- Il lato in comune tra triangolo e quadrato della terza figura ______________________________

Dunque il nostro Geopiano di plastica ha dei **limiti**:
ad esempio se costruiamo due figure adiacenti nel reticolo stampato non riscontriamo nessun problema, mentre nel Geopiano,poiché ogni nodo ha uno spessore ,cioè occupa un certo volume , _______________________
____

Possiamo rappresentare tutte le figure?____

Un quadrato lo possiamo rappresentare in entrambi i reticoli ? ______________________________

Possiamo rappresentare tutti i poligoni? ____

Possiamo rappresentare tutti i triangoli? ____

- **Costruisci le seguenti figure nel reticolo quadrato del Geopiano:**
  - Un triangolo rettangolo isoscele
  - Un quadrato con le diagonali parallele ai bordi del Geopiano
  - Due triangoli che abbiano come altezza un segmento contenente 6 nodi.

- **Costruisci le seguenti figure nel reticolo triangolare del Geopiano:**
  - Un trapezio rettangolo
  - Un triangolo equilatero
  - Un triangolo con nessun lato parallelo ai bordi del Geopiano
  - Un parallelogramma con lo stesso numero di nodi in ogni lato.

Cosa abbiamo imparato: **Prova a cercare degli esempi di Geopiano:**

Data ______________________ **Classe** ________________________

Nomi dei componenti del gruppo ____

Scheda 2: Triangolazione e Conteggio dei Nodi

Cosa faremo: cercheremo di triangolare alcuni poligoni e cercheremo delle relazioni "particolari" tra nodi

Triangolare un poligono: scomporlo in triangoli, non necessariamente congruenti tra loro. I triangoli non devono sovrapporsi l'un con l'altro e i loro lati non devono intrecciarsi.

Esercizio 1) Triangola le seguenti figure nel reticolo quadrato del Geopiano:

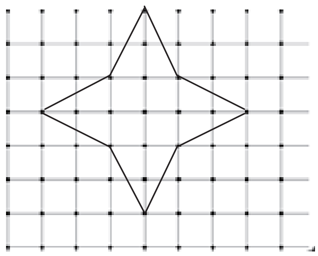


Figura **a)**

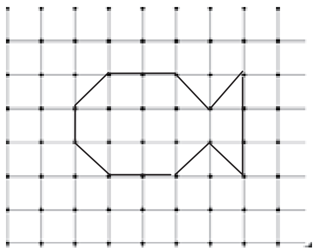


Figura **b)**

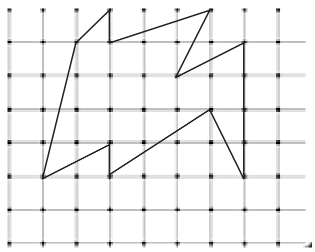


Figura **c)**

Esercizio 2) Inventa una figura e fai una triangolazione.

- **Ogni poligono è triangolabile?**____
- **Che metodo hai usato per triangolare?**_____________________________________

Chiamiamo :
- *NODI* ***INTERNI:*** i nodi che non toccano nessun lato del poligono. Li indicheremo con la lettera "**I**".
- *NODI sul* ***BORDO:*** i nodi che toccano (internamente o esternamente) un lato. Li indicheremo con "**B**"

Esercizio 3) Utilizzando le figure dell'Esercizio 1) , completa la tabella qui a fianco:

	Nodi interni = **I**	Nodi sul bordo = **B**
Figura **a)**		
Figura **b)**		
Figura **c)**		

Assumiamo che il lato di ogni quadrato del reticolo sia 1 unità = 1 u. Quanto sarà la sua area?__________

Un rettangolo con base 3 u e altezza 2 u, avrà una misura di superficie di ______. In effetti esso è costituito da _________ quadrati del reticolo, ognuno di area_______, come detto precedentemente.

Disegna il rettangolo nella griglia stampata e colorane la superficie.

Esercizio 4) Cerchiamo di vedere se esiste una relazione tra **I , B** e **l'area di un poligono.**

Osserva le seguenti figure e completa la tabella:

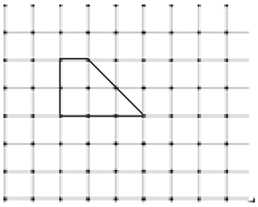


Figura **d)**

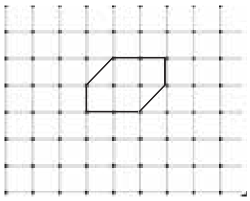


Figura **e)**

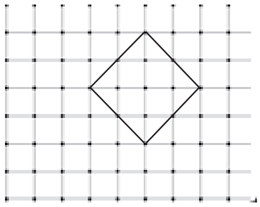


Figura **f)**

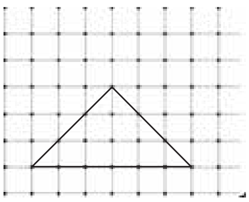


Figura **g)**

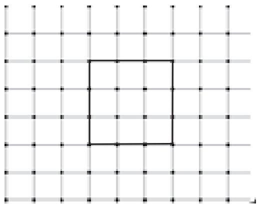


Figura **h)**

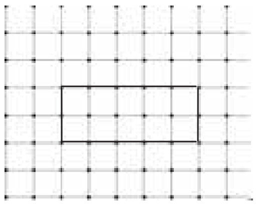


Figura **i)**

	Nodi interni = **I**	Nodi sul bordo = **B**	AREA
Figura **d)**			
Figura **e)**			
Figura **f)**			
Figura **g)**			
Figura **h)**			
Figura **i)**			

- **Noti qualche relazione particolari tra i nodi?**____

- **vedi delle relazioni particolari tra i nodi e l'area dei poligoni?** ____

Prova a trovare un formula GENERALE, che leghi queste tre quantità. Se è necessario, costruisci nel Geopiano altri poligoni di cui sai calcolare l'area e conteggia nodi interni ed esterni.

(Geopiano online: http://www.geogebra.org/en/upload/files/italian/giovanna/grigliaPick.html)

Data ______________________ Classe ________________________

Nomi dei componenti del gruppo ____

Scheda 3: Il Teorema di Pick per poligoni semplici

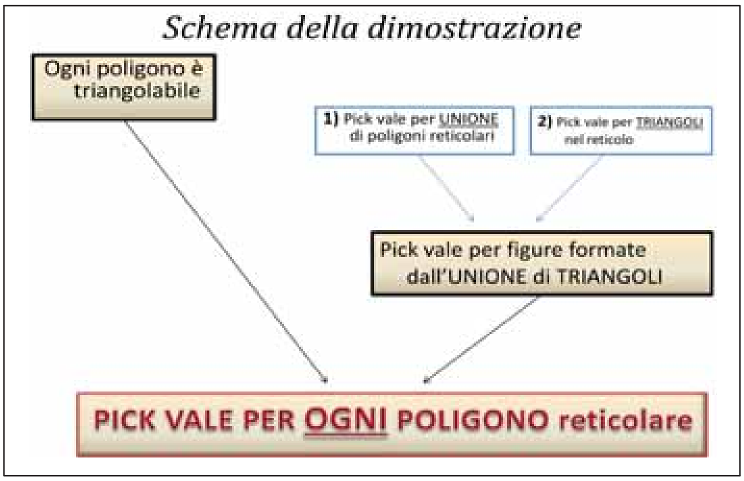
Teorema di Pick . *Sia **P** poligono semplice (lati non intrecciati) con vertici nel reticolo quadrato. La sua area è data dalla formula:*

$$\boldsymbol{Area(P)} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{I} - \boldsymbol{1}$$

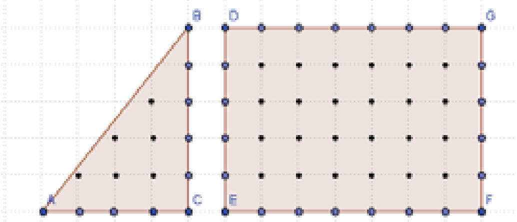
Con : **B = nodi sul bordo , I =nodi interni**

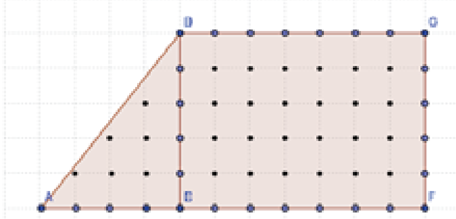
NOVITA'!! Riusciamo a calcolare le AREE , contando PUNTI!

E'un formula potente e molto semplice, ma ha una dimostrazione complicata.



1) **Componendo figure, la formula di Pick continua a valere?** Vediamolo con un esempio.





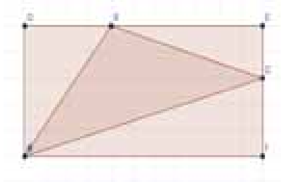
I	
B	
Area con Pick	

I	
B	
Area con Pick	

I	
B	
Area con Pick	

Si dice che la formula è ADDITIVA, cioè vale per figure formate da accostamenti di più poligoni.
(è anche Sottrattiva)

2) Pick vale per i TRIANGOLI nel reticolo ?

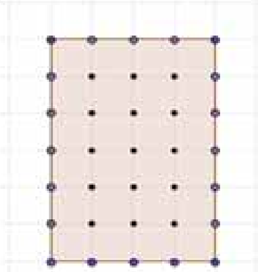


Ogni triangolo generico può essere inscritto in un rettangolo con lati paralleli ai bordi. Quindi la sua area , può essere calcolata:

Area(T) = Area(Rettangolo) - Area(Triangoli rettangoli)

Poiché Pick vale per unioni di poligoni per 1), basta dimostrare che Pick vale per RETTANGOLI e TRIANGOLI RETTANGOLI. Vediamolo:

- Pick vale per Rettangoli?



Supponiamo di avere un rettangolo di base **b** e altezza **h**. (Es. nella figura b=4 unità, h=6 unità)
- Per la formula geometrica conosciuta: area(rettangolo)= **b · h**

Siamo sicuri che anche Pick mi da questo risultato? Proviamo

Nodi sul bordo = **B**= (b+1)+(b+1)+(h+1)+(h+1)-4 = = 2b+2h

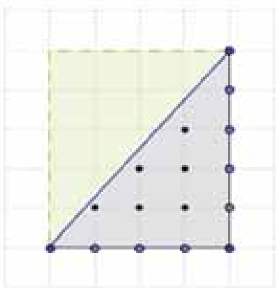
Nodi all'interno = **I** = (b-1)·(h-1) = b·h-b-h+1

Applicando la formula di Pick si ha:

$$\textit{Area con Pick(rettangolo)} = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{(2b+2h)}{2} + (b \cdot h - b - h + 1) - 1$$
$$= b + h + b \cdot h - b - h + 1 - 1$$
$$= \mathbf{b \cdot h}$$

* Attenzione! Nel Geopiano ogni segmento lungo n *unità* contiene n+1 *nodi*.

- Pick vale per Triangoli Rettangoli?



Supponiamo di avere un TRIANGOLO rettangolo di base **b** e altezza **h**.
(Es. nella figura b=4 unità, h=5 unità)
Per la formula geometrica conosciuta:
area(rettangolo)= $\frac{(\mathbf{b \cdot h})}{\mathbf{2}}$

Siamo sicuri che anche Pick mi da questo risultato? Proviamo

Nodi sul bordo= **B**= (b+1)+(h+1)-1

Nodi all'interno= **I** = $\frac{(b-1)\cdot(h-1)}{2}$

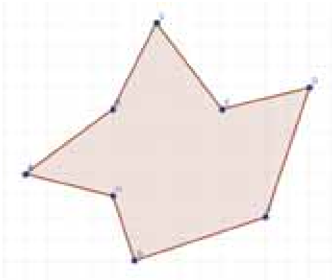
$$\text{Area con Pick(triang. rettangolo)} = \frac{B}{2} + I - 1$$
$$= \ldots$$
$$= \frac{b \cdot h}{2}$$

Quindi Pick vale rettangoli e per triangoli rettangoli! E da quello che abbiamo dimostrato in 1) segue che:

Pick vale per **Triangoli Generali** e per **unioni di triangoli .**

3) Ogni poligono è triangolabile?

Triangola il seguente poligono:



Abbiamo già visto con la scheda precedente alcuni metodi per triangolare. (C'è una dimostrazione per induzione…)

METTENDO INSIEME I Passi 1) 2) E 3) SIAMO RIUSCITI A DIMOSTRARE CHE

PICK VALE PER OGNI POLIGONO RETICOLARE.

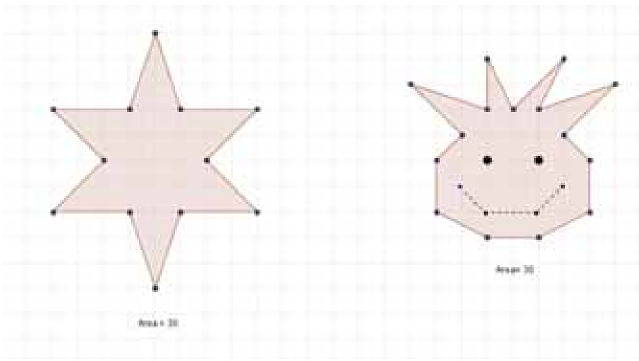
FINE DIMOSTRAZIONE

ESERCIZI:

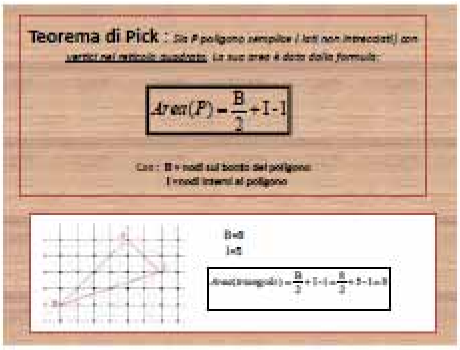
- Scegli una figura a tuo piacimento, costruiscila nel Geopiano e nella griglia stampata. Poi dividila in due poligoni e completa la tabella:

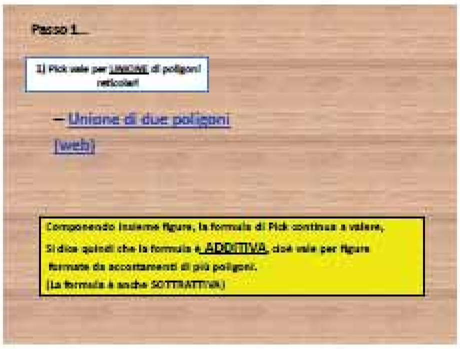
	nodi interni	Nodi sul bordo	Area con Pick
P_1			
P_2			
$F = P_2 \cup P_2$			

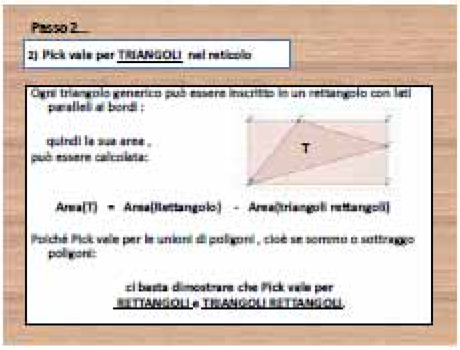
- Triangola nella griglia stampata una delle seguenti figure. Poi riproducila nel Geopiano e calcolane l'area con Pick.

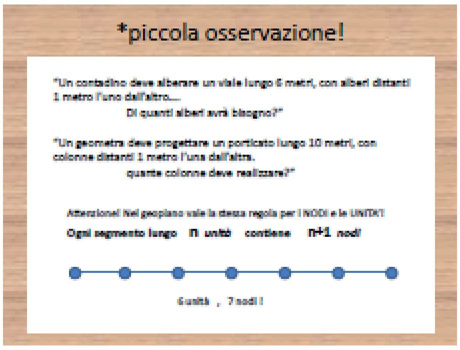


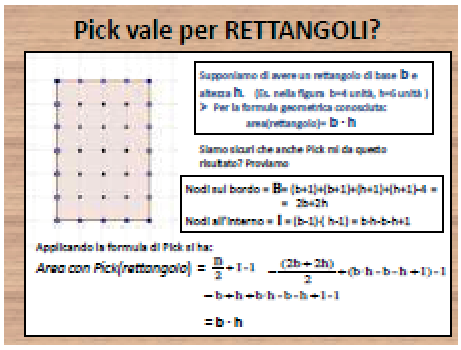
PRESENTAZIONE in Power Point

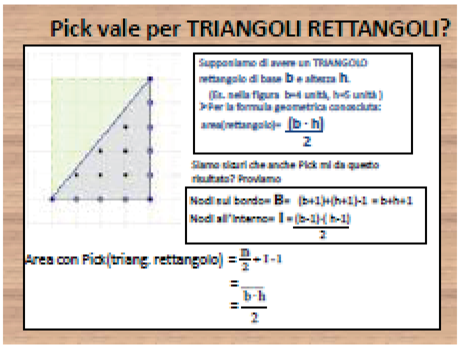


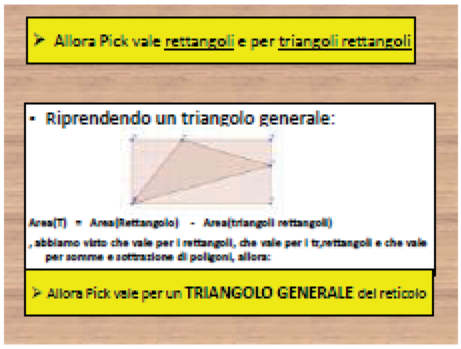




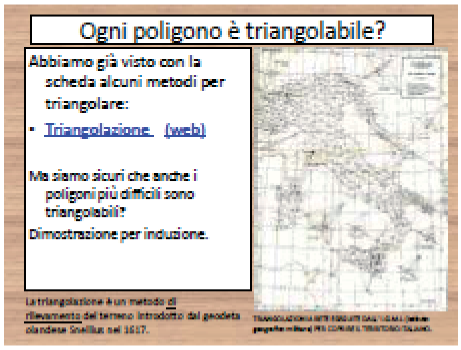

*piccola osservazione!
"Un contadino deve alberare un viale lungo 6 metri, con alberi distanti 1 metro l'uno dall'altro....
Di quanti alberi avrà bisogno?"
"Un geometra deve progettare un porticato lungo 10 metri, con colonne distanti 1 metro l'una dall'altra.
quante colonne deve realizzare?"
Attenzione! Nel geopiano vale la stessa regola per i NODI e le UNITA'!
Ogni segmento lungo n unità contiene n+1 nodi!
6 unità , 7 nodi !


Pick vale per RETTANGOLI?
Supponiamo di avere un rettangolo di base b e altezza h. (Es. nella figura b=4 unità, h=6 unità)
Per la formula geometrica conosciuta: area(rettangolo)= b · h
Siamo sicuri che anche Pick mi da questo risultato? Proviamo
Nodi sul bordo = B= (b+1)+(b+1)+(h+1)+(h+1)-4 = = 2b+2h
Nodi all'interno = I = (b-1)·(h-1) = b·h-b-h+1
Applicando la formula di Pick si ha:
Area con Pick(rettangolo) =
=b · h


Pick vale per TRIANGOLI RETTANGOLI?
Supponiamo di avere un TRIANGOLO rettangolo di base b e altezza h.
(Es. nella figura b=4 unità, h=5 unità)
Per la formula geometrica conosciuta:
area(rettangolo)= (b · h) / 2
Siamo sicuri che anche Pick mi da questo risultato? Proviamo
Nodi sul bordo= B= (b+1)+(h+1)-1 = b+h+1
Nodi all'interno= I = (b-1)·(h-1) / 2
Area con Pick(triang. rettangolo) =


Allora Pick vale rettangoli e per triangoli rettangoli
Riprendendo un triangolo generale:
Area(T) = Area(Rettangolo) - Area(triangoli rettangoli)
, abbiamo visto che vale per i rettangoli, che vale per i tr,rettangoli e che vale per somme e sottrazione di poligoni, allora:
Allora Pick vale per un TRIANGOLO GENERALE del reticolo


Schema della dimostrazione
Ogni poligono è triangolabile
1) Pick vale per UNIONE di poligoni reticolari
Pick vale per UNIONE di TRIANGOLI
PICK VALE PER OGNI POLIGONO reticolare


Ogni poligono è triangolabile?
Abbiamo già visto con la scheda alcuni metodi per triangolare:
Triangolazione (web)
Ma siamo sicuri che anche i poligoni più difficili sono triangolabili?
Dimostrazione per induzione.

Data ______________________ **Classe** ________________________

Nomi dei componenti del gruppo____

Scheda 4: Il Teorema di Pitagora

Cosa faremo: riprenderemo i concetti di equivalenza, equiscomponibilità e congruenza e dimostreremo il Teorema di Pitagora

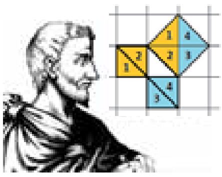
Due poligoni sono: - *CONGRUENTI*: quando possono essere sovrapposti mediante un movimento rigido. - *EQUIVALENTI*: quando hanno la stessa area. - *EQUISCOMPONIBILI:* quando sono somme di poligoni congruenti.

Esercizio 1) Costruire nel Geopiano e nella griglia stampata:
- 2 poligoni equivalenti ma non congruenti
- 2 poligoni equiscomponibili.

Esercizio 2) Costruire due figure <u>diverse tra loro</u> ma con lo stesso numero di nodi sul bordo e di nodi interni.
Utilizzando il teorema di Pick, cosa possiamo affermare con certezza?____

Esercizio 3) Indicare per ogni affermazione se è vera o falsa:

- poligoni congruenti sono sempre equivalenti	V	F
-poligoni equivalenti sono sempre congruenti	V	F
-poligoni equiscomponibili sono sempre equivalenti	V	F
-poligoni equivalenti sono sempre equiscomponibili	V	F

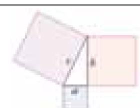


Si racconta che Pitagora abbia scoperto il suo teorema mentre stava aspettando di essere ricevuto da Policrate. Seduto in un grande salone del palazzo del tiranno di Samo, Pitagora si mise ad osservare le piastrelle quadrate del pavimento..si pensa che ne abbia vista una rotta perfettamente su di una diagonale, così da formare due triangoli rettangoli uguali: l'area del quadrato costruito sulla diagonale di uno dei due triangoli rettangoli risultava il doppio dell'area di una piastrella.

Esercizio 4) Costruire nel reticolo quadrato del Geopiano e in quello stampato, un triangolo rettangolo isoscele con cateti lunghi 3 unità.
- Dimostrare che vale ancora il Teorema di Pitagora utilizzando l'equiscomponibilità.
- Verificare il Teorema di Pitagora utilizzando la formula di Pick

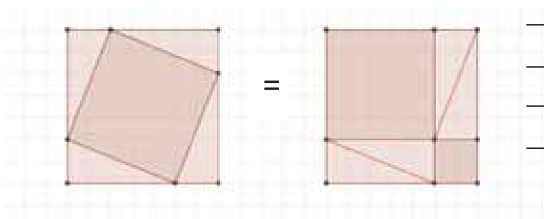
TEOREMA DI PITAGORA: In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



- COMPLETARE LE DUE DIMOSTRAZIONI:

1) Dimostrazione geometrica :



____

____

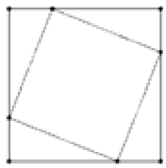
____

____

2) Dimostrazione algebrica: ____

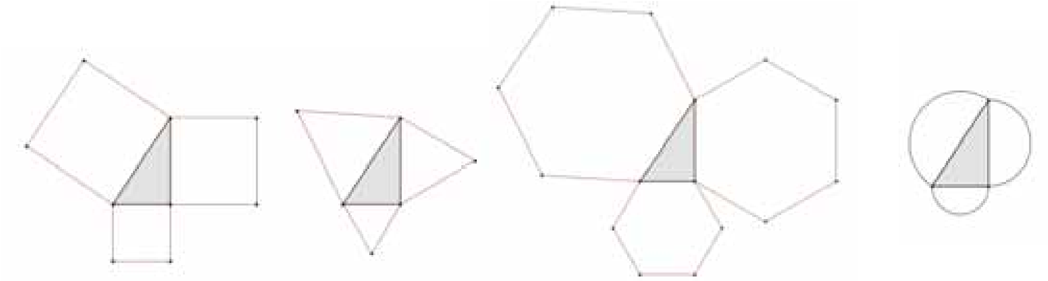
____

____



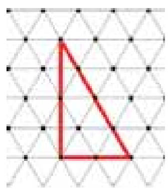
TEOREMA DI PITAGORA ESTESO: Nel teorema di Pitagora costruiamo dei quadrati sui lati del triangolo rettangolo. In realtà se al posto dei quadrati costruiamo altri POLIGONI REGOLARI (o dei SEMICERCHI), vale ancora la regola:

AREA del poligono costruito sull'ipotenusa = SOMMA DELLE AREE dei poligoni costruiti sui due cateti



Esercizio 5) Utilizzando il reticolo triangolare del Geopiano, costruire il triangolo rettangolo mostrato in figura.
- Costruire un triangolo equilatero su ogni lato del triangolo rettangolo
- verificare il Teorema di Pitagora esteso utilizzando la ***formula di Pick per il reticolo triangolare:***

$$\mathbf{Area(P)} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} + \mathbf{I} - \mathbf{1}\right) \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$



Data ______________________ **Classe** ____________________
Nomi dei componenti del gruppo ____

Scheda 5: Proporzionalità tra grandezze e incommensurabilità

Esercizio 1) Costruire nel Geopiano e nella griglia stampata:
- un rettangolo di area 6 u^2 ed uno di area doppia.

-un triangolo di area 6 u^2 ed uno di area doppia.

Che metodo hai usato?____

Esercizio 2) In un dialogo, tratto dal *Menone*, Platone scrive il seguente dibattito tra Socrate e uno schiavo:

<< …Socrate: "Il lato di questo quadrato è di due piedi; quanto sarà quello del quadrato avente superficie doppia?"
Schiavo: " Evidentemente il doppio, Socrate!" …>>

- Secondo voi, lo schiavo ha ragione? SI NO
- Perché?____

1. Costruire nel Geopiano (e nella griglia stampata) un quadrato ABCD di lato 2 unità ed accanto un quadrato di lato doppio. Osservare la figura:
   - Quanti quadrati congruenti ad ABCD contiene il secondo quadrato? __________________________
   - Qual è il rapporto tra le superfici dei due quadrati costruiti?________________________________
   - Ha ragione lo schiavo?___________________________________

2. Consideriamo adesso il solito quadrato ABCD e un quadrato che pensate possa avere superficie doppia rispetto ad ABCD.
   - Che quadrato avete ottenuto?Siete riusciti a disegnarlo nel geopiano?__________________________
   - Secondo voi, a quale valore deve avvicinarsi la misura del lato del quadrato cercato?____________________

3. Riprendiamo il quadrato ABCD , costruire nel geopiano (e nella griglia stampata) il quadrato DBEF avente per lato la diagonale DB.
   - Come è la superficie del tr.rettangolo BCD rispetto a quella di ABCD?____________________________
   - Quanti triangoli congruenti a BCD sono contenuti in DBEF? __________________________________
   - Quale è il rapporto tra le superfici dei quadrati?______________________________________
   - Che tipo di numero rappresenta il lato del quadrato cercato?_____________________________

4. Esponi in forma di dimostrazione geometrica il punto 3 (consiglio:utilizzare l'equiscomponibilità)

Esercizio 3) - Cosa significa che due grandezze sono incommensurabili?

- La diagonale del quadrato e il suo lato sono incommensurabili. Dimostriamolo per un quadrato di lato 1 unità.

2.2.6 Punti in comune tra l'attività con il Geopiano e la programmazione didattica delle classi

Abbiamo già detto che tutto il progetto si pone tra gli obiettivi quello di adattarsi al POF previsto dall'Istituto.

Vediamo i programmi scolastici delle due classi.

I ANNO

Modulo 1	Insiemi numerici ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) 1) Numeri naturali e interi 2) Numeri razionali
Modulo 2	Elementi di algebra (algebra dei monomi e polinomi) Unica u.d.
Modulo 3	Frazioni algebriche Scomposizioni e frazioni algebriche
Modulo 4	Equazioni di primo grado 1) Equazioni di primo grado intere 2) Equazioni di primo grado e ad esse riconducibili
Modulo 5	Statistica
Modulo 6	Elementi fondamentali di geometria euclidea
Modulo 7	Geometria euclidea sintetica: triangoli
Modulo 8	Geometria euclidea sintetica: parallelismo e quadrilateri
Modulo 9	Insiemistica e complementi 1) Elementi di insiemistica 2) Sistema decimale posizione, forma polinomiale di un numero, calcolo approssimato (elementi) 3) Elementi di calcolo combinatorio

II ANNO

Modulo 1	Sistemi lineari E interpretazione geometrica dei SL(2,2)
Modulo 2	Radicali
Modulo 3	Equazioni di secondo grado
Modulo 4	Disequazioni di primo e secondo grado, sistemi di disequazioni. Sistemi di secondo grado ed equazioni irrazionali. 1) Disequazioni di primo grado e sistemi di disequazioni 2) Disequazioni di grado superiore al primo 3) Elementi sulle equazioni e disequazioni in valore assoluto ed equazioni irrazionali
Modulo 5	Geometria euclidea: circonferenza, punti notevoli triangolo, teoria dell'equivalenza, similitudini 1) Circonferenza e punti notevoli 2) Teoria equivalenza e conseguenze 3) Similitudine di triangoli
Modulo 6	Probabilità
Modulo 7	Complementi (elementi del piano cartesiano, elementi di logica, trasformazioni geometriche in chiave sintetica) 1) Considerazioni elementari sul piano cartesiano 2) Elementi di insiemistica e logica 3) Trasformazioni geometriche in chiave sintetica
Modulo 8	Equazioni e sistemi di grado superiore al secondo (solo Tecnico) (**)
Modulo 9	Disequazioni di grado superiore al secondo (solo Tecnico) (**)

(**) La presente articolazione in moduli è stata elaborata e condivisa con gli insegnanti di dipartimento dell'indirizzo Tecnico e del biennio Scientifico. Ove indicato il modulo è da riferirsi al solo Tecnico o solo Scientifico

Oltre alle conoscenze riportate nelle tabelle precedenti, si hanno traguardi di competenza da raggiungere. Per quanto riguarda l'asse matematico, le competenze da acquisire sono:

1. Competenze d'asse	
Asse culturale: Matematico	1. Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.
	2. Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
	3. Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.
	4. Analizzare dati e interpretarli anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche e sussidi informatici.

Effettivamente il progetto permette di svilupparle tutte e quattro, in particolare la numero 3 e la numero 2.

Vediamo uno schema dettagliato dei collegamenti tra gli argomenti che abbiamo proposto in classe e le competenze coinvolte.

Argomento	Classe	Moduli e ud del docente	Competenza 1	Comp.2	Comp.3	Comp.4
TRIANGOLI e QUADRILATERI Posizione e classificazione	1 2	7 8 7.3		x	x	x
AREA e PERIMETRO	1 2	6 9 5.2	x		x	x
TEORIA EQUIVALENZA Equiscomponibilità Proporzionalità	2 1 2	5.2 7.1	x	x	x	x
TEOREMA PITAGORA	2	5.2		x	x	
PICK Verifica Applicazioni Dimostrazione	1 1-2 2-3		x	x	x	x
Approssimazione aree geografiche	1		x	x	x	x
Insiemi numerici Numeri figurati	1 2 1	1 2 7.2 2	x		x	x
Paradosso di Curry	2	5.3		x	x	x

3 Diario di bordo

Nelle prossime pagine è possibile trovare una traccia commentata dell'esperienza didattica svolta in classe.

Le principali classi sulle quali abbiamo lavorato sono la IA e la IIA. Il formato delle pagine è leggermente diverso, in quanto per la realizzazione di questa parte è stato molto più semplice utilizzare il pacchetto Office in modo da poter inserire foto e parti di schede.

Abbiamo indicato:
- in blu e con delle linee verticali sulla sinistra: le parti di scheda presentate
- in nero: i commenti, le domande, i dubbi e le riflessioni scuscitati durante l'esperienza

Le foto presenti sono state fatte in classe, tranne alcune scattate a casa per riprodurre alcune situazioni viste in classe.

Parte I
Classe I A

3.1 Lezione 1: Introduzione al Geopiano, parte 1

<u>LEZIONE 1. (1 ora)</u> 17-01-2014

Dopo alcune parole sul Geopiano, sulla sua nascita e sul suo utilizzo, mostrandolo alla classe, ho chiesto se qualcuno ne aveva mai visto uno. Solo un ragazzo dice di averlo visto alle elementari, ma non si ricorda per cosa lo aveva utilizzato. Spiego ai ragazzi che quello che faremo sarà un laboratorio, ovvero esploreremo insieme, divisi in gruppi, questo nuovo strumento da un punto di vista matematico.

I ragazzi sono 14, di cui uno con disabilità, del quale parleremo successivamente*. Vengono formati 5 gruppi da 2 persone e un gruppo da 3. Consegniamo ad ogni gruppo un Geopiano, una busta di elastici, alcune griglie stampate e la scheda 1 da compilare.

Iniziamo la compilazione insieme con una discussione frontale che coinvolge tutti i ragazzi, ai quali chiedo : "*come descrivereste questo strumento*?" Fin da subito parlano di quadrati e triangoli "*messi insieme"* in modo da formare un reticolo e piano piano arriviamo a dare una definizione più precisa. Iniziamo allora, sempre tutti insieme, la compilazione della scheda che prevede come prime domande :

> Nel nostro Geopiano di plastica che tipo di reticoli abbiamo? ____________________
> Da quanti nodi è formato ciascun reticolo? _________________________________

Dopo aver chiamato i reticoli QUADRATO e TRIANGOLARE, iniziamo il conteggio dei nodi di ogni reticolo. Tutti utilizzano la moltiplicazione per fare il conteggio, ma alcuni sbagliano. Sono 11 righe formate da 11 nodi l'una, quindi il conteggio dà 121, ma alcuni ottengono 110: sbagliano perché contano i nodi di una riga e moltiplicano per le righe rimanenti. Gli ricordiamo come eseguire esattamente una moltiplicazione e subito si correggono.

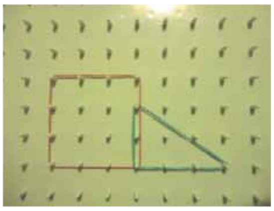
A questo punto li lasciamo completare la scheda autonomamente.

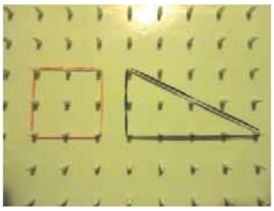
> **Il nostro <u>Geopiano di plastica</u> e il <u>reticolo stampato:</u>**
>
> - Sul Geopiano di plastica con reticolo quadrato (utilizzando gli elastici) e poi sul foglio con il reticolo (utilizzando la riga) proviamo a costruire:
>   - un triangolo rettangolo,
>   - un quadrato,
>   - una figura formata da un quadrato e un triangolo rettangolo con un cateto coincidente con uno dei lati del quadrato.

➢ Osserviamo le figure ottenute, in particolare:
- I nodi lungo i lati delle figure: ____
- Il lato in comune tra triangolo e quadrato della terza figura ____________________

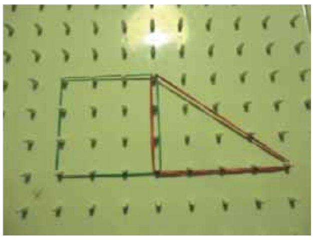
Dunque il nostro Geopiano di plastica ha dei **limiti**:
ad esempio se costruiamo due figure adiacenti nel reticolo stampato non riscontriamo nessun problema, mentre nel Geopiano,poiché ogni nodo ha uno spessore ,cioè occupa un certo volume __________________________

La costruzione del triangolo e del quadrato non genera nessuna difficoltà, al contrario nella terza richiesta, non tutti colgono la frase " ..con un cateto coincidente con uno dei lati del quadrato". Infatti inizialmente si osservano, in qualche gruppo, alcune di queste costruzioni:





Li facciamo riflettere sul concetto di "coincidenza" e tutti arrivano a fare la costruzione giusta:



La compilazione continua con una discussione comune, che inizia chiedendosi cosa cambia dal reticolo stampato al Geopiano, precisamente nel lato in cui le figure coincidono. Le risposte che vengono date sono:

" gli elastici passano esterni ai nodi"

"Il lato comune non coincide veramente nel Geopiano"

"Nel foglio le linee passano sopra i puntini"

"C'è uno spazio tra gli elastici, che nel foglio non c'è"

Capiamo così che il Geopiano ha dei limiti. Il reticolo stampato rappresenta un modello, la cui modellizzazione è il Geopiano e come modellizzazione ha i suoi difetti, come il fatto che i nodi hanno uno spessore e l'elastico non passa esattamente nel centro dei nodi.

Continuiamo con la discussione insieme, ponendoci le ultime domande riguardanti la descrizione del Geopiano.

Possiamo rappresentare tutte le figure?____
Possiamo rappresentare tutti i poligoni? ____
Un quadrato lo possiamo rappresentare in entrambi i reticoli ? _______________________
Possiamo rappresentare tutti i triangoli? ____

Nemmeno il tempo di finire la prima domanda, che subito F. fa notare che il cerchio non si può fare e dall'altra parte della classe un suo compagno completa la risposta, osservando che tutte le figure con bordi curvilinei non possono essere rappresentate nel Geopiano.

Siamo tutti d'accordo che quelli che possiamo realizzare nel Geopiano sono solo poligoni, ovvero superfici delimitate da spezzate chiuse determinate da tanti segmenti consecutivi. Poniamo successivamente la domanda sull'esistenza del quadrato in entrambi i reticoli e li lasciamo riflettere sulla risposta provando a costruirne qualcuno su entrambe le facce del Geopiano.

Passa qualche minuto ed iniziano a venir fuori i primi pareri. Tutti affermano che sul reticolo quadrato è possibile costruire quadrati.

Riguardo la griglia triangolare, annotiamo alla lavagna le seguenti affermazioni:

" E' impossibile! Non mi riesce!"

" Vengono dei rettangoli"

" Ma se metto un elastico tutto intorno alla griglia triangolare, viene un quadrato?"

Fino a M. che afferma: *"Eccolo! Si può fare! Lo abbiamo trovato! "*

Riporto l'immagine della figura costruita

Davanti a questa affermazione così convinta ci siamo trovati in difficoltà: per noi era ovvio che quello non fosse un quadrato poiché i lati orizzontali erano multipli dell'unità e gli altri due multipli di irrazionali(essendo altezze di triangoli equilateri). Poiché gli irrazionali sono argomenti di II: come spiegare ad uno studente di I, che questo non era un quadrato?

Quello che ci è venuto in mento è stato di fagli utilizzare il righello per misurare i lati. Ci accorgiamo che sul Geopiano è scomodo misurare ed effettivamente al ragazzo sembra che i lati abbiano la stessa misura. Gli chiedo di fare attenzione alla precisione della sua misurazione e di utilizzare il reticolo stampato per riprodurre la situazione. Trovando come misure: 8,8 cm per il lato orizzontale e 8.7 per quello vericale, il suo volto si riempie di delusione:

" Noo! Accidenti, non sono uguali, sono diversi per un millimetro!..solo per un millimetro.."

Suona la campanella, gli lasciamo le griglie stampate e come compito per la lezione successiva, riflettere se il quadrato e gli altre altri poligoni possono o no essere rappresentati nel Geopiano

Possiamo concludere osservando che la presentazione del Geopiano è risultata positiva. Inizialmente sono partiti un po' timorosi davanti al nuovo strumento per fare matematica, ma già alla fine della lezione si sono mostrati molto "entusiasti" e curiosi.
Ci siamo accorti che le costruzioni che facevano nei primi esercizi erano tutte standard, ovvero quadrati con lati paralleli ai bordi e triangoli rettangoli appoggiati su un cateto. Non siamo riusciti a concludere la scheda che finiremo la prossima lezione e cercheremo di far assorbire le proprietà intrinseche dei poligoni, indipendenti dalla loro sistemazione nel piano.
* Per lo studente disabile, ho realizzato delle griglie stampate con dei disegni, come triangoli, quadrati e una casa. Le abbiamo chiesto di riprodurle nel Geopiano e dopo i primi esercizi, con nostro stupore, ci è riuscita molto bene. Ha continuato, con l'aiuto dell'insegnante di sostegno, a costuire poligoni e si è divertita davvero molto nel fare questa "strana" lezione di matematica.

3.2 Lezione 2: Introduzione al Geopiano, parte 2

<u>LEZIONE 2. (1 ora)</u> 20-01-2014

La seconda lezione è stata svolta durante la settimana di pausa didattica, ovvero la settimana dedicata al ripasso degli argomenti fatti nel trimestre (settembre-dicembre). Il giorno in cui abbiamo svolto la seconda lezione, i ragazzi hanno avuto 2 ore di matematica. Nella prima ora, ripassando i vari argomenti, si sono imbattuti in errore assoluto, errore relativo e approssimazioni.

Abbiamo collegato questo argomento alla questione lasciata irrisolta nella prima lezione di laboratorio: aver trovato un poligono che a prima vista sembrava un quadrato,ma la cui misura accurata dei lati ha portato ad una smentita. Abbiamo calcolato l'errore che abbiamo commesso nel confondere un rettangolo con un quadrato:

errore assoluto: $|8.8 - 8.7| = 0.1$

errore relativo: $\frac{0.1}{8.7} = 0.01$

Quindi, facendo un errore dell' 1 % M., nella lezione precedente, ha confuso un rettangolo con un quadrato.

Abbiamo colto l'occasione per sottolineare l'importanza della differenza tra :

- quadrato in senso matematico(la definizione rigorosa di quadrato prevede che gli angoli siano congruenti tra loro e così anche i lati)

- immagine mentale di una figura (forma che ci ricorda una certa figura nota)

- quadrato fisico: molti dei quadrati che possiamo realizzare, disegnare, costruire, etc.. in realtà è quasi impossibile che siano quadrati in senso matematico, poiché, affinando la misura, ci sarà sempre un errore,anche se estremamente piccolo, tra un lato e un altro. Un muratore con misurazioni accurate potrà costruire una stanza quadrata, ma sarà solo una modellizzazione dalla definizione matematica di quadrato.

Finita la prima ora di lezione ordinaria, abbiamo ripreso in mano i Geopiani: prima di finire la scheda 1 abbiamo fatto un resoconto sulle definizioni e le scoperte della lezione precedente. Alle domande fatte hanno risposto immediatamente, senza esitazione. Abbiamo perciò svelato la risposta alle domande riguardanti i poligoni costruibili nel Geopiano: nel reticolo quadrato possiamo costruire solo il quadrato tra i poligoni regolari e in quello triangolare, solo il triangolo equilatero e l'esagono regolare. Sono tutti d'accordo e poniamo una domanda non presente nella scheda:

" Avendo scoperto che il quadrato non può essere costruito nel reticolo triangolare, vi viene in mente qualche triangolo particolare, legato al quadrato, che quindi non può essere costruito?"

I ragazzi ci pensano, ma effettivamente la domanda non è facile. Li aiutiamo, chiedendo in quali triangoli può essere scomposto un quadrato. Rispondono che può essere scomposto in due triangoli rettangoli e che quindi i triangoli rettangoli non si possono costruire nella griglia triangolare, allora dico: "*mi state dicendo che i triangoli rettangoli non possono essere fatti nel reticolo triangolare?..provateci allora!*" Ne trovano subito qualcuno...allora pongo di nuovo la domanda chiedendo come devono essere i lati del triangolo ottenuto dal quadrato e sento esclamare: *" ah! Allora non possiamo fare i triangoli isosceli!"* Chiedo di nuovo di costruire un triangolo isoscele e ovviamente ci riescono.

Accorgendomi che nessuno arriva a dire triangolo isoscele rettangolo, facciamo un ripasso sulla classificazione dei triangoli in base ai lati e in base agli angoli. Ricordo che le due classificazioni si intersecano, ovvero quando chiedo: "*può esistere un triangolo rettangolo isoscele ?"* dopo qualche secondo di silenzio finalmente, M. dice." *Giusto! Certo che esiste! Basta prendere i cateti uguali e l'angolo retto!Allora nel reticolo quadrato non si può fare, altrimenti se lo sdoppio potrei fare anche un quadrato!"*

Iniziamo allora la parte finale della scheda:

- **Costruisci le seguenti figure nel reticolo quadrato del Geopiano:**
  - Un triangolo rettangolo isoscele
  - Un quadrato con le diagonali parallele ai bordi
  - Due triangoli che abbiano come altezza un segmento contenente 6 nodi.

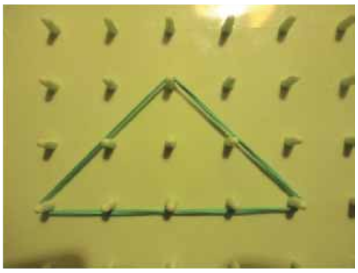
- **Costruisci le seguenti figure nel reticolo triangolare del Geopiano:**
  - Un trapezio rettangolo

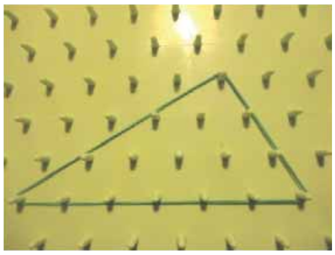
- Un triangolo equilatero
- Un triangolo con nessun lato parallelo ai bordi
- Un parallelogramma con lo stesso numero di nodi in ogni lato.

Dopo aver visto la facilità con la quale hanno costruito il primo triangolo rettangolo isoscele e avendo notato che anche questa volta hanno sempre la forma standard, siamo tentati di proporre questa costruzione: *un triangolo rettangolo con ipotenusa parallela ad un bordo del Geopiano (a scelta se quadrato o triangolare).*

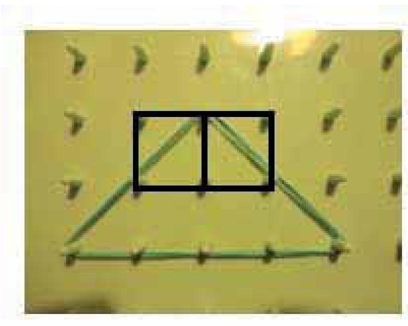
Più o meno tutti ci riescono dopo varie prove, ma poi risulta difficile dare una dimostrazione matematica del perché quell'angolo è retto.

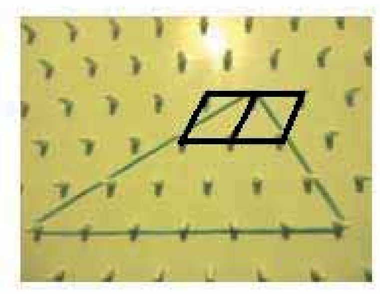
In generale i triangoli ottenuti sono riconducibili a questi due casi:



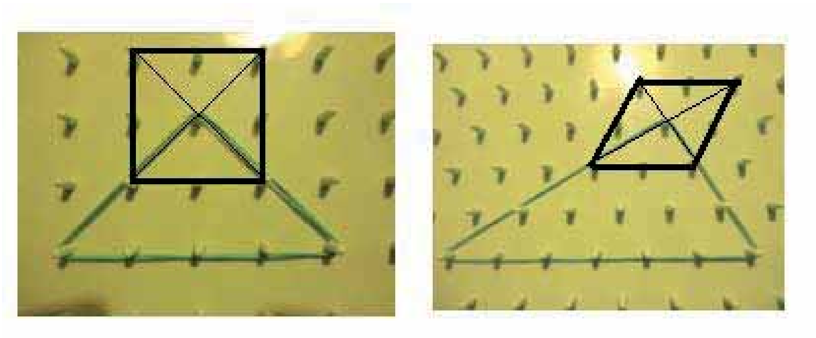


Abbiamo ricordato che le diagonali del quadrato e quelle del rombo sono ortogonali tra loro. Poiché i cateti dei due triangoli rettangoli stanno in queste diagonali, come di vede dalla figura successiva, allora essi sono ortogonali tra loro e il triangolo è davvero rettangolo. Cioè, nella figura sotto a sinistra abbiamo due quadrati evidenziati uguali e quindi le diagonali formate dell'elastico sono ortogonali tra loro, mentre nella figura a destra sono le due diagonali dei due rombi affiancati ad essere ortogonali.





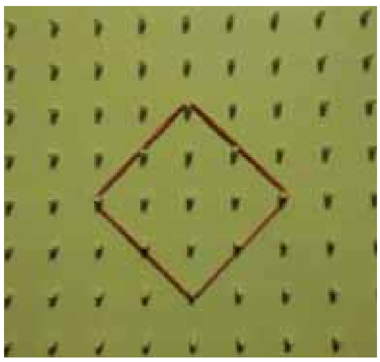
Dopo aver svolto l'esperienza ci è venuto in mente che forse un modo migliore per far capire che il triangolo è rettangolo nell'angolo in alto è quello di considerare una sola figura, non due come fatto in classe. Ovvero:



In questo modo utilizziamo un solo poligono per ogni caso, del quale tracciare le diagonali.

Durante la conclusione della scheda ci stupiamo di come la domanda sulla costruzione di un triangolo con nessun lato parallelo ai bordi abbia creato difficoltà. Notiamo che in un foglio bianco è semplicissimo disegnarlo, ma nel Geopiano la costruzione non è cosi naturale. Entro la fine della lezione tutti ci riescono con un po' di fatica.

Un' ultima osservazione che voglio fare riguarda ciò che mi ha detto un ragazzo dopo aver costruito questa figura :



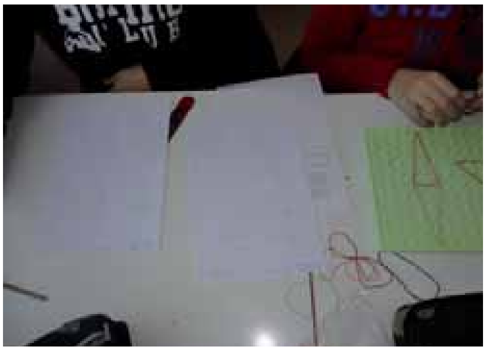
Mi chiede: *"Prof. Scusi, questa figura ha i lati uguali e le diagonali parallele ai bordi, ma non è un quadrato, è un rombo! Per essere un quadrato dovrebbe essere girato il Geopiano.."*

Questo è uno dei misconcetti di cui parlavamo nell'introduzione a questo lavoro: l'immagine mentale prevale sulla definizione.

Riprendo la definizione di quadrato ed insieme verifichiamo che effettivamente è soddisfatta dalla sua costruzione. Lui capisce e si stupisce positivamente quando dico.

"un poligono che sia un quadrato, che ha quindi quelle proprietà, rimane un quadrato . Da qualunque parte tu lo guardi,tu lo giri, tu lo disegni. Sono le due proprietà che ti ho appena detto, che lo distinguono dalle altre figure. "

Ecco alcune foto scattate durante questa lezione:



3.3 Lezione 3: Numeri figurati di Pitagora

<u>LEZIONE 3. (1 ora)</u> 27-01-2014

In questa lezione abbiamo utilizzato il Geopiano per studiare alcune proprietà dei numeri naturali. Abbiamo introdotto il significato di "numero figurato", ovvero numeri rappresentati geometricamente con punti. Vennero studiati da Pitagora e dalla sua scuola, dove si era soliti rappresentare i numeri come punti sulla sabbia o mediante ciottoli: per questo venivano classificati a seconda delle forme che si ottenevano disponendoli in vari modi come figure geometriche.

Al posto dei ciottoli e dei punti, in classe, abbiamo utilizzato i nodi del Geopiano triangolare.

Prima di iniziare la scheda 2, abbiamo fatto qualche esempio alla lavagna. Il numero:

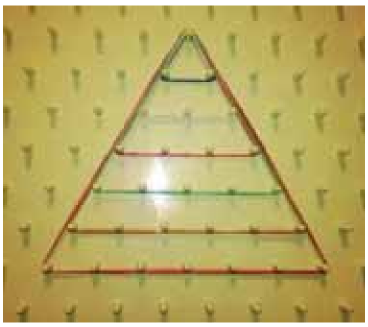
- 3 è triangolare,poiché tre nodi possono formare un triangolo

- 4 è quadrato

- 5 è pentagonale,

- 6 è sia esagonale, ma anche triangolare, in quanto può formare un triangolo equilatero.

Iniziamo ad analizzare la famiglia dei numeri triangolari con i seguenti esercizi.



Esercizio 1) Riproduci alcuni numeri triangolari nel Geopiano, riportali nella griglia stampata e completa la tabella. Sia n il numero triangolare n-esimo:

n-esimo numero triangolare	n=1	n=2	n=3				
Numero di nodi	1	3	6				

Esercizio 2) Quanti nodi vengono aggiunti ad ogni passaggio? (Aiutati con il Geopiano)

1 3 6 …… …… …… ……

1 2 ____ ____ ____ ____ ____

Noti qualche particolarità nella sequenza di numeri appena trovata? ____________

Questi due esercizi sono riusciti abbastanza bene e velocemente, in generale. La domanda in cui si chiedeva la relazione invece ha messo tutti un po' in crisi: avevano capito che la successione aumentava di volta in volta di uno, ma non sapevano come riuscire a scriverlo nella scheda. Riporto alcune risposte, in cui si capisce che hanno colto la relazione:

"ogni volta aggiungo 1"

"si aggiunge sempre 1 al precedente"

"i nodi aggiunti sono sempre i precedenti più il numero triangolare"

Ritroviamo qui la difficoltà dei ragazzi nell'esprimersi con un linguaggio matematico rigoroso.

Solo un gruppo ha scritto *:" è la sequenza dei numeri naturali"*

Abbiamo poi osservato tutti insieme che i nodi che aggiungo di volta in volta, seguono la sequenza dei numeri naturali.

L'esercizio 3 ha creato un po' di problemi. Mi aspettavo che la notazione n-esimo potesse creare qualche perplessità in una prima e se fino a questo punto della scheda erano riusciti a cavarsela, nell'esercizio 3 c'è stato bisogno di un chiarimento più preciso.

Esercizio 3) Cerchiamo di arrivare alla formula per un generico numero triangolare.

- Partiamo dal primo numero ______ con ______ nodo
- Il secondo numero triangolare è _____ con _____ nodi, lo otteniamo a partire dal primo numero _____ aggiungendo _____ , ovvero 1+2=3
- Il terzo numero triangolare è _____ con ______ nodi, lo otteniamo a partire dal secondo numero _____ aggiungendo _____, ovvero _____=6 e ritornando a ritroso 1+2+3=6
- Prova a continuare tu
    - il quarto numero triangolare è______e si ottiene sommando 1+2+3+4=__________
    - ____
    - ____
    - ____

Proviamo a formulare a parole una regola: *per ottenere l'n-imo numero triangolare* ___________
Proviamo a scrivere in formule la regola espressa sopra ____________________________________

Abbiamo ripreso insieme la tabella dell'es.1 e l'abbiamo riletta insieme in questo modo:

- il primo numero triangolare, cioè quello che sta al posto n=1, è l'1
- il secondo numero triangolare, cioè per n=2, è il 3...

Dopodichè hanno capito e hanno provato da soli a completare le domande.

Alla prima hanno risposto bene in generale scrivendo:
"per ottenere un numero triangolare lo sommo ai numeri naturali precedenti"

Più difficile è stata la seconda domanda, dove si chiedeva di scrivere in modo matematico la regola appena trovata.

Dai banchi dicevano tutte cose giuste, ovvero che per avere il quarto numero triangolare, si sommano i primi 4 numeri naturali, ovvero 1+2+3+4, che porta al numero 10. Ma quando ho chiesto come si poteva enunciare la regolare generale, per avere il numero triangolare n, girando tra i banchi ho trovato queste risposte:

"$n^1 + n^2 + n^3 + \cdots \ldots n - esimo$"

"n1+n2+n3+n4+.......+n=n-esimo"

Effettivamente mi sono accorta che era una domanda difficile, la generalizzazione di una regola non è mai facile, l'abbiamo quindi scoperta insieme scrivendola alla lavagna: dicendo che per avere l'n-esimo numero triangolare n, dobbiamo sommare tutti i naturali fino al numero naturale n scelto:

1+2+3+4+5+....+n

Siamo poi passati alla parte finale e più difficile della lezione. Tutti hanno capito che nel caso in cui volessimo il 131-esimo numero triangolare dovevamo sommare i primi 131 numeri naturali e tutti eravamo d'accordo che è un'operazione lunga e faticosa.

Allora ho svelato che c'è una formula più semplice ed immediata, che abbiamo messo sottoforma di teorema.

- Esiste un modo per calcolare n-esimo numero triangolare conoscendo solo n?

Teorema : Ogni n-esimo numero triangolare si ottiene con la somma dei primi n numeri naturali, e cioè con la formula

$$\mathbf{T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Esercizio 4) Verificare la formula per un numero triangolare a piacere.

Esercizio 5) Qual è il 24-esimo (n=24) numero triangolare? ________

Esercizio 6) Qual è il numero triangolare che rappresenta il triangolo con 9 nodi in ogni lato?_____

Prima di fare una dimostrazione guidata, abbiamo fatto svolgere gli esercizi 4,5,6, per convincerli che effettivamente la formula è più immediata e funziona.

Tutti hanno svolto bene gli esercizi, ed è stato un esercizio utile anche perché in questi giorni in classe stanno facendo le funzioni polinomiali e spesso devono sostituire al valore dell'incognita un valore dato. Infatti c'è chi ha detto:

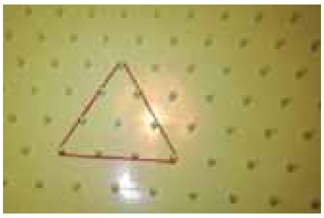
" *ah, basta sostituire come si fa con gli esercizi sui polinomi*",

Hanno trovato da soli un 'applicazione di quello che stanno facendo nel programma di matematica, e questo fa sempre bene, perché è in casi come questi che viene sfatato il pregiudizio delle matematica vista come materia fine a se stessa e scollegata con tutto.

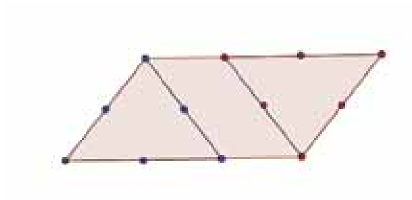
Gli ultimi minuti abbiamo fatto due dimostrazioni del teorema, una geometrica da fare con il Geopiano e l'altra algebrica utilizzando il principio di induzione.

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA:

Prendiamo un numero triangolare, ad esempio il 3°, cioè 6.



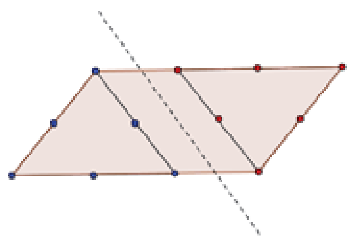
Se affianchiamo a quest' ultimo la configurazione dello stesso numero triangolare capovolto, otteniamo la figura seguente, ovvero un parallelogramma.

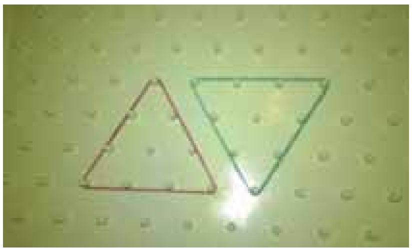
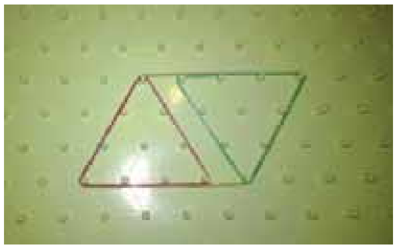


Considerando i nodi sul parallelogramma, osserviamo che abbiamo

3 file da 4 nodi ciascuna, quindi il totale dei nodi sarà 4 x 3

Volendo tornare al numero triangolare, dovrò dividere il parallelogramma per 2, poiché per costruzione avevo duplicato il mio numeto triangolare.



Quindi il 3° numero triangolare, geometricamente lo abbiamo ottenuto da un parallelogramma, facendo:

$\frac{3\times4}{2} = \frac{3\times(3+1)}{2}$ Che è è proprio la formula cercata.

Lo abbiamo fatto anche per il 4° numero triangolare.

Abbiamo poi concluso, dicendo che questa costruzione può essere fatta sempre, per qualsiasi numero triangolare n io voglia e per esso varrà

$$\frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:

Avendo finito la scheda in anticipo, abbiamo voluto provare ad accennare anche questa dimostrazione, consci della difficoltà dell'argomento, affermando che in matematica spesso per verificare il valore di teoremi si utilizza questo metodo: "dimostrare che se una regola vale per un certo numero n , allora vale anche per il suo successivo."

Nel nostro caso, partendo da $\mathbf{1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$ (*)

dovevamo dimostrare che:

$$1+2+3+4+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Osservando il primo membro ed utilizzando il fatto che fino ad n la fomula la conoscevamo, abbiamo ottenuto:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + (n + 1) =$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) + n + 1 =$$

Utilizzando (*):

$$\frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 =$$

$$\frac{n^2 + n}{2} + n + 1 =$$

$$\frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} =$$

$$\boxed{\frac{n^2 + 3n + 2}{2}}$$

Abbiamo poi preso il secondo membro e abbiamo svolto i calcoli:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$

$$\frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} =$$

$$\boxed{\frac{n^2 + 3n + 2}{2}}$$

Abbiamo quindi verificato l'eguaglianza tra i due membri.

Anche in questa dimostrazione i ragazzi hanno utilizzato gli argomenti che stanno imparando in questi giorni , ovvero le operazioni tra monomi.

Come compito per casa, abbiamo dato da compilare una scheda molto simile a quella fatta in classe, ma che riguardava i numeri quadrati. Non avendo il Geopiano a casa, abbiamo lasciato un sito internet con un Geopiano interattivo e delle griglie stampate.

3.4 Lezione 4: Teorema di Pick

LEZIONE 4. (1 ora) 03-02-2014

In questa lezione abbiamo introdotto il Teorema di Pick. Mentre in II A abbiamo dedicato una lezione per far provare ai ragazzi ad arrivare da soli a Pick e poi una lezione dedicata totalmente ad applicazioni e dimostrazione del Teorema, in I A abbiamo deciso di fare un'unica lezione nell'aula LIM.

Abbiamo consegnato la scheda 3 ed i Geopiani ai gruppi, ed ho iniziato la presentazione guidata con la LIM.

Il primo esercizio chiedeva di triangolare due poligoni, e per far capire cosa si intendeva per triangolazione, ho disegnato un quadrato e ho tracciato la diagonale, abbiamo così fatto una delle tante triangolazioni del quadrato.

Cosa faremo: cercheremo di triangolare alcuni poligoni e cercheremo delle relazioni "particolari" tra nodi

Triangolare un poligono: scomporlo in triangoli, non necessariamente congruenti tra loro. I triangoli non devono sovrapporsi l'un con l'altro e i loro lati non devono intrecciarsi.

Esercizio 1) Triangola le seguenti figure nel reticolo quadrato del Geopiano:

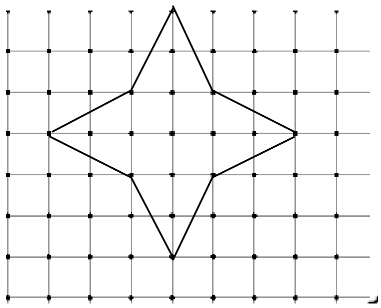


Figura Figura **a)**

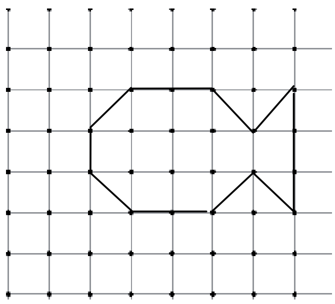
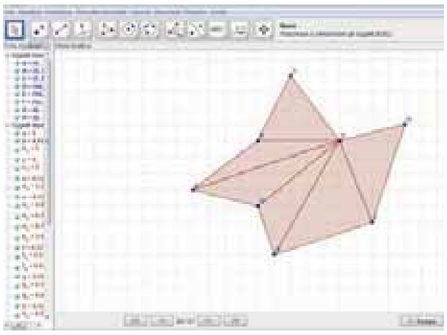


Figura **b)**

- **Ogni poligono è triangolabile?**____
- **Che metodo hai usato per triangolare?**____________________________________

In generale la triangolazione è andata bene per tutti i gruppi, molti hanno tracciato le diagonali, altri hanno usato altri metodi ed altri hanno triangolato tracciando tutti i possibili triangolini ottenibili dai quadretti del Geopiano.



Per concludere abbiamo ascoltato le motivazioni dei ragazzi, tra le quali c'erano:

"ho diviso in quadrati e poi in triangoli"

" senza metodo, li cercavo un po' alla volta"

Abbiamo svelato il metodo di tirare le diagonali da un vertice e poi fatto triangolare un poligono sulla LIM a uno di loro.

Nello stesso esercizio che avevo fatto con Geogebra, ho mostrato che c'è uno strumento per calcolare l'area di figure e ho fatto vedere che la somma delle aree di tutti i triangoli dava effettivamente l'area dell'intera figura triangolata.

Abbiamo detto il motivo per il quale abbiamo deciso di fare questo esercizio: in parte perché essendo geometri ritroveranno la triangolazione come metodo di rilevamento del territorio a Topografia, dall'altra parte perchè triangolare le figure ci è utile per dimostrare il teorema di Pick, ovvero il teorema che ci dà una formula per calcolare l'area di poligoni reticolari semplici, a partire dal numero di nodi sul bordo ed interni.

Abbiamo chiesto ai ragazzi di svolgere gli esercizi successivi e di iniziare a cercare qualche relazione tra nodi ed area di poligoni. Per facilitare la ricerca, abbiamo inserito un'ulteriore colonna, "area+1", per aiutarli.

Chiamiamo :

- *NODI* ***INTERNI:*** i nodi che non toccano nessun lato del poligono. Li indicheremo con la lettera **"I"**.
- *NODI sul* ***BORDO****:* i nodi che toccano (internamente o esternamente) un lato. Li indicheremo con **"B"**

Esercizio 2) Cerchiamo di vedere se esiste una relazione tra **I , B** e **l'area di un poligono.** Osserva le seguenti figure e completa la tabella:

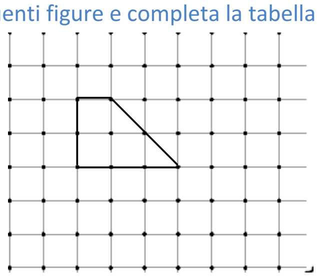


Figura **d)**

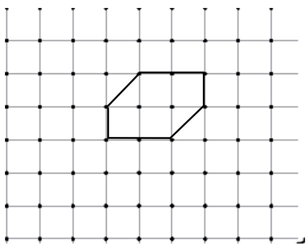


Figura **e)**

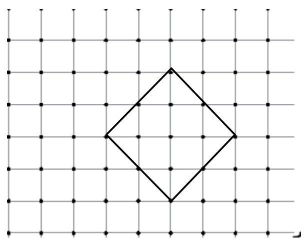


Figura **f)**

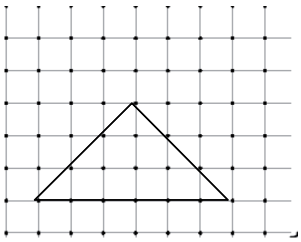


Figura **g)**

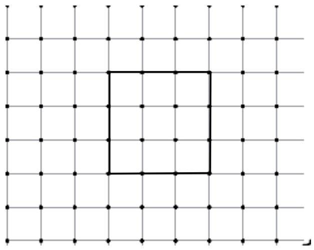


Figura **h)**

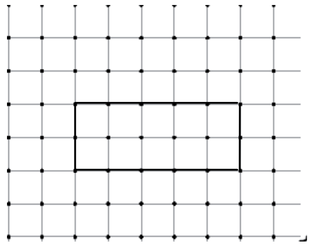


Figura **i)**

	Nodi interni = **I**	Nodi sul bordo = **B**	AREA	* AREA +1
Figura **d)**	1	8		
Figura **e)**				
Figura **f)**				
Figura **g)**				
Figura **h)**				
Figura **i)**				

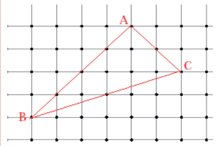
- **Noti qualche relazione particolari tra i nodi?**____
- **vedi delle relazioni particolari tra i nodi e l'area dei poligoni?**______________________________

Li abbiamo lasciati lavorare autonomamente e poi abbiamo chiamato un ragazzo per ogni gruppo alla lavagna a completare una riga della tabella.

Abbiamo fatto un po' di ripasso delle formule per l'area dei poligoni.

Iniziamo così la ricerca della formula. Alcuni iniziano a dire la loro versione, alcuni trovano una formula che va bene solo per i primi tre poligoni. Andiamo avanti ma ci accorgiamo che è un ragionamento forse troppo difficile per una prima. Decidiamo allora di ragionare insieme e, tramite una discussione di classe, piano piano arriviamo alla formula di Pick.

Enunciamo il Teorema e facciamo un esempio tutti insieme:



B=8
I=5

$$Area(triangolo) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{8}{2} + 5 - 1 = 8$$

Chiedo come avrebbero calcolato l'area di questo triangolo senza Pick. Qualcuno dice:

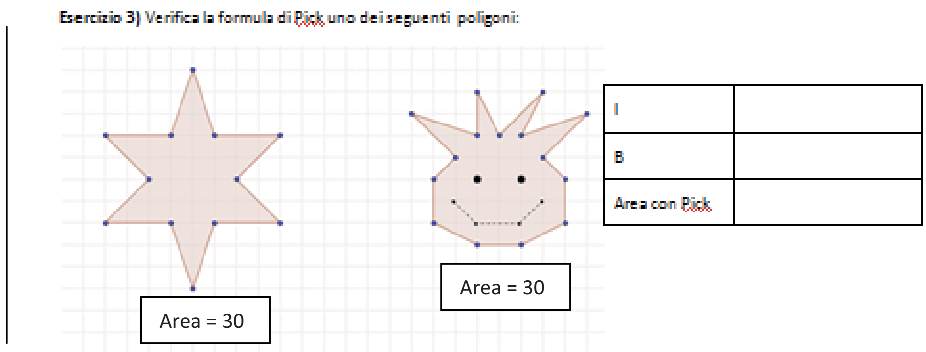
"base per altezza, ah ma non conosco la base"

" conto i quadrati e i mezzi quadrati!! " Ma poi si accorge che non tutti sono mezzi quadrati.

Allora indico questo procedimento: possiamo inscrivere il triangolo in un rettangolo con lati paralleli ai bordi. Per trovare la sua area, devo togliere all'area del rettangolo le aree dei triangoli rettangoli che restano, i quali hanno cateti paralleli ai bordi e quindi potrei sapere quanto misurano. Faccio notare che è un procedimento lungo, dove ci sono da applicare diverse formule. Utilizzando la formula di Pick, invece, quello che dobbiamo fare è solo un conteggio di nodi e utilizzare una semplice formula per ottenere l'area .

Tutti rimangono entusiasti, soprattutto quando facciamo notare che è una formula universale, ovvero valida per ogni poligono costruibile nel Geopiano a reticolo quadrato.

Mancano pochi minuti e lasciamo completare ai ragazzi l'ultimo esercizio della scheda, dove devono applicare Pick a due figure e verificare che effettivamente si ottiene l'area scritta sotto, che mi ero calcolata con Geogebra.



3.5 Lezione 5: Proporzionalità tra grandezze geometriche

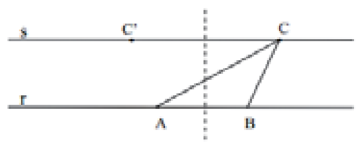
<u>LEZIONE 5. (1 ora)</u> **17-02-2014**

Questa mattina metà classe doveva svolgere il compito di recupero del primo trimestre e il Prof.Miari aveva pensato di fare con l'altra metà, cioè quella non occupata, una vecchia prova invalsi a coppie.

Il terzo esercizio della prova chiedeva questo:

Prova INVALSI 2012

D3. ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta *r* e il terzo vertice in un punto qualunque della retta *s* parallela a *r* e passante per C.



Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC?

- ☐ A. Soltanto il triangolo ABC', simmetrico di ABC rispetto all'asse di AB
- ☐ B. Soltanto il triangolo isoscele di base AB
- ☐ C. Soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B
- ☐ D. Tutti gli infiniti triangoli di base AB

Allora abbiamo deciso di andare a prendere i Geopiani e improvvisare una lezione su equivalenza, isoperimetria e proporzionalità.

Il primo compito che abbiamo assegnato è stato questo:

1) Fissare un segmento AB nel Geopiano e costruire un triangolo ABC con base AB. Costruire successivamente altri 2 triangoli,sempre di base AB, ma con il terzo vertice appartenente alla retta r parallela ad AB e passante per C.
Successivamente utilizzare Pick per calcolare l'area dei tre triangoli.

Abbiamo aspettato che tutti avessero finito e siamo giunti alla conclusione che tutti i triangoli con quella base e e vertice in r avevano la stessa area. Infatti tra r e la loro base c'è sempre la stessa distanza e quindi i triangoli, oltre alla stessa base, hanno anche la stessa altezza.

Hanno così potuto rispondere alla domanda della prova invalsi, ma abbiamo continuato ad inventare altri esercizi con il Geopiano.

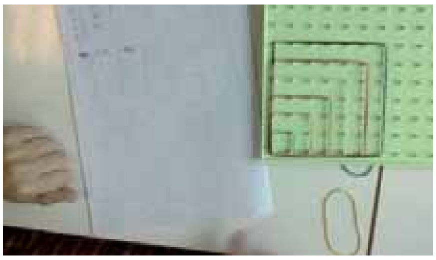
Il secondo esercizio posto è stato questo:

2) Fissare un segmento AB nel Geopiano e costruire un parallelogramma con quel segmento come base. Costruire successivamente altri 2 parallelogrammi di base AB, ma con gli altri 2 vertici appartenenti alla retta s ,parallela ad AB, individuata dai due vertici del primo parallogramma costruito.
Successivamente utilizzare Pick per calcolare l'area dei tre parallelogrammi.

Siamo giunti più velocemente al fatto che anche tutti questi parallelogrammi avevano la stessa area.

Tutti erano anche d'accordo che mentre l'area era la stessa, il perimetro cambiava e abbiamo così iniziato a parlare di proporzionalità.

Abbiamo fatto costruire una figura come quella riportata in figura, con dei quadrati di lato ogni volta aumentato di 1 unità.



Loro avevano già visto questa figura, avendo compilato per casa una scheda sui numeri quadrati pitagorici. Un esercizio simile lo troviamo nelle proposte di Matematica 2001.

Abbiamo poi scritto alla lavagna 3 tabelle che loro dovevano compilare:

LATO x	PERIMETRO y
1	
2	
3	
4	
5	
n	

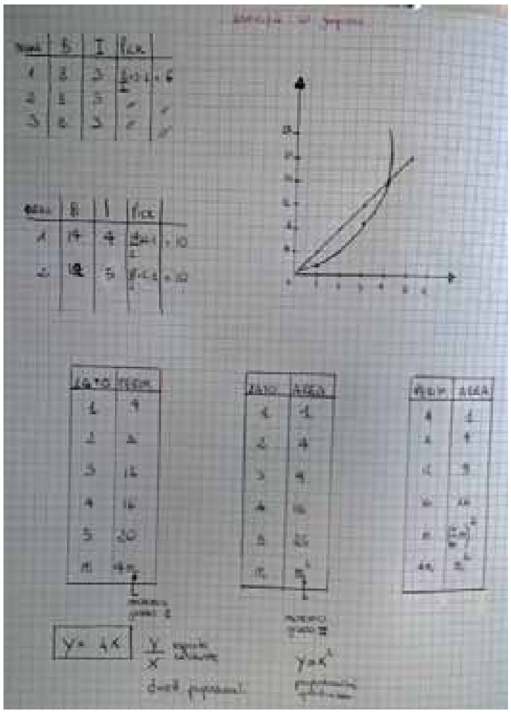
LATO x	AREA y
1	
2	
3	
4	
5	
n	

PERIMETRO x	AREA y

Li abbiamo lasciati trovare le leggi che descrivevano il perimetro e l'area in funzione di un certo lato di n unità.

Dopo avergli fatto notare che si ottenevano un monomio di primo grado nella prima tabella e un monomio di secondo grado nella seconda, gli abbiamo fatto riportare i punti in un sistema cartesiano osservando che la prima tabella ci dà una retta e la seconda una parabola.

Dall'ultima tabella invece abbiamo potuto confrontare l'andamento delle due grandezze(perimetro ed area) ed osservare che fino ad un certo momento il perimetro è minore dell'area, ma piano piano diventa maggiore ed è proprio quello che si otterrebbe disegnando nello stesso grafico cartesiano le due leggi.



Dalla prima legge, y=4x, abbiamo ricavato la legge di proporzionalità diretta, in quando il rapporto tra il lato e il perimetro è sempre 4.

Dalla seconda tabella invece ricavato abbiamo una legge quadratica.

Per parlare di propozionalità inversa abbiamo proposto questo esercizio:

Sia 16 l'area di un rettangolo, quanto possono essere i suoi lati x e y?

Lato x	Lato y	Area
		16
		16
		16
		16

A tentativi, hanno completato la tabella e hanno ricavato la legge che lega i due lati per avere area 16:

$x \cdot y=16 \qquad y=16/x$

che è una legge di proporzionalità inversa.

Se riportiamo su un cartesiano abbiamo un iperbole.

Abbiamo poi deciso di fare un ultimo esercizio. Abbiamo detto di considerare un rettangolo di perimetro fisso 100 m e di studiarne le proprietà al variare delle lunghezze dell'altezza e della base.

Abbiamo fatto una tabella con altezza, base e area del rettangolo e poi abbiamo riportato in un grafico cartesiano l'andamento della base e dell'altezza e l'andamento della base e dell'area. Abbiamo così ottenuto una retta per il primo caso e una parabola nel secondo. Abbiamo anche detto che dal secondo grafico possiamo osservare che il massimo dell'area, rappresentato dal vertice della parabola si ha nella lunghezze b=25 m e h=25 m, ovvero quando il rettangolo è un quadrato.

3.6 Lezione 6: Approssimazione di aree con Pick: l'Antartide

LEZIONE 6. (1 ora) 25-02-2014

Per l'ultima lezione in I A abbiamo pensato di usare il Geopiano e il teorema di Pick per affrontare la proporzionalità con le scale delle cartine geografiche. Il motivo è che molto spesso nelle prove invalsi c'è almeno una domanda su questo e anche perché si collegava bene al teorema di Pick.

Abbiamo distribuito ai ragazzi un Geopiano, la Scheda 4 e due griglie stampate in carta lucida denominante:

Griglia 1) in cui era rappresentato il reticolo quadrato del Geopiano con una scala di

1: 600 km. Ovvero un'unità di lunghezza(distanza tra due punti verticali o orizzontali della griglia) rappresentava 600 km reali.

Griglia 2) griglia più fitta della griglia 1) e in questo caso un'unità rappresentava 300 km. Infatti la scala era 1:300 Km.

La prima parte della scheda era questa:

Scheda 4: Approssimazioni

Una *carta* è una rappresentazione piana, ridotta, approssimata e simbolica della superficie terrestre o una parte di essa.
La *scala* numerica di una carta è il rapporto tra le distanze grafiche sulla carta e le corrispondenti distanze naturali n . E' espressa nella forma :

1 : n

ESERCIZIO 1) Riportare nel Geopiano un segmento contenente 6 nodi.

- Da quante unità u (intese come segmenti tra 2 nodi orizzontali o verticali) è costituito? ___________ u

- Se scegliamo 3 cm come valore di un'unità, ovvero 1 u =3 cm, quando misurerebbe il segmento in cm?___________ cm

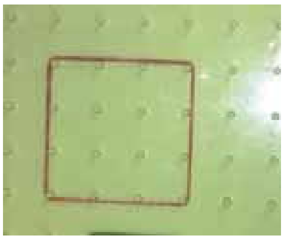
-Utilizzando la griglia 1) trasparente e la rispettiva scala, provare a stimare la distanza tra i due luoghi dell'Antartide indicati dagli asterischi. La distanza tra essi è e di ____________________________ Km

Tutti l'hanno risolta facilmente ma ce lo aspettavamo perché già in passato hanno sentito parlare di scale per stimare delle distanze.

Dal secondo esercizio in poi la scheda si complicava. Si iniziava a parlare di scala per stimare superfici: quindi le grandezze non variavano più in maniera lineare, ma quadratica.

ESERCIZIO 2) Riportare nel Geopiano un quadrato di lato un'unità.
-Il suo perimetro è di ____________ unità
-La sua area è di _____ u x _____ u = ______u^2
Se assumiamo che un'unità del Geopiano corrisponda a 3 cm reali, ovvero 1:3, avremo che:
-il perimetro del quadrato è di ___________ cm
-l'area del quadrato è di ______________cm^2

L'esercizio 2 ha suscitato qualche dubbio fin da subito, alcuni dopo aver fatto un quadrato di lato un'unità hanno voluto la conferma che quello che avevano fatto fosse giusto, mentre un gruppo aveva fatto questa figura:



Ci hanno chiesto se l'unità era arbitraria o no..gli abbiamo detto che nell'esercizio 1 avevamo specificato cosa di intendesse per unità e hanno detto:

" ah va bene.. è che per '1 unità' avevo capito che si intendeva quella, ma pensato che 'un'unità', scritto in questo modo, fosse un'altra cosa.."

Si era creata questa ambiguità che non ci aspettavamo.

Il resto dell'esercizio è andato bene così come l'esercizio 3, anche se nella risposta alle domande un gruppo si è dimenticato l'unità di misura e un altro ha scritto come unità sia per il perimetro che per l'area in metri.

ESERCIZIO 3) Riportare nel Geopiano un rettangolo di base 2 u e altezza 1 u. Se quella fosse l'immagine in scala di un campo da calcio, con dimensioni 1:50 m, cioè un'unità del Geopiano vale 50 metri nella realtà
-quanto è il perimetro del campo in metri?_________________________
- quanto è la sua area?________________________________

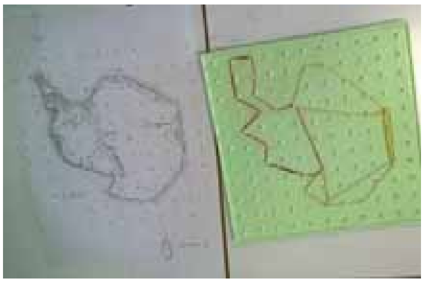
ESERCIZIO 4) Riporta nel Geopiano un poligono simile alla forma dell'Antartide. Utilizzando la formula di Pick otteniamo:

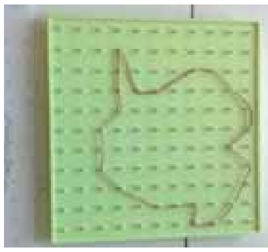
AREA = ____=___________ u^2

Per stimare la superficie reale dell'Antartide, ha senso parlare di unità? SI NO

Perchè?____

L'esercizio 4 è piaciuto molto, perché tutti si sono impegnati a cercare nel Geopiano un poligono che più potesse assomigliare alla forma dell'Antartide. Alcuni gruppi ci sono riusciti subito, mentre 2 gruppi hanno avuto molta difficoltà: prima hanno provato a farla con un elastico solo ma poi, non riuscendoci, hanno utilizzato più elastici.





Addirittura uno di loro ha usato più elastici e poi ne he messo uno solo tutt'intorno e ha tolto quelli inutili. L'altro gruppo ha invece disegnato prima nel reticolo trasparente una forma simile a quella dell'Antardide ricalcandola dalla scheda e poi l'ha riprodotta nel Geopiano. E' andato un po' fuori da quello che gli era stato richiesto, ma ha scelto comunque un metodo per velocizzare la situazione poiché erano rimasti molto indietro.

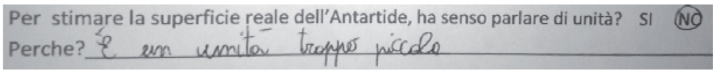
Il calcolo dell'area con Pick è andato bene.

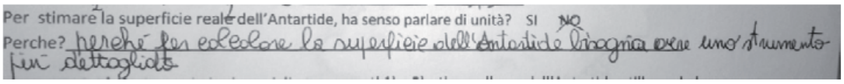
Riportiamo alcune risposte corrette all' ultima domanda dell'esercizio 4:

"No perché bisogna sapere quanto vale 1u"

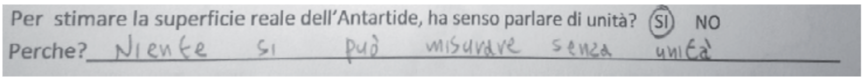
"No perché più che di u ci serve parlare di Km per stimare l'area dell'Antartide"

Mentre altre risposte sono state le seguenti non del tutto esatte sono state le seguenti:


Per stimare la superficie reale dell'Antartide, ha senso parlare di unità? SI NO
Perche? È un unità troppo piccola


Per stimare la superficie reale dell'Antartide, ha senso parlare di unità? SI NO
Perche? perchè per calcolare la superficie dell'Antartide bisogna avere uno strumento più dettagliato

C'è stato anche chi ha risposto SI, non avendo tutti i torti,ovvero:


Per stimare la superficie reale dell'Antartide, ha senso parlare di unità? SI NO
Perche? Niente si può misurare senza unità

Siamo giunti poi all'esercizio 5, i ragazzi ancora non sapevano quanto fosse l'area dell'Antartide.

ESERCIZIO 5) Utilizzando le due griglie trasparenti 1) e 2), stimare l'area dell'Antartide utilizzando le rispettive scale per le dimensioni e il teorema di Pick.

*- nella griglia 1 l'approssimazione dell'area è*________________________________ Km^2

*- nella griglia 2 l'approssimazione dell'area è*________________________________ Km^2

Abbiamo poi completato insieme uno schema alla lavagna e i risultati sono stati questi

Gruppo	Area con Griglia 1	Area con Griglia 2
1	15 480 000	59 400 000
2	24 900	48 750
3	15 120 000	15 030 000
4	25 500	50 850
5	14 400 000	13 770 000

L'area reale dell'Antartide è 14.000.000 Km^2 . Solo il gruppo 3 e il 5 hanno svolto bene l'esercizio ed è andata meglio del previsto perché eravamo molto scettici nel proporre questo esercizio che non era così banale.

Il gruppo 1 ha capito che l'area cambiava in maniera quadratica ma, ma nel cambiare griglia, si sono dimenticati che cambiava anche il valore in scala dell'unità di misura.

I gruppi 2 e 4 hanno commesso invece due errori: hanno utilizzato la scala in modo lineare e non si sono ricordati che al cambio della griglia cambiava anche la scala.

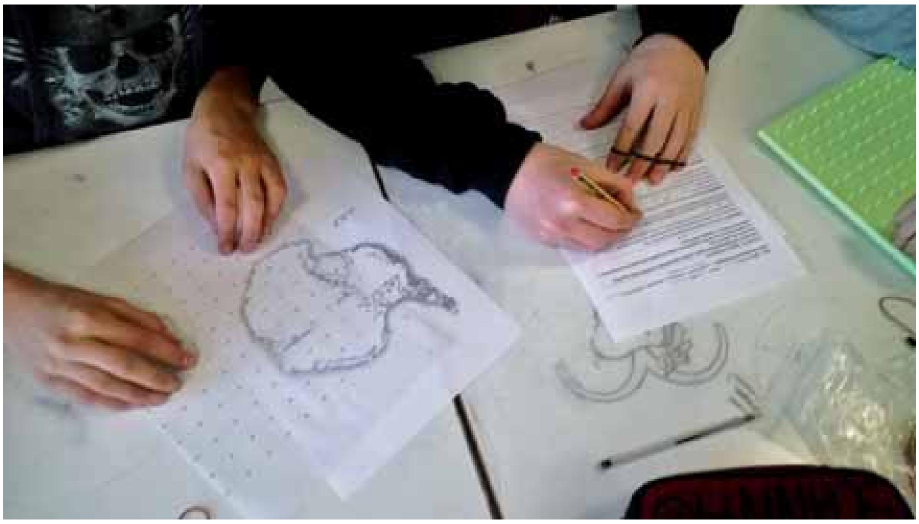
Abbiamo comunque fatto notare che le due griglie dovevano dare risultati vicini tra loro, perché è impensabile che con uno strumento si abbia una misura e con uno strumento più preciso questa raddoppi!

Otterremo un'approssimazione migliore con la griglia 1 o con la 2?____________________ Perchè?____

A questa domanda hanno risposto tutti bene, anche se il linguaggio non era molto appropriato e rigoroso, alcune risposte sono state:

"Perché la 2 è più dettagliata"
"Perché la 2 è più piccola"
"Perché la sensibilità della griglia 2 è più sensibile"

Abbiamo infine parlato di errore di approssimazione.



Abbiamo fatto calcolare nuovamente l'approssimazione a coloro che avevano sbagliato e poi abbiamo fatto fare la media dei due risultati ottenuti e calcolare l'errore assoluto.

Ne abbiamo preso uno a caso, 1.030.00 e abbiamo chiesto se era un errore grande o piccolo. Tutti hanno risposto subito che era un errore grandissimo. Allora abbiamo fatto calcolare anche l'errore relativo in percentuale che veniva un errore intorno al 10%.

Abbiamo poi posto nuovamente la domanda:

"un errore del 10% è un errore grande o piccolo? Possiamo ritenerci soddisfatti?"

A questa domanda nessuno ha saputo rispondere con certezza e allora abbiamo fatto il seguente esempio. Quando misuriamo una lunghezza con un righello possiamo dire con certezza quanti sono i cm ma sui millimetri c'è sempre incertezza e poiché un millimetro è la decima parte del centimetro, misurando con un righello facciamo un errore del 10%. Ecco che allora iniziano a venire fuori le prime opinioni:

" ah ma fare un errore di qualche millimetro non è grande! Allora il 10% è un errore piccolo, non è enorme!"

Abbiamo sottolineato che il calcolo degli errori dipende da molte variabili, come lo strumento usato, la sensibilità e la precisione che loro tratteranno dettagliatamente in Fisica.

Utilizzando le griglie, il teorema di Pick e cercando di stimare al meglio la forma dell'Antartide, abbiamo comunque ottenuto un risultato soddisfacente, con solo un errore del 10%.

Parte II
Classe II A

3.7 Lezione 1: Introduzione al Geopiano

LEZIONE 1. (40 minuti) 21-01-2014

Per i primi venti minuti dell'ora i ragazzi hanno svolto la normale attività didattica, ripassando alcune disequazioni. Abbiamo avuto meno tempo rispetto alla IA per presentare la scheda 1. E' la 1° ora e ci sono alcuni ragazzi con sguardi un po' stanchi.

Introduco il Geopiano come strumento per delle lezioni simili ad un laboratorio che faremo insieme. E' una classe con alcuni elementi un po' "difficili" e cerco di sottolineare che " *faremo matematica "tirando" elastici su questa tavoletta".*

Nessuno ha mai visto un Geopiano e alla domanda che pongo su come viene descritto, dicono:

"è un piano con dei punti"

Chiedo di essere più precisi e di notare la differenza tra le due facce del Geopiano. Arriviamo così alla definizione di reticolo e nodi.

Li lasciamo fin da subito compilare la scheda da soli.

Nel nostro Geopiano di plastica che tipo di reticoli abbiamo? ____________________________

Da quanti nodi è formato ciascun reticolo? ___________________________________

Nessuno problema per la prima domanda, mentre sorge qualche dubbio nella seconda: qualcuno inizia il conteggio dei nodi, contandonde uno per uno..solo dopo un po' si accorgono che forse sarebbemeglio applicare una moltiplicazione.

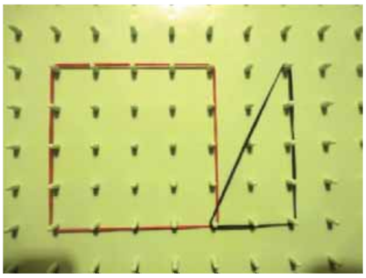
Il nostro Geopiano di plastica e il reticolo stampato:

- Sul Geopiano di plastica con reticolo quadrato (utilizzando gli elastici) e poi sul foglio con il reticolo (utilizzando la riga) proviamo a costruire:
  - un triangolo rettangolo,
  - un quadrato,
  - una figura formata da un quadrato e un triangolo rettangolo con un cateto coincidente con uno dei lati del quadrato.
- Osserviamo le figure ottenute, in particolare:
  - I nodi lungo i lati delle figure: ___________________________________
  - Il lato in comune tra triangolo e quadrato della terza figura _________________

Dunque il nostro Geopiano di plastica ha dei **limiti**:
ad esempio se costruiamo due figure adiacenti nel reticolo stampato non riscontriamo nessun problema, mentre nel Geopiano,poiché ogni nodo ha uno spessore ,cioè occupa un certo volume
____

Questa parte genera subito una prima osservazione, uno studente ci chiede se le figure vanno fatte con un elastico solo o utilizzando un elastico per ogni lato. Non ci eravamo posti il problema finora, forse era necessario precisare questo particolare, anche se in I A non avevamo riscontrato nessuna necessità di esplicitarlo.

Quadrato e triangolo rettangolo riescono velocemente e anche la composizione delle due figure richiesta al punto 3. Solo un gruppo ha dei problemi, mi chiama chiedendomi se la figura che hanno fatto va bene.Eccola:



Rileggo la parte dell'istruzione marcando le parole "cateto" e "coincidente" e chiedo quali sono i cateti di quel triangolo. Mi rispondono che sono tutti e tre e i lati. Mi soffermo un attimo e spiego la definizione di cateto e di ipotenusa. Dopodichè capiscono come fare la costruzione.

Con una discussione di classe, otteniamo le seguenti affermazioni riguardo le differenze tra figure costruite nel Geopiano e figure riportate nella griglia stampata:

"c'è uno spazio tra i due lati coincidenti"

"Gli angoli sono un po' stondati, perché l'elastico passa esterno"

"Le dimensioni della figura sul Geopiano sono diverse da quelle della figura sulla griglia"

Aldilà dell'ultima affermazione, dovuta alla decisione di far entrare due griglie stampate in un foglio A4, scopriamo che il Geopiano ha dei limiti e come in IA parliamo di modellizzazione.

Continuiamo con la discussione, ponendoci le ultime domande riguardanti la descrizione del Geopiano

Possiamo rappresentare tutte le figure?____
Possiamo rappresentare tutti i poligoni? ______________________________________
Un quadrato lo possiamo rappresentare in entrambi i reticoli ? ___________________
Possiamo rappresentare tutti i triangoli? ______________________________________

Un ragazzo di coloro che hanno iniziato la mattinata con molta fatica e di quelli "più difficili" ci dà subito la risposta:

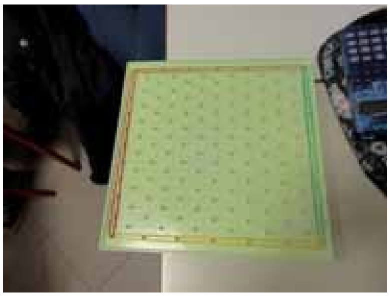
"No prof, non si possono fare tutte le figure. Quelle a bordo curvilineo non si possono fare. Il cerchio ad esempio."

Poiché il tempo sta per finire ci poniamo l'ultima domanda sull'esistenza o no di quadrati nelle griglie. Per la quadrata tutti d'accordo che si possono costruire. Per la triangolare, ecco le risposte:

" Non riesco a farlo, quindi non esiste" (1 gruppo)

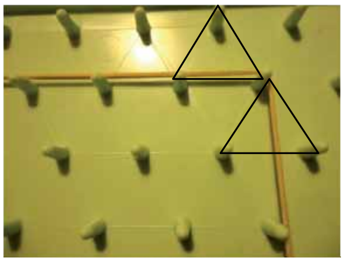
"Ne esiste solo uno! Quello che racchiude tutti i nodi" (3 gruppi)

(riportiamo la foto. I lati sono stati fatti con più elastici in quanto non avevano a disposizione un elastico talmente grande per costruire quel 'quadrato')



"Ne esiste più di uno! Perché se da quello esterno scalo via via di un nodo, ne ottengo molti altri più piccoli" (1 gruppo)

"Non posso farlo, perché ho che due lati sono formati da unità e gli altri due da multipli di $\sqrt{3}$ *perché sono altezze di triangoli equilateri. E poiché le altezze sono diverse dai lati, la somma è diversa. Quindi non posso mai fare quadrati" (2 gruppi)*



Diamo la risposta: nel reticolo triangolare non si possono fare. Discutiamo le risposte ottenute sopra e indichiamo l'ultima dell'elenco come quella che si avvicina più alla spiegazione.

Prendendo il quadrato della figura, quello che contiene tutti i nodi del Geopiano, abbiamo dimostrato che quello è un quadrato. Infatti avremmo che i due lati, rispettivamente m volte $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e n volte l'unità, devono essere uguali. Ma se

$\frac{\sqrt{3}}{2}m = n$ allora $\sqrt{3} = \frac{2\,n}{m}$

Questa è una contraddizione, come hanno studiato anche loro in una lezione teorica precedente.

Anche in IIA viene fatto notare che chi che pensava di aver trovato un quadrato, è rimasti ingannato dall'immagine mentale che aveva.

Sta per suonare e li lasciamo riflettere sulla domanda: ci sono e quali sono, triangoli che non si possono fare? Li aiutiamo dicendo di guardare bene il quadrato.

Iniziamo a rimettere a posto i Geopiani e un gruppo fa lo "smile" qui sotto mostrato dal Prof.Miari nella figura.

Per incuriosirli un po' e dare qualche anticipazione, diciamo che nelle lezioni successive faramo una formula semplicissima che però ci consente di fare una cosa fantastica: calcolare l'area di quella figura solo contando nodi.

Rimangono tutti stupiti e chiediamo al gruppo che ha fatto la costruzione di provare a calcolare l'area della figura con gli strumenti che conoscono e di scrivere come ci sono arrivati per la lezione successiva.

Anche in IIA la presentazione del Geopiano è risultata positiva. Siamo rimasti davvero stupiti di come molti dei ragazzi che solitamente hanno poca attenzione durante le lezioni, si siano dimostrati durante questa ora molto attenti e attivi, partecipavano molto più rispetto agli altri componenti della classe. Alcuni gruppi sono risultati un po' passivi, ma hanno comunque svolto il loro lavoro . Due o tre studenti appena hanno visto il Geopiano hanno esclamato che era davvero " ganzo" e uno dei ragazzi "più difficili" ci ha salutato dicendo:

"Prof, si può fare sempre così la matematica! Ho capito e mi sono divertito!"

Putroppo la matematica non sempre è una materia divertente, un po' come tutte le materie in generale. Quello che abbiamo notato però è che sicuramente uscire per qualche lezione dagli schemi, proporre attività manuali e concrete, aiuta a rivalutare questa materia, spesso presa con molto distacco dai ragazzi, in quanto vista come pura astrazione.

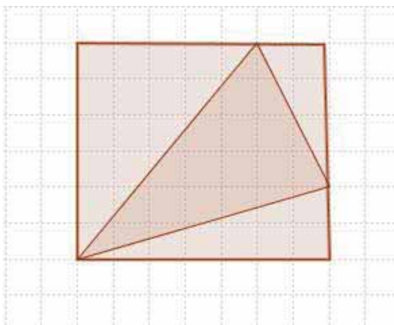
3.8 Lezione 2: Verso il teorema di Pick

LEZIONE 2. (1 ora) 23-01-2014

In questa lezione dovevamo finire la scheda 1, sull'introduzione al Geopiano, ma abbiamo iniziato direttamente la scheda 2, perché era un argomento che ci stava particolarmente a cuore.

Abbiamo chiesto alla ragazza che aveva costruito lo "smile" alla fine della lezione precedente se ne avesse calcolato l'area, ma la risposta è stata che non ci era riuscita.

La scheda di oggi aveva l'intento di vedere se i ragazzi riuscivano a trovare qualche relazione da una serie di dati, far ragionare i ragazzi e fargli capire l'importanza di trovare una formula universale. Infatti siamo partiti chiedendo loro come avrebbero calcolato l'area del seguente triangolo:



Hanno riposto bene: possiamo calcolare l'area del rettangolo a cui poi sottrarrebbero le are dei 3 triangoli rettangoli rimanenti. Abbiamo detto che avremmo trovato una formula molto più semplice, basata solo sul conteggio di nodi, che ci avrebbe permeso di calcolare l'area della figura immediatamente.

La presentazione della scheda è stata molto veloce, abbiamo spiegato il concetto di triangolazione, che i ragazzi non avevano mai sentito e li abbiamo lasciati iniziare la scheda. Questo concetto è stato inserito nella scheda per arrivare a far capire che ogni poligono è triangolabile e ci servirà per dimostrare Pick.

Triangolare un poligono: scomporlo in triangoli, non necessariamente congruenti tra loro. I triangoli non devono sovrapporsi l'un con l'altro e i loro lati non devono intrecciarsi.

Esercizio 1) Triangola le seguenti figure nel reticolo quadrato del Geopiano:

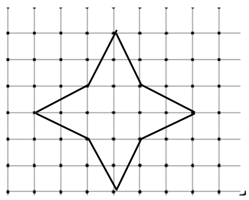


Figura **a)**

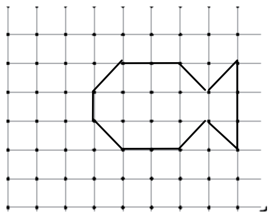


Figura **b)**

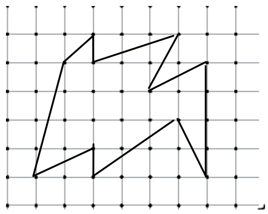


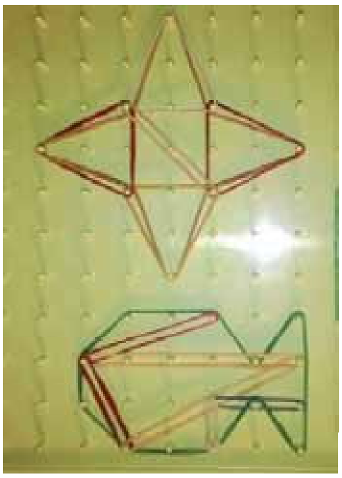
Figura **c)**

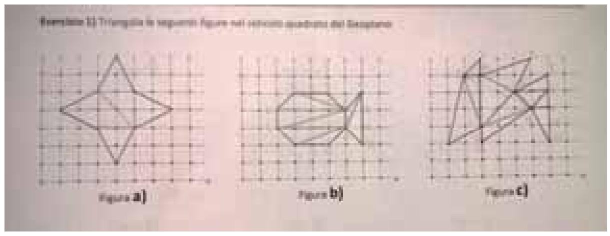
Esercizio 2) Inventa una figura e fai una triangolazione.

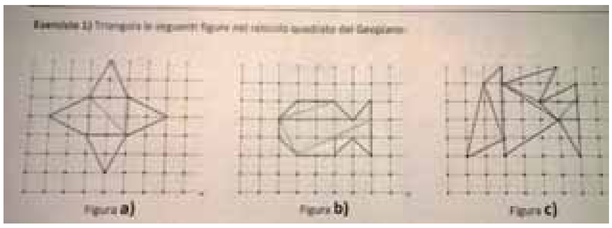
- **Ogni poligono è triangolabile?**____

- **Che metodo hai usato per triangolare?**___________________________________

Pensavamo che la triangolazione riuscisse facilmente, in realtà non pochi hanno avuto difficoltà. Altri, dopo la prima figura, hanno cercato di trovare un metodo per triangolare anche le successive, altri andavano semplicemente a caso.







Riportiamo la varie tipologia di risposta :

“Nessun metodo”

“Ho cercato di usare i lati del poligono come lati di triangoli!”

“Ho scomposto in trapezi e rettangoli e poi li ho ricomposti in triangoli rettangoli”

Queste sono le motivazioni dei ragazzi che in qualche modo sono riusciti a triangolare.
Questa sotto è quella del gruppo che non ci è riuscito:
“Abbiamo provato ad unire i punti”

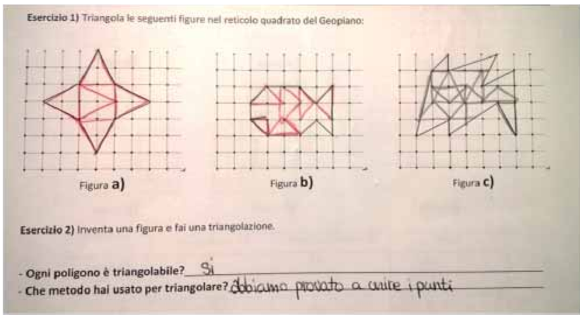

Esercizio 1) Triangola le seguenti figure nel reticolo quadrato del Geopiano:

Figura **a)** Figura **b)** Figura **c)**

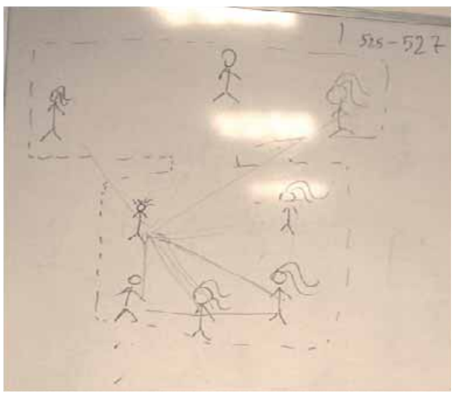
Esercizio 2) Inventa una figura e fai una triangolazione.

- **Ogni poligono è triangolabile?** Si
- **Che metodo hai usato per triangolare?** abbiamo provato a unire i punti

Per far capire meglio il concetto di triangolazione abbiamo anche detto che è come ricoprire una figura con mattonelle triangolari. Abbiamo poi affermato che ogni poligono è triangolabile e che ci sono vari modi per farlo.

Per farli ragionare ancora un pochino, abbiamo preso l’esempio di uno studente in un angolo della stanza, che deve dare la mano ad altri studenti della classe e tornare a posto ogni volta.

Tutti hanno suggerito questo schema:



Allora gli abbiamo detto che potrebbero immaginarsi che gli studenti siano posti agli angoli di un poligono ed effettivamente ho tanti cammini che delineano tanti triangoli. Si parla di diagonali e il Prof. Miari ricorda alla classe che è un argomento che hanno già fatto precedentemente.

Abbiamo anche ricordato che la somma delle aree dei triangoli mi dà area totale della figura.

Li lasciamo procedere con la seconda parte della scheda, quella riguardante il conteggio dei nodi, che non ha dato nessun problema.

- *NODI **INTERNI:*** i nodi che non toccano nessun lato del poligono. Li indicheremo con la lettera "**I**".
- *NODI sul **BORDO**:* i nodi che toccano (internamente o esternamente) un lato. Li indicheremo con **"B"**

Esercizio 3) Utilizzando le figure dell'Esercizio 1) , completa la tabella qui a fianco:

	Nodi interni = **I**	Nodi sul bordo = **B**
Figura **a)**		
Figura **b)**		
Figura **c)**		

Un sacco di problemi arrivano invece nella parte successiva a fine pagina:

Assumiamo che il lato di ogni quadrato del reticolo sia 1 unità = 1 u. Quanto sarà la sua area?___________

Un rettangolo con base 3 u e altezza 2 u, avrà una misura di superficie di ______. In effetti esso è costituito da __________ quadrati del reticolo, ognuno di area_______, come detto precedentemente.

Disegna il rettangolo nella griglia stampata e colorane la superficie.

Questa parte di scheda aveva lo scopo di associare all'area un'unità di misura. Trovavo poco corretto parlare di "area 8", ad esempio. Allora prima di parlare di area ho fatto notare che se assumiamo 1 unità come lato del quadrato, ognuno di essi dovrà avere area 1 u^2. In realtà solo un gruppo ha fatto bene l'esercizio. Tra le risposte sbagliate troviamo:

“100 u” , “ 1·1= 1 u” “1” “121 u^2” "1^2".

E anche nelle successive parti da compilare o dimenticano u o si scrivono solo u, senza il quadrato. Ci è sembrato molto strano questo fatto: i ragazzi hanno tra le altre materie anche Fisica, dove l'unità di misura è fondamentale.

Uno studente ha anche chiesto se con 2 unità si intendevano 2 nodi o 2 segmenti..

Li lasciamo completare anche l'ultima parte della scheda, abbiamo poi scritto i risultati alla lavagna e abbiamo chiesto di cercare per casa delle relazioni tra nodi e area. Alcuni gruppi hanno iniziato a pensarci fin già da subito.

Sottolineiamo di nuovo il fatto fantastico che, mentre finora abbiamo usato una formula geometrica per l'area per ogni singola figura :

formula 1 → figura 1

formula 2 → figura 2

formula 3 → figura 3

possiamo trovare una formula che ci permette di avere nel Geopiano:

formula ↗ figura 1
formula → figura 2
formula ↘ figura 3

Molti rimangono stupiti di questo fatto, soprattutto quando diciamo che è una formula semplicissima.

Uno dei più bravi della classe inizia, mentre suona la campanella, a dare le sue prime risposte, ma si accorge da solo che non vanno bene.

Salutiamo tutti e andiamo in IIIA. Alla fine dell'ora lo ritroviamo in giro per i corridoi e appena ci vede ci viene subito incontro dicendo:

"prof. L'ho trovata...forse!! È B/2+I-1 ! Giusto?"

Rimaniamo davvero di stucco..da una parte contentissimi che la scheda ha guidato bene il ragionamento dei più bravi e dall'altro che non ci aspettavamo che qualcuno ci arrivasse in così poco tempo. Ebbravo B.!

3.9 Lezione 3: Dimostrazione del teorema di Pick

<u>LEZIONE 3. (1 ora)</u> 30-01-2014

Questa lezione abbiamo deciso di utilizzare la lavagna interattiva magnetica (LIM), sia perché essendo un elemento sempre più presente nelle scuole ho potuto sperimentarla direttamente, sia perché l'argomento di prestava bene ad essere presentato in quel modo. Questa lezione è stata molto discussa prima della sua esposizione, per il fatto che la dimostrazione del teorema di Pick è difficile per una II geometri e per il fatto che fatta interamente è un po' troppo lunga e ripetitiva. Abbiamo alla fine voluto provare a proporla, in forma semplificata rispetto all'originale.

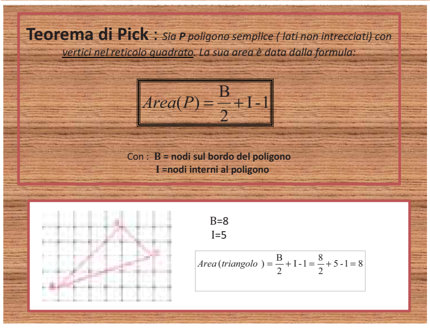
Ai ragazzi è stata consegnata la scheda 3 con parti da completare e alcuni es. da fare nel Geopiano. Utilizzando la LIM è stata realizzata una presentazione in Power Point che riprendeva molti aspetti della scheda 3, al cui interno c'erano dei link che rimandavano ad esercizi fatti da me con Geogebra. Questo ci ha permesso di creare più momenti di discussione in classe e percorrere insieme i punti principali della scheda riguardanti la dimostrazione del teorema di Pick.

Abbiamo iniziato riprendendo il discorso sul conteggio fatto la lezione precedente e il fatto che uno di loro aveva trovato la relazione di Pick. Ho confermato che effettivamente la formula è quella giusta e ho chiesto se fosse sicuro della valenza della formula per ogni poligono. A questa domanda un ragazzo ha risposto:

" si prof che vale, perché lei ci ha detto che valeva"

Volevo far nascere in loro il bisogno di cercare una dimostrazione e non di fidarsi semplicemente di quello che avevo detto io. Li ho provocati dicendo loro che avrei anche potuto mentire sulla sua validità. Oppure, se fossi stata sincera, dovrei aver avuto la certezza al 100% della valenza di tale risultato. In generale in matematica funziona così, un risultato per valere in generale deve essere dimostrato rigorosamente.

Abbiamo iniziato poi la presentazione in Power Point e le prime due slide mi hanno permesso di parlare di Pick, enunciare il suo teorema e fare un esempio.



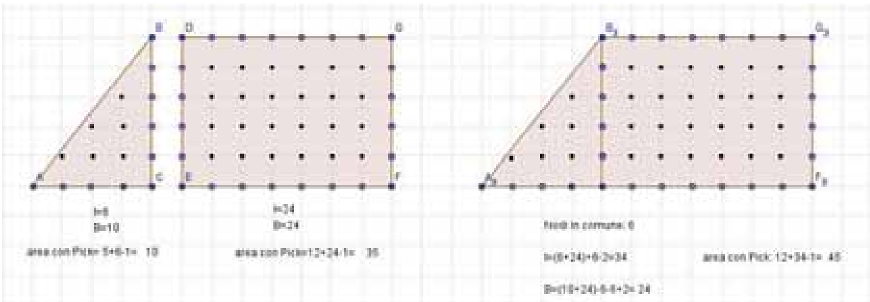
Ho chiesto come avrebbero fatto a calcolare l'area del triangolo senza Pick:
"*conto i quadrati*", ma poi si accorgono che è difficile
"*base per altezza diviso due*", ma si accorgono di non sapere quando valgono
"*costruisco un rettangolo e sotraggo le aree dei triangoli rettangoli*", metodo è molto laborioso.
Ecco, invece, che la formula di Pick riesce a dare un risultato immediato.
Iniziamo la dimostrazione del teorema, partendo da una mappa concettuale che riassume i passi principali della dimostrazione.

Partiamo dimostrando che la formula di Pick è additiva e che vale per triangoli.

Passo 1) La formula è additiva. Questa parte della dimostrazione è stata rivista varie volte. Inizialmente volevamo provare a presentarla con una dimostrazione valida in generale per due poligoni, nella quale, però, comparivano un sacco di lettere (vedi approfondimenti).

Pochi giorni prima ci siamo convinti che sarebbe stato troppo impegnativo per i ragazzi seguirla, soprattutto di un tecnico. Allora abbiamo deciso di fargli prendere atto della validità dell'additività con un esempio, che ho costruito su Geogebra.

L'esercizio aveva un pulsante che permetteva di mostrare la costruzione delle figure passo per passo.

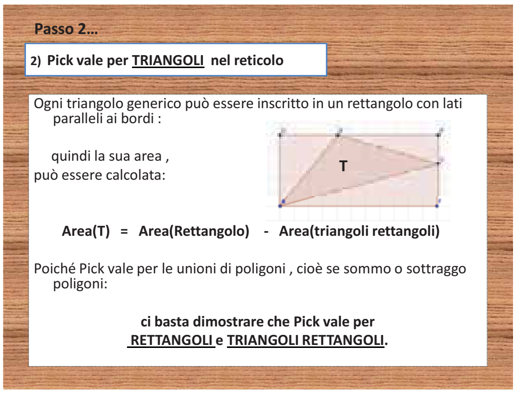


Questa figura è la stessa che avevano della scheda, dove dovevano compilare la parte in cui di chiedevano :I, B e l'area con Pick.

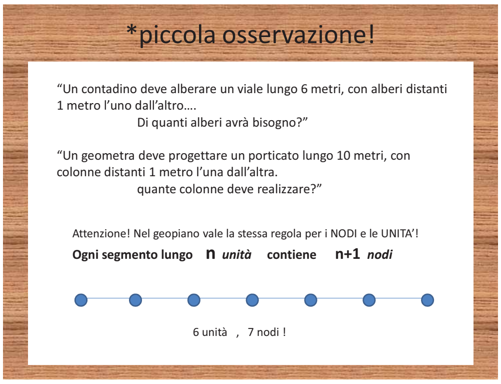
La domanda che ho fatto è stata: *"ma siamo sicuri che se Pick vale per le due figure a sinistra, vale ancora per la figura a destra ottenuta come unione delle due?"*

Un ragazzo ha fatto notare che ci sono dei nodi che a destra sono nel bordo che poi diventano interni e che quindi la formula di Pick poteva cambiare. Allora ho colto l'occasione per far svolgere l'esercizio fino a verificare che effettivamente la formula è additiva.

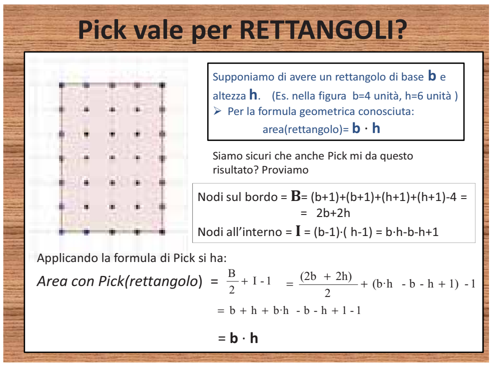
Passo 2) Pick vale per i triangoli.



Per dimostrare questo abbiamo osservato che in realtà ci basta dimostrare Pick per triangoli rettangoli e per rettangoli. Prima di iniziare , ho fatto fare ai ragazzi una piccola riflessione, come è possibile vedere nella slide seguente.



Poi ho chiamato alla lavagna uno studente e ho fatto dimostrare che Pick vale per i rettangoli, seguendo questa slide:

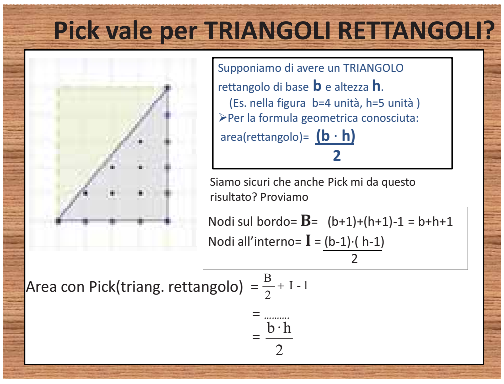


Il ragazzo ha seguito un procedimento di conteggio diverso dal mio: contava mentre cerchiava i nodi con il pennarello magnetico. E' stato molto interessante vedere che ci sono più metodi per il conteggio . Il suo è stato:

(b+1)+h+b+(h-1)=2b+2h

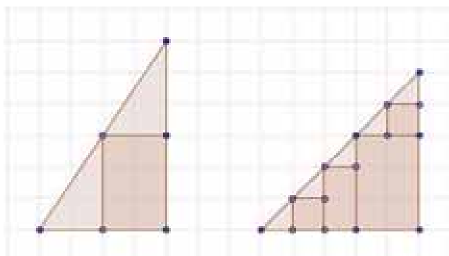
Abbiamo poi calcolato quelli interni, osservando che in ogni riga c'erano (b-1) nodi interni e (h-1) righe. Abbiamo poi verificato che, sostituendo nella formula di Pick il conteggio fatto, ottenevamo la formula per l'area conosciuta.

Poi abbiamo fatto fare la stessa cosa ad un altro ragazzo, ma stavolta con i triangoli rettangoli.



A questo punto, un ragazzo ha fatto una domanda davvero opportuna: " *ma se ho nodi anche nell'ipotenusa come faccio?"*

Volontariamente avevo lasciato quel caso per semplificare la dimostrazione, però mi ha fatto davvero piacere che qualcuno l'abbia chiesto. Ho spiegato che in quel caso possiamo sempre tracciare delle linee a partire dai nodi sull'ipotenusa che dividono il triangolo rettangolo in rettangoli e triangoli rettangoli senza nodi nell'ipotenusa.



Poiché Pick è additiva, la formula di conseguenza varrà per l'intero triangolo rettangolo.

Nella figura precedente si trovano i due esempi fatti. Come possiamo notare a destra compaiono dei quadrati nella scomposizione e qualcuno ha fatto la seguente osservazione:

"ma noi per i quadrati non l'abbiamo mica dimostrato Pick!"

Allora ho spiegato la definizione di quadrato e il fatto che il quadrato è un particolare rettangolo.

A questo punto ho mostrato di nuovo lo schema della dimostrazione, evidenziando le parti che avevamo già dimostrato. Siamo arrivati a concludere che Pick vale per unioni di triangoli.

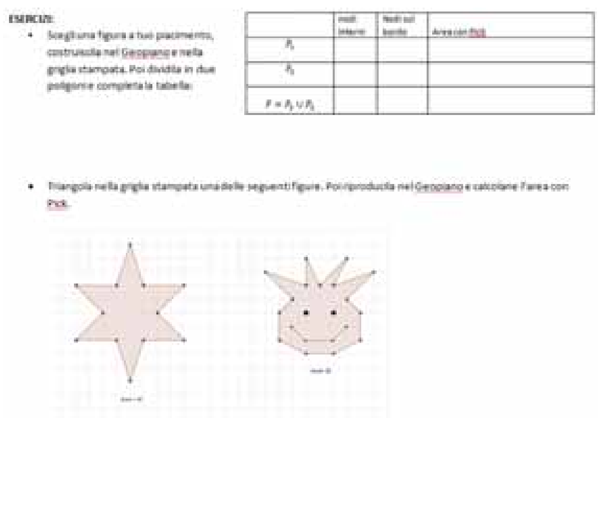
Passo 3) Ogni poligono è triangolabile

Avevo preparato anche la dimostrazione per induzione di questo fatto, ma i ragazzi erano già stanchi, si vedeva dalle loro facce. Allora abbiamo solo triangolato un poligono insieme e abbiamo detto che qualsiasi poligono è triangolabile.

Ho ricordato loro l'importanza della triangolazione per dei geometri:

Concludiamo cosi la dimostrazione del teorema e li lasciamo svolgere gli ultimi due esercizi della scheda.

A fine lezione carichiamo tutta la presentazione pdf su internet e chiediamo ai ragazzi di fare una breve relazione su quanto fatto a lezione.



3.10 Lezione 4: Equivalenza e teorema di Pitagora

LEZIONE 4 . (40 minuti) 06-02-2014

Questa lezione è stata pensata per due motivi principali: il primo è che i ragazzi hanno in programma il teorema di Pitagora e quindi abbiamo pensato di introdurlo con il Geopiano e l'altro è che durante il tirocinio osservativo mi sono resa conto che non sono riusciti ad assimilare bene i concetti di equivalenza ed equiscomponibiltà.

Abbiamo pensato di fare una lezione che mettesse insieme questi due argomenti.

Scheda 4: Il Teorema di Pitagora

Cosa faremo: riprenderemo i concetti di equivalenza, equiscomponibilità e congruenza e dimostreremo il Teorema di Pitagora

Due poligoni sono:

- *CONGRUENTI*: quando possono essere sovrapposti mediante un movimento rigido.
- *EQUIVALENTI*: quando hanno la stessa area.
- *EQUISCOMPONIBILI:* quando sono somme degli stessi poligoni congruenti.

Esercizio 1) Costruire nel Geopiano e nella griglia stampata:
- 2 poligoni equivalenti ma non congruenti
- 2 poligoni equiscomponibili.

Esercizio 2) Costruire due figure <u>diverse tra loro</u> ma con lo stesso numero di nodi sul bordo e di nodi interni. Utilizzando il teorema di Pick, cosa possiamo affermare con certezza?____

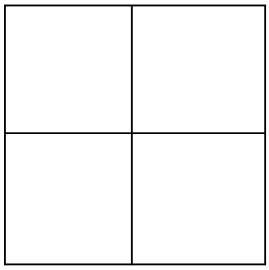
Esercizio 3) Indicare per ogni affermazione se è vera o falsa:

- poligoni congruenti sono sempre equivalenti	V	F
-poligoni equivalenti sono sempre congruenti	V	F
-poligoni equiscomponibili sono sempre equivalenti	V	F
-poligoni congruenti sono sempre equiscomponibili	V	F

Abbiamo chiesto ai ragazzi di leggere le definizioni e cercare riflettere e rispondere alle domande degli esercizi. Ci siamo resi conto che, mentre per equivalenza e congruenza sono riusciti a capirne il senso dopo qualche esercizio, per quanto riguarda l'equiscomponibilità tutti avevano il medesimo concetto errato:

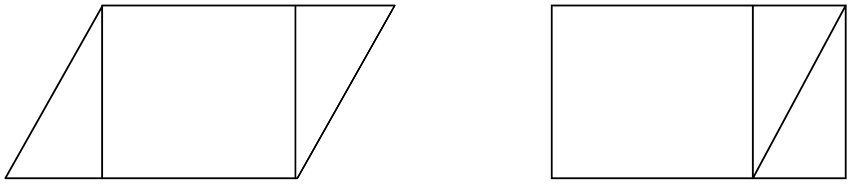
equiscomponibilità = dividere una figura in parti uguali.

Infatti uno tra gli esempi da loro fatti troviamo :



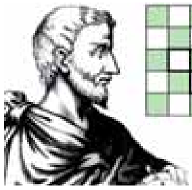
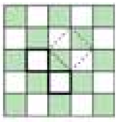
Per equiscomponibilità intendevano una proprietà del singolo poligono, invece che relazione tra due o più poligoni.

Allora abbiamo ritenuto necessario richiamare l'attenzione di tutti e di spiegare nuovamente il concetto di equiscomponibilità, facendo qualche esempio e parlando del Tangram, che molti di loro conoscevano. Abbiamo poi fatto questo esempio alla lavagna:



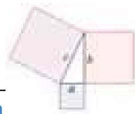
Alcuni gruppi hanno poi semplicemente riprodotto gli esempi fatti alla lavagna, altri hanno costruito nuovi poligoni equiscomponibili.
L'esercizio 2 è riuscito a tutti e hanno risposto bene alla domanda, la cui risposta è che si ottenevano poligoni equivalenti.
Anche l'esercizio 3 è riuscito e abbiamo fatto una discussione in classe, cercando insieme un contro esempio alla seconda domanda, la quale era falsa.

Siamo passati poi alla parte della scheda riguardante il teorema di Pitagora. Siamo partiti dal racconto leggendario su Pitagora che vede nelle mattonelle di un pavimento una relazione particolare.

Si racconta che Pitagora abbia scoperto il suo teorema mentre stava aspettando di essere ricevuto da Policrate. Seduto in un grande salone del palazzo del tiranno di Samo, Pitagora si mise ad osservare le piastrelle quadrate del pavimento..si pensa che ne abbia vista una rotta perfettamente su di una diagonale, così da formare due triangoli rettangoli uguali: l'area del quadrato costruito sulla diagonale di uno dei due triangoli rettangoli risultava il doppio dell'area di una piastrella.

Esercizio 4) Costruire nel reticolo quadrato del Geopiano e in quello stampato, un triangolo rettangolo isoscele con cateti lunghi 3 unità.
- Dimostrare che vale ancora il Teorema di Pitagora utilizzando l'equiscomponibilità.
- Verificare il Teorema di Pitagora utilizzando la formula di Pick



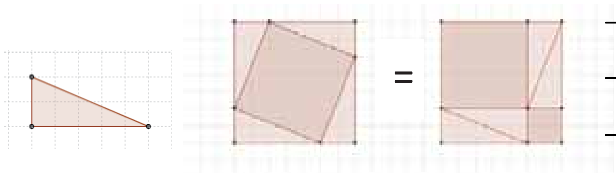
TEOREMA DI PITAGORA: In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

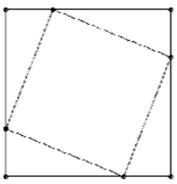
Arrivati a questo punto abbiamo richiamato i gruppi e ho dimostrato geometricamente alla lavagna il teorema di Pitagora. Nella scheda consegnata dovevano completarla da soli.

- COMPLETARE LE DUE DIMOSTRAZIONI:

1) Dimostrazione geometrica :

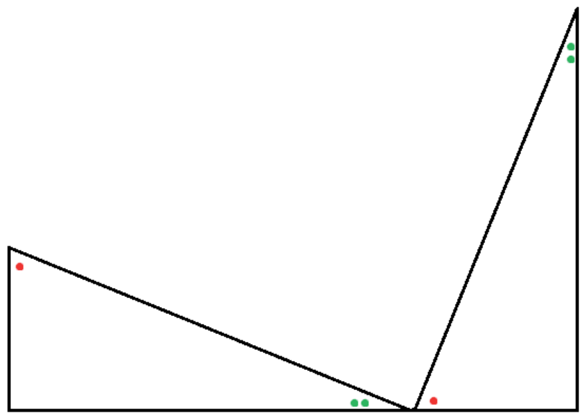


2) Dimostrazione algebrica:



La dimostrazione geometrica è stata fatta nel seguente modo: partiamo da un generico triangolo rettangolo di cateti a ,b e c, e riportiamolo altre tre volte in modo che i 4 triangoli rettangoli così disposti formino un quadrato di lato $a+b$. Dentro al quadrato costruito

si verrà a formare un altro quadrato i cui lati sono esattamente le ipotenuse c dei 4 triangoli rettangoli.
Per dimostrare che anche quello è interno è un quadrato, utilizziamo il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. Infatti la somma dei due angoli acuti del tr.rettangolo è 90° (180° -angolo retto= 90°).



Inoltre ogni angolo del quadrilatero si trova come differenza tra un angolo piatto e i due angoli acuti del tr.rettangolo. Allora ogni angolo del quadrilatero è 90°.
Abbiamo poi costruito un altro quadrato sempre di lato a+b e abbiamo riportato i 4 tr.rettangoli con un'altra disposizione. Possiamo perciò concludere che le aree che avanzano dai due quadrati.
Togliendo i 4 tr.rettangoli ,sono uguali, ovvero che:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Arrivati a questo punto stava per suonare la campanella ,abbiamo lasciato la scheda da finire per casa, in modo che provassero a fare una dimostrazione algebrica.

Abbiamo anche lasciato una guida per il compito che devono con segnare sulla dimostrazione del teorema di Pick.

3.11 Lezione 5: Proporzionalità e incommensurabilità

LEZIONE 5 . (30minuti) 01-03-2014

Abbiamo deciso di concludere il percorso in II A con la scheda 5, su proporzionalità tra aree e incommensurabilità.

Prima di questa lezione i ragazzi avevano affrontato questi due argomenti con il prof. Miari durante le ore di lezione ordinarie. In particolare avevano fatto: classi di grandezze, rapporto, proporzionalità, grandezze commensurabili e incommensurabili.

Il primo esercizio era questo:

Esercizio 1) Costruire nel Geopiano e nella griglia stampata:

- un rettangolo di area 6 u^2 ed uno di area doppia.

-un triangolo di area 6 u^2 ed uno di area doppia.

Che metodo hai usato?____

Pensavo sarebbe riuscito molto più velocemente e con meno difficoltà.

La prima domanda che mi è stata fatta è:

"*cosa si intende per u^2*"?

In una lezione avevamo già affrontato il problema, ma c'era bisogno di una rinfrescata.

Abbiamo quindi ripetuto insieme che un'unità di lunghezza u è un segmento tra due nodi, preso orizzontalmente. Mentre un 'unità di superficie u^2 è un quadratino di lato 1 unità ed abbiamo disegnato entrambi alla lavagna.

Mentre per il rettangolo più o meno tutti hanno subito trovato ciò che era richiesto, per il triangolo sono sorti alcuni problemi.

In particolare un gruppo ha affermato che *non è possibile costruire un triangolo con 6 quadretti.*

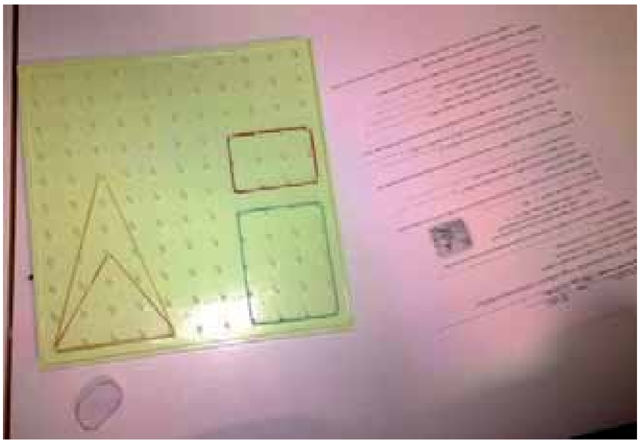
Allora ho ricordato il fatto che deve essere equivalente a 6 quadretti, e che quindi posso anche tagliarne qualcuno, a patto che l'area totale poi risulti 6 u^2

Hanno poi pensato di usare la formula dell'area e si sono convinti che un triangolo di base 4 e altezza 3 ha effettivamente area 6.

Altri gruppi non hanno avuto questa ambiguità e un gruppo ha svolto subito l'esercizio costruendo un triangolo rettangolo e poi sdoppiandolo lungo un cateto, ottenendone così uno di area doppia Altri avevano costruito triangoli non rettangoli e non sono riusciti a sdoppiarli: ecco perché non sapevano come andare avanti.

C'è stato chi ha detto che dovevamo prendere il doppio della base e dell'altezza e chi ha adottato il metodo di cercare due numeri tali che la metà del prodotto fosse 12.

Abbiamo poi svelato che bastava semplicemente raddoppiare o la base o l'altezza e l'area sarebbe raddoppiata.



Siamo poi passati alla seconda parte della scheda.

Esercizio 2) In un dialogo, tratto dal *Menone*, Platone scrive il seguente dibattito tra Socrate e uno schiavo:

<< …Socrate: "Il lato di questo quadrato è di due piedi; quanto sarà quello del quadrato avente superficie doppia?"
Schiavo: " Evidentemente il doppio, Socrate!" …>>

- Secondo voi, lo schiavo ha ragione? SI NO
  Perché?________________________

Un gruppo inizialmente ha risposto:
" SI, perché il perimetro e l'area sono direttamente proporzionali."
Due gruppi hanno riposto:
"NO, perché viene un quadrato 4 volte più grande"
Due gruppi hanno risposto:
"NO, perché il lato deve essere radice di 8" ovvero hanno fatto il calcolo algebrico
Gli altri gruppi hanno risposto:

"NO, perché se raddoppio un quadrato viene un rettangolo."

Oltre la prima risposta, che poi è stata corretta andando avanti con la scheda, anche l'ultima mi ha stupito molto: il fatto di dire superficie doppia fa pensare al solo sdoppiamento della figura di partenza.

Manca il concetto che due superfici possono avere superfici una il doppio dell'altra senza necessariamente essere ottenuti da sdoppiamenti.

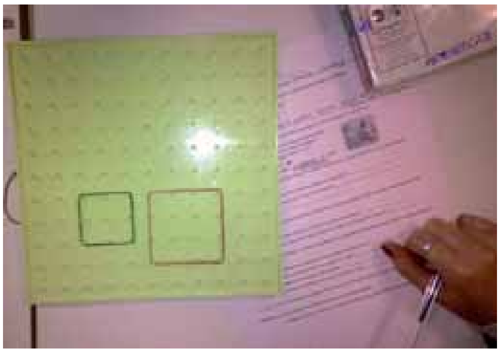
1. Costruire nel Geopiano (e nella griglia stampata) un quadrato ABCD di lato 2 unità ed accanto un quadrato di lato doppio. Osservare la figura:
   - Quanti quadrati congruenti ad ABCD contiene il secondo quadrato? __________
   - Qual è il rapporto tra le superfici dei due quadrati costruiti?____________
   - Ha ragione lo schiavo?____________________

Per fare questo esercizio abbiamo ripetuto cosa si intende per rapporto tra aree in generale è stato svolto bene e ha fatto ricredere coloro che avevano dato ragione allo schiavo.

2. Consideriamo adesso il solito quadrato ABCD e un quadrato che pensate possa avere superficie doppia rispetto ad ABCD.

- Che quadrato avete ottenuto?Siete riusciti a disegnarlo nel Geopiano?________
- Secondo voi, a quale valore deve avvicinarsi la misura del lato del quadrato cercato?___

Tutti hanno risposto che non sono riusciti a disegnarlo e che la misura del lato alla quale dobbiamo avvicinarsi è 3. Alcuni hanno anche scritto radice di 8, perché hanno svolto i calcoli. Un gruppo ha scritto 2.83: hanno iniziato ad elevare al quadrato numeri partendo da 3 e scalando di 0.01 ogni volta.



L'esercizio 3 è l'ultimo che siamo riusciti a fare prima del suono della campanella.

3. Riprendiamo il quadrato ABCD , costruire nel Geopiano (e nella griglia stampata) il quadrato DBEF avente per lato la diagonale DB.
   - Come è la superficie del tr.rettangolo BCD rispetto a quella di ABCD?_____
   - Quanti triangoli congruenti a BCD sono contenuti in DBEF? ____________
   - Quale è il rapporto tra le superfici dei quadrati?____________________
   - Che tipo di numero rappresenta il lato del quadrato cercato?__________

Questo esercizio è andato bene, tutti sono rimasti stupiti dal fatto che in realtà possiamo costruire il quadrato di area 8 sulla diagonale. Hanno compilato bene la parte riguardante i rapporti e in generale quasi tutti hanno scritto che il lato del quadrato è un numero irrazionale, tranne due gruppi che hanno scritto che quello che otteniamo è un numero decimale.
Non siamo riusciti a finire la scheda, ovvero la parte in cui di doveva dimostrare l'incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato, ma avevano comunque già affrontato questo argomento in classe nelle lezioni precedenti.

4 Diario di bordo di altre classi

Le prossime pagine raccolgono altre lezioni fatte in classi diverse da quelle principali. Saranno esposte in modo più sintetico, ma le abbiamo volute inserire per poter effettuare un confronto tra classi con la stessa età ma di livello differente. In alcuni casi le schede prensentate sono state le stesse della IA e della IIA, in altri casi sono state adattate ai tempi e alla tipologia della classe.

Abbiamo fatto anche qualche accenno al Geopiano in classe III A. Stavano facendo i vettori e abbiamo deciso di introdurre il Geopiano e i reticoli attraverso la definizione vettoriale(vedi Approdimenti teorici). In un'altra lezione abbiamo invece accennato alla Taxi-geometria come possibile geometria non euclidea sul Geopiano, definendo la taxi-distanza e facendo vedere che le circonferenze con questa metrica diventano dei quadrati. Non abbiamo strutturato delle vere e proprie attività in III A, quindi non riteniamo necessario riportare il diario di bordo di queste lezioni. Abbiamo però riportato nel capitolo Approfondimenti teorici alcuni risultati di teoria sia sui reticoli che sulla Taxi-geometria che possono dare spunti per evenutali lezioni in classe.

4.1 Classe I B

4.1.1 Lezione 1: Introduzione al Geopiano

<u>LEZIONE 1. (1 ora)</u> **11-02-2014**

Abbiamo deciso di introdurre il Geopiano anche in questa classe che, a parte qualche studente, è molto carente nella parte di geometria. Proprio qualche giorno prima, durante un'interrogazione, uno di loro non riusciva a disegnare alla lavagna un triangolo equilatero. Abbiamo allora deciso con la Professoressa Chiosi di far costruire alla classe varie figure con il Geopiano, per far emergere le loro carenze, i misconcetti e cercare di correggerli.

Abbiamo diviso la classe in 8 gruppi e abbiamo consegnato loro un Geopiano e la scheda 1, utilizzata anche in IA. Hanno iniziato bene la scheda, fino al punto in cui si chiedeva di costruire due figure con lati adiacenti. Dopo qualche esitazione ci sono riusciti ma non è stato facile tirar fuori, durante una discussione comune, i limiti del Geopiano.

Abbiamo proseguito con la scheda con le domande sull'esistenza delle figure possibili: la discussione è stata molto simile a quelle già affrontate nelle altre classi.

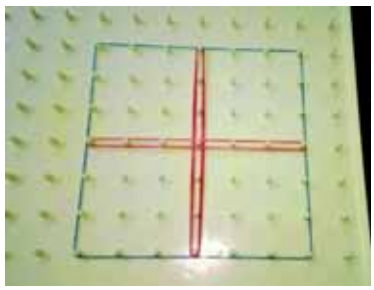
L'ultima parte, quella delle costruzioni, è stata quella più interessante per capire il loro livello di geometria.

Come abbiamo già detto, a parte i gruppi ai quali appartenevano i "bravi" della classe, gli altri gruppi hanno avuto un sacco di difficoltà. A partire dalla costruzione del triangolo rettangolo isoscele fino a quella del quadrato con diagonali parallele ai bordi.

Gli errori che più mi hanno colpito sono stati i seguenti due:

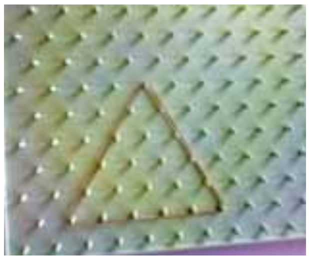
-Es. *Costruisci un quadrato con diagonali parallele ai bordi del Geopiano*

Nella costruzione a fianco vediamo che hanno stravolto il concetto di diagonale per adattare la loro immagine mentale di quadrato alla richiesta fatta.



- Es. *Costruisci un triangolo con un segmento di 6 nodi come altezza.*

In questa costruzione per altezza hanno inteso la lunghezza dei lati obliqui.



Non sono mancate le osservazioni che già erano venute fuori nelle altre classi, come ad esempio, nel vedere il quadrato ruotato, dire che diventa un rombo. Ancora una volta l'immagine mentale prevale sulla definizione matematica di quadrato.

4.2 Classe II B

4.2.1 Lezione 1: Introduzione al Geopiano

LEZIONE 1. (1 ora) 07-02-2014

La prima lezione in II B è stata, come per le altre classi, una lezione di introduzione al Geopiano in modo da iniziare a prendere confidenza con questo strumento e in modo da iniziare ad indagare le proprietà delle figure geometriche. Abbiamo deciso di farla all'ultimo minuto, quindi abbiamo fotocopiato la scheda 1 utilizzata in IIA. Non avevamo con noi le griglie stampate, quindi le abbiamo sostituite con dei fogli a quadretti.

Li abbiamo divisi in gruppi ed essendo una classe numerosa, alcuni gruppi erano da 4. Credo che siano molto meno proficui dei gruppi a due, perché alcuni rimangono un po' esclusi da quello che è proprio il "maneggiare" il geopiano direttamente.

La classe IIB è riuscita a finire la scheda in anticipo rispetto alla IIA e devo dire con ottimi risultati.

Non sono mancate anche qui affermazioni del tipo:

" come si fa a fare un triangolo rettangolo isoscele? È impossibile!"

Ma in generale sono più abili in geometria e sanno maneggiare bene le figure geometriche. Molti si sono accorti che il quadrato nel reticolo triangolare non si può fare perché abbiamo a che fare con altezze di triangoli equilateri e con i lati unitari.

Abbiamo ripassato la classificazione dei triangoli e dei quadrilateri.

Gli ultimi minuti dell'ora abbiamo discusso su quello imparato ed ogni gruppo ha espresso la sua opinione. Nella lista abbiamo:

"il geopiano è meno preciso delle griglie stampate, ma è più intuitivo per costruire le figure,poi è divertente"

"non tutte le figure si possono fare, perché non tutte le proprietà possono essere rispettate,soprattutto per i poligoni regolari"

"il triangolo isoscele rettangolo esiste ed è anche metà quadrato"

" un quadrato rimane un quadrato anche se lo 'giro' "

4.2.2 Lezione 2: Teorema di Pick ed equivalenza

<u>LEZIONE 2. (1 ora)</u> 12-02-2014

Dopo aver visto l'entusiasmo e la reazione della classe al Geopiano abbiamo deciso di fare con la Professoressa Chiosi un'altra lezione . L'argomento che avevano appena finito di affrontare in classe era stata la teoria dell'equivalenza.

Abbiamo allora deciso di introdurre il teorema di Pick e riprendere i concetti che avevano visto sull'equivalenza. In II A avevano fatto una lezione un po' diversa, qui ci siamo concentrati maggiormente sui teoremi ed i concetti che già studiati.

La scheda proposta riprendeva alcune parti della scheda 2 presentata in IIA, ma a differenza di questa, qui si inizia con la presentazione del teorema di Pick:

Scheda 2: Teorema di Pick ed equivalenza

Teorema di Pick . *Sia **P** poligono semplice (lati non intrecciati) con vertici nel reticolo quadrato. La sua area è data dalla formula:*

$$\boldsymbol{Area}(\boldsymbol{P}) = \frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{I} - \mathbf{1}$$

Con : **B = nodi sul bordo** , **I = nodi interni**

Esercizio: calcola l'area delle seguenti figure:

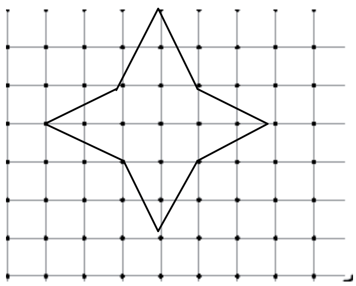


Figura **a)**

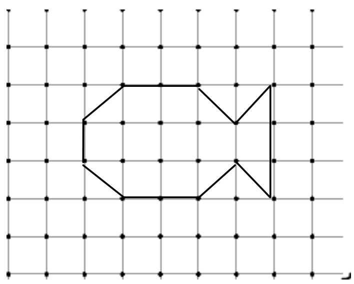


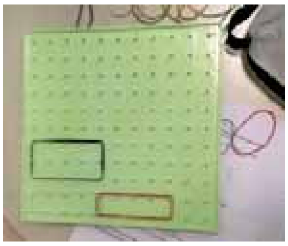
Figura **b)**

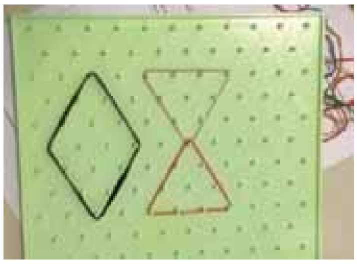
	a)	b)
I		
B		
Area con Pick		

I ragazzi sono rimasti molto stupefatti da questa formula e hanno iniziato a cercare altre figure nel geopiano e poi a calcolarne l'area. Ho intravisto ragazzi che facevano questi conteggi nel geopiano triangolare, allora ho chiarito che la formula vale solo per il reticolo quadrato e che in quello triangolare vale ma con una piccola variante.

Siamo poi entrati nella parte più difficile della scheda, dove i ragazzi hanno dovuto applicare sul geopiano i teoremi e i concetti conosciuti e studiati in classe,

Alcuni gruppi hanno avuto problemi con l'equiscomposizione: non avevano ben capito cosa fosse, mentre altri si sono lanciati a cercare varie figure equiscomponibili.





Abbiamo poi proseguito con la scheda:

Due poligoni sono:
- *CONGRUENTI*: quando possono essere sovrapposti mediante un movimento rigido.
- *EQUIVALENTI*: quando hanno la stessa area.
- *EQUISCOMPONIBILI:* quando sono somme di poligoni congruenti.

Esercizio 1) Costruire nel Geopiano e nella griglia stampata:
- 2 poligoni equiscomponibili.

Esercizio 2) Costruire due figure <u>diverse tra loro</u> ma con lo stesso numero di nodi sul bordo e di nodi interni. Utilizzando il teorema di Pick, cosa possiamo affermare con certezza?______________________

Esercizio 3) Indicare per ogni affermazione se è vera o falsa:
- poligoni congruenti sono sempre equivalenti V F
-poligoni equivalenti sono sempre congruenti V F
-poligoni equiscomponibili sono sempre equivalenti V F
-poligoni congruenti sono sempre equiscomponibili V F

Questa parte della scheda è andata molto bene, hanno risposto tutti bene alle domande e hanno fatto bene gli esercizi.

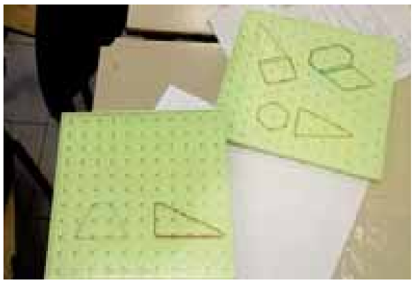
Ci siamo poi soffermati sull'ultima parte della scheda che chiedeva:

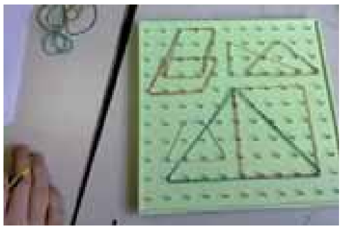
Esercizio 4) Costruire le seguenti coppie di poligoni equivalenti (non congruenti):
- 2 parallelogrammi
- un triangolo e un rettangolo
- 2 triangoli
- un trapezio e un triangolo
- un esagono e un parallelogramma
- un esagono e un triangolo

Ho visto dei ragazzi che iniziavano a fare un esercizio dietro l'altro, molto velocemente, allora ho chiesto che metodo stavano usando e mi hanno detto che cercavano le figure equivalenti richieste equivalenti utilizzando la formula di Pick ovvero cercavano figure con lo stesso numero di nodi sul bordo B e gli stessi I. Altri gruppi hanno invece cercato di utilizzare i teoremi studiati in classe.

Ho anche chiarito che due figure qualsiasi con stesso B e stesso I sono equivalenti, ma non vale l'affermazione inversa, ovvero non è detto che figure equivalenti tra loro abbiano sempre stesso B e stesso I.

Ecco alcune creazioni:

Le osservazioni che mi hanno toccato sono state:

"ma come si fa a fare due triangoli diversi con la stessa base e stessa altezza? Viene lo stesso triangolo in questo modo!"

"io ho trovato un parallelogramma ed un rettangolo equivalenti..perchè due parallelogrammi non ci siamo riusciti!"

"Un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente base e altezza congruente"

Vediamo che usare un linguaggio non rigoroso porta a delle frasi poco sensate, come detto nell'introduzione a questo lavoro.

Abbiamo poi chiarito alla lavagna questi due concetti, facendo anche qualche esempio.

Non tutti sono arrivati a costruire l'esagono e per aiutarli ho detto di usare la griglia triangolare, costruire un esagono regolare e poi risolvere gli esercizi finali della scheda.

Alcuni hanno avuto tempo e ci sono riusciti.

4.2.3 Lezione 3: Pitagora standard e generalizzato,paradossi di Curry

<u>**LEZIONE 3. (1 ora)**</u> **19-02-2014**

In questa lezione abbiamo finito la scheda data la volta precedente e fatto un ripasso su quello visto l'ultima volta: in particolare abbiamo ripassato tutti i teoremi che loro avevano visto in classe sull'equivalenza.

Poi abbiamo introdotto il teorema di Pitagora con la leggenda e ne abbiamo fatto la dimostrazione geometrica.

Abbiamo poi fatto completare gli esercizi e non a tutti è riuscito l'esercizio con l'equiscomposizione.

Alla domanda: " *Il teorema di Pitagora valesse anche per altri poligoni oltre al quadrato*?" la loro riposta è stata NO.

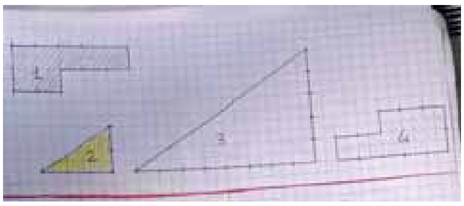
Abbiamo verificato che invece il teorema vale anche per altri poligoni regolari ed utilizzato il reticolo triangolare per verificarlo con i triangoli equilateri e gli esagoni.

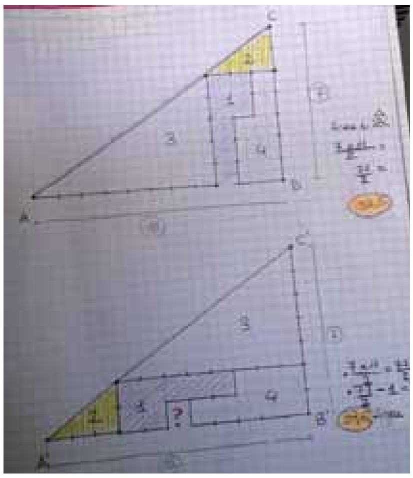
Sono rimasti molto stupiti

Abbiamo anche detto che la relazione di Pitagora vale per i semicerchi e abbiamo dato come esercizio per casa : *provare che preso un triangolo rettangolo di cateti 3 e 4 e di ipotenusa 5, l'area del semicerchio costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei due semicerchi costruiti sui cateti".*

Infine abbiamo voluto fare una piccola osservazione: abbiamo chiesto ai ragazzi "*come mai, visto che le dimostrazioni geometriche sono cosi semplici ed intuitive, non si usano sempre quelle? E come mai, quando dimostriamo un fatto, non possiamo fermarci al 'si vede che..'?"*

A questo punto abbiamo consegnato alcuni disegni fatti a mano.





Li abbiamo lasciati pensare davanti al paradosso di Curry(vedi Approfondimenti teorici): tutti si erano convinti che l'area del triangolo, a seconda di come si disponevano i pezzi, cambiasse.

Un ragazzo ha calcolato l'area dei 4 pezzi e l'area del triangolo, notando che venivano diverse..

Gli ultimi 5 minuti abbiamo spiegato l'inganno e ho fatto anche un altro esempio.

Abbiamo potuto parlare, per un attimo, di pendenza di lati e di triangoli non simili.

5 Analisi della sperimentazione

Ogni volta sia necessario effettuare una valutazione in Matematica, comunicare con un voto o un giudizio su un percorso individuale, occorre considerare due macro destinazioni:

- la valutazione di conoscenze;
- la valutazione di competenze.

La prima può essere effettuata attraverso un test di controllo, in quanto la conoscenza "fotografa" situazioni statiche, rilevando solo se c'è congruenza tra quanto atteso e quanto è stato di fatto ottenuto.

La competenza, viceversa, non è ricavabile da una "fotografia", perché implica il coinvolgimento di questioni "affettive", quali ad esempio l'atteggiamento, la volizione, il desiderio di far uso delle conoscenze possedute e di completare quelle che si rilevano insufficienti.(Fandiño Pinilla, 2002[9]). Una competenza è invisibile, la sua presenza può solo essere inferita a partire da una serie di concrete prestazioni osservabili.

Certificare una competenza: accertare il conseguimento di certe performance complesse e attese. Rappresenta un "saper fare" raggiunto.

La certificazione delle competenze scaturisce dalla somma qualitativa e quantitativa delle rivelazioni e degli accertamenti effettuati nel percorso formativo, tali operazioni spettano ai docenti, cui è riconosciuta la responsabilità di certificarle secondo dei livelli, ad esempio:

Lettura della realtà e risoluzione di problemi concreti e significativi		
Livello elementare	**Livello maturo**	**Livello esperto**
- Comprende il testo di un problema - Individua i dati utili e le richieste - Rappresenta graficamente la situazione problematica - Sa ricercare informazioni utili alla soluzione - Risolve il problema seguendo un percorso guidato	- Comprende il testo di un problema, lo analizza individuando i dati significativi ed eventuali dati mancanti o inutili - Risolve il problema utilizzando procedimenti diversi: diagrammi di flusso, impostazione e calcolo di espressioni aritmetiche, proporzioni, top-down, bottom-up … - Sa individuare l'errore e lo utilizza a scopo terapeutico	- Comprende, analizza e risolve correttamente un problema - Trova procedimenti risolutivi alternativi - Formula soluzioni utilizzando le equazioni - Sa costruire il testo di un problema - Sa risolvere problemi di logica - Affronta correttamente problemi riguardanti i primi elementi della geometria analitica - Individua analogie in percorsi risolutivi per utilizzarle in situazioni problematiche

Proprio per ottenere quante più informazioni possibile sulle competenze di ognuno, durante tutto il tirocinio ho prestato particolare attenzione al comportamento dei ragazzi in aula ed al loro approccio alle attività.

E' però difficile trarre un giudizio esaustivo di questo tipo con 5 ore di attività per classe: ci siamo quindi concentrati sulla valutazione delle conoscenze, inserendo nei test anche alcune domande che richedevano non tanto le conoscenze, ma anche alcune applicazioni.

5.1 Valutazione delle verifiche finali

Per quanto riguarda la parte di valutazione di conoscenze abbiamo effettuato due test, uno in I A e uno in II A, molto simili tra loro, con differenze laddove sono stati affrontati argomenti diversi. Per la creazione di questi test abbiamo ideato dei quesiti a risposta multipla e alcune domande aperte.

5.1.1 I A

Ecco di seguito il test proposto alla classe IA:

TEST CONOSCENZE APPRESE : I A **Nome e Cognome**______________________________________

1. Esistono triangoli rettangoli isosceli?	SI	NO
2.Esistono triangoli rettangoli equilateri?	SI	NO
3.Un quadrilatero con lati uguali è sempre un quadrato? Perché?____	SI	NO
4. Figure con stesso perimetro hanno la stessa area?	SI	NO
5.E' possibile costruire un triangolo equilatero nel reticolo quadrato? E nel reticolo triangolare?	SI SI	NO NO

6. Enuncia il teorema di Pick.

____

____

7. Cosa significa "triangolare" un poligono?

____

____

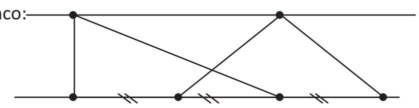
8.Cosa rappresenta $\overset{1\,u}{\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet}$?

- ○ Un'unità di superficie
- ○ Un'unità di lunghezza
- ○ Un centimetro

9. $\boxed{1\,u^2}$ cosa rappresenta?

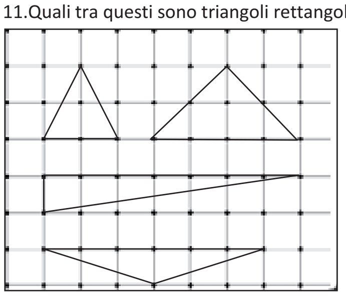
- ○ Un centimetro quadrato
- ○ Un'unità di superficie
- ○ Un'unità di lunghezza

10.Cosa possiamo dire dei due triangoli qui a fianco:

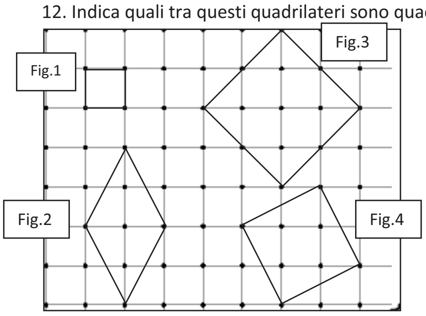


- ○ Hanno la stessa area
- ○ Hanno lo stesso perimetro
- ○ Sono congruenti

11.Quali tra questi sono triangoli rettangoli ? Barrali con una X



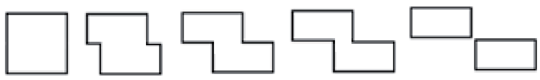
12. Indica quali tra questi quadrilateri sono quadrati barrandoli con una X.



13. Completa la tabella sottostante:

Fig.	B=nodi sul bordo	I= nodi interni	Area con Pick
1			
2			
3			
4			

14.Cosa succede al perimetro e all'area di questa successione di figure da sinistra verso destra?



Il perimetro:
- Non varia
- Aumenta
- Diminuisce

L'area:
- Non varia
- Aumenta
- Diminuisce

15. Elenca i primi 5 numeri triangolari.
16. Elenca i primi 5 numeri quadrati.
17. Cosa è l'errore relativo in una misura?
- $\text{Errore assoluto} \times \text{misura calcolata}$
- $\dfrac{\text{Errore assoluto}}{\text{misura calcolata}}$
- $\text{Errore assoluto} + \text{misura calcolata}$

18.Quanto fa la somma dei primi n numeri naturali 1+2+3+___+n= ?
- n^2
- $\frac{n\,(n+1)}{2}$
- $n\,(n-1)$

-19.Un geometra deve fare un porticato rettilineo lungo 6 metri con colonne distanti 1 metro l'una dall'altra. Quante colonne dovrà realizzare?
- 4
- 5
- 6
- 7

Per la correzione l'attribuzione del punteggio che abbiamo dato per ogni tipologia di esercizio è stata la seguente:

- *Domande a risposta multipla*: IA(1,2,3,4,5,8,9,10,14,15,16,17,18,19) , Punti:

- 1 - per ogni esercizio corretto
- 0 - per ogni esercizio errato

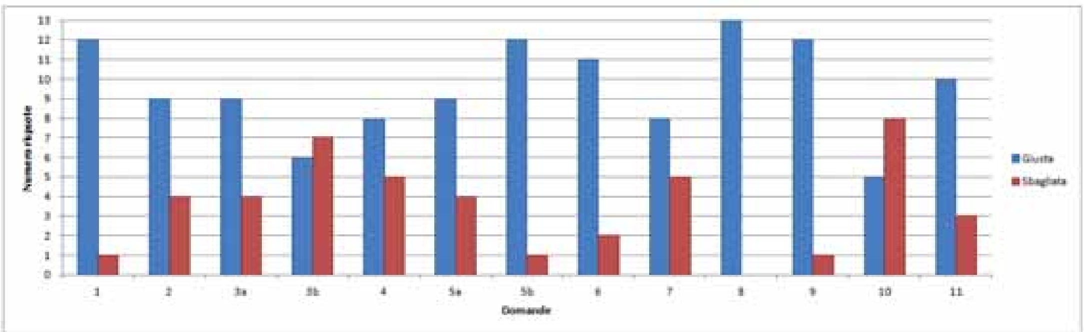
ATTENZIONE! Ci sono alcuni esercizi costituiti da più parti, ad esempio l'esercizio 3, suddiviso in 3a e 3b: in quel caso 1 è il punteggio dell'intero esercizio, quindi, ognuna delle due componenti dell'esercizio vale:

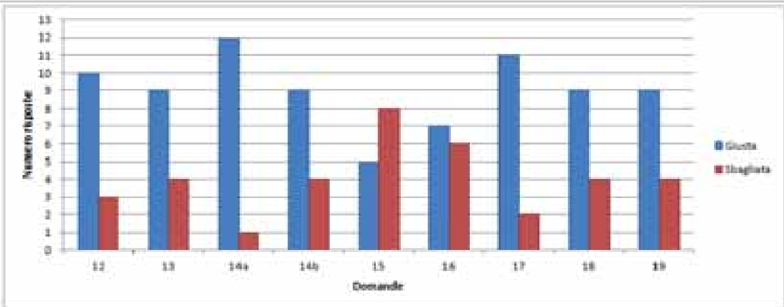
- 0.5- se la risposta è corretta
- 0 - se è errata.

- *Domande a riposta aperta/altra tipologia* : IA(6,7,11,12,13) ,

- 1 - per ogni esercizio corretto
- 0.5 - per ogni esercizio svolto solo per metà o poco preciso
- 0 - per ogni esercizio errato

Nei seguenti grafici possiamo vedere l'esito, domanda per domanda, dei test in IA:





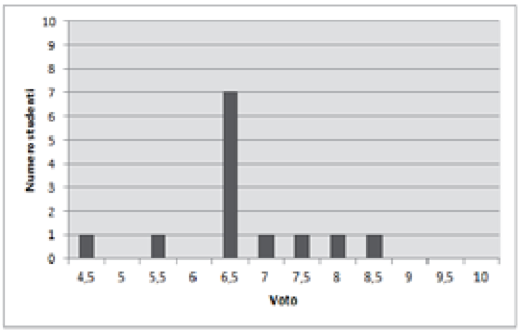
Possiamo osservare come le domande in cui i ragazzi sono andati meglio sono quelle riguardanti le proprietà delle figure piane. Le domande 11 e 12, quelle in cui dovevano riconoscere le figure geometriche in posizioni non usuali, sono andate molto meglio del previsto. La domanda 3b però mostra che nonostante abbiano compreso che le proprietà delle figure geometriche sono invarianti per rotazioni e traslazioni, ancora non riescono del tutto ad associare ad una figura, come il quadrato, una vera e propria definizione rigorosa.

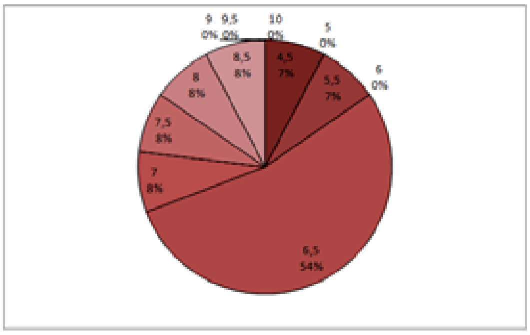
La domanda 10 è andata male in generale: i motivi possono essere molteplici, uno di questi potrebbe essere che mentre abbiamo affrontanto questo esercizio (che faceva parte delle prove Invalsi 2012) alcuni stavano facendo un compito di recupero e sono quindi mancati al ragionamento comune fatto in classe oppure, semplicemente, è ancora poco chiaro il concetto di equiestensione, che effettivamente di solito viene affrontato in seconda. Mi chiedo fino a quanto queste sono scusanti o incentivi per sollecitare maggiormente le competenze tanto cercate.

Il concetto di area e perimetro sembra chiaro e sanno distinguere il variare di uno rispetto all'altro (anche questa domanda è molto gettonata alle prove Invalsi).

Tra le domande andate in generale peggio troviamo quelle sui numeri figurati. Durante il test molti hanno ammesso di non ricordarli, allora abbiamo detto che non c'era bisogno di ricordarli a memoria, bastava si ricordassero il modo di ricavarli e avrebbero svolto l'esercizio: questo suggerimento non li ha aiutati del tutto a ritrovare i numeri triangolari, mentre è servito per quelli quadrati.

Nel grafico seguente abbiamo riportato le votazioni e quindi l'andamento generale dei test:





In generale i voti si sono concentrati attorno al valore 6.5, quasi tutte sufficienze piene e siamo molto soddisfatti.

Il voto basso putroppo appartiene ad una ragazza DSA, con problemi di dislessia. Credo che il fatto di fare un compito a crocette non le sia stato molto di aiuto e di questo me ne sono resa conto solo post correzione. Infatti ho notato che ha avuto problemi anche a completare il successivo test di valutazione personale dell'esperienza a crocette. Inoltre le risposte seguono uno strano andamento: soprattutto le domande con Vero e Falso sono tutte sbagliate, anche le più semplici. Mi verrebbe da pensare che ciò sia attribuito alla difficoltà di compilare un test a crocette più che alle sue conoscenze, in quanto in classe ha sempre svolto bene i compiti assegnati.

Per calcolare il voto, abbiamo utilizzato la seguente proporzione:

$$(\textit{punteggio ottenuto}) : 19 = x : 10$$

dove 19 era il punteggio massimo raggiungibile nel test. Nell'Istituto di Figline si utilizza questa scala per le votazioni:

0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5 10

Come possiamo vedere, non è possibile dare votazione con "+" o "-". Abbiamo quindi cercato di rientrare in questa scala anche noi, approssimando al voto più vicino i risultati. In quei pochi casi di indecisione del voto, siamo andati a controllare quali errori erano stati commessi, se più o meno gravi.

5.1.2 II A

Ecco il test della IIA, molto simile a quello della IA, ma con alcune differenze(nella seconda pagina) dovute ai diversi argomenti affrontati.

TEST CONOSCENZE APPRESE : II A **Nome e Cognome**_______________________________________

1. Esistono triangoli rettangoli isosceli?	SI	NO
2.Esistono triangoli rettangoli equilateri?	SI	NO
3.Un quadrilatero con lati uguali è sempre un quadrato? Perché?____	SI	NO
4. Figure con stesso perimetro hanno la stessa area?	SI	NO
5. E' possibile costruire un triangolo equilatero nel reticolo quadrato? E nel reticolo triangolare?	SI SI	NO NO

6.Enuncia il teorema di Pick.

____

____

7. Cosa significa "triangolare" un poligono?

____

____

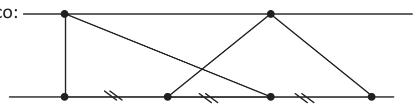
8. Cosa rappresenta $1\,u$?

- Un'unità di superficie
- Un'unità di lunghezza
- Un centimetro

9. $1\,u^2$ cosa rappresenta?

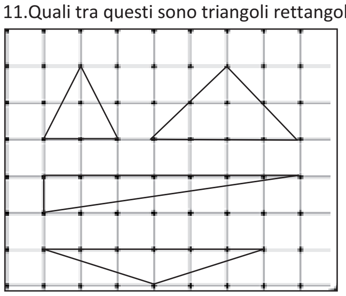
- Un centimetro quadrato
- Un'unità di superficie
- Un'unità di lunghezza

10.Cosa possiamo dire dei due triangoli qui a fianco:

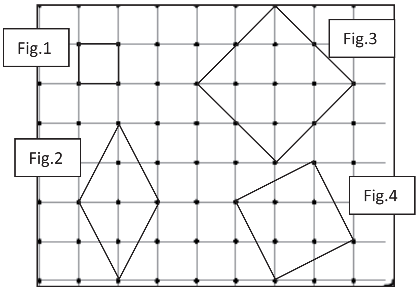


- Hanno la stessa area
- Hanno lo stesso perimetro
- Sono congruenti

11.Quali tra questi sono triangoli rettangoli ? barrali con una X



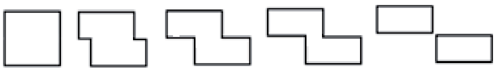
12. Indica quali tra questi quadrilateri sono quadrati barrandoli con una X.



13.Completa la tabella sottostante:

Fig.	B=nodi sul bordo	I= nodi interni	Area con Pick
1			
2			
3			
4			

14. Cosa succede al perimetro e all'area di questa successione di figure da sinistra verso destra?



Il perimetro:
- o Non varia
- o Aumenta
- o Diminuisce

L'area:
- o Non varia
- o Aumenta
- o Diminuisce

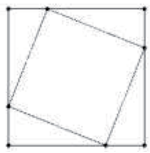
15. Per un poligono semplice con vertici a coordinate intere,la formula di Pick ci da un'approssimazione o un valore esatto dell'area?_______________________________

16. La formula per l'area di un poligono semplice $\frac{B}{2}+I-1$ vale :
- o Per ogni tipo di reticolo
- o Solo per il reticolo quadrato
- o Solo per i reticoli quadrato e triangolare

17. Considero un quadrato Q di lato 3. Quanto misura il lato del quadrato con area doppia di Q? _____

18. Qual è il metodo più efficace per triangolare un poligono?____

19. Considera la figura qui a fianco: sapendo che i 4 triangoli rettangoli sono congruenti e che il quadrilatero esterno che formano è un quadrato, come si dimostra che anche quello interno è un quadrato?



20. Disegna due poligoni equiscomponibili.

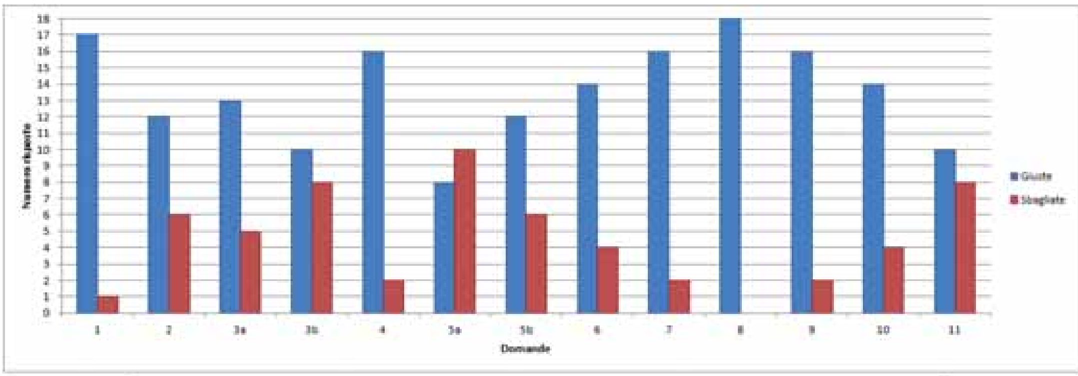
21. -Poligoni congruenti sono sempre equivalenti V F
-Poligoni equivalenti sono sempre congruenti V F

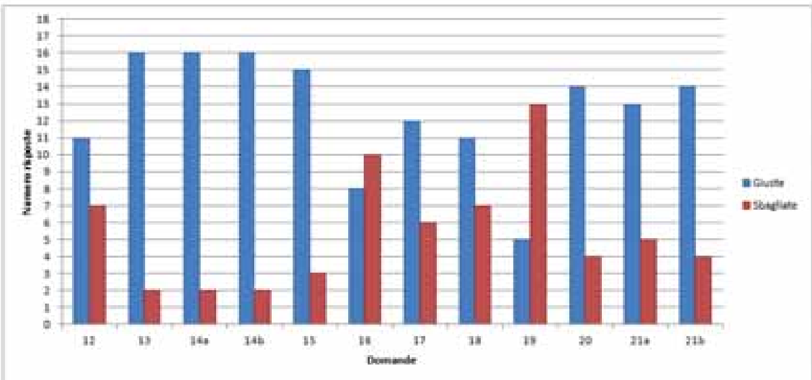
Per la correzione l'attribuzione del punteggio abbiamo proceduto come per la IA. Qui però abbiamo:

- *Domande a risposta multipla*: IIA(1,2,3,4,5,8,9,10,14,15,16,21)

-*Domande a riposta aperta/altra tipologia* : IIA(6,7,11,12,13,17,18,19,20)

Nei seguenti grafici possiamo vedere l'andamento delle risposte alle domande.





Dal grafico possiamo vedere come le domande andate peggio sono anche per loro quella sulle proprietà caratterizzante il quadrato, ma anche quella sulla descrizione del Geopiano.

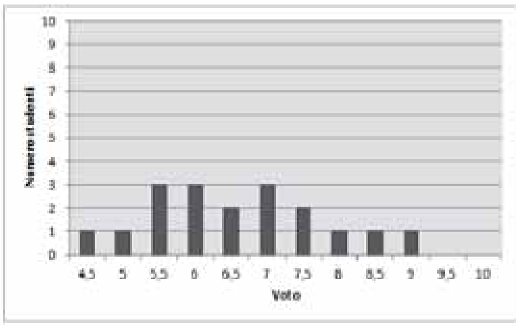
E' andata inspettatamente molto male anche la domanda in cui c'erano da riconoscere figure in posizioni non usuali. Quasi la metà dei ragazzi ha sbagliato entrambe le risposte. Mi dispiace che in questa classe questo obiettivo non sia stato raggiunto da molti, cosa che invece è successa in IA. Non saprei se attribuire questo fallimento alla poca attenzione posta per questo argomento, che forse essendo una II abbiamo un po' dato per scontato, oppure alla poca disposizione di molti a riflettere su quello fatto in classe. Sta di fatto che, in una classe seconda, non riconoscere un quadrato mi sembra un fatto molto grave, così come segnare il rombo sulla sinistra dell'esercizio 11 tra i quadrati , in particolare pensando al fatto che fanno parte di un Istituto Tecnico per futuri geometri.

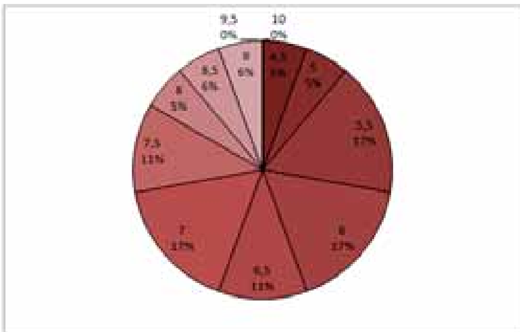
Altre domande andate particolarmente male sono state quella aperta in cui si richiedeva una dimostrazione geometrica che è stata lasciata in bianco o per motivi di tempo e per una totale arresa a ragionare di fronte ad un esercizio di questo tipo.

Ultima osservazione riguarda l'andamento non soddisfacente della risposta alla domanda sulla validità del teorema di Pick: più della metà non ha segnato la risposta giusta, ovvero che la formula di Pick vista in classe vale solo per il reticolo quadrato. Credo che questo fallimento sia da attribuire a noi, ovvero al non aver sottolineato con attenzione questo fatto. E' sicuramente stato sottolineato, più che a questo limite, il potere del teorema di riuscire a calcolare un 'area a partire da dati discreti. E questo è stato percepito anche dai ragazzi, fin troppo.

Siamo molto soddisfatti riguardo alle domande che trattavano di estensione ed equivalenza: sono andate in generale molto bene, in particolare l'esercizio 10 e le due domande finali. Prima dell'esperienza i ragazzi avevano affrontato teoricamente l'argomento in classe ma, durante l'esperienza, erano venute fuori molte difficoltà, L'esito di questo test ha mostrato che esse notevomente diminute dopo l'ultilizzo del Geopiano.

Anche la domanda sull'equiscomposizione è andata molto bene. Nel grafico seguente abbiamo riportato le votazioni e quindi l'andamento generale dei test





I voti si distruibuiscono in tutta la scala, non si evidenzia un andamento caratterizzante della classe.

Per calcolare il voto, abbiamo utilizzato una proporzione :

(punteggio ottenuto) : 21 = x : 10
con gli stessi accorgimenti per la classe IA.

5.1.3 Osservazioni

Volendo fare alcuni confronti tra le due classi possiamo notare come l'impressione iniziale su essei sia stata confermata anche con l'esito dei test: una IA molto più attenta e disposta ad imparare ed una IIA un po' più pigra, dove però l'attività è riuscita a risvegliare l'interesse al lavoro scolastico, se non di tutti, di molti. Sia a livello di conoscenze che di conoscenze applicate la IA sembra essere andata meglio. In entrambe le classi si evidenzia però la difficoltà ad attribuire alla figura geometrica tra le più semplici, il quadrato, una definizione rigorosa, sorpassata sicuramente dall'immagine mentale ai quali sono abituati fin dalla scuola inferiore.

Il teorema di Pick, con il suo fascino, ha colpito sicuramente tutti: la formula riportata nei test era corretta e anche il suo utilizzo.

Come abbiamo detto inizialmente questo test è principalmente una valutazione di conoscenze, anche se credo che tutta questa attività abbia indotto i ragazzi a riflettere maggiormente davanti ad un obiettivo da raggiungere, a non arrendersi alla prima difficoltà dovuta ad un ragionamento da fare. Sicuramente li ha portati anche a lavorare e capire le proprietà degli oggetti matematici e queste sono tutti aspetti legati alle competenze di cui parlavamo nel capitolo 2.

5.2 Cosa ne pensano i ragazzi

I test di valutazione hanno confermato le nostre sensazioni durante l'esperienza: i ragazzi erano molto entusiasti del lavoro con il Geopiano ed è piaciuto molto questo modo alternativo di fare geometria.

Riportiamo la scheda del test valutativo che è stata la stessa per la IA e la IIA.

VALUTAZIONE ESPERIENZA: IA **Nome e Cognome**____

	Si	Più si che no	Più no che si	No
1.Gli argomenti trattati erano totalmente nuovi?				
2. Gli argomenti trattati erano interessanti?				
3.Gli argomenti trattati erano difficili da capire?				
4.Ti è piaciuta l'esperienza?				
5.La rifaresti per altri argomenti?				
6.La tirocinante era disponibile ai chiarimenti?				
7.Trovi utile introdurre il Geopiano in classe per affrontare alcuni argomenti?				

Tra tutti gli argomenti affrontati:

-Introduzione al Geopiano
-Numeri triangolari
-Proporzionalità tra aree e perimetri
-Formula di Pick
-Approssimazione superficie Antartide

-Elenca ciò che ti è piaciuto maggiormente e cosa non ti è piaciuto tra gli argomenti affrontanti in classe:

____
____
____

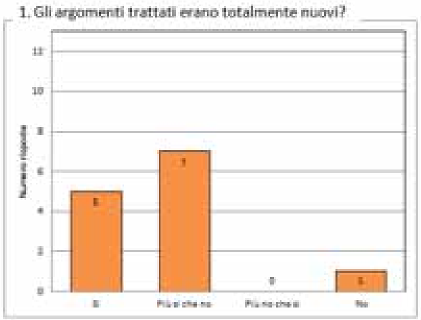
-Ho considerato l'esperienza come: (è possibile scegliere più di una risposta)

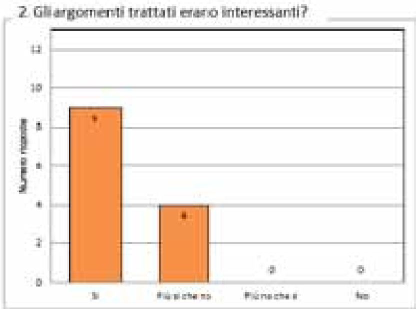
- Ore di svago dalla normale lezione
- Ore in cui poter applicare concretamente concetti studiati
- Ore per impegnarmi in un nuovo modo di fare matematica
- Una perdita di tempo
- Imparare a collaborare con i compagni
- Saltare qualche ore di lezione
- Divertirmi con il Geopiano
- Altro……

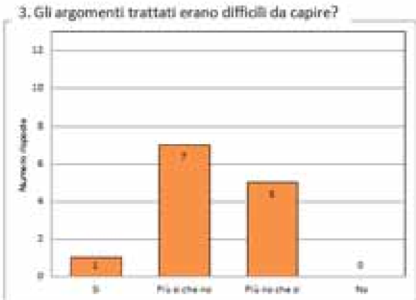
CONSIGLI,COMMENTI,OSSERVAZIONI

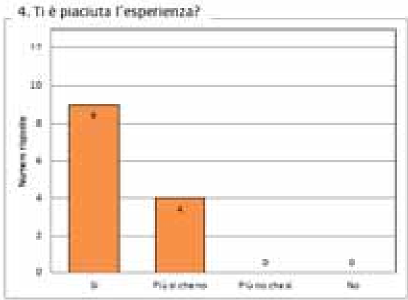
____
____
____
____
____

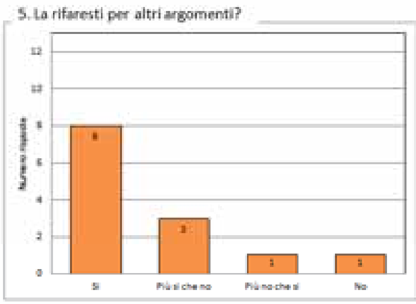
Per quanto riguarda le prime domande, i risultati sono stati i seguenti.
- CLASSE IA:

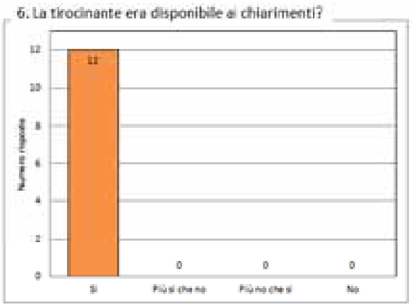


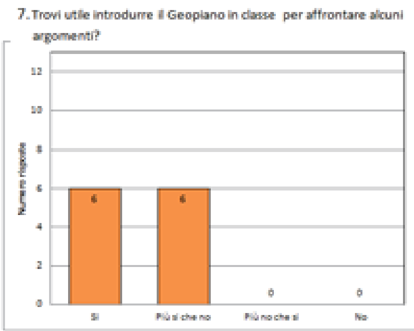




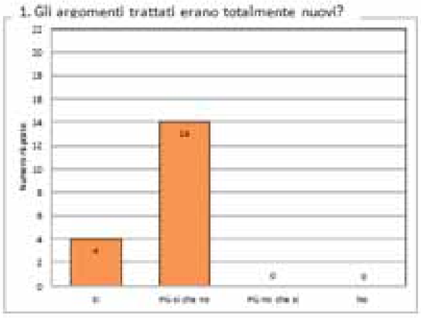


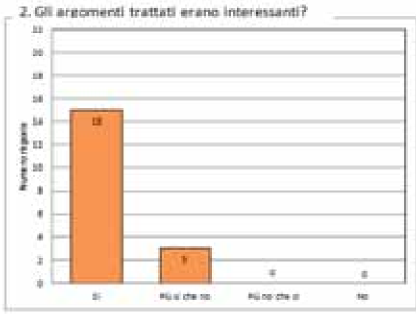




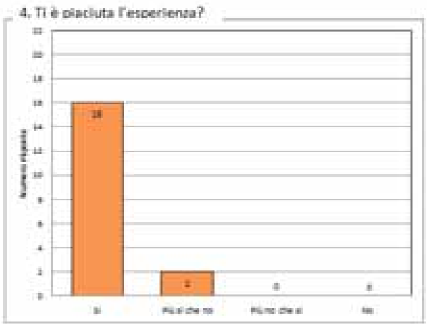


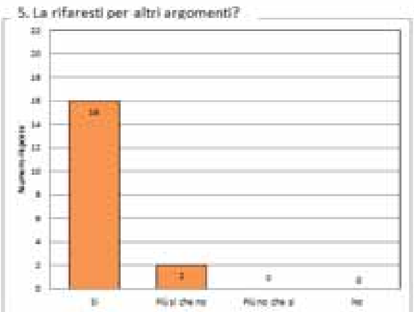
- CLASSE IIA:

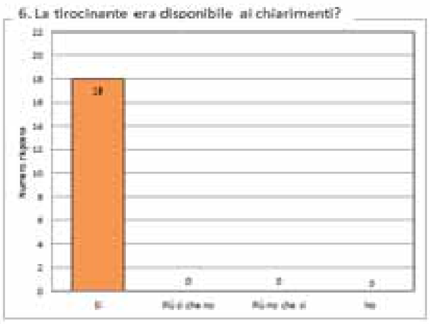

1. Gli argomenti trattati erano totalmente nuovi?


2. Gli argomenti trattati erano interessanti?


3. Gli argomenti trattati erano difficili da capire?


4. Ti è piaciuta l'esperienza?


5. La rifaresti per altri argomenti?


6. La tirocinante era disponibile ai chiarimenti?

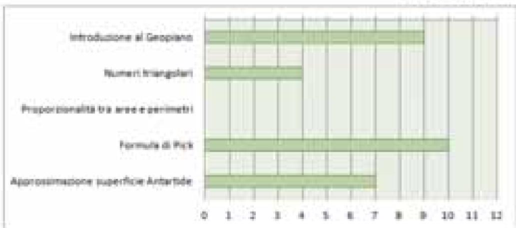

7. Trovi utile introdurre il Geopiano in classe per affrontare alcuni argomenti?

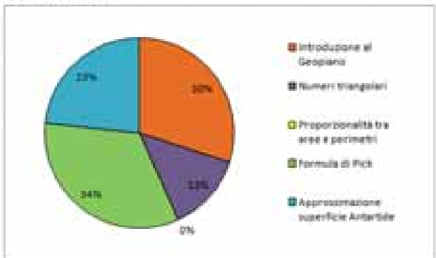
In generale sono stati molto positivi, l'unica domanda che mi ha suscitato qualche perplessità è stata la 1): alla richiesta se gli argomenti trattati erano totalmente nuovi in molti hanno risposto "SI". In realtà, ad esclusione di alcuni, gli argmenti non erano così nuovi come è potuto sembrare: ad esempio il teorema di Pitagora, l'equivalenza, il riconoscimento di figure geometriche, le proporzioni tra aree, le approssimazioni. Mi aspettavo forse un po' meno risposte positive, cercando di darmi una spiegazione ho elaborato la seguente riflessione: aver fatto alcuni argomenti in classe durante la lezione normale e averli affrontati poi nel Geopiano, li ha portati forse a confondersi tra "argomenti nuovi" e "approccio nuovo" . O forse, semplicemente, nel ripensare a quello fatto in classe, hanno prevalso il Teorema di Pick, il suo utilizzo e l'intoduzione del Geopiano, che effettivamente erano argomenti mai visti da loro.

Sono contenta che nella domanda 3) sia emerso che gli argomenti non sono risultati così semplici: è un po' una riprova del fatto che partire da uno strumento così semplice, come può essere il Geopiano, in realtà può portare a costruire attività che costringono lo studente ad un impegno intellettivo in cui l'obiettivo da raggiungere richiede sforzo mentale e ragionamento.

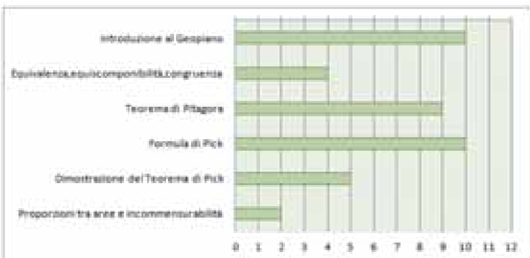
Il grafico sottostante invece elenca le attività che sono piaciute di più.

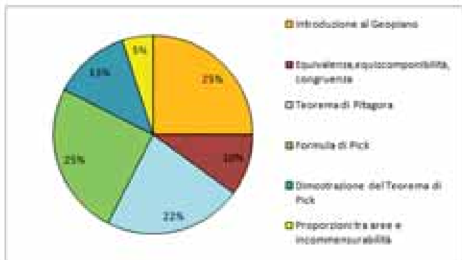
ARGOMENTI PREFERITI IN IA:





ARGOMENTI PREFERITI IN IIA:



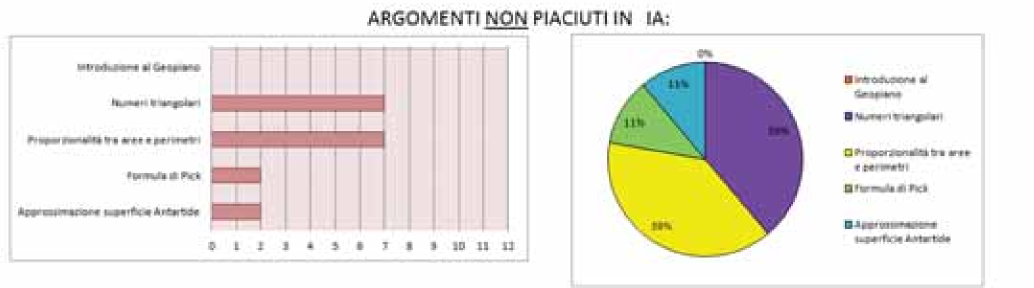


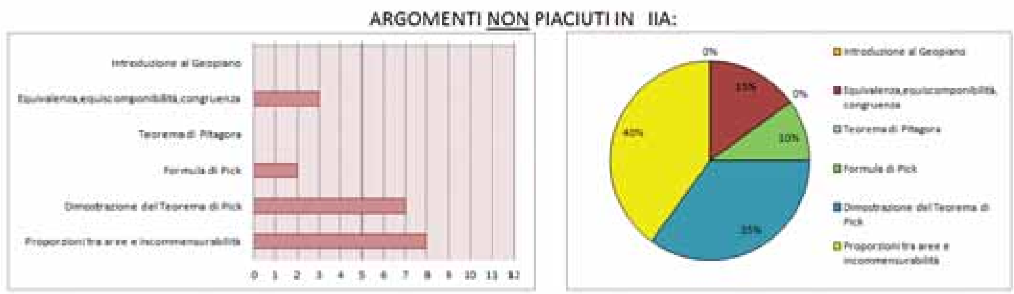
Per quanto riguarda le attività piaciute di più in IA ci aspettavamo quei risultati, mentre in IIA, ci ha stupito la prevalenza del Teorema di Pitagora su tutte le altre opzioni possibili.

In classe il Teorema era stato già accennato e comunque è uno degli argomenti di geometria preferiti da sempre dagli studenti. Forse aver visto la sua dimostrazione geometrica o essere partiti da una leggenda sulla sua nascita, li ha affascinati particolarmente.

Effettivamente durante l'attività, fare degli accenni storici, ha sempre accresciuto il coinvolgimento di tutti. L' approfondimento della prospettiva storica è sempre un ottimo spunto: offre la possibilità di riflettere e comprendere la genesi di un concetto e diventa un ottimo strumento per la comunicazione in matematica.

Per quanto riguarda gli argomenti non piaciuti abbiamo ottenuto queste risposte:





Entrambe le statistiche hanno confermano quanto ci aspettavamo: ovvero che in IA non sono piaciuti i numeri figurati, credo per il fatto che sono un argomento abbastanza difficile, dove si congiungono algebra, artimetica e geometria. Inoltre forse la dimostrazione per induzione è andata un po' sopra le loro capacità. Ma di questo, come abbiamo anche detto nel Diario di bordo, ne eravamo consapevoli.

In IIA tra gli argomenti meno piaciuti troviamo la dimostrazione del Teorema di Pick. Mentre la formula è piaciuta, la sua dimostrazione risulta tra gli argomenti meno piaciuti e su questo vorrei fare alcune riflessioni.

Da sempre veniamo educati seguendo l'ideale aristotelico-euclideo nel quale la matematica viene presentata secondo lo schema enunciati-dimostrazioni, soprattutto in ambito geometrico. E purtroppo spesso si arriva *".. a far coincidere con questo stile la sostanza della razionalità matematica"*(Speranza, 1992 [10]).

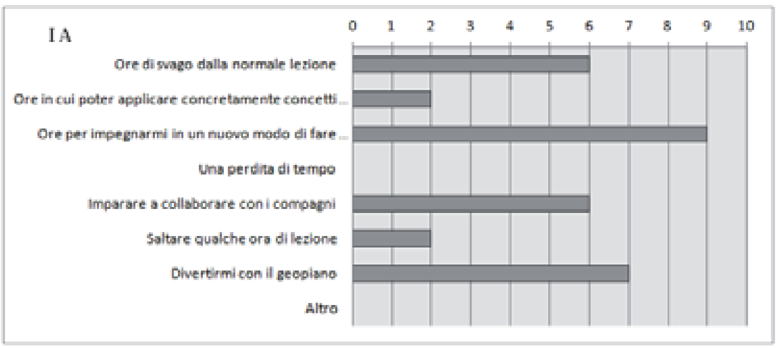
Di certo nessuno può negare l'importanza delle dimostrazioni, ma è altrettanto impensabile perseguire una loro impostazione puramente formalistica nella quale cioè lo studente è spettatore senza essere coinvolto sul piano della sua produzione. Un simile approccio renderà l'allievo capace di ripetere la dimostrazione proposta dall'insegnante e che ha imparato per imitazione ma non di sviluppare la propria attività dimostrativa. Infatti poi non è in grado di produrre dimostrazioni delle proprie in modo autonomo, ignora molte acquisizioni della logica e di conseguenza gli esercizi difficilmente riescono.

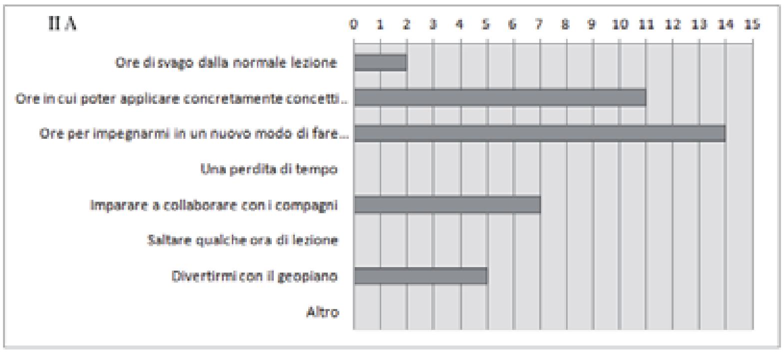
Se quindi la dimostrazione racchiude in sé tante difficoltà, perché perseguirla? Potrebbe essere utilizzara per convicere gli studenti di un certo risultato, ma con il tirocinio di osservazione ho notato che ciò non calzava con la realtà della classe e con le necessità dei ragazzi. La dimostrazione, infatti, non va pensata solo come strumento per convincere gli studenti, che raramente sono restii a convincersi di una verità geometrica. Si rischia che per loro risulti un'attività priva di significato". Dobbiamo renderli consapevoli del suo valore formativo riguardo le capacità di congetturare, provare, discutere, dimostare una certa affermazione. Potrebbe essere un buono spunto quello di applicare e provare prima un teorema per convincere i ragazzi e poi dimostrarlo.

Tornando agli argomenti non piaciuti abbiamo però avuto una sorpresa: la proporzionalità tra aree in generale sembra non essere piaciuta a molti di entrambe le classi. Effettivamente non è un argomento facile e richiede un grosso sforzo mentale, ma non ci aspettavamo un risultato così negativo nei confronti di questo argomento. Una spiegazione potrebbe essere che fare i rapporti, confronti, proporzioni è sempre difficile per dei ragazzi e diventa un vero e proprio ostacolo se interviene un pensiero geometrico poco sviluppato.

Vediamo infine come i ragazzi hanno vissuto l'esperienza:

COME I RAGAZZI HANNO VISTO L'ATTIVITA' :





Forse questa domanda non è stata totalmente sincera, in quanto il test non era anonimo, ma non è stato necessario andare a fondo: già dal loro atteggiamento durante l'attività si è sempre percepiti attenzione, interesse e curiosità in generale.

Tra i commenti c'è chi non ha scritto nulla o chi ha scritto qualche riga, ma non troviamo niente di particolare. C'è anche da dire che la scheda era di per sé molto esaustiva e toccava già un po' tutti i punti su cui poteva essere espressa una valutazione. Ne riportiamo comunque alcuni di quelli lasciati:

"Riuserei il Geopiano volentieri!"

"E' stata davvero una bella esperienza ed interessante"

"Mi è piaciuto molto il Geopiano perchè abbiamo imparato la matematica in un modo diverso e più divertente"

"Mi è piaciuta questa nuova esperienza. A me, che piace soprattutto l'algebra e l'aritmetica, mi sono avvicinata un po' anche alla geometria"

"Prof, le consiglio di fare ancora più ore col Geopiano,perché è divertente e utile"

Quest'ultima frase mi ha colpito più di tutte, non tanto per il significato, ma per il fatto che tra i pochi che hanno deciso di esprimere consigli e osservazioni, si è esposto proprio uno di quelli il cui atteggiamento verso la matematica e, in generale, verso la scuola, è sempre stato molto disinteressato e assente. E' stato davvero la riprova che a volte basta portare un po' di novità e inventiva in classe, uscire dagli schemi, per recuperare un po' l'attenzione di tutti, anche dei più pigri.

5.3 Commenti finali

I ragazzi sono rimasti favorevolmente sorpresi: una geometria spiegata non alla lavagna ma utilizzando uno strumento come il Geopiano non rientrava nella loro comune esperienza.

Devo ammettere che non hanno avuto difficoltà ad entrare in uno schema differente di lezione, manifestando fin dall'inizio il desiderio di mettersi in gioco in prima persona. E' stato piacevole organizzare lezioni delle quali gli stessi ragazzi sono divenuti attori principali ed ho constatato con gioia il loro entusiasmo nel "vivere" la matematica piuttosto che nel sentirla spiegare.

Naturalmente non tutti hanno vissuto le lezioni con lo stesso grado di attenzione e partecipazione. Progettare una lezione che riuscisse a catturare l'attenzione di più di venti ragazzi aventi carattere, indole ed aspettative differenti, è stato per me un lavoro di notevole impegno, della cui riuscita non posso dirmi sempre certa.

La stesura della tesi mi ha obbligato ad una profonda riflessione sia sul lavoro svolto durante il tirocinio sia, più in generale, sugli anni di frequenza dell'Università. Solo con l'esecuzione del tirocinio, infatti, ho avuto modo di comprendere il senso reale di alcuni dei corsi seguiti ed in particolare di quelli dedicati all'insegnamento della Didattica della matematica. Oggi posso affermare con sincera convinzione che la conoscenza della sola disciplina non è sufficiente affinché un insegnante svolga con piena abilità il proprio mestiere.

Preparandomi alla stesura del presente lavoro, ho avuto modo di leggere numerosi articoli di ricerca e testi di didattica della matematica, potendo constatare il valido aiuto che tale materiale fornisce all'insegnante che desideri organizzare un'attività in aula. L'esperienza mi ha fatto "toccare con mano" la necessità di una formazione che accompagni l'intera vita professionale di un insegnante.

Spero che ad ognuno dei ragazzi rimanga, altre cioè che abbiamo voluto trasmettere prefissandoci quegli obiettivi, la sensazione di aver fatto una bella esperienza con la matematica.

E' stato bello tornare in mezzo ai banchi, confrontarmi, entrare in confidenza e scherzare con loro ed infatti è mia ferma convinzione che tra gli aspetti più piacevoli dell'insegnamento vi sia proprio il rapporto quotidiano con i ragazzi e che questo vada coltivato fin dal primo giorno. Credo che nell'insegnamento la comunicazione vada sempre sviluppata non solo sul piano razionale ma anche su quello affettivo: *"Non si apprende da chi non si ama"* (D'Amore, 2004 [11])

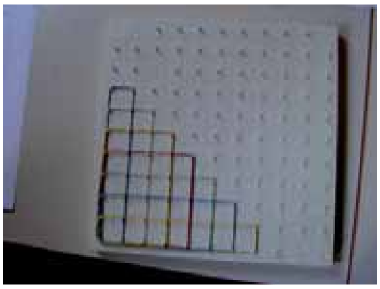
A mio avviso, oltre aver imparato tantissimo da loro, sarò sempre grata al proficuo rapporto con i professionisti che ho trovato ad accogliermi, dai quali ho cercato di acquisire un "mestiere" che non ha regole a priori ma è caratterizzato dalla peculiarità di chi lo fa e lo riceve.

Questo tipo di esperienza diventa una "palestra", per capire le proprie caratteristiche di insegnante e per abituarsi a esprimerle nel miglior modo possibile.

6 Approfondimenti teorici

6.1 Il Geopiano di Gattegno

Il Geopiano è uno strumento didattico matematico utilizzato per favorire esperienze di geometria e per esplorare concetti fondamentali, come perimetro, superficie, caratteristiche dei poligoni o per risolvere enigmi matematici. Ha confermato, attraverso una trentennale sperimentazione, la sua efficacia didattica a diversi livelli di apprendimento.



E' stato ideato dal matematico e pegagogista inglese Caleb Gattegno e consiste in una tavoletta di legno o di plastica, su cui è disegnato un reticolo i cui nodi sono messi in evidenza con dei chiodini o delle viti; fra di essi si possono tendere degli elastici di diverso colore.

Di geopiani ne esistono diversi tipi. In genere sono realizzati con reticoli di quadrati, formati da 9, 16, 25, o più chiodi, oppure con reticoli di triangoli equilateri. Vi sono però anche geopiani con reticolo di ottagono, di decagono e di dodecagono regolari.

Tendendo elastici colorati tra i chiodi, si possono rappresentare situazioni geometriche di natura talmente varia da permettere lo studio di numerosi problemi riguardanti le forme geometriche, le loro dimensioni, le simmetrie e le similitudini, problemi riguardanti la ricerca di casi possibili, di classificazione ed altri ancora. Può essere utilizzato magnificamente anche per introdurre il piano cartesiano.

E' da tener presente che, rispetto alla lavagna, il Geopiano offre almeno due considerevoli vantaggi:

1. essendo facilmente maneggevole, gli si può far assumere una qualsiasi posizione. Ciò consente all'alunno di esaminare ogni figura da angoli di visuale diversi e di prendere così consapevolezza che alcune proprietà figurali risultano essere indipendenti da ciascuna posizione assunta dalla figura stessa;

2. sul Geopiano non si disegna: si tendono elastici, si spostano e, in tal modo, la figura desiderata si ottiene immediatamente. Ed è proprio questa facilità, con la quale si costruiscono e si trasformano le figure, che stimola l'alunno a ricercarne le loro proprietà, che promuove il dinamismo del suo pensiero e che affina le sue capacità intuitive.

Rappresentazioni bidimensionali del Geopiano possono essere riportate su carta quadrettata comune, utile per aiutare uno studente a catturare le spiegazioni del concetto che ha scoperto o illustrato sul Geopiano. Ci sono anche una serie di geopiani virtuali online.

Caleb Gattegno (1911-1988), figlio di un mercante spagnolo, è nato e cresciuto ad Alessandria d'Egitto.

Più tardi, ha lavorato in tutto il mondo, in tutti i continenti ed è conosciuto per i suoi approcci allo sviluppo intellettuale e per le sue ricerche in matematica, didattica della matematica, linguistica, psicologia. Da autodidatta si è impegnato a studiare, leggere qualsiasi cosa, soprattutto testi di matematica. All'età di 18 anni, ha conseguito una Laurea in Scienze e un dottorato nel 1937 all'università Università di Basilea. Tra il 1957 e il 1958, mentre lavorava in Etiopia per l'UNESCO, ha prodotto libri di testo e nuovi materiali didattici.

Nel 1952, ha guadagnato un secondo dottorato, questa volta in psicologia presso Université de Lille, in Francia. Nel postguerra, in Inghilterra, ha organizzato seminari per gli sfollati con il desiderio di aiutarli. Lì divenne docente di matematica presso l'Università di Liverpool e poi presso l'Università di Londra. E' stato uno dei primi traduttori in inglese di Piaget e si dedicò completamente alla diffusione della conoscenza della psicologia dello sviluppo.

Gattegno ha dedicato molto impegno nello studio dell'apprendimento umano, non solo nel campo della matematica e le sue ricerche psicologiche hanno riguardato le dinamiche della mente e il ruolo della consapevolezza nell'apprendimento. Secondo Gattegno l'apprendimento avviene in 4 fasi:

- *Consapevolezza* che c' è qualcosa da imparare;
- *Esplorazione* della situazione. In questa fase sono previsti tentativi ed errori che portano al progresso.
- *Applicazione* : l'abilità diventa automatica e posso cercare di approfondire.
- *Trasferimento* ad altri ambiti e altri concetti futuri. L'abilità rimane a disposizione

Inventò il Geopiano nel 1952 e lo introdusse nel suo approccio dinamico per l'insegnamento della geometria. Nel 1953, conobbe l'opera geniale di Georges Cuisenaire, un maestro di scuola belga, che ha inventato i regoli, barre colorate, per insegnare ai suoi studenti l'aritmetica. Colpito dalla forza pedagogica e il potenziale di questi strumenti, Gattegno ha diffuso tra gli insegnanti il lavoro di Cuisenaire. Ha sviluppato materiale didattico e pedagogico che invita gli studenti a impegnare i loro poteri di percezione e azione a situazioni e, quindi, prendere coscienza delle proprie idee matematiche in queste situazioni.

Egli sosteneva che gli insegnanti dovrebbero *"usare il tempo in classe per mettere gli studenti in situazioni da esplorare e scoprire quanti e quali capitoli della matematica possono essere dedotti, indotti, da un minimo fatto"* e che *"nessuno dovrebbe essere privato della gioia di scoperta matematica, perché sappiamo essere alla portata di tutti"*. L'approccio pedagogico di Gattegno non richiede agli studenti di memorizzare fatti ed algoritmi.

Ha capito che il fare matematica non è solo accompagnata dalla gioia della scoperta, ma anche dall'acquisizione di competenze.

6.2 Reticoli e teorema di Pick

Definizione 1. Chiamiamo *reticolo*, un sottogruppo discreto $\mathcal{R} < \mathbb{R}^n$ tale che $rg(\mathcal{R}) = n$.

Ricordiamo che un sottogruppo è discreto se è discreto come sottospazio dello spazio metrico $\mathbb{R}^n$ e cioè se per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$ abbiamo che $\mathcal{R} \cap K$ contiene un numero finito di elementi. I reticoli di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente i gruppi abeliani liberi generati dalle basi di $\mathbb{R}^n$ ovvero ogni elemento di questi insiemi può essere scritto come combinazione lineare di vettori di $\mathbb{R}^n$ a coefficienti interi. Grazie a questa proprietà possiamo quindi definire i reticoli in $\mathbb{R}^2$ come l'insieme dei punti dati dalla combinazione:

$$a\bar{u} + b\bar{v}$$

con a e b interi e con $\bar{u} = (u_1, u_2)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2)$ vettori linearmente indipendenti.

Definizione 2. I punti del reticolo vengono detti *nodi*.

Definizione 3. $\bar{u} = (u_1, u_2)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2)$ sono detti *base* del reticolo $\mathcal{R}$.

Ci tornerà utile definire anche la *matrice base* del reticolo, la cui colonne sono esattamente $\bar{u} = (u_1, u_2)$ e $\bar{v} := (v_1, v_2)$:

$$R = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Un reticolo può essere definito attraverso più di una base e due reticoli coincidono solo se ogni elemento di una base può essere scritto come combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ dell'altra, ovvero se esiste una matrice $M \in SL(\mathbb{Z})$ che trasforma una base nell'altra.

Definizione 4. Dati i due vettori base chiameremo *parallelogramma generatore* del reticolo, quel parallelogramma che ha per lati i vettori base.

Infatti il reticolo sarà dato dall'accostamento di tutti questi parallelogrammi e i nodi corrisponderanno esattamenti ai vertici di essi, infatti ogni parallelogramma generatore non contiene altri nodi interni.

Tra tutti i possibili parallelogrammi costruibili in un reticolo, ce ne sono alcuni particolari:

Definizione 5. Definiamo *parallelogrammi elementari*, quei parallelogrammi in un reticolo, con i 4 vertici nei nodi e nessun altro nodo interno.

Ovviamente tra i parallelogrammi elementari, troviamo anche quello generatore.

Possiamo fare alcune considerazioni per quando riguarda l'area di questi ultimi:

Teorema 6.1. *Tutti i parallelogrammi elementari hanno la stessa area, data dal valore assoluto del determinante della matrice di base del reticolo.*

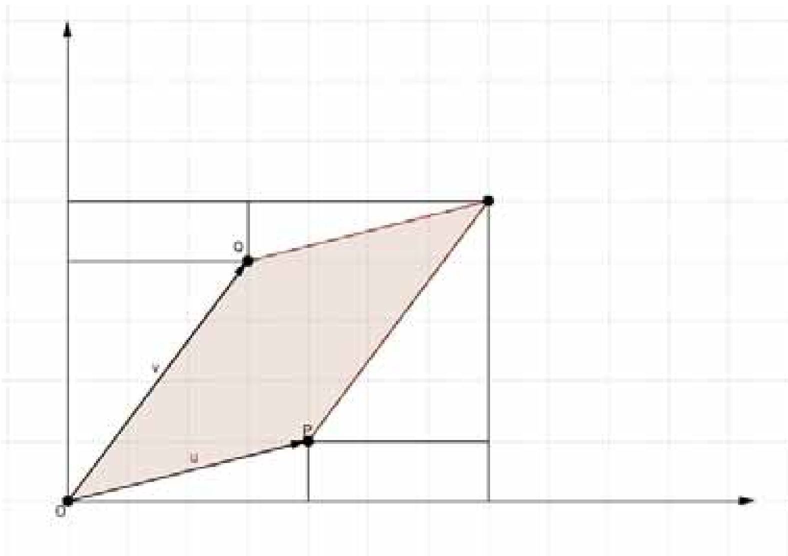
Dimostrazione. Sia $\mathcal{R}$ un reticolo e

$$R = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

la sua matrice base. Essendo $\bar{u}$ e $\bar{v}$ i lati del parallelogramma elementare, esso avrà area esattamente

$$A = |u_1 v_2 - u_2 v_1| = |det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}|$$

Infatti se consideriamo il parallelogramma in un sistema castesiano con origine 0, e chiamiamo P e Q i punti individuati rispettivamente da $\bar{u}$ e $\bar{v}$, abbiamo che l'area del parallelogramma è data dall'area del rettangolo che contiene il parallelogramma meno le aree dei rettangoli e dei triangoli restanti, come illustrato in figura:



Ovvero:

$$A = (u_1 + v_1)(u_2 + v_2) - 2v_1 u_2 - v_1 v_2 - u_1 u_2 =$$

$$= u_1 v_2 - u_2 v_1$$

che corrisponde esattamente al $det(R)$. Essendo un'area con segno, dovremo poi considerare il valore assoluto di questa quantità.

Resta ora da dimostrare che tutti i parallelogrammi elementari del reticolo $\mathcal{R}$ hanno la stessa area. Prendendo un altro parallelogramma elementare, diverso dal generatore, avrò che i suoi lati corrisponderanno ad un altra base del reticolo, infatti esso non avrà punti interni per definizione e poiché deve essere contenuto nel reticolo

$\mathcal{R}$ i suoi lati, saranno una combinazione di $\bar{u}$ e $\bar{v}$. Siano $\hat{\bar{u}}$ e $\hat{\bar{v}}$ i nuovi vettori base, cioè i lati del nuovo parallelogramma elementare diverso da quello generatore. Avremo quindi:

$$\hat{\bar{u}} = a\bar{u} + b\bar{v}$$

$$\hat{\bar{v}} = c\bar{u} + d\bar{v}$$

La matrice della nuova base sarà $\hat{R}$ e sia

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

la matrice di cambio base. Abbiamo in questo modo:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 & \bar{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\hat{R} = R \cdot M$$

E in modo analogo troviamo anche :

$$R = \hat{R} \cdot N$$

Considerando ora i determinanti delle matrici, abbiamo :

$$det(R) = det(\hat{R}) \cdot det(N) = det(R) \cdot det(M) \cdot det(N)$$

poiché le colonne di R sono linearmente indipendenti, $det(R) \neq 0$, quindi :

$$1 = det(M) \cdot det(N)$$

ovvero:

$$1 = |det(M)| \cdot |det(N)|$$

I determininati di M e N devono essere numeri interi, essendo matrici a coefficienti interi, quindi l'unica possibilità affinché il prodotto sia 1 è che $|det(M)| = |det(N)| = 1$. Quindi dalla relazione precedente:

$$|det(R)| = |det(\hat{R})| \cdot |det(N)| = |det(\hat{R})|$$

Poiché i valori assoluti dei determinanti rappresentano le aree dei parallelogrammi elementari, come osservato precedentemente, abbiamo che in un reticolo R essi hanno tutti la stessa area, la quale coincide con l'area del parallelogramma generatore ovvero con $det(R)$.

□

6.2.1 Reticolo quadrato

L'esempio più semplice di reticolo è quello quadrato $\mathcal{Q}$, ovvero quello i cui nodi sono esattamente i punti di $\mathbb{Z}^2$. $\mathcal{Q}$ rappresenta il piano cartesiano in cui consideriamo solo coordinate intere (a, b).
I vettori generatori del reticolo, in questo caso sono:

$$\bar{u} \ = (1, 0) \qquad \bar{v} \ = (0, 1)$$

.

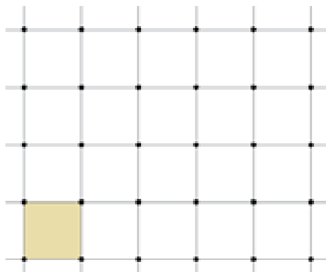
Quindi i nodi sono dati da:

$$(a, b) = a\bar{u} \ + b\bar{v} \ = a(1, 0) + b(0, 1)$$

La matrice base, associata al reticolo è:

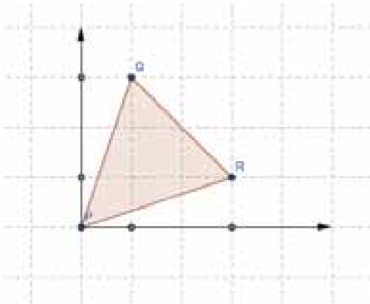
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'area di ogni singolo parallelogramma fondamentale, compreso il generatore che è un quadrato, è data da $|det(Q)| = 1$.



Teorema 6.2. *Tre vertici a coordinate intere (nodi di un reticolo quadrato) non formano mai un triangolo equilatero.*

Dimostrazione. Si dimostra per assurdo. Supponiamo che sia possibile costruire un triangolo equilatero PQR nel reticolo quadrato. Immaginiamo un riferimento cartesiano (a coordinate intere) con origine in P e gli assi paralleli alla quadrettatura.



Siano: $P(0,0)$ $Q(a,b)$ $R(c,d)$ con a,b,c,d interi, i vertici del triangolo, rispetto al sistema di riferimento scelto. Per il Teorema di Pitagora:

$$a^2 + b^2 = \overline{PQ}^2$$

$$c^2 + d^2 = \overline{PR}^2$$

$$(c-a)^2 + (b-d)^2 = \overline{QR}^2$$

Per avere un triangolo equilatero, deve essere:
$\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QR}$ e cioè $\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 = \overline{QR}^2$

Quindi:
$c^2 + d^2 = (c-a)^2 + (b-d)^2$
$c^2 + d^2 = c^2 + a^2 + d^2 + b^2 - 2ac - 2db$ da cui si ricava:
$a^2 + b^2 = 2(ac + db)$. poiché $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, abbiamo :

$$a^2 + b^2 = 2(ac + db) = c^2 + d^2$$

Come avevamo detto, a,b,c,d sono interi, quindi dire che $a^2 + b^2$ e $c^2 + d^2$ devono essere pari, significa che possono soddisfare solo i seguenti 4 casi (P=pari, D= dispari):

a	b	c	d
P	P	P	P
D	D	P	P
P	P	D	D
D	D	D	D

perché solo le somme $P + P$ o $D + D$ danno un numero pari.

Iniziamo analizzando il caso in cui a e b sono entrambi dispari. Se così fosse $a^2 + b^2$ sarebbe pari, ma non sarebbe un multiplo di 4: infatti se $a = 2n + 1$ e $b = 2m + 1$ allora

$$a^2 + b^2 = 4n^2 + 4m^2 + 4m + 4n + 2$$

quindi 4 non divide a^2+b^2. Essendo $a^2+b^2 = 2(ac+db)$ e non divisibile da 4, segue che $(ac+db)$ deve essere dispari. Ma a e b sono dispari, obbligatoriamente d e c devono essere uno pari e uno dispari. Ma questo non è possibile.

Stesso ragionamento vale se c e d sono dispari.

a	b	c	d
P	P	P	P
~~D~~	~~D~~	~~P~~	~~P~~
~~P~~	~~P~~	~~D~~	~~D~~
~~D~~	~~D~~	~~D~~	~~D~~

Rimane quindi solo il caso in cui a, b, c, d sono tutti pari. In questo caso potrei costruire un triangolo equilatero più piccolo di quello iniziale, con vertici:

$$P(0,0)\ Q'(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})\ R'(\frac{c}{2}, \frac{d}{2})$$

con a, b, c, d interi e ripetere il ragionamento precedente. Ma questa costruzione non può essere infinita: infatti, dopo un certo numero di dimezzamenti, uno dei vertici assumerà cordinate dispari e ho una contraddizione di quelle viste sopra.

$\square$

6.2.2 Reticolo triangolare (o esagonale)

Tramite una traformazione affine del reticolo quadrato, possiamo mandare ogni quadrato generatore di $\mathcal{Q}$ in un paralellogramma di lato obliquo unitario, che genera un nuovo reticolo $\mathcal{T}$.

La diagonale minore del nuovo parallelogramma generatore, lo divide in due triangoli equilateri di lato unitario: questo reticolo infatti prende il nome di reticolo triangolare, ove gli elementi generatori diventano triangoli equilateri di lato unitario, i cui vertici sono i nodi del reticolo.

I vettori che generano questo reticolo, sono:

$$\bar{u} \ = (1,0) \qquad \bar{v} \ = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Infatti la trasformazione affine ha questa forma:

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$$

data da

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x+\frac{1}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}y)$$

dove. la matrice (2×2), data da:

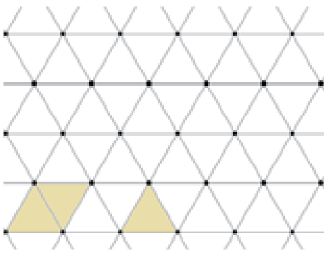
$$T=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

è la matrice base associata al reticolo triangolare.

I nodi in questo reticolo sono dati da:

$$a\bar{u}\ +b\bar{v}\ =a(1,0)+b(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=(a+b\frac{1}{2},b\frac{\sqrt{3}}{2})$$

L'area di un singolo parallelogramma elementare di questo reticolo è $|det(T)|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui l'area di un singolo triangolo elementare sarà$\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{det(T)}{2}$



Questo tipo di reticolo è anche detto reticolo esagonale, poiché ad ogni nodo arrivano 6 triangoli equilateri che insieme formano un esagono regolare di lato unitario.

E' possibile dimostrare che nessun quadrato può essere costruito su un reticolo triangolare. Per vedere ciò partiamo da un risultato ottenuto da Klamkin, il quale dimostra che in un reticolo triangolare possono essere iscritti solo triangoli rettangoli tali che il rapporto tra i cateti è uguale al prodotto tra un razionale t e $\sqrt{3}$.

Teorema 6.3. *Dato un triangolo rettangolo ABC , rettangolo in C e con vertici nel reticolo triangolare, abbiamo che $\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}=t\sqrt{3}$ con t razionale ($t=\frac{p}{q}$ con p,q interi.).*

Dimostrazione. Siano $\bar{u}$ e $\bar{v}$ i versori che generano il reticolo triangolare e cioè $\bar{u}\ =(1,0)$ e $\bar{v}\ =(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. Il prodotto scalare tra essi ha come risultato $\bar{u}\ \cdot\bar{v}\ =\frac{1}{2}$.

Siano tre punti sulla griglia A,B e C i vertici di un triangolo rettangolo in C. Adesso i cateti possono essere scritti come combinazione:

$$BC=a\bar{u}\ +b\bar{v}$$

$$CA=c\bar{u}\ +d\bar{v}$$

con a, b, c, d interi. Poiché il triangolo è rettangolo, il prodotto scalare tra i dei cateti deve essere nullo, ovvero: $BC \cdot CA = 0$ e ciò comporta:

$$(a\bar{u} \ + b\bar{v} \ ) \cdot (c\bar{u} \ + d\bar{v} \ ) = 0$$

$$ac + \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2} + bd = 0$$

$$a(2c + d) + b(2d + c) = 0$$

$$a(2c + d) = -b(2d + c)$$

Poniamo:

$$\frac{a}{(2d + c)} = -\frac{b}{(2c + d)} = t$$

con t numero razionale. Quindi posso riscrivere a e b nel seguente modo:

$$a = t(2d + c)$$

$$b = -t(2c + d)$$

Calcolando i quadrati dei lati, otteniamo:

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 = a^2 + b^2 + ab = t^2(2d + c)^2 + t^2(2c + d)^2 - t^2(2d + c)(2c + d) = \\ = t^2[(2c + d)^2 - (2d + c)(2c + d) + (2d + c)^2] = \\ = t^2(3c^2 + 3d^2 + 3cd) = \\ = 3t^2(c^2 + d^2 + cd) = \\ = 3t^2\overline{CA}^2\end{aligned}$$

Da cui segue che :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = |t| \sqrt{3}$$

□

Da questo teorema otteniamo i due seguenti fatti:

Proposizione 6.4. *Non è possibile costruire su un reticolo triangolare triangoli isosceli rettangoli.*

Dimostrazione. Se per assurdo fosse possibile costruire tale triangolo nel reticolo triangolare, applicando il teorema precedente, arriverei al seguente risultato: $1 = |t| \sqrt{3}$ con t razionale e ciò è impossibile, in quanto comporterebbe la razionalità di $\sqrt{3}$ □

Allora, poiché un quadrato è formato da 2 triangoli rettangoli isosceli, abbiamo infine il seguente risultato:

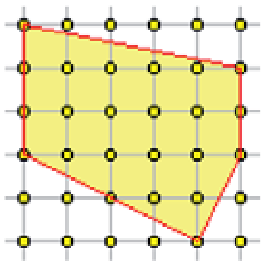
Corollario 6.5. *Nessun quadrato può essere costruito in un reticolo triangolare.*

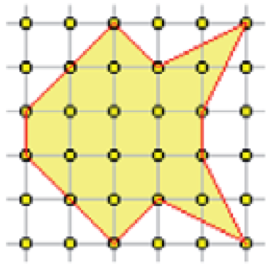
6.2.3 Teorema di Pick

Definizione 6. Chiamiamo *poligoni reticolari*, i poligoni i cui vertici sono soltanto nodi del reticolo e la cui frontiera è una poligonale chiusa.

Definizione 7. Tra tutti i poligoni reticolari, chiamiamo :

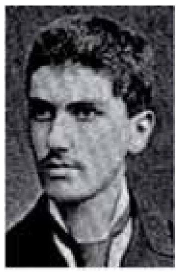
- *semplici*, i cui lati non si intrecciano;
- *convessi*, quelli tali che ogni segmento che collega due punti del poligono è interamente contenuto in esso;
- *concavi*, quelli non convessi.





Pick, nel 1900, trova una relazione che lega l'area di un poligono in un reticolo quadrato, al numero dei nodi che possiede nel bordo o internamente.

Georg Alexander Pick, nato in una famiglia ebrea, è stato educato a casa dal padre fino all'età di undici anni, fin quando entrò nella quarta classe.



Si laurea in matematica e fisica nel 1879 all'Università di Vienna. Dopo l'aggiudicazione del suo dottorato, Pick fu nominato come assistente di Ernest Mach presso l'Università Karl-Ferdinand a Praga fino a diventare professore ordinario nel 1892.

Il suo lavoro matematico è estremamente ampio su molti argomenti come l'algebra lineare, teoria degli invarianti, calcolo integrale, analisi funzionale e la geometria. Egli è ricordato, tuttavia, per il teorema di Pick sulla geometria reticolare, che apparve in otto pagina di carta del 1899 Geometrisches zur Zahlenlehre pubblicato a Praga nel Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift. Il risultato non ha ricevuto molta attenzione fino al 1969, quando Steinhaus lo incluse nel suo famoso libro Mathematical Snapshots. Da quel momento il teorema di Pick ha attirato molta attenzione e ammirazione per la sua semplicità ed eleganza.

C'è un altro aspetto della vita di Pick, che merita attenzione. Nel 1910 era su un comitato istituito dall'Università tedesca di Praga a considerare la nomina di Einstein all'università e si impegnò molto fino a quando Einstein venne nominato alla cattedra di fisica matematica presso l'Università tedesca di Praga dal 1911 al 1913 e in questi anni i due furono amici intimi.

Dopo il ritiro in pensione nel 1927 fu nominato professore emerito e tornò a Vienna, la città della sua nascita. Tuttavia, nel 1938 è tornato a Praga dopo l'Anschluss del 12 marzo, quando le truppe tedesche hanno marciato in Austria. I nazisti istituirono un campo di Theresienstadt in Nordboehmen per ospitare anziani, privilegiati e famosi ebrei. Di circa 144.000 ebrei inviati a Theresienstadt circa un quarto è morto lì e più della metà sono stati inviati a Auschwitz o altri campi di sterminio. Pick stato inviato a Theresienstadt il 13 luglio 1942 e vi morì due settimane dopo, a 82 anni.

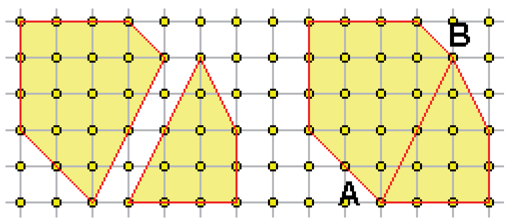
Con il suo Teorema riesce quindi a trovare uno stupefacente collegamento tra discreto e continuo.

Teorema 6.6. *(Teorema di Pick per reticolo quadrato).*

Per un poligono reticolare P, siano:
I=numero dei nodi interni al poligono P
B=numero dei nodi contenuti nel bordo di P
Allora:

$$Area(P) = A(P) = \frac{B}{2} + I - 1.$$

Dimostrazione. 1) Prima di tutto si dimostra che la formula di Pick è additiva e cioè che, se unisco due vertici del poligono P, dividendolo in due poligoni P_1 e P_2, allora la formula per P segue dalla formula per P_1 e per P_2. Così come se presi P_1 e P_2 poligoni distinti, se li unisco lungo un lato, per formare un unico poligono P, la formula è comunque additiva.



Siano:

$$\begin{cases} I_1 = \text{numero di nodi interni a } P_1 \\ B_1 = \text{numero di nodi sul bordo di } P_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = \text{numero di nodi interni a } P_2 \\ B_2 = \text{numero di nodi sul bordo di } P_2 \end{cases}$$

Osserviamo che, da un facile conteggio, indicando con C= i punti nel bordo comune a P_1 e P_2, possiamo scrivere I e B in questo modo:

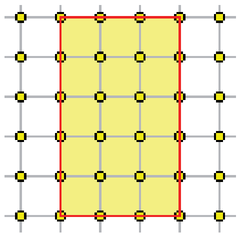
$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 + C - 2 \\ B = B_1 + B_2 - 2 \cdot C + 2 \end{cases}$$

Sostituendo questa scrittura nella formula di Pick per P, otteniamo:

$A(P) =$
$= \frac{B}{2} + I - 1$
$= \frac{(B_1+B_2-2 \cdot C+2)}{2} + (I_1 + I_2 + C - 2) - 1.$
$= \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} - c + 1 + I_1 + I_2 + c - 2 - 1$
$= (\frac{B_1}{2} + I_1 - 1) + (\frac{B_2}{2} + I_2 - 1)$
$= A(P_1) + A(P_2)$

Quindi la formula di Pick è additiva (di conseguenza anche sottrattiva).

2) Adesso procediamo per gradi fino a dimostrare che la formula vale per un triangolo generico, a quel punto, poiché ogni poligono semplice è triangolabile, cioè è scomponibile in una unione finita di triangoli, usando l'additività, la dimostrazione si conlcude.
- La formula vale per un RETTANGOLO, con i bordi paralleli alle rette del reticolo:



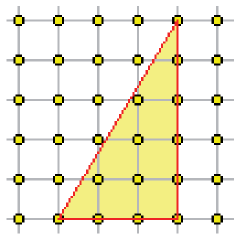
Sia R un rettangolo di altezza a e base b: l'area nel continuo sarà data da $a \cdot b$. Ricordando che se un segmento misura n, significa che è costituito da $n + 1$ nodi, abbiamo:

$$\begin{cases} B_R = a + a + b + b = 2a + 2b \\ I_R = (a - 1) \cdot (b - 1) = a \cdot b - a - b + 1 \end{cases}$$

Quindi:

$A(R) = \frac{B_R}{2} + I_R - 1$
$= \frac{2a+2b}{2} + a \cdot b - a - b + 1 - 1$
$= a + b + a \cdot b - a - b + 1 - 1$
$= a \cdot b$
che è effettivamente l'area di un rettangolo di lati a e b.
Abbiamo così provato la validitià del teorema di Pick per i rettangoli.

- La formula vale per un TRIANGOLO RETTANGOLO T *senza* nodi sull'ipotenusa (eccetto gli estremi) con un cateto orizzontale a uno verticale b:



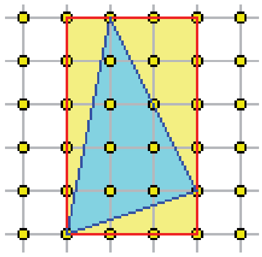
$$\begin{cases} B_T = a + b + 1 \\ I_T = \frac{(a-1)\cdot(b-1)}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$A(T) = \frac{B_T}{2} + I_T - 1$
$= \frac{a+b+1}{2} + \frac{a\cdot b-a-b+1}{2} - 1$
$= \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a\cdot b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{1}{2} - 1$
$= \frac{a\cdot b}{2}$
che è effettivamente l'area di un triangolo rettangolo di cateti a e b.

- La formula vale per un TRIANGOLO RETTANGOLO *con* nodi sull'ipotenusa, con un cateto verticale ed uno orizzontale:
infatti qualsiasi triangolo rettangolo con nodi sull'ipotenusa può essere suddiviso in triangoli rettangoli che non hanno nodi sull'ipotenusa.

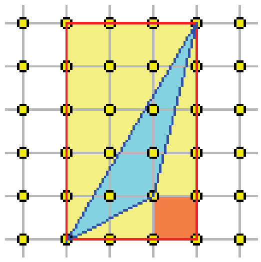
- La formula vale per un TRIANGOLO ACUTANGOLO T_{Ac}:
tracciando il rettangolo minimo R circoscritto al triangolo, con lati paralleli alle rette del reticolo, ho una situazione di questo tipo:



dove indichiamo con $T_1 T_2$ e T_3 i tre triangoli rettangoli ottenuti, adiacenti aT_{Ac}. Quindi,applicando la formula additiva, o meglio applicandola in senso sottrattivo, abbiamo che :

$A(T_{Ac}) = A(R) - A(T_1) - A(T_2) - A(T_3)$

- La formula vale per un TRIANGOLO OTTUSANGOLO T_{Ot}: tracciando il rettangolo circoscritto minimo, con lati paralleli alle rette del reticolo, ho una situazione di questo tipo:



quindi, anche qui, applicando la formula in senso sottrattivo e additivo, abbiamo che :

$A(T_{Ot}) = A(R_1) - A(T_1) - A(T_2) - A(T_3) - A(R_2)$

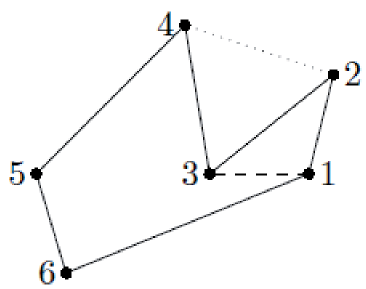
Quindi da tutte queste osservazioni segue che la formula di Pick vale per un TRIANGOLO QUALSIASI e di conseguenza, dall'additività della formula e dal fatto che ogni poligono è triangolabile, la formula di Pick vale per ogni poligono semplice a vertici interi.

□

6.2.4 Ogni poligono è triangolabile?

In ogni poligono semplice, concavo o convesso, è definito l'interno e l'esterno oltre che, naturalmente, la frontiera. Questo permette di definire e garantire l'esistenza di diagonali per ogni poligono semplice con più di tre lati e di triangolarlo, cioè decomporlo nell'unione di triangoli per mezzo di diagonali.

Definizione 8. Il segmento $v_iv_j(i \neq \ j)$ è una diagonale del poligono semplice $P = (v_1, ..., v_n)$ se i suoi estremi sono vertici di P e se gli altri suoi punti sono contenuti totalmente nell'interno di P.



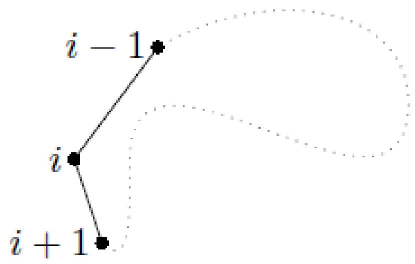
Nella figura v_1v_3 è una diagonale, v_2v_4 no. Da osservare come la definizione di diagonale escluda la possibilità che un lato possa essere considerato una diagonale: un lato è interamente contenuto nella frontiera di P.

Un poligono semplice ha almeno tre lati e un triangolo non ha diagonali.

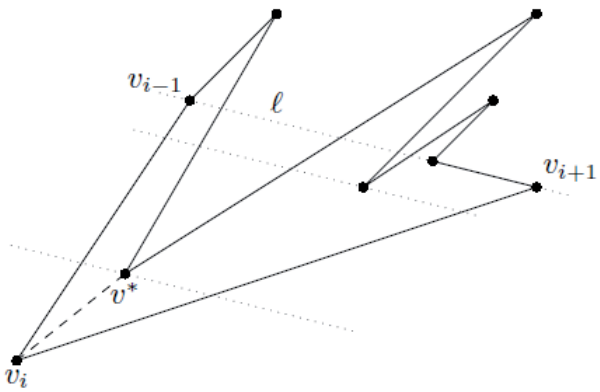
Per poligoni semplici con più di tre lati si può dimostrare che esiste una diagonale. La dimostrazione, costruttiva, sarà la chiave per lo sviluppo di un algoritmo di triangolazione.

Proposizione 6.7. *Ogni poligono semplice $P = (v_1, ..., v_n)$ con $n > 3$ lati ha una diagonale.*

Dimostrazione. Sia v_i il minimo lessicografico di P, ovvero ha ascissa minima e ordinata minima tra i punti con ascissa minima. Se, senza perdita di generalità, si può supporre che la lista dei vertici sia data in verso antiorario.



Se il segmento $v_{i-1}v_{i+1}$ ha interno contenuto nell'interno di P, allora è una diagonale e siamo a posto. In caso contrario, essendo l'angolo in v_i convesso, c'è almeno un vertice di P che sta sul segmento $v_{i-1}v_{i+1}$ o all'interno del triangolo $v_{i-1}v_iv_{i+1}$.



Si consideri ora la retta l individuata da v_{i-1} ev_{i+1} e le sue parallele passanti per i vertici interni al triangolo $v_{i-1}v_iv_{i+1}$: ognuna interseca i lati v_iv_{i+1} e $v_{i-1}v_i$e determina un triangolo con un vertice in v_i. Se la parallela a l condotta per un vertice v^* individua un triangolo Δ di area minima allora il segmento v_iv^* è una diagonale di P: infatti interseca la frontiera del poligono solo in v_i e v^* e il suo interno è contenuto nell' interno di Δ , a sua volta contenuto nell'interno di P.

□

Teorema 6.8. *Ogni poligono semplice, ammette una triangolazione.*

Dimostrazione. Il teorema si dimostra per induzione sul numero n dei lati del poligono P.

BASE. Per $n = 3$ il poligono P è già un triangolo.

PASSO INDUTTIVO. Supponiamo che il Teorema sia vero per un poligono P_i con $i < n$ lati e dimostriamo che vale per un poligono P_n con n lati.

Un poligono con $n > 3$ lati ammette sempre una diagonale interna che lo divide in due parti, ciascuna con un numero di lati $< n$. Quindi, per ipotesi induttiva, ognuno delle due parti ammette una triangolazione.

L'unione delle due triangolazioni è la triangolazione di P_n.

$\square$

6.2.5 Generalizzazione del teorema di Pick: reticolo qualsiasi

Abbiamo visto precedentemente la formula di Pick per il calcolo dell'area di un poligono semplice in un reticolo quadrato. Vediamo adesso come varia questa formula al variare del reticolo. Come abbiamo detto in precedenza, l'area unitaria nel reticolo quadrato è rappresentata dall'area del quadrato fondamentale di lato unitario o equivalmentemente dal determinante delle matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è $|det(Q)| = 1$. Poiché posso sempre fare una trasformazione affine dal reticolo quadrato ad un reticolo qualunque, che abbia una matrice M associata, in generale la formula di Pick diventa:

$$A(P) = (\frac{B}{2} + I - 1) \cdot |det(M)|.$$

Infatti le aree, tramite trasformazioni affini, si trasformano con un fattore dato dal determinante della matrice associata alla trasformazione. Per quanto osservato precedentemente quindi il fattore aggiunto rappresenta l'area del parallelogramma generatore del nuovo reticolo.

Con questo risultato, possiamo scrivere la formula di Pick analoga per il reticolo triangolare:

$$A(P) = (\frac{B}{2} + I - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

.

6.2.6 Generalizzazione del teorema di Pick: poligoni intrecciati

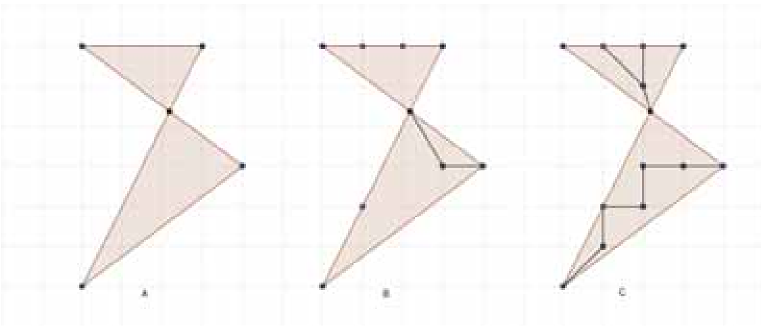
Volendo generalizzare il Teorema di Pick per poligoni non semplici, cioè intrecciati, dobbiamo introdurre la formula di Eulero. Supponiamo di avere un poligono P con :

V=numero di nodi del poligono P

L=numero di lati di P (dove con la parola 'lato' intediamo un segmento che unisce due nodi)

F=numero di regioni o facce del piano in cui è scomposto P

Supponiamo che in ogni faccia non ci siano punti interni e di non avere intrecci tra lati aldifuori di un nodo.



	V	L	F	V-L+F
Figura A	5	6	2	1
Figura B	9	11	3	1
Figura C	13	19	6	1

Teorema 6.9. *Dati, V, L ed F si ha:*

$$V - L + F = 1 \tag{1}$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione sul numero di lati L.

PASSO BASE.
Se L=0 ho V=1 e F=0
Allora

$$V - L + F = 1 - 0 + 0 = 1$$

PASSO INDUTTIVO. Supponiamo l'enunciato vero per L lati e dimostriamo che vale anche con $L + 1$ lati:
per ipotesi ,per un poligono con L lati, V vertici e F facce vale la relazione di Eulero, cioè: $V - L + F = 1$. Vediamo cosa succede se aumento il numero di lati di uno, cioè nel caso in cui si abbia $L + 1$. Si presentano cosi due casi:

- caso 1: aggiungo un lato aggiungendo un nuovo vertice, quindi ho $(V+1)$ trovando un poligono non chiuso. In questo caso vale:
$(V+1)-(L+1)+F = V+1-L-1+F = V-L+F = 1$. Quindi Eulero vale.

- caso 2: aggiungo un lato unendo due vertici già esistenti e quindi anche le facce aumentano di 1:
$V-(L+1)+(F+1) = V-L-1+F+1 = V-L+F = 1$ ed anche in questo caso Eulero vale. 1

$\square$

Il matematico Frankenbusch stabilì poi la connessione tra Pick ed Eulero. Riuscì a ricavare la formula di Pick partendo da alcune relazioni, tra cui quella di Eulero. Possiamo quindi dimostrare la Forumula di Pick nel seguente modo.

Teorema 6.10. *(Dimostrazione alternativa di Pick) Supponiamo di avere un poligono semplice P con:*
I=numero dei nodi interni a P
B=numero dei nodi contenuti nel bordo di P
Allora sarà:

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

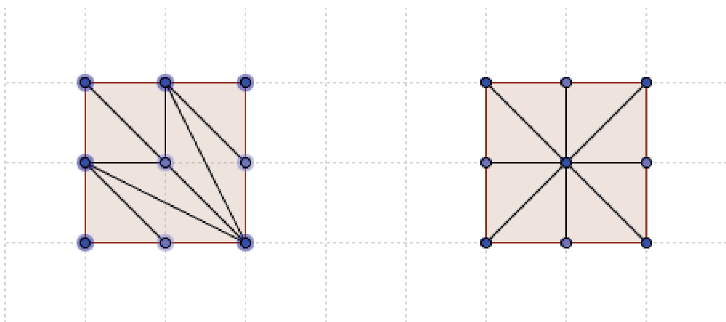
Dimostrazione. Consideriamo

$$V = B + I \tag{2}$$

ovvero consideriamo tutti i nodi presenti in P. Una triangolazione completa di P ottenuta senza intrecci di lati e in modo da avere triangoli senza punti interni, dà un numero L di lati di P uguale a :

$$L = 3I + 2B - 3 \tag{3}$$

Questa affermazione di dimostra facilmente per induzione sul numero di triangoli in cui viene decomposto P. Ad esempio nella figura qui sotto abbiamo due triangolazioni diverse ma L è sempre 16.



Adesso osserviamo che un poligono triangolato nel reticolo quadrato ha area totale data dal prodotto tra il numero di triangoli e l'area di un singolo triangolo, ovvero:

$$A = \frac{1}{2}F \tag{4}$$

dove ricordiamo che F è il numero di regioni in cui è scomposto P e queste regioni hanno area $\frac{1}{2}$ poiché sono triangoli elementari (i triangoli elementari hanno area pari a metà di quella di un parallelogramma elementare che, nel caso del reticolo quadrato, è proprio 1).

Mettendo insieme le ultime le precedenti relazioni (1), (2), (3), (4) otteniamo:

$$1 = V - L + F = (B + I) - (3I + 2B - 3) + 2A = -B - 2I + 3 + 2A$$

Da cui segue:

$$2A = B + 2I - 2$$

ovvero

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

che è esattamente la formula di Pick. □

Un altro passo avanti fu fatto da Rosenholz, il quale riuscì a dimostrare che per un poligono non semplice P (tale peró che le intersezioni tra lati avvengano solo nei nodi) vale la seguente relazione:

Teorema 6.11. *Supponiamo di avere un poligono P con:*
I=numero dei nodi interni a P
B=numero dei nodi contenuti nel bordo di P
Allora abbiamo che l'area di P è data dalla formula:

$$\boxed{A(P) = \frac{B}{2} + I + k}$$

con

$$k = \frac{1}{2}\alpha_{\partial P} - \alpha_P$$

dove:

$$\begin{cases} \alpha_{\partial P} = V - L \\ \alpha_P = V - L + F \end{cases}$$

in cui $\alpha_{\partial P}$ è la caratteristica di Eulero del bordo del poligono e α_P è la caratteristica di Eulero dell'interno del poligono.

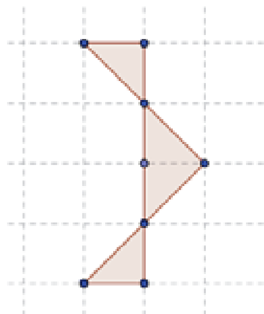
Osservazione 1. Sempre questa formula può essere scritta in forma più compatta, in questo modo:

$$A = \frac{L}{2} + I - F$$

infatti per i poligoni semplici abbiamo $L = B$ e $F = 1$.

Prima di fare alcuni esempi, facciamo delle osservazioni riguardo il significato di V e di L. Nella dimostrazione abbiamo utilizzato V come insieme di tutti i nodi del poligono, interni e non e con L l'insime di tutti i lati formati da questi nodi. Però, nel caso di un poligono reticolare di cui sia tracciato solo il bordo e quindi solo i lati esterni della figura, possiamo fare delle semplificazioni: ovvero possiamo semplificare il significato di V ed L. Infatti, nel caso del conteggio diretto, è più coveniente indicare con V i vertici del poligono che stanno sui bordi (quindi V=B) e con L solo i lati che formano il contorno del poligono.
Facciamo degli esempi.

ESEMPI : verifichiamo la validità della formula per alcuni poligoni intecciati
1)



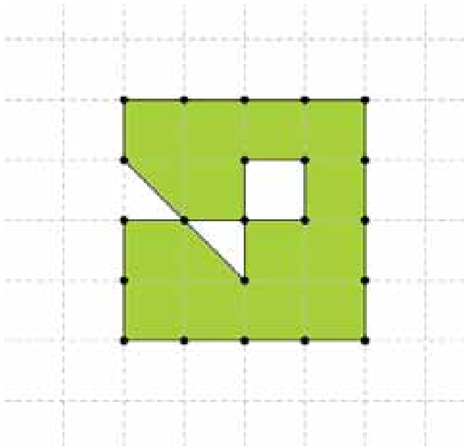
In questo caso abbiamo:
$\begin{cases} V = 8 \\ L = 10 \\ F = 3 \end{cases}$
allora $\alpha_{\partial P} = -2$ $\alpha_P = 1$, quindi

$$k = -2$$

Avendo poi: $\begin{cases} B = 8 \\ I = 0 \end{cases}$
troviamo che l'area della figura è:

$$A = \frac{B}{2} + I - 2 = 2$$

2)



In questo caso abbiamo:
$$\begin{cases} V = 22 \\ L = 24 \\ F = 1 \end{cases}$$
allora $\alpha_{\partial P} \ = -2 \ \alpha_P = -1$,
quindi

$$k = 0$$

Avendo poi: $\begin{cases} B = 22 \\ I = 3 \end{cases}$
troviamo che l'area della figura è:

$$A = \frac{B}{2} + I = 14$$

6.2.7 Applicazione del teorema di Pick

Utilizzando la Formula di Pick, possiamo dimostrare in modo più semplice che non possiamo costruire quadrati nel reticolo triangolare e triangli equilateri in quello quadrato.
Consideriamo la griglia quadrata, identificata con i punti del piano euclideo a coordinate intere.

Lemma 6.12. *L'area di un poligono (semplice) con vertici nella griglia quadrata è un numero razionale.*

Dimostrazione Immediata dalla formula di Pick, perché $I + B/2 - 1$ è un numero razionale.

Teorema 6.13. *Non si possono costruire triangoli equilateri con vertici nella griglia quadrata.*

Dimostrazione Un triangolo equilatero di lato l ha area $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Se i vertici sono sulla griglia quadrata, l^2 è un numero intero, da cui $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ non è razionale, in contraddizione con il lemma 6.12.

Teorema 6.14. *L' unico poligono regolare che si può costruire con vertici nella griglia quadrata è il quadrato.*

Dimostrazione Un poligono regolare con n lati di misura l ha area $\frac{nl^2}{4\tan(\pi/n)}$, notiamo che $\frac{nl^2}{4}$ è razionale. Si può verificare che $\tan(\pi/n)$ è un numero razionale solo per $n = 4$.

Consideriamo la griglia triangolare, dove il triangolo fondamentale è un triangolo equilatero di lato unitario.

Lemma 6.15. *L'area di un poligono (semplice) con vertici nella griglia triangolare ha la forma $q\sqrt{3}$ dove q è un numero razionale.*

Dimostrazione Immediata dalla formula di Pick, generalizzata alla griglia triangolare.

Lemma 6.16. *I vertici della griglia triangolare hanno coordinate della forma $(a, b\sqrt{3})$ dove a, b sono numeri razionali.*

Dimostrazione Consideriamo le varie righe della griglia triangolare. L'ascissa di un punto sulle righe pari è un numero intero. L'ascissa dei punti sulle righe dispari è la metà di un numero intero. La distanza tra due righe è $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi l'ordinata di un punto sulla riga n-esima è $\frac{n\sqrt{3}}{2}$.

Teorema 6.17. *Non si possono costruire quadrati con vertici nella griglia triangolare.*

Dimostrazione Se i due vertici di un lato sono sulla griglia triangolare, per il Lemma 6.16 hanno la forma $(a_1, b_1\sqrt{3})$, $(a_2, b_2\sqrt{3})$ e si calcola per la misura l del lato

$$l^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1\sqrt{3} - b_2\sqrt{3})^2 = (a_1 - a_2)^2 + 3(b_1 - b_2)^2$$

che è un numero intero e corrisponde all'area del quadrato di lato l. Questo contraddice il Lemma precedente

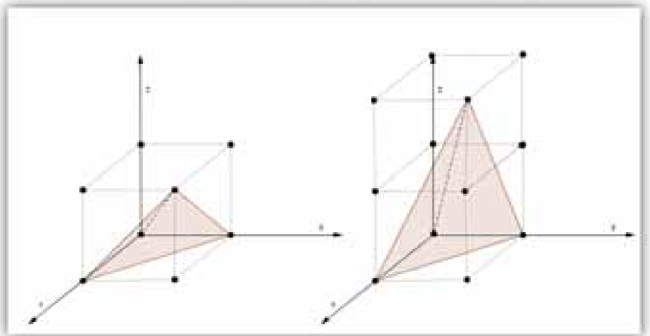
Teorema 6.18. *Gli unici poligoni regolari che si possono costruire con vertici nella griglia triangolare hanno* 3 *oppure* 6 *lati.*

Dimostrazione E' analoga alla dimostrazione del Teorema 6.14. Si può verificare che $\tan(\pi/n)$ ha la forma $q\sqrt{3}$, con q razionale, solo per $n = 3$ e $n = 6$.

6.2.8 Generalizzazione del teorema di Pick: poliedri reticolari

Con la Formula di Pick (1899) siamo riusciti a trovare una relazione tra una misura discreta, ovvero il numero di punti interi contenuti in un poligono e una misura continua, cioé la sua area. Quello che ci chiediamo adesso, dopo aver visto le generalizzazioni di Pick per poligoni intrecciati, é se la formula vale in 3 dimensioni.

Nel 1957 Reeve trovó una cattiva notizia, infatti con il seguente esempio, mostró che in 3 dimensioni la formula non vale piú. Prese un Tetraedro (detto Tetraedro di Reeve) di vertici $(0, 0, 0)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 1, 0)$ e $(1, 1, r)$ con r intero positivo. Notó che al variare di r questi tetraedi hanno lo stesso numero di punti interi, ovvero i 4 vertici e nessun punto interno, ma il volume cresce al crescere di r.



Un passo avanti fu fatto da Ehrhart nel 1967. La sua idea fu quella di dilatare il poliedro e conteggiare il numero di punti interi nei poliedri dilatati.

Definizione 9. Dato un poliedro P e un intero t, tP é il poliedro ottenuto moltiplicando le coordinate di ogni vertice di P per t, che chiameremo dilatazione di P.

Sia P un poliedro e $L_P(t)$ il numero di punti interi di tP, sia interni che sul bordo. Ehrhart provó che

$L_P(t)$ é un polinomio di grado 3 in t, ovvero:

$$L_P(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

dove:

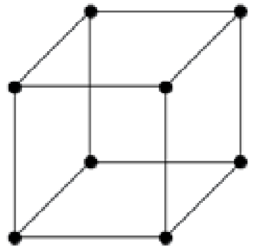
- a_3=volume di P(poliedro con t=1)
- a_2= metá area delle facce di P
- a_0=1 per poliedri semplici

Definizione 10. Il polinomio ottenuto è detto polinomio di Ehrhart.

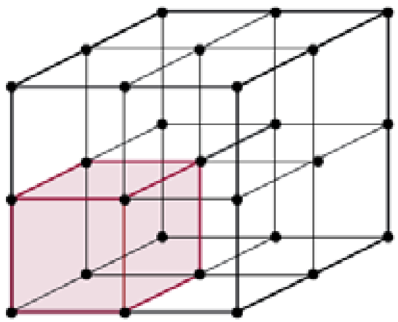
Ad esempio, se P fosse un cubo unitario in dimensione 3, tP avrebbe $(t+1)^3$ punti ed infatti:

$$L_P(t) = (t+1)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

é un polinomio di Ehrhart di terzo grado.
Per t=1 abbiamo il cubo con $L_P(1) = 8$, ovvero:



Per t=2 abbiamo un cubo dilatato di un fattore 2 del cubo unitario e con $L_P(2) = 27$ punti interi:



Notiamo che, in dimensione 2, per un poligono semplice il polinomio di Ehrhart diventa:

$$L_P(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$L_P(t) = area(P)t^2 + \frac{1}{2}perimetro \cdot t + 1$$

e se t=1 si ha:

$$L_P(1) = area(P) + \frac{1}{2}perimetro + 1$$

Poichè il perimetro del poligono è dato dal numero di nodi sul bordo, li indicheremo con B e ricordando che $L_P(1) = B + I$ abbiamo che:

$$B + I = area(P) + \frac{1}{2}B + 1$$

Da cui :

$$area(P) = I + \frac{1}{2}B - 1$$

Abbiamo quindi ottenuto il teorema di Pick.

6.2.9 Teoria di Ehrhart

Sia $\mathbb{R}^d$ uno spazio euclideo di dimensione d.

Definizione 11. (vertex description)Un Politopo convesso é l'inviluppo convesso di un insieme finito di punti di uno spazio $\mathbb{R}^d$.

Precisamente dati $\{v_1, ..., v_n\}$ punti di $\mathbb{R}^d$, con $n \leq\ d$, un politopo é il piú piccolo insieme convesso che contiene questi punti, cioé:

$$P = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n : con \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1\}$$

e si scrive

$$P = conv\{v_1, ..., v_n\}$$

I politopi hanno anche un'altra definizione:

Definizione 12. (hyperplane description)Un Politopo convesso é un'intersezione di un certo numero di semispazi di uno spazio R^d, che sia limitato.

Le due definizioni sono comunque equivalenti.

Definizione 13. Per dimensione di un politopo si intende la dimensione del minimo sottospazio che lo contiene.

Un politopo P $\subset \mathbb{R}^d$ ha al massimo dimensione d.

Un politopo d-dimensionale è l'analogo di un poligono nel piano(d=2) e di un poliedro nello spazio usuale (d=3) generalizzato ad uno spazio euclideo reale R^d

Definizione 14. Un d-politopo con esattamente (d+1) vertici é detto d-simplesso

Quindi, vediamo alcuni esempi:

- gli 0-politopi sono *punti*, detti anche vertici
- gli 1-politopi sono i *segmenti* e gli 1-simplessi sono tutti i segmenti
- i 2-politopi sono i *poligoni* ed i 2-simplessi sono i poligoni con 3 vertici, cioé i triangoli)
- i 3-politopi sono i *poliedri* (i 3-simplessi sono i poliedri con 4 vertici, cioé i tetraedi) e cosí via...

Definizione 15. Sia $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ il reticolo intero in d dimensioni, formato dai punti (intesi come d-ple) a coordinate intere. Un politopo intero é un politopo con tutti vertici a coordinate intere.

Siamo interessati a trovare delle formule che portino al numero di punti interi in un politopo P, ovvero alla cardinalitá dell'insieme $|P \cap \mathbb{Z}^d|$ e vedere se a questa quantitá sono collegate proprietá geometriche del politopo, come ad esempio area e volume.

- Per quanto riguarda la dim 1, la formula é facile: se ho n punti allora il segmento é lungo $n-1$ unitá
- -Per quanto riguarda la dim 2, abbiamo visto la formula di Pick
- -Per una generica dim d, ci sono varie teorie, più artificiose e complicate.
- Prima di analizzare il risultato di Ehrhart, vediamo alcuni esempi di politopi:

$$1)\, CUBO\, d - dimensionale$$

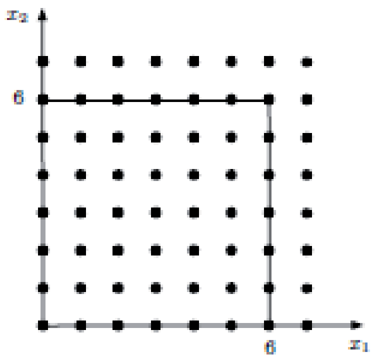
Il cubo d-dimensionale é l'inviluppo convesso dei 2^d vertici che costituiscono l'insieme

$$\square \ = \{(x_1, ..., x_d) | x_k = 0, 1\}$$

oppure puó essere definito come l'insieme dei punti

$$\square \ = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d | 0 \leq x_k \leq 1, k = 1, ..., d\}$$

.



Vogliamo calcolare il volume discreto, cioé $L_P(t)$ il numero di punti interi, in ogni d-cubo $\square$ dilatato di un fattore t, con intero positivo, che indicheremo con

$$t\square \ = \{(tx_1, ..., tx_d) | (x_1, ..., x_d) \in \square \ \}$$

Questo numero é

$$L_{\square}(t) = |t\square \cap \mathbb{Z}^d| = (t+1)^d$$

Stesso risultato otterrei lasciando fisso il politopo $\square$ e restringendo il reticolo intero: anche in questo caso $L_{\square}(t) = |\square \cap \frac{1}{t}\mathbb{Z}^d| = (t+1)^d$.

Indicando con $L_{\square^0}(t)$ il numero dei punti interni di $\square$ abbiamo che

$$L_{\square^0}(t) = (t-1)^d$$

Introduciamo uno strumento importante per analizzare i politopi.

Definizione 16. La funzione generatrice di $L_{\square}(t)$, detta serie di Ehrhart di $\square$ é data da :

$$EHR_{\square}(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} L_{\square}(t) \cdot z^t$$

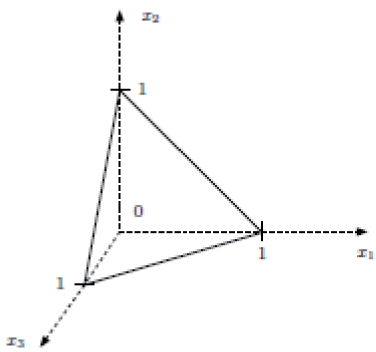
Abbiamo in conclusione il seguente teorema:

Teorema 6.19. *Per il d-cubo $\square$ si ha:*

1) $L_{\square}(t) = (t+1)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \cdot t^k =$ numero di punti interi di $\square$
2) $L_{\square^0}(t) = (-1)^d L_{\square}(-t) =$ numero di punti interi interni di $\square$.
3)$EHR_{\square}(z) = \frac{1}{z} \sum_{t=1}^{\infty} t^d z^t$

$$2)\, STANDARD \;\; SIMPLEX \;\; d - dimensionale$$

Il d-politopo standard simplex é dato da
$\triangle = conv\{0, e_1, e_2, ..., e_d\} = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d | \sum_{i=1}^{d} x_i \leq 1, x_i \geq 0\}$

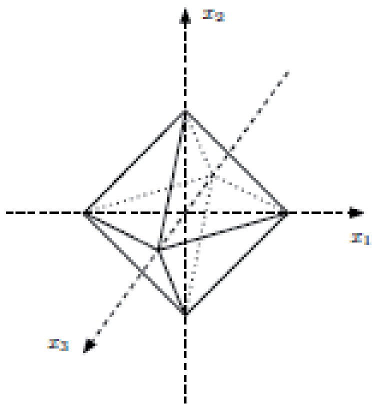


Teorema 6.20. *Per il d-standard simplex $\triangle$ si ha:*

1) $L_{\triangle}(t) = \binom{d+t}{d}$
2) $L_{\triangle^0}(t) = (-1)^d L_{\triangle}(-t)$
3)$EHR_{\triangle}(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} L_{\triangle}(t) \cdot z^t = \frac{1}{(1-z)^{d+1}}$

$$3)\ d - CROSSPOLITOPI$$

Il d-crosspolitopo é dato da :
$\lozenge = conv\{\pm e_1, ..., \pm e_d\} = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d | \sum_{i=1}^{d} \pm x_i \leq 1, \}$



Teorema 6.21. *Per il d-crosspolitopo $\lozenge$ si ha:*

1) $L_{\lozenge}(t) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k}\binom{t-k+d}{d}$
2) $L_{\lozenge^0}(t) = (-1)^d L_{\lozenge}(-t)$
3)$EHR_{\lozenge}(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} L_{\lozenge}(t) \cdot z^t = \frac{(1+z)^d}{(1-z)^{d+1}}$

$$4) caso\, d = 2\, (Teorema\, di\, Pick)$$

Supponiamo che P sia un poligono convesso di area A e con B punti interi nel suo bordo. Allora vale:

Teorema 6.22.

1) $L_P(t) = At^2 + \frac{1}{2}Bt + 1$
2) $L_{P^0}(t) = (-1)^d L_P(-t)$
3)$EHR_P(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} L_P(t) \cdot z^t = \frac{(A-\frac{B}{2}+1)z^2+(A+\frac{B}{2}-2)z+1}{(1-z)^3}$

CASO GENERALE

Dopo aver visto i precedenti esempi con casi particolari, adesso elenchiamo i teoremi e corollari che descrivono le proprietá di politopi d-dimensionali generali. Le dimostrazioni sono molto complicate e si trovano nel libro 'Computing the continuos discretly' di M.Beck e S.Robins(pg.64-74).

Proposizione 6.23. *una funzione $f(t) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é un polinomio di grado d se e solo se esiste una serie a valori h_j complessi tale che:*

$$\frac{\sum_{j=0}^{d} h_j z^j(t) \cdot z^t}{(1-z)^{d+1}} = \sum_{interot=1}^{\infty} f(t) \cdot z^t$$

Ad esempio:
sia $f(t) = 4t^2 + 4t + 1$. Allora:
$\sum_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f(t) \cdot z^t = \sum_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} t^2 z^t + 4 \sum_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} tz^t + \sum_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} z^t =$
$= 4(z\frac{d}{dz})^2 \sum_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} z^t + 4(z\frac{d}{dz}) \sum_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} z^t + \sum_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} z^t =$
$= 4(z\frac{d}{dz})^2 \frac{1}{1-z} + 4(z\frac{d}{dz})\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z} =$
$= \frac{1+6z+z^2}{(1-z)^3}$

Osservazione 2. Per ogni grado d , il polinomio f(t) puó essere espresso come:
$f(t) = \sum_{j=0}^{d} h_j \binom{t+d-j}{d}$

Vediamo i risultati che si ottengono, applicando queste due proprietá alla teoria dei politopi.

Definizione 17. Per un politopo di dimensione d, la serie di Ehrhart é definita nel seguente modo:
$EHR_P(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} L_P(t) \cdot z^t$

Teorema 6.24. *Sia P un politopo intero di dimensione d. Esistono h_j valori complessi, con $0 \leq j \leq d$ tali che la serie di Ehrhart per P ha la seguente forma:*
$EHR_P(z) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} L_P(t) \cdot z^t = \frac{\sum_{j=0}^{d} h_j z^j(t) \cdot z^t}{(1-z)^{d+1}}$ *con* $\sum_j h_j \not\equiv 0$

Teorema 6.25. *(Corollario di Ehrhart) Se P é un d-politopo convesso, allora $L_P(t)$ é un polinomio di grado d in t*

Definizione 18. $L_P(t)$ é detto polinomio di Ehrhart di P.

Teorema 6.26. *(Stanley) In $EHR_P(z) = \frac{\sum_{j=0}^{d} h_j z^j(t) \cdot z^t}{(1-z)^{d+1}}$ si ha che ogni $h_j \geq 0$.*

Proposizione 6.27. *Se P é un politopo convesso intero con serie di Ehrhart come sopra, allora :*
$L_P(t) = \binom{t+d}{d} + h_1\binom{t+d-1}{d} + ... + h_{d-1}\binom{t+1}{d} + h_d\binom{t}{d}$

Teorema 6.28. *Se P é un politopo convesso intero:*

$$L_P(t) = \sum_{j=0}^{d} h_j \binom{t+d-j}{d} = \sum_{k=0}^{d} c_k t^k$$

dove:
1) c_d *=volume continuo di P=* $vol(P) = \frac{h \cdot d}{d!}$
2)$c_{d-1} = \frac{1}{2} \sum_{F, facce\, di\, P} vol(F)$
3)$c_0 = 1$ *(poiché é convesso)*

Teorema 6.29. *(Ehrhart-Macdonald) Per ogni dimensione d di un politopo, vale la relazione:*
$L_{P^0}(t) = (-1)^d L_P(-t)$

Il volume continuo é inteso come integrale di Riemann, ovvero divido l'intervallo nella quale calcolo il volume in tanti intervalli e poi faccio il limite di ció che ottengo al tendere a 0 di ogni intervallo. Qui potrei considerare gli intevalli di ampiezza $\frac{1}{t}$ e quindi politopi di volume $\frac{1}{t^3}$. Potrei riempire la griglia intera d-dimensionale di questi politopi e quindi il volume continuo di P é dato da:

$$vol(P) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^d} |P \cap (\frac{1}{t}\mathbb{Z})^d| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^d} |tP \cap \mathbb{Z})^d| = \lim_{t\to\infty} \frac{L_P(t)}{t^d}$$

Osservazione 3. Quindi per un politopo P, se conosco il polinomio di Ehrhart, posso trovare:

$$vol(P) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^d} |tP \cap \mathbb{Z}^d| = \lim_{t\to\infty} \frac{c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + ... + c_1 t + 1}{t^d} = c_d$$

che é esattamente quello che dice il Teorema di Ehrhart.

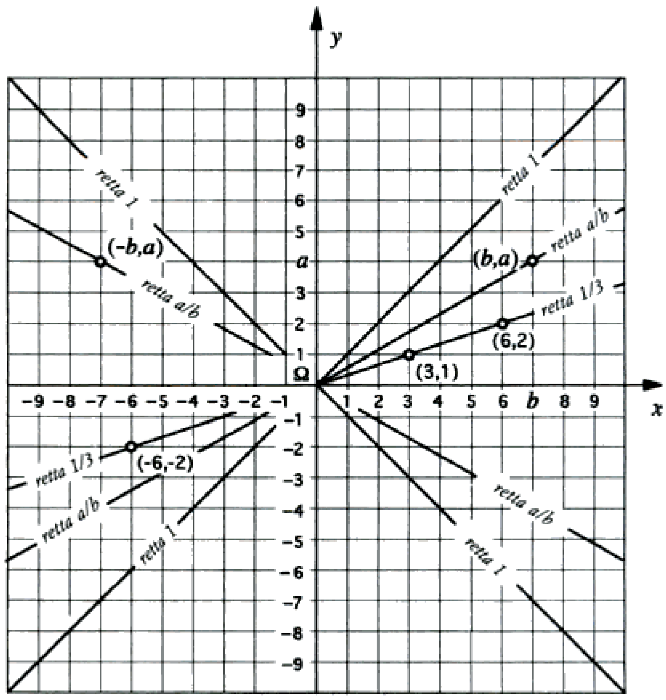
6.2.10 I risultati di Reeve

Reeve non solo dimostra l' impossibilitá di estendere Pick a dimensioni maggioni di 2 e trova anche una formula di Pick analoga per la dimensione 3. Prendiamo un poliedro P nel reticolo $\mathbb{Z}^3$ e consideriamo un secondo reticolo $\frac{\mathbb{Z}^3}{n}$, dove le coordinate sono multipli di $\frac{1}{n}$ di $\mathbb{Z}$. Se il poliedro P é proprio, cioé é rappresentabile come unione 3-finita di simplex, siano $B_n(P) = |L_n \cap \partial P|$ e $I_n(P) = |L_n \cap \ intP|$.
Allora, per $n \geq 2$:

$$2n(n^2-1)Vol(P) = B_n - nB_1 + 2(I_n - nI_1) + (n-1)\left[2\chi(P) - \chi(\partial P)\right]$$

6.3 Razionali e reticolo quadrato

In un reticolo quadrato, possiamo associare ad ogni frazione $\frac{a}{b}$ un nodo, la cui ascissa misura a unità di lunghezza arbitraria lungo l'asse y e la cui ordinanta misura b di tali unità lungo l'asse x, come mostrato in figura.



Ogni nodo rappresenta una e una sola frazione e la retta che unisce quel nodo con l'origine rappresenta uno e un solo numero razionale: infatti tale retta tocca un'infinità di nodi sul reticolo, ognuno dei quali corrisponde a una rappresentazione frazionaria equivalente dello stesso numero razionale.

Il nodo di ascissa b e ordinata a sarà identificiato indifferentemente con (b, a) o $\frac{a}{b}$.

Una retta di lunghezza infinita ,che connette l'origine $(0, 0)$ al nodo $\frac{a}{b}$ ha proprio coefficiente angolare $\frac{a}{b}$ e si estende in entrambe le direzioni rispetto all'origine. Essa è il luogo di tutte le coppie di interi (x, y) che soddisfano la relazione: $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ o $ax = by$

Quella retta, dunque, rappresenta esclusivamente il numero razionale $\frac{a}{b}$. Vale la pena sottolineare che il reticolo esiste solo in corrispondenza dei nodi e una retta è una costruzione immaginaria che attraversa il reticolo, e può o meno incontrare un nodo lungo la sua strada. L'asse orizzontale è una di queste rette, e rappresenta l'intero razionale zero. Su di essa troviamo i nodi $(x, 0)$ e $(-x, 0)$. L'asse verticale rappresenta l'infinito, che può ospitare i nodi $(0, y)$, $(0, -y)$,.. L'origine, è il punto verso cui convergono tutte le rette.

Definizione 19. Quando una retta parte dall'origine, il primo nodo (b, a) che incontra corrisponde ad una frazione irriducibile $\frac{a}{b}$: chiamiamo questo nodo *nodo primo*.

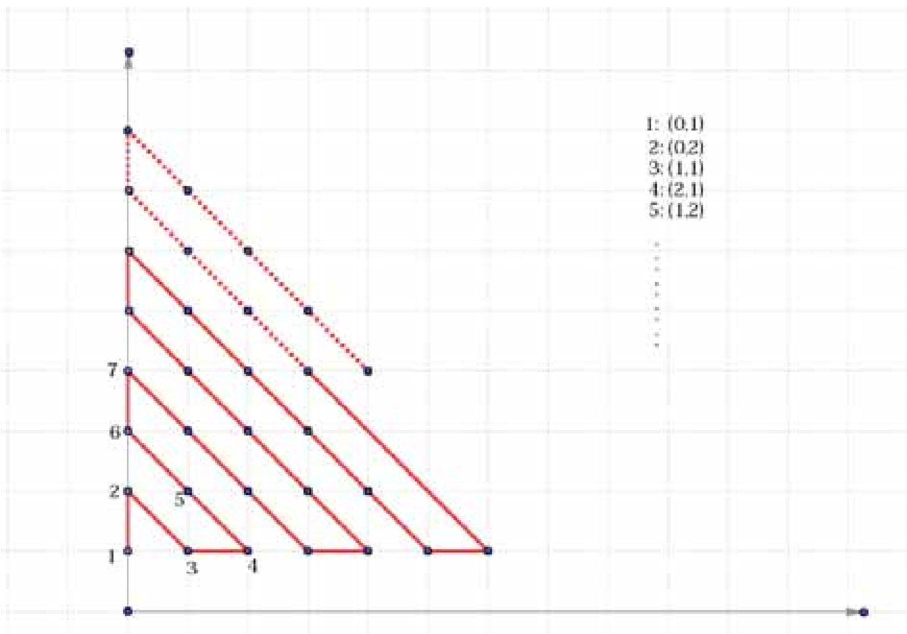
Qualunque successivo nodo collineare, situato sulla traiettoria della retta, sarà della forma (bk, ak) con k numero intero e corrisponderà alla frazione $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$. Vediamo quindi che la frazione irriducibile e quelle successive sono equivalenti, cioè corrispondono allo stesso numero razionale, come osservato precedentemente.

Date due qualsiasi frazioni, esistono infinite frazioni maggiori della più piccola delle due, e minori della più grande. Questa distribuzione dei numeri razionali indusse Cantor, nel 1700, ad introdurre la nozione di numerabilità.

Definizione 20. Un insieme si dice *numerabile* se ogni suo elemento può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

In base a questa definizione,l'insieme dei razionali ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali: allora, contrariamente all'intuizione a al pensiero greco, le frazioni irriducibili, e quindi i corrispettivi nodi, sono numerabili. Una strategia per vedere questo è quella dell'enumerazione diagonale di Cantor. Tutto si basa su una costruzione diretta della corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$.

Immaginiamo di disporre tutte le coppie di $\mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{0\}$ su una tabella come nella figura



In questo modo riesco ad associare a ciascun razionale, rappresenato dai nodi del reticolo, un naturale.

Il procedimento di enumerazione è stato considerevolmente semplificato tenendo conto del fatto che la distribuzione dei nodi primi manifesta alcune simmetrie: ad esempio quella rispetto all'asse y. Quindi ogni numero razionale positivo presente in figura possiede anche un nodo simmetrico rispetto a y che definisce un numero razionale negativo. E' chiaro che la corrispondenza tra i punti della tabella e i naturali sarà biunivoca. Per concludere, basta osservare che i razionali sono meno dei punti della tabella (ma che non possono essere meno dei naturali perché l'insieme N è il più piccolo degli insiemi infiniti).

E' bene osservare che il procedimento di enumerazione è completamente distinto da quello di *ordinamento*. Nessun tentativo di stabilire un ordinamento dei razionali avrà mai buon esito, poiché è sempre possibile comprimere infiniti numeri razionali fra due numeri razionali dati: si è passati da un insieme denso, cioè con la caratteristica che tra due numeri qualunque ce ne sono sempre infiniti, ad uno discreto, un insieme cioè con punti staccati uno dall'altro. Nelle parole di Tobias Dantzig :Abbiamo ottenuto una successione a prezzo della continuità.

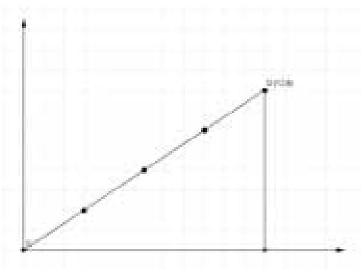
6.4 Massimo Comun Divisore nel reticolo quadrato

Uno sviluppo aritmetico possibile sulla griglia quadrata (e quindi sul Geopiano) è quello di calcolare il Massimo Comun Divisore (MCD) tra due interi p e q.

Prendiamo un riferimento cartesiano nel reticolo,chiamo $O(0,0)$ l'origine e individuiamo il nodo di coordinate (p,q). Addesso,prendendo il segmento che congiunge $O(0,0)$ con (p,q), e guardando il numero dei nodi che stanno sul segmento, possiamo concludere che il MCD(p,q) è dato esattamente dal numero di nodi contenuti nel segmento, esculsa l'origine.

ESEMPIO

Cerchiamo il MCD(12,8). Individuo il punto $D(12,8)$ nel piano e unisco D con O:



Vediamo che i nodi nel segmento DO, esclusa l'origine, sono 4. Infatti il MCD(12,8) calcolato algebricamente è proprio 4.

Questo si spiega, collegandosi al paragrafo precedente, ovvero collegando ogni nodo del reticolo ad una frazione con numeratore e denominatore interi. Infatti se $d = MCD(p, q)$, allora

$$p = dp'$$

$$q = dq'$$

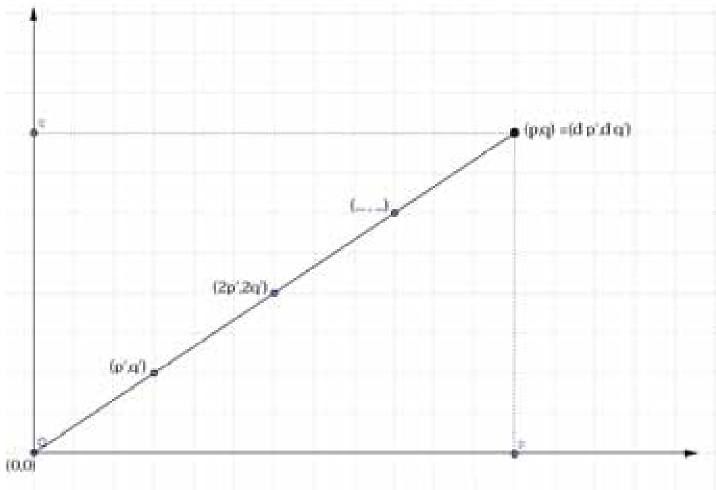
con $\frac{q'}{p'}$ irriducibile. Allora, poiché

$$\frac{q}{p} = \frac{dq'}{dp'} = \frac{q'}{p'}$$

abbiamo che $\frac{q}{p}$ sta sulla stessa retta del razionale $\frac{q'}{p'}$, quindi i due nodi sono allineati sulla stessa retta e $\frac{q}{p}$ è un nodo successivo al nodo primo $\frac{q'}{p'}$. Poiché $\frac{q'}{p'}$ è il nodo primo di quella retta, i nodi successivi allineati con esso saranno del tipo:

$$2\frac{q'}{p'}, 3\frac{q'}{p'}, 4\frac{q'}{p'}, ..., n\frac{q'}{p'}, ...$$

Tra questi successori del nodo primo, dopo $d - 1$ nodi da esso, troviamo $\frac{dq'}{dp'}$.



Allora contando tutti nodi della retta, esclusa l'origine ,posso risalire a $d = MCD(p, q)$.

Osserviamo che due numeri coprimi, cioè primi tra loro, formeranno un segmento che non ha nodi interni, ma solo due nodi come estremi. Infatti il MCD tra due numeri primi tra loro è esattamente 1. Infine osserviamo che una linea retta che rappresenta un numero irrazionale non può incontrare alcun nodo, poiché, se lo incontrasse, ciò significherebbe che la sua pendenza è razionale. E' dunque possibile, partendo dall'origine, tracciare rette che si propagano all'infinito senza mai incontrare un nodo.

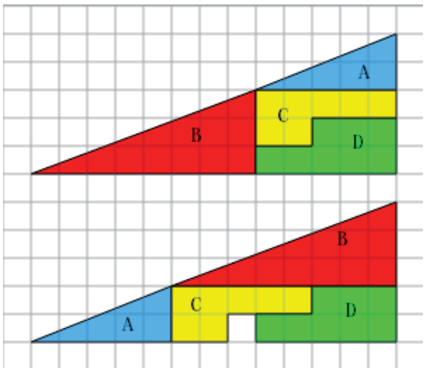
6.5 Sparizioni geometriche

Nel Geopiano si possono sviluppare alcuni paradossi geometrici dove si costruiscono figure componendo alcuni pezzi elementari e l'area della figura composta sembra misteriosamente dipendere dal modo in cui si compongono le figure. Alcuni di questi paradossi, contenuti nel libro di Martin Gardner sulla "Magia Matematica", dipendono da proprietà interessanti dei numeri di Fibonacci.

6.5.1 Paradossi geometrici

Uno dei paradossi più semplici è il Paradosso dei triangoli di Curry.

Prese 4 figure elementari, possiamo ricombinarle in due modi diversi, in modo da avere in entrambi i casi un triangolo rettangolo di base 13 quadretti e altezza 5.



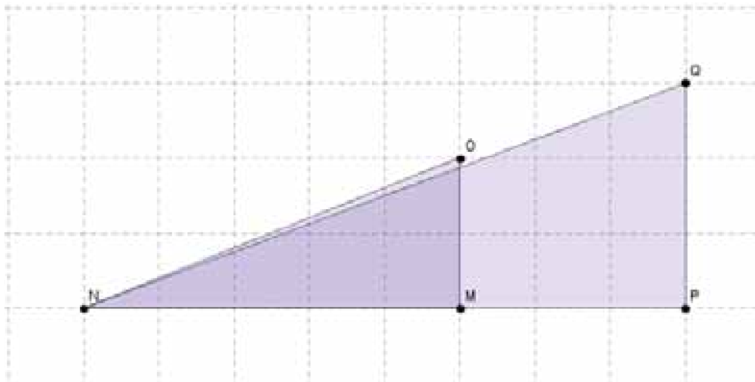
Il paradosso è evidente dalla figura: le due figure sono composte dalle stesse tessere A, B, C, D di uguale superficie, ma nel secondo caso avanza un quadretto. Ci troviamo così nella situazione paradossale in cui la somma di quantità uguali dà risultati differenti.

Facendo alcuni conteggi (che i ragazzi potrebbero fare utilizzando il Teorema di Pick), otteniamo che:
- nel primo caso : a(T)=a(A)+a(B)+a(C)+a(D) = 32
- nel secondo caso: a(T)=a(A)+a(B)+a(C)+a(D)+1 = 33
- se invece considero l'intero triangolo T, la formula dell'area per un triangolo mi dà: a(T)= 32,5

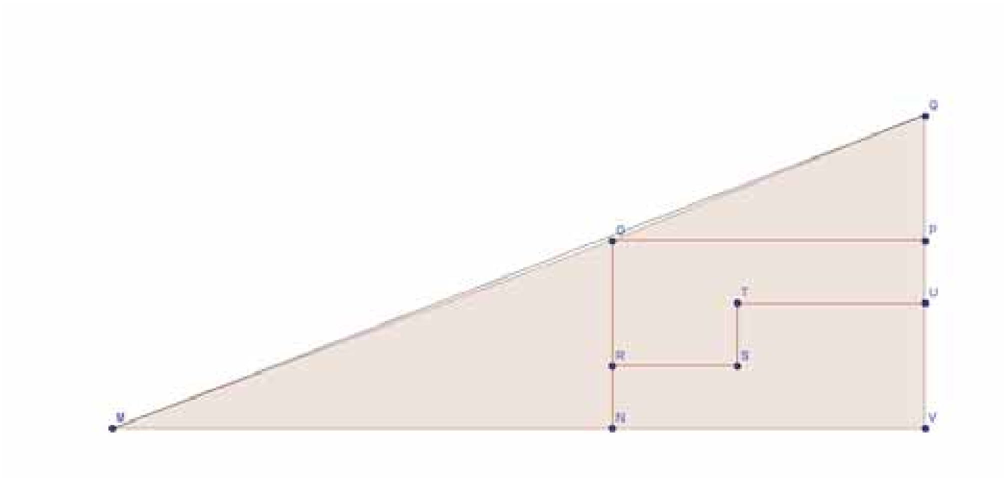
In realtà, le due figure non sono reali triangoli rettangoli, ma sembrano tali per un effetto ottico. L'inganno risiede nel fatto che la linea obliqua del triangolo T ,ovvero la sua ipotenusa, in realtà non è una linea retta, ma è l'unione di due segmenti consecutivi che formano in X un angolo talmente ottuso da sembrare piatto. Qusto deriva dal fatto che i due triangolini A e B non sono simili e quindi hanno pendenze diverse. Esattamente, in questo caso, facendo il rapporto tra le lunghezze dei cateti

dei triangolini A e B, abbiamo:
$2/5 > 3/8$

quindi A ha pendenza maggiore rispetto a B, come illustrato in figura:

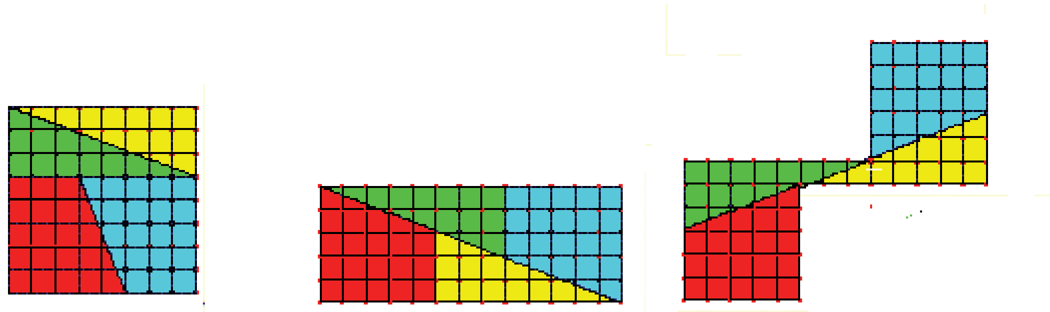


Ciò comporta che nel caso 1 la linea obliqua è concava rispetto alla linea retta: ecco spiegato perché il calcolo dell'a(T) nel primo caso dà un valore minore dell'area vera che il triangolo avrebbe se la linea fosse retta(calcolata con la formula conosciuta). Nel caso 2 la linea obliqua è invece convessa rispetto alla vera ipotenusa del triangolo rettangolo di base 8 e altezza 3, quindi il calcolo di a(T) dà ovviamente un valore maggiore della vera area.



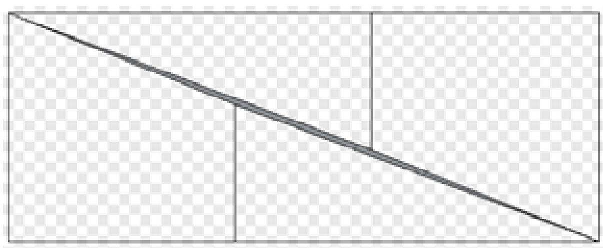
Secondo Martin Gardner il rompicapo espresso in questa forma fu inventato nel 1953 da Paul Curry, un prestigiatore di New York City, universalmente noto per essere l'autore di uno dei più semplici e straordinari giochi di prestigio con le carte. Nonostante questo, il principio delle evanescenze geometriche è conosciuto almeno fino dal 1860 circa.

Una variante molto elegante di questo paradosso, illustrato per la prima volta al pubblico da Sam Loyd senior, utilizza due coppie di pezzi elementari, i quali, riuniti in tre modi diversi (ed in qualche caso cambiandone l'orientazione) danno un apparente aumento o diminuzione dell'area di un'unità quadrata.



Con alcuni conteggi otteniamo che:
- caso 1: a(Q)= 64
- caso 2: a(R)= 65
- caso 3: a(F)= 63

La spiegazione risiede sempre nel fatto che mentre la figura 1 è quella corretta, nelle altre due le diagonali non sono linee rette, stavolta perché il lato obliquo del triangolo e quello del trapezio hanno inclinazioni diverse.



La variazione anche qui è talmente piccola che l'occhio umano difficilmente la percepisce, creando a prima vista, un effetto ottico ingannevole.

6.5.2 Paradossi geometrici e serie di Fibonacci

Facendo attenzione ai valori dei lati delle figure utilizzate per questi paradossi (tranne i valori relativi ai lati obliqui, che ovviamente non sono interi) notiamo che possono disporsi in una serie di Fibonacci, cioè in una serie di numeri ognuno dei quali è la somma dei due precedenti:

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \end{cases}$$

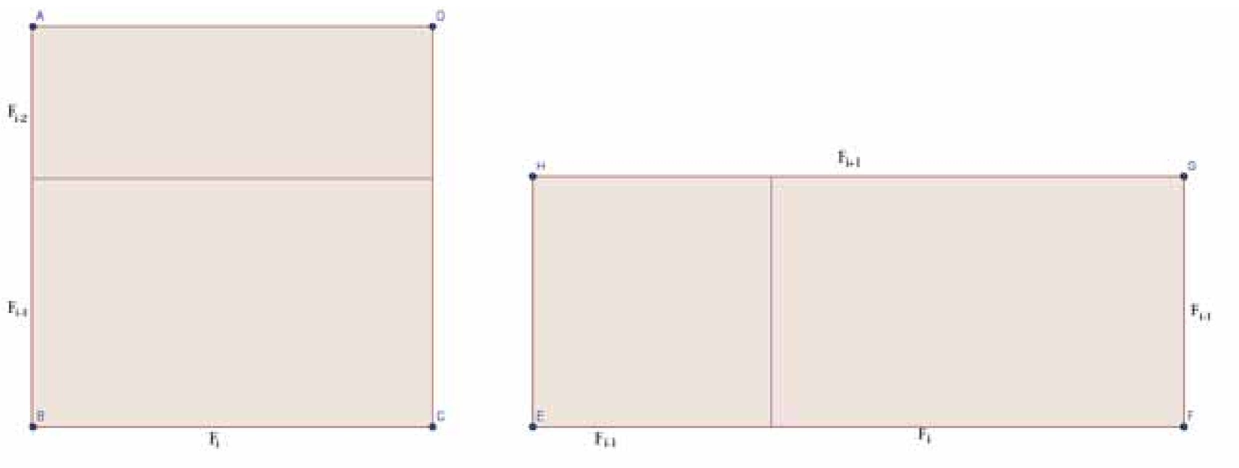
Quindi i valori di questa serie sono:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

Utilizzando questa serie è possibile generalizzare il paradosso quadrato-rettangolo, grazie alla sua proprietà per la quale il quadrato di un numero è sempre pari al prodotto dei due numeri precedenti e successivi, più o meno 1. Ovvero:

$$F_{i+1} \cdot F_{i-1} - {F_i}^2 = (-1)^i$$

In virtù di questa proprietà possiamo costruire il quadrato usando come lato qualsiasi numero di Fibonacci $F_i(i > 1)$ e poi tagliarlo in pezzi in base ai due numeri precedenti della sequenza, F_{i-1} e F_{i-2}.

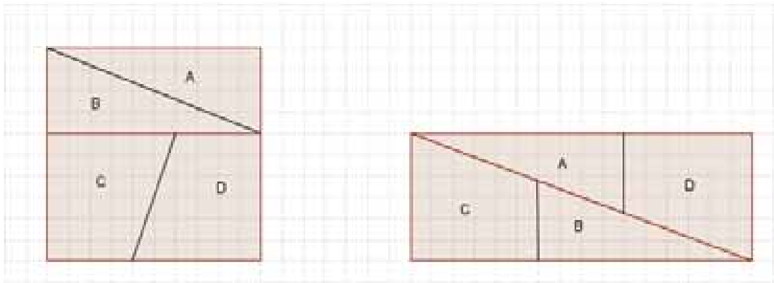


Possiamo ottenere un'infinità di variazioni di questi paradossi se si scelgono valori su altre sequenze di Fibonacci:
Chiamo A, B e C, tre numeri consecutivi di una sequenza, in modo che:

$$\begin{cases} A + B = C \\ B^2 = A \cdot C \pm x \end{cases} \quad \text{dove } x = \text{guadagno o perdita di area.}$$

Possiamo quindi scegliere un valore di x desiderato e una qualsiasi lughezza B e ottenere le equazioni che danno i valori A e C della sequenza. Ad esempio con la

sequenza $2, 4, 6, 10, 16, 26, ...$ possiamo ottenere
$\begin{cases} 6 + 10 = 16 \\ 100 = 6 \cdot 16 \pm x \end{cases}$
da cui $x = 4$. Quindi, se costruissimo un quadrato di lato 10 e un rettangolo di grandezze 16 e 6, avremo una differenza sull'area delle due figure di 4 quadretti!



Infatti in questo esempio il quadrato ha area $10^2 = 100$, mentre il rettangolo $6 \times 16 = 96$, eppure sembrerebbero scomposte nelle stesse 4 figure.

Facciamo adesso alcune considerazioni di carattere teorico sulle proprietà dei numeri di Fibonacci: in particolare per arrivare alla loro proprietà utilizzata per il paradosso, dobbiamo parlare di frazioni continue e numero aureo.

Definizione 21. Sia α un numero reale. Una frazione continua è un 'espressione del tipo:
$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\vdots}}}$
con a_0 intero e tutti gli altri a_i interi positivi, detti quozienti parziali.

Osservazione 4. Semplifichiamo le notazioni, indicando lo sviluppo di α in frazione continua elencando i quozienti parziali, ovvero $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ...]$.

Un algoritmo per sviluppare un numero reale in frazione continua è il seguente:
- poniamo $\alpha = a'_0$
-definiamo $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, quindi $\alpha = a_1 + r_1$, con $0 \leq r_1 < 1$, che quindi sarà del tipo $r_1 = \frac{1}{a'_2}$ con $a'_2 > 1$
-definiamo $a_2 = \lfloor a'_2 \rfloor$, quindi $a'_2 = a_2 + r_2$, con $0 \leq r_2 < 1$, che quindi sarà del tipo $r_2 = \frac{1}{a'_3}$ con $a'_3 > 1$
- e così via..
Otteniamo in questo modo proprio lo sviluppo di α come frazione continua.

Facciamo lo sviluppo del numero aureo, cioè di $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Esso indica il rapporto tra due lughezze diseguali, delle quali la maggiore è media proporzionale tra la minore e la somma delle due, cioè se a è la maggiore e b è la

minore, abbiamo:

$$(a+b) : a = a : b$$

e il rapporto aureo sarà $\frac{a}{b}$.

Dalla proporzione ricaviamo:
$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$
e se chiamo $x = \frac{a}{b}$, abbiamo la seguente equazione da risolvere:
$1 + \frac{1}{x} = x$
cioè

$$x^2 = x + 1$$

con risultati appunto $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Volendola sviluppare in frazione continua,faremo delle sostituzioni successive, in questo modo:
$x = 1 + \frac{1}{x}$
$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$
$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$

..e così via. Abbiamo quindi che $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, 1, 1...]$

Osservazione 5. Lo sviluppo in frazione continua è finito nel caso di numeri razionali, infinito nel caso di numeri irrazionali.

Definizione 22. Si dice ridotta o convergente i-esima ad α la frazione troncata:
$c_i = [a_1, a_2, a_3, ..., a_i] = \frac{p_i}{q_i}$.

Teorema 6.30. *I numeratori p_i e i denominatori q_i delle ridotte c_i soddisfano queste relazioni:*

$$p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2}$$

$$q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}$$

Inoltre per p_i e q_i descritti ,vale la proprietà:

$$p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione □

Abbiamo già visto lo sviluppo in frazione continua del numero aureo ed elencado le sue varie ridotte, otteniamo:
$c_1 = \frac{1}{1}$

$c_2 = \frac{2}{1}$
$c_3 = \frac{3}{2}$
$c_4 = \frac{5}{3}$
$c_5 = \frac{8}{5}$
$c_6 = \frac{13}{8}$
Osserviamo che ogni ridotta è il rapporto tra due numeri della serie di Fibonacci consecutivi. Infatti il numero aureo[4] può essere approssimato, con crescente precisione, dai rapporti fra due termini consecutivi della successione di Fibonacci, a cui è strettamente collegato. Applicando ora il teorema allo sviluppo in frazione continua del numero aureo, abbiamo:
$p_{i-1} = q_i = F_i$
Quindi le relazioni del teorema diventano , in questo caso particolare:
$c_i = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{F_i}{F_{i-1}} = 1 + \frac{F_{i-2}}{F_{i-1}}$.
E l'altra:

$$F_{i+1} \cdot F_{i-1} - {F_i}^2 = (-1)^i$$

che è esattamente quella usata per creare paradossi geometrici come quelli visti.

6.5.3 Paradossi e Geopiano

Per quanto riguarda la parte di sperimentazione didattica potremmo presentare i paradossi visti e successivamente creare le diverse disposizioni nel Geopiano con elastici di colori diversi e fare notare che da una disposizione ad un'altra ci sono dei nodi (chiodi) che passano dal bordo all'interno o viceversa.

Questo paradosso può far capire che lavorando con chiodi ed elastici possono crearsi a volte situazioni ambigue nel Geopiano, come fatto che un elastico sfiori sopra o sotto un certo nodo, comporti una grande differenza. Questo fatto ci è ancora più evidente se pensiamo al calcolo delle aree dei poligoni reticolare con la formula di Pick.

Il paradosso può anche far capire altro. A volte i matematici considerano più conveniente una dimostrazione teorica rispetto alla chiara evidenza che può derivare dall'attenta osservazione di una figura, uno dei possibili perché è che spesso disegni leggermente imprecisi possono trarre facilmente in inganno, come ad esempio le figure dei paradossi elencati.

[4]Il numero aureo è stato considerato "magico" fin dalla sua scoperta da parte dei greci, fino agli egizi, Fibonacci,Leonardo Da Vinci, Keplero e molti altri. Veniva considerato la "divina proporzione": si credeva fosse alla base di tutta la creazione.

6.6 La Taxi-geometria

La Taxi-geometria sembra sia stata scoperta per la prima volta H.Minkowski (1864-1909). In realtá esso non introdusse una vera e propria geometria, ma introdusse il concetto di "taxicab metric", la metrica sulla quale si basa la taxi geometria. I primi veri e propri articoli sulla taxi geometria, vista come esempio interessante di un diverso approccio metrico nel piano cartesiano, appaiono negli USA fra il 1960 e il 1970.

La prima formalizzazione sembra sia quella proposta da E.F.Krause in un articolo del 1973 e quella completa nel 1986 nel libro *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*.

La geometria del taxi, un sistema metrico in cui i punti del piano corrispondono all'intersezione di strade in una città ideale dove tutte le strade sono orizzontali o verticali, è un esempio di geometria non euclidea.

In inglese viene definita Taxicab geometry o anche Manhattan geometry mentre wikipedia propone Geometria di Torino per l'italiano, in considerazione del fatto che questa città è disposta su un sistema squadrato di strade molto regolare.

Mentre la geometria euclidea sembra essere un buon modello per il mondo naturale, la geometria del taxi è un modello migliore per il mondo artificiale urbano costruito dall'uomo e, per quello che ci riguarda, è un modello di geometria da poter utilizzare nel Geopiano.

Iniziamo la descrizione del modello , partendo dagli elementi base di questa nuova geometria non euclidea.

Definizione 23. T-piano: $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$

Definizione 24. T-punto: $P = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

Possiamo già vedere come queste due prime definizioni siano in corrispondeza con il reticolo quadrato del Geopiano, assimilabile ad un piano a coordinate intere.

Definizione 25. T-punti adiacenti: $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ con $x_a = x_b \pm\ 1$ e $y_a = y_b$ oppure se $x_a = x_b \pm\ 1$ e $y_a = y_b$

Definizione 26. T-cammino: successione di punti T-adiacenti.

Definizione 27. T-distanza: Dati due punti $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, allora

$$d(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Definizione 28. T-lunghezza: (numero di punti che compongono la successione) -1

Osservazione 6. La T-distanza è il minimo delle T-lunghezze dei T-cammini che uniscono A e B.

Lemma 6.31. *Siano A e B due T-punti. Se $d(A, B)$ è dispari allora ogni T-cammino da A a B ha lunghezza dispari. Se $d(A, B)$ è pari allora ogni T-cammino da A a B ha lunghezza pari.*

Definizione 29. T-segmento: Dati A eB il T-segmento tra A e B (estremi del segmento) é un cammino, cioé una successione di punti di lunghezza $d(A, B)$

Se é chiaro come sono fatti i segmenti, le rette come sono fatte?

Due punti distinti, nella geometria euclidea, individuano solo un segmento; nel caso di questa geometria i segmenti che congiungono due punti distinti sono piú di uno, ma ciascuno di tali segmenti come prosegue dalle due parti per ottenere una retta? Se i due punti stanno nella stessa linea orizzontale o verticale il caso é ovvio: c'é un solo segmento tra i due punti.

Nel caso peró in cui i due punti non stiano su una stessa direzione principale, la cosa si complica. Una ipotesi (convenzionale) per avere una retta é quella di continuare con lo stesso 'pattern' cioé con la stessa conformazione, lo stesso disegno.

Vediamo innanzitutto che

Teorema 6.32. *L'applicazione $d : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ é una distanza.*

Dimostrazione. Siano $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ tre punti del T-piano. Allora:
1) - $d(A, B) \geq 0$
- $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .Infatti:

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow |x_a - x_b| + |y_a - y_b| = 0 \Leftrightarrow |x_a - x_b| = |y_a - y_b| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_a = x_b, y_a = y_b \Leftrightarrow A = B$$

2) - $d(A, B) = d(B, A)$. Infatti:

$$d(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b| = | - (x_a - x_b)| + | - (y_a - y_b)| =$$
$$= |x_b - x_a| + |y_b - y_a| = d(B, A)$$

3) - $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. Infatti:

$$d(A,C) = |x_a - x_c| + |y_a - y_c| = |(x_a - x_b) + (x_b - x_c| + |(y_a - y_b) + (y_b - y_c)| \leq$$
$$\leq |x_a - x_b| + |x_b - x_c| + |y_a - y_b| + |y_b - y_c| = d(A,B) + d(B,C)$$

applicando la disuguaglianza triangolare.

□

Vediamo adesso alcuni luoghi geometrici che vengono definiti tramite il concetto di distanza.

6.6.1 T-asse di un T-segmento

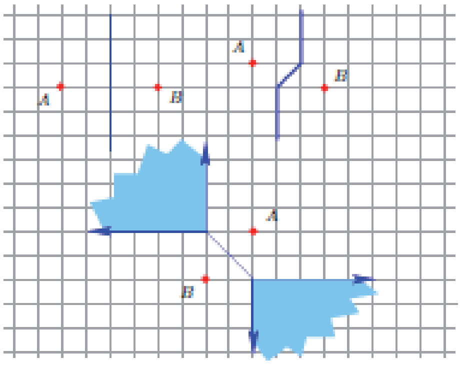
Definizione 30. L'asse di un segmento é il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento

Osserviamo subito che mentre nella geometria euclidea l'asse di un segmento esiste sempre, nel T-piano questo non é piú vero, infatti:

Proposizione 6.33. *Se $d(A,B)$ è dispari allora il luogo geometrico, dato dall'asse di un T-segmento di estremi A e B, è vuoto.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un segmento di estremi A e B tale che$d(A,B)$ sia dispari. Sia P sia un punto appartenente all'asse di AB, quindi $d(A,P) = d(B,P) = l$. Considero un T-cammino α da A a B, passante per P. Esso è formato dall'unione dei due segmenti AP e BP che hanno lunghezza l, quindi la lunghezza di α sarà esattamente $l + l = 2l$, ovvero sarà un numero pari(poichè $l \in \mathbb{Z}$). Ma ciò è assurdo, per il Lemma 6.31 non può essere pari essendo $d(A,B)$ dispari. □

Il T-asse del T-segmento non é sempre una retta, anzi in dei casi non é nemmeno una poligonale: come vediamo nella figura, le regioni celesti indicano che nell'asse del segmento AB sono contenuti due quarti di piano, che si estendono illimitatamente nelle direzioni indicate dalle frecce.

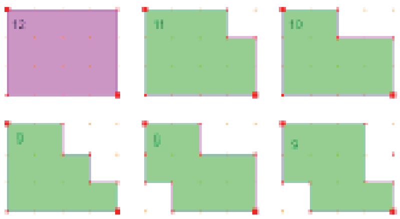


6.6.2 T-bilateri

Nella geometria del taxi esistono delle figure assolutamente impreviste: i bilateri (o biangoli), ovvero figure aventi due T-segmenti come lati e con vertici non allineati in orizzontale o in verticale.

Nella geometria elementare si usa a volte la terminologia dei poligoni che mette in evidenza i lati ed a volte quella che mette in evidenza gli angoli.

Nella geometria del taxi gli angoli non sono definiti: ci sono i vertici, ma gli angoli sono tutti "retti", quindi non ha molto senso quindi parlare di angoli.
I bilateri possono avere gli stessi due vertici, quindi stesso perimetro, ma area che varia fino ad un massimo di $b \cdot h$, con b la base e h l'altezza del rettangolo che ha come vertici opposti i due punti.



6.6.3 T-trilateri

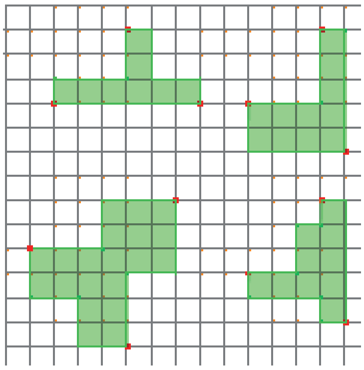
Dati tre T-punti, detti vertici, per avere un T-triangolo essi vanno congiunti con segmenti (i lati), in modo tale che i "pezzi" di lati non devono sovrapporsi né essere sulla stessa linea verticale o orizzontale.

I T-triangoli si suddividono, come nella geometria euclidea, in:

- equilateri (tre lati della stessa lunghezza)

- isosceli (due lati della stessa lunghezza)
- scaleni.

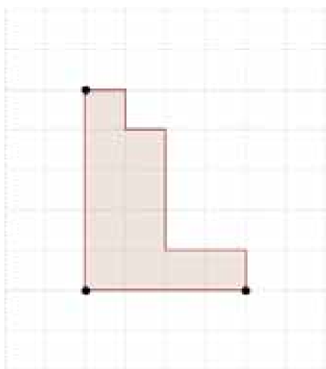
Si osservi che "della stessa lunghezza" non vuol dire della stessa forma.



Nessuna altra suddivisione ha senso, visto che, come abbiamo giá sottolineato, gli angoli non si possono definire in quanto sono sempre retti.

Dato un segmento, esiste sempre un triangolo equilatero che ha quel segmento come lato? Nella geometria euclidea la riposta è positiva, mentre nella taxigeometreia la risposta é negativa, per quanto detto i lati devono avere la stessa lunghezza, quindi la lunghezza del lato dato deve essere pari, perché non esiste l'asse di un segmento di lunghezza dispari.

Definizione 31. Diciamo che un triangolo T è rettangolo se è ottenuto per rotazione da un triangolo con due lati paralleli rispettivamente all'asse x e all'asse y.



Teorema 6.34. . *Se i suoi cateti hanno lunghezze l_1 e l_2 e l'ipotenusa ha lunghezza l_3, allora $l_3 = l_1 + l_2$.*

Questo teorema dimostra che la ben nota relazione di Pitagora tra lunghezze dell'ipotenusa e dei cateti non vale nella geometria del taxi. Nella geometria euclidea c'è invece un teorema che afferma che per costruire un triangolo la somma dei lati più corti deve essere maggiore del lato più lungo.

E' interessante notare che possiamo avere un T-triangolo contemporaneamente rettangolo e equilatero, mentre nella geometria euclidea ciò è impossibile .

Vediamo quali PUNTI NOTEVOLI del triangolo si ritrovano nella geometria del taxi.

A volte esiste, ma non sempre é univocamente determinato, il punto medio di un segmento e, di conseguenza, in alcuni casi esistono le mediane e gli assi dei lati, ma non é possibile definire né altezze né bisettrici, visto che non sono definiti gli angoli, e quindi non é definita la perpendicolaritá. O meglio, per le altezze non c'é nulla da fare, ma per le bisettrici, al solito, dobbiamo adattare la definizione.

Sicuramente non possiamo definire la bisettrice come retta che dimezza un angolo, ma possiamo usare la proprietá che é una retta i cui punti sono equidistanti dai lati dell'angolo stesso (col problema che le rette hanno una definizione un po' diciamo "ambigua").

Dunque l'ortocentro (punto di incontro delle altezze) non puó esistere, mentre si puó provare a parlare di circocentro (centro del cerchio circoscritto, cioé che passa per i tre vertici, che sta sul punto di incontro degli assi), baricentro (punto di incontro delle mediane), incentro (centro del cerchio inscritto, che sta nel punto di incontro delle bisettrici).

6.6.4 T-quadrilateri

I quadrilateri non presentano sostanziali diversitá dai triangoli; una loro suddivisione relativa alla lunghezza di lati é:

- Equilateri: tutti e quattro i lati uguali (nella geometria euclidea sono i quadrati e i rombi)
- Biisosceli: due lati uguali tra loro come pure gli altri due (nella geometria euclidea sono in generale tutti i parallelogrammi e gli "aquiloni", anche se questa nomenclatura non é usuale)
- Isosceli: una coppia di lati uguali (nella geometria usuale sono di questo tipo i trapezi isosceli)
- Scaleni.

Non ha senso parlare di parallelogrammi, dal momento che gli angoli non sono definiti.

Anche nel caso dei quadrilateri é difficile individuare una formula per l'area, visto che esiste un'area minima possibile e un'area massima possibile: é interessante, data nel piano una quaterna di punti, individuare i quadrilateri di aria minima e di area massima e vedere quanti ne esistono (a meno di trasformazioni rigide del piano).

6.6.5 T-circonferenza

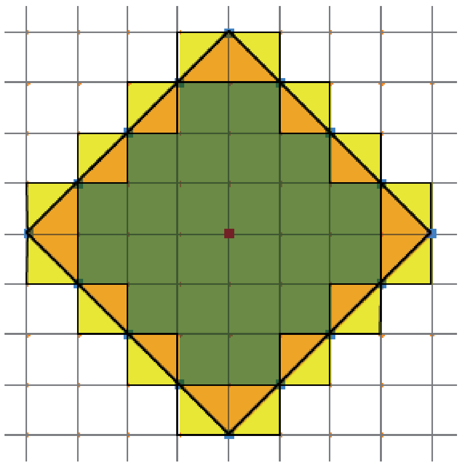
Altro luogo legato alla distanza é la circonferenza, definita come di consueto:

Definizione 32. Si definisce circonferenza il luogo dei punti equidistanti da un punto detto centro.

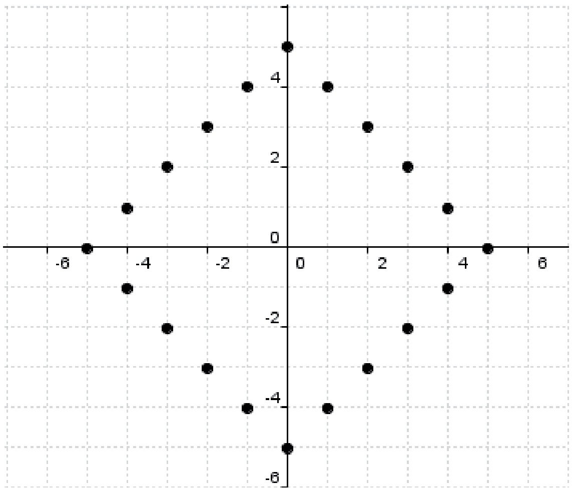
In qualunque posizione sia il punto sulla griglia la circonferenza risulta sempre avere la forma di un quadrato con le diagonali disposte lungo la griglia. Se il raggio é lungo 4, la lunghezza della circonferenza é 32, per cui il corrispondente del rapporto della geometria euclidea, cioé al rapporto tra circonferenza e diametro, non é 3,14 ma 4.

Se peró vogliamo valutare l'area di questo cerchio, il problema si complica: é chiaro che il taxi non puó percorrere esattamente il perimetro del quadrato ottenuto congiungengo di vertici delle diagonali, ma dobbiamo congiungere i vari punti con linee orizzontali e verticali e a seconda di come si congiungono cambia di molto l'area del cerchio.

L'area massima possibile é 40 ed é quella del poligono giallo, l'area del quadrato arancione vale 32, l'area minima é 24 ed é quella del poligono verde; sono peró possibili anche valori intermedi che dipendono dalla strada che vuole seguire il taxi.



Vediamo un esempio di T-circonferenza con raggio 5 in $\mathbb{Z}^2$. Qui essa è un insieme di punti finito, ma se volessimo rapprensentarla in $\mathbb{R}^2$, sempre nella metrica del taxi, essa assume esattamente la forma di un quadrato.



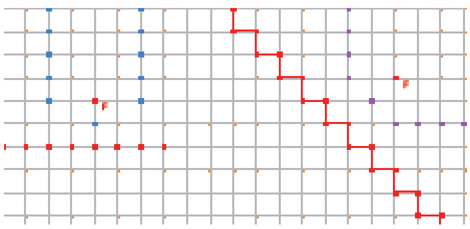
6.6.6 T-parabola

La parabola infine é definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto detto fuoco, e da una retta, detta direttrice. (una definizione simile vale anche per ellisse e iperbole, introducendo il concetto di eccentricitá, nella geometria euclidea, e andrebbe opportunamente rimaneggiata per introdurla anche in questo caso).

Nella figura sono rappresentate due parabole, in una condizione "buona" e la loro forma non desta particolare meraviglia, assomiglia abbastanza a quelle della geometria euclidea.

La distanza di un punto da una retta é, come nella geometria euclidea, la minima distanza tra il punto e i punti della retta.

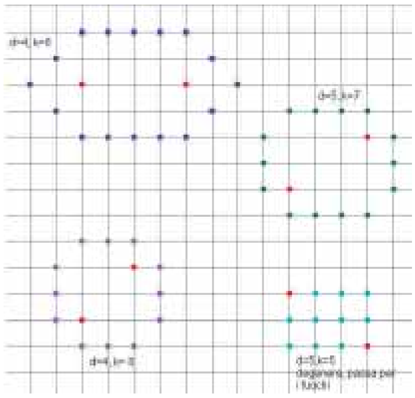
Sempre nella figura ci sono altre parabole: le rette sono diverse (sempre con una conformazione regolare dei motivi che le compongono, come detto sopra), ma i risultati sono molto diversi, tra l'altro si vede come una posizione diversa del fuoco rispetto alle direttrici, che sono le stesse, dia luogo a conformazioni diverse; ci sono parabole con un ramo solo e altre con tre rami; é solo un divertimento vedere come varia la figura al variare delle rette e dei punti.



6.6.7 T-ellisse

La definizione di ellisse (luogo geometrico dei punti la cui somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi é costante:$PF_1 + PF_2 = k$) porta ai luoghi della figura, a seconda della disposizione dei fuochi nel piano.

La loro forma é abbastanza simile a quella euclidea, a parte quello degenere sulla destra, in cui la distanza focale é uguale alla somma delle distanze dei due punti dai fuochi. Tale ellisse é degenere anche nella geometria euclidea.



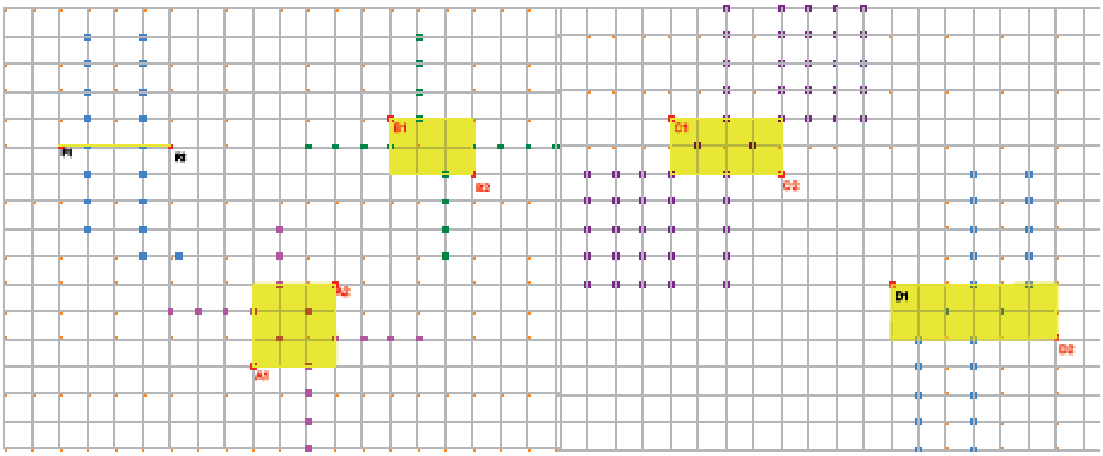
6.6.8 T-iperbole

Una iperbole é il luogo dei punti del piano tali che la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi é costante$|PF_1 - PF_2| = k$(serve il valore assoluto poiché k deve essere positivo; si hanno cosí i due rami dell'iperbole).

Come nella geometria euclidea le ellissi sono curve chiuse mentre le iperboli sono formate da due rami che si estendono all'infinito.

Come vediamo dalla figura, non sono peró tutte dello stesso genere, e la loro forma dipende dalla posizione dei fuochi e dal rettangolo di ingombro individuato dai medesimi.

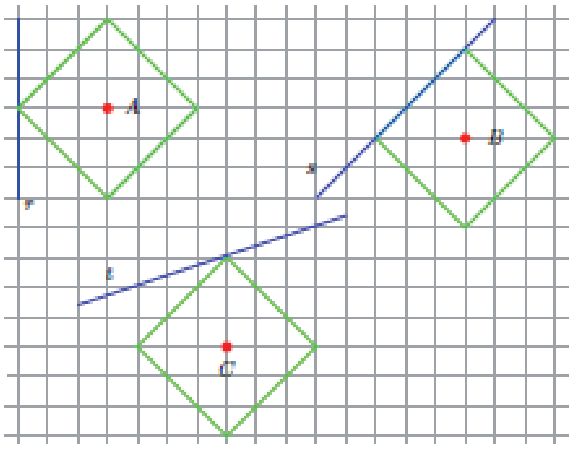
Se il valore della costante k fa sí che i vertici del rettangolo di ingombro appartengano al luogo, l'iperbole riempie quarti di piano, come nel caso dei fuochiC_1 eC_2.
- Se k é minore del piú piccolo tra x e y ha due rami come una iperbole del piano euclideo, diretti come le strade (casi dei fuochi A1 e A2 o B1 e B2).
- se k é maggiore del piú piccolo tra x e y ha due rami che terminano su strade parallele, come nel caso dei fuochi F1 e F2 o D1 e D2.



6.6.9 Altri risultati euclidei che non sono veri nella Taxi-geometria

Vediamo alcuni teoremi euclidei che non sono veri nella geometria del taxi.

1) *Una retta ed una circonferenza possono avere 0, 1 o 2 punti in comune.*
   In realtà nella taxi geometria possono averene anche infiniti.



2) *Esiste una sola e una sola circonferenza che passa per 3 punti non allineati.*
   Questo risultato nella Taxi-geometria non vale, poichè se prendiamo i tre punti $(-3,0),(0,3),(3,0)$, ogni taxi-circonferenza con centro $(0,c)$, $c<0$, e raggio $r=3-c$, passa per questi tre punti. Ce ne sono quindi infinite.

3) Abbiamo già visto nel paragrafo 6.6.6 che in questa geometria anche il valore di π cambia. Infatti nella Taxi-geometria vale il seguente teorema:

Teorema 6.35. $\pi = 4$.

Dimostrazione. π é definito come il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e la lunghezza del diametro. Una circonferenza di raggio r ha quattro lati, ognuno di lunghezza 2r, quindi la lunghezza della circonferenza è 8r. Il diametro ha lunghezza 2r, quindi $\pi = 8r/2r = 4$. □

Pensiamo a quanto tempo è stato impiegato nella storia della geometria euclidea per calcolare approssimazioni del valore di π o per dimostrare che non è un numero razionale. Nella Taxi-geometria questi risultati si ottengono molto più semplicente.

Riferimenti bibliografici

[1] *Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica*, MATEMATICA 2003, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica, Associazione Mathesis, Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Lucca, Maggio 2003

[2] *Rapporto sulla Geometria e il suo Insegnamento*, Commissione di Riflessione sull'Insegnamento della Matematica (CREM o Commissione di Kahane), 2000

[3] *Elementi di didattica della matematica*, D'Amore B.,1999, Bologna, Pitagora Editrice

[4] *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Bruno D'Amore, 2003, Pitagora Editrice

[5] *Occorre apprendere a leggere e a scrivere in matematica?*Laborde C, da *La matematica e la sua didattica 2*,1995, pag 121-135

[6] *Lezione Magistrale* di Mario Comoglio 7-11-2011, Organizzato da "laboratori formazione" a Milano, pag 4

[7] *Verso una teoria dell'istruzione*, Bruner J.S., Roma, 1967, Armando, pag 79-80

[8] *Alcune considerazioni sull'insegnamento matematico*,PIAGET J., in C. SITIA, La didattica della matematica oggi-problemi, ricerche, orientamenti, Pitagora, Bologna, 1979, p. 29

[9] *Una riflessione sulla valutazione in Matematica a partire dalle prove Invalsi* ,Fandiño M.I., 2004

[10] *La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità*, Speranza F., A cura di Furinghetti F. 'Definire,argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto', 1992, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore

[11] *Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria.*, B.D'Amore in *La matematica e la sua didattica 4*, 2004, pag 4-30

[12] Introduzione di F.Speranza in *La geometria da un glorioso passato ad un brillante futuro*, F.Speranza, C.Marchini, P.Vighi, Atti del III incontro internucleo matematici delle scuole secondarie superiori, Parma, 1992

[13] *On Convex Lattice Polygons*, Paul R. Scott, Bulletin of the Australian 15,1976

[14] *Problem 709, Elemente der Mathematik 30*,Klamkin M.S.,1975, 14-15

[15] *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Pick G., Sitzungsber Lotus Prag,1900

[16] *Primi Elementi di Geometria Computazionale*Adriano Pascoletti, Dipartimento di Matematica e Informatica Università di Udine,2003

[17] *On the volume of lattice polyhedra*, Reeve, J. E., Proceedings of the London Mathematical Society, 3 1957

[18] *Computing the Continuous Discretely. Integer-Point Enumeration in Polyhedra*, Matthias Beck-Sinai Robins, 2009, New York, Springer.

[19] *Il numero.Dalla matematica delle piramidi all'infinito di Cantor.*, Midhart Gazalè, 2001, Edizioni Dedalo.

[20] *I misteri della magia matematica*, M.Gardner, Sansoni Editore, Firenze, 1985

[21] *Frazioni continue e sezione aurea*, N.Ricchetti, Tesi triennale, 2011

[22] *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, E.F.Krause,1986

Sitografia

- www.scuolaedidattica.com/matematica/mat-2003.pdf *MATEMATICA 2003, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica - Ciclo secondario*
- http://cird.unical.it/Progetto% 20 il % 20mestiere % 20del % 20matematico/Ment % 20mat.pdf *E' possibile costruire una mentalità matematica ?, Prof. F. A. Costabile*
- http://matematica.unibocconi.it/articoli/il-rapporto-crem *Intervento di Remy Langevin su alcuni passi delle raccomandazioni finali dei Rapports sulla Geometria del CREM*
- www.csa-lodi.it/dati/processi-innovativi/formazioneSCIENZElodidef1.pdf *Ripensare il curriculum dell'asse matematico, Lorella Carimali*
- http://www.lepidorocco.com/?option=com_content&view=article&id=258:didattica-attiva&catid=70:lettera-d&Itemid=165 *Didattica Attiva*
- http://www.edscuola.it/archivio/comprensivi/dossier_competenze.pdf *Valutare e Certificare le competenze, Dossier di M.Castoldi, P.Cottaneo, F.Peroni, 2006*

- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick.html *Biografia di G.Pick*
- http://it.wikipedia.org/wiki/CalebGattegno *Biografia di Gattegno*
- http://it.wikipedia.org/wiki/Geopiano *Descrizione del Geopiano*
- http //it.scribd.com/doc/126172225/Pascoletti-UD-GeomComp *Primi elementi di geometria computazionale*
- www.paulscottinfo.ipage.com/lattice-points/ *Lattice Point Problem, Paul Scott*
- http://web.math.unifi.it/users/ottavian/tesi *Tesi Nadia Ricchetti, Frazioni continue*
- http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2007/v2007n04.pdf *La geometria del taxi, Marco Sabatini*

Ringraziamenti

Quando si giunge ad un traguardo così importante non si è mai soli, per questo sento l'esigenza di ringraziare chi ha contribuito alla mia preparazione e alla mia personalità.

Voglio partire da coloro che mi hanno accompagnato personalmente in questo bellissimo percorso.

Grazie al Prof. Ottaviani per la sua competenza e per tutto l'aiuto che mi ha fornito durante la stesura.

Grazie a Lodovico per i validi consigli che mi ha regalato durante le lezioni in classe o nelle chiaccherate tra una pausa e l'altra.

Ringrazio infinitamente anche la Prof.ssa Chiosi per la cortesia dimostratami.

Grazie per tutto l'incoraggiamento, il supporto, la disponibilità e per avermi reso pienamente soddisfatta di questo lavoro.

Un affettuoso grazie va anche ai ragazzi dell'Istituto ISIS "Vasari" di Figline Valdarno per avermi permesso di elaborare questa tesi e avermi confermato quanto sia bello il mestiere di insegnante.

Dedico questa Laurea:

- alla mia famiglia: mamma Daniela, babbo Siro e Miria, per tutto ciò che da loro ho imparato e ricevuto per tutta la vita. Siete la cosa più preziosa che ho.

  Grazie per ogni grande gesto che avete fatto per me, per non avermi mai fatto mancare niente, per avermi supportato nelle mie scelte e spinto a dare il massimo, per avermi capito anche quando il massimo non riuscivo a darlo, per avermi regalato una vita serena che non mi farà mai avere nessun rimpianto.

  Un grazie speciale alla piccola Irene, in particolare per i dolci e calorosi abbracci ogni Venerdì al ritorno a casa.

- al mio ragazzo, Luca, parte fondamentale di me. Grazie per essere sempre al mio fianco e per avermi trasmesso la convinzione che nella vita si può raggiungere qualsiasi meta, in amore e in tutto il resto. Gran parte della mia felicità la devo a te.

Questo traguardo è tanto mio quanto vostro.

Inoltre ringrazio:

- gli zii, cugini, Franchino e tutti i nonni. Sono sicura che sorpattutto il nonno Tonino sarebbe stato molto fiero di me.

- i miei amici 'matematici' : Gessi, Virgi, Giuli, Bea, Vane, Michi, Ale e Lore, che conoscono meglio di chiunque altro la fatica, la forza e il sudore (sopraTtutto in aula1) che serve per arrivare a questo traguardo.

  Più che compagni di studio, siete degli ottimi amici e compagni di vita. Sono fermamente convinta che quello che ci lega durerà a lungo.

  Grazie anche a Sofia e Paola per i momenti condivisi insieme. Grazie alle altre persone passate dal Dini che ho conosciuto nel tempo e con le quali ho potuto confrontarmi. In particolare alla Marti, con la quale ho condiviso alcuni degli ultimi momenti più difficili, come l'uso dello spettrometro.

- i miei colleghi di lavoro dell'associazone 'I CARE', con in testa LaRot, per aver creduto ogni anno in me. Grazie per aver fatto finta di credermi quando a inizi Giugno dicevo "Quest'anno farò poche ore di lavoro perchè devo fare un sacco di esami" e poi non andava mai così. Ma lo sguardo di un bambino che si diverte grazie a noi, certe volte, vale più di mille esami.

- tutti gli amici aretini, dal primo all'ultimo. Grazie per le risate e i momenti di svago passati insieme. In particolare grazie al "Pollaio"(Bettini, Giannogi, Ani, Giuggi, Bene, Martogi, Polli, Lisa) e a Lau, Andrea, Vale, Dani, Dio, Ili, Ale, Luci, Simo, Ema, Marco, Marti, Fede, Maicol.

  Siete ciò che serviva dopo le lunghe giornate passate sui libri.

  Grazie anche alle mie pazze ex-coinquiline e a chi sa che per me conta, ma che mi sono dimenticata di citare.

Grazie ad ognuno di voi
per esserci stato quanto più poteva,
per aver sopportato la mia ansia
e compreso la mia emozione.

Moi