Il **Geopiano**:
strumento per una didattica attiva
nel biennio di un Istituto Tecnico superiore

Moira Paggini

Seminario Tesi Magistrale

La tesi riporta un'*esperienza didattica* rivolta ad alunni di scuola secondaria superiore in vista di un loro avvicinamento alla *Geometria.*

L'approccio utilizzato per lo svolgimento della sperimentazione si avvicina a quello di tipo *"laboratoriale":*

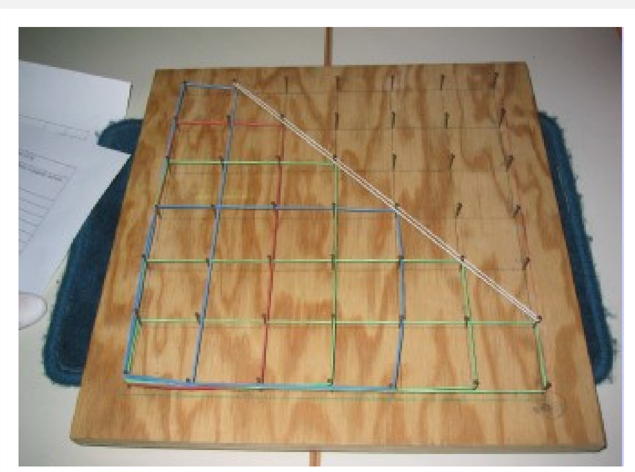
i ragazzi, divisi in gruppi, lavorano insieme per il conseguimento di un compito assegnato, utilizzando il supporto di uno strumento inconsueto,

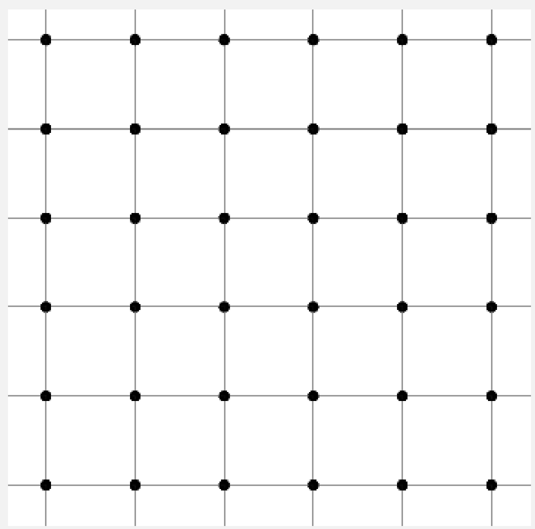
il **Geopiano.**

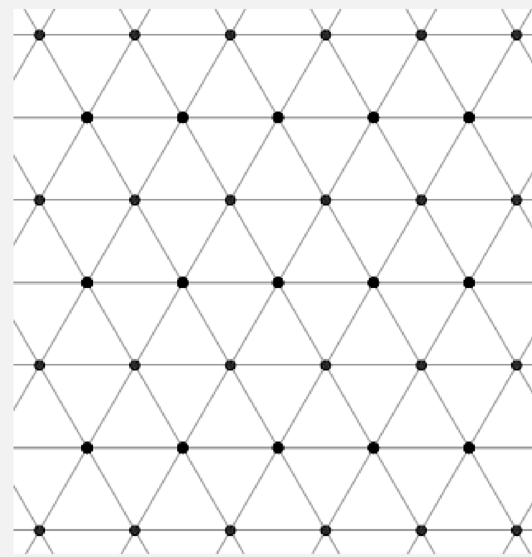
Cosa è il Geopiano?

GEOPIANO = Tavoletta ricoperta da un reticolo regolare di piccoli pioli attorno ai quali si possono tendere elastici.

Ideato dal matematico *Caleb Gattegno* (1911-1988) .







Il TIROCINIO

- Istituto ISIS “Vasari” di Figline Valdarno (FI)

  Indirizzo Tecnico Geometri

➢ *Tirocinio OSSERVATIVO,* effettuato nelle classi IA, IIA, IIIA, IVA del Prof. Miari e IB e IIB della Prof.ssa Chiosi.

➢ *Tirocinio ATTIVO,* effettuato principalmente nelle classi **IA** e **IIA** con solo alcune lezioni in IIIA, IB e IIB **.**

Perché questo progetto?

- La geometria nelle scuole è sempre meno presente e sempre più trascurata
- Difficoltà e disaffezione verso questa materia
- Creare un ambiente di lavoro in cui è favorita una *didattica per competenze.*

Competenza: “ *Comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e*

essionale e personale. “ (Decreto 22 Agosto 2007)

Una scuola che fornisca conoscenza o abilità è
<u>necessaria ma non sufficiente</u>
per permettere agli allievi di raggiungere traguardi di competenza

Obiettivi

- Suscitare interesse verso la Geometria e rendere meno passivo l'atteggiamento verso il lavoro scolastico
- Consolidamento delle conoscenze geometriche
- Correggere misconcezioni
- Colmare eventuali lacune
- Sviluppare un linguaggio matematico attraverso la discussione di classe
- Favorire l'interazione e il confronto tra - gli studenti
  - studenti e insegnante
- Favorire l'apprendimento attraverso esperienze pratiche in cui lo studente è protagonista attivo

La competenza viene sviluppata solo in attività in cui l'allievo è protagonista: ecco perché una didattica laboratoriale costituisce un contesto adatto per promuovere competenze, svilupparle e convalidarle.

Verso una **DIDATTICA ATTIVA:**

insieme articolato di metodologie di insegnamento che pongono l'utente come soggetto attivo e non passivo del proprio successo di apprendimento.

Vediamo in particolare quelle utilizzate nel progetto:

1. **Cooperative learning**
2. **Problem solving**
3. **Manipolazione di strumenti strutturati**

1. Cooperative Learning:

consente agli studenti di apprendere in **piccoli gruppi**, aiu
reciprocamente e sentendosi corresponsabili del reciproco

- **Migliori risultati degli studenti**: tutti gli studenti lavorano più a lungo sul compito e con risultati migliori, migliorando la motivazione intrinseca e sviluppando maggiori capacità di ragionamento e di pensiero critico;

- **Relazioni più positive tra gli studenti:** gli studenti sviluppano pertanto il rispetto reciproco e lo spirito di squadra;

2. Problem Solving

Didattica per problemi:

Situazioni nuove in cui c'è da raggiungere un obiettivo ma non c'è una procedura meccanica per raggiungerlo.

Occorre **un'analisi interpretativa e analitica** che richiede **ragionamento** per giungere all'obiettivo di risoluzione di un problema.

Infatti lo **sviluppo del pensiero** si attua impegnando gli alunni nella soluzione di problemi.

3. Manipolazione di strumenti

E’ opportuno mettere gli allievi nella condizione di essere **immersi nelle esperienze concreta**, attraverso la possibilità di maneggiare strumenti strutturati.

Geopiano è facilmente maneggevole e può assumere qualsiasi posizione.
Nel Geopiano non si disegna ma si **costruisce:**
operazione immediata che promuove il dinamismo del pensiero

” L’insegnante non dà lezioni,ma organizza situazioni che destano curiosità e voglia di ricercare la soluzione. L’insegnante deve favorire questo” (Piaget)

STRUTTURA del Progetto

Ogni lezioni è basata su:

- Distribuzione del materiale (scheda, Geopiano, griglie)
- Presentazione scheda da compilare
- Attività di Problem Solving in piccoli gruppi (2\3 persone)
- Manipolazione del Geopiano
- Discussione di classe

- *Classe* ***I A*** : 5 Lezioni (1 ora ciascuna) + Test finale (1 ora)
- *Classe* ***II A*** : 5 Lezioni (1 ora ciascuna) + Test finale (1 ora)

Programmazione didattica IA

LEZIONE 1: INTRODUZIONE AL GEOPIANO

- conoscere il Geopiano evidenziandone caratteristiche, potenzialità e limiti
- iniziare a prendere confidenza con gli elastici per la rappresentazione di situazioni geometriche
- rappresentare alcune figure geometriche sia nel reticolo quadrato che in quello triangolare, mettendone in evidenza le loro proprietà
- ripassare i concetti di figura,poligono, poligono regolare e classificazione di triangoli e quadrilateri
- disegnare alcune figure geometriche in posizioni non usuali per evidenziare eventuali misconcetti dovuti al binomio concetto/immagine mentale e per capire quali proprietà delle figure sono invarianti

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 1

LEZIONE 2: NUMERI FIGURATI

- far conoscere il metodo di rappresentazione dei numeri naturali dei Pitagorici: tramite pietre o puntini nella sabbia
- utilizzare l'artimo-geometria per studiare alcune relazioni tra numeri, come ad esempio la somma dei primi n numeri naturali
- metodo induttivo: partire da una regola che vale per alcuni casi e generalizzarla
- affrontare il concetto di dimostrazione geometrica e per induzione

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 2

- **LEZIONE 3**: FORMULA DI PICK
- data la definizione di triangolazione applicarla a dei poligoni
- saper definire e distinguere i concetti di area e perimetro
- conoscere e saper applicare le formule per il calcolo dell'area di poligoni convessi
- saper distinguere in quali situazioni è necessario calcolare il perimetro e in quali l'area di una figura
- saper scomporre figure piane
- individuare i contesti reali in cui è possibile applicare la formula del teorema di Pick
- saper dedurre una formula a partire da un certo numero di osservazioni
- presentazione della formula per il calcolo di aree su un reticolo quadrato

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 3+Presentaziine Power Point

LEZIONE 4: RAPPORTI TRA AREE E PERIMETRI

- decidere se ci sono relazioni tra perimetro e area di una figura
- confrontare varie figure di uno stesso tipo
- osservare relazioni tra area e perimetro attraverso un grafico cartesiano
- uso dei polinomi per la scrittura delle relazioni tra enti geometrici

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + testo prova invalsi 2011

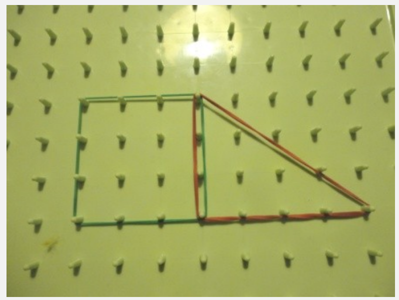
LEZIONE 5: APPROSSIMAZIONE DELLA SUPERFICIE DELL’ANTARTIDE

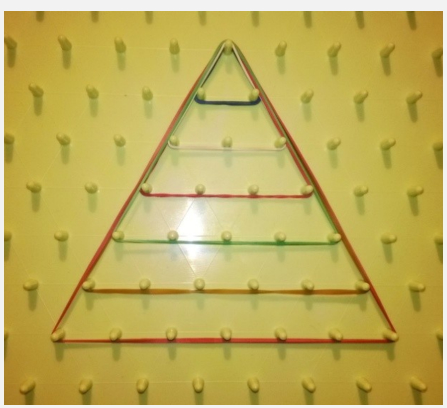
- applicare il teorema di Pick
- Approssimare una figura con un poligono
- Strategie per migliorare l’approssimazione
- Discussione sugli errori e sull’errore relativo

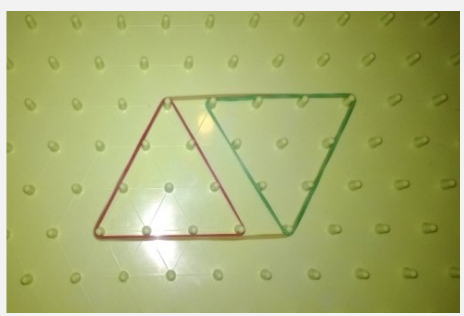
MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta, griglie stampate su lucidi + SCHEDA 4

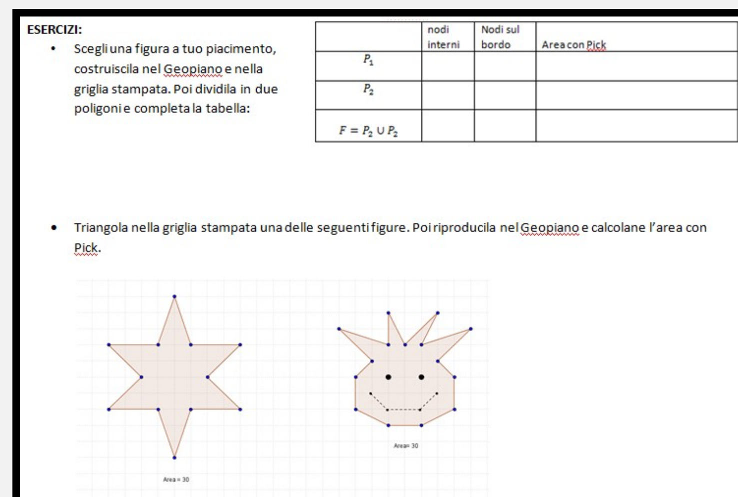
Alcune SCHEDE IA

- scheda 1
- scheda 2
- scheda 3
- scheda 4









ESERCIZI:

- Scegli una figura a tuo piacimento, costruiscila nel Geopiano e nella griglia stampata. Poi dividila in due poligoni e completa la tabella:

	nodi interni	Nodi sul bordo	Area con Pick
P_1			
P_2			
$F = P_1 \cup P_2$			

- Triangola nella griglia stampata una delle seguenti figure. Poi riproducila nel Geopiano e calcolane l'area con Pick.

Programmazione didattica IIA

LEZIONE 1: INTRODUZIONE AL GEOPIANO

- conoscere il Geopiano evidenziandone caratteristiche, potenzialità ed limiti
- iniziare a prendere mano con gli elastici per la rappresentazione di situazioni geometriche
- rappresentare alcune figure geometriche sia nel reticolo quadrato che in quello triangolare, mettendone in evidenza le loro proprietà
- ripassare i concetti di figura,poligono, poligono regolare e classificazione di triangoli e quadrilateri
- disegnare alcune figure geometriche in posizioni non usuali per evidenziare eventuali misconcetti dovuti al binomio concetto/immagine mentale e per capire quali proprietà delle figure sono invarianti

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 1

LEZIONE 2 : VERSO IL TEOREMA DI PICK

- strategie di triangolazione dei poligoni
- data la definizione di triangolazione applicarla a dei poligoni
- metodo induttivo: partire da una regola che vale per alcuni casi e generalizzarla

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 2

LEZIONE 3: FORMULA DI PICK e DIMOSTRAZIONE

- utilizzo di Geogebra per applicare il Teorema di Pick
- capire i punti salienti della dimostrazione del Teorema di Pick
- individuare i contesti reali in cui è possibile applicare la formula del teorema di Pick

MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 3 + Presentazione Power Point

LEZIONE 4: EQUIVALENZA, CONGRUENZA ,EQUISCOMPONIBILTA' e TEOREMA DI PITAGORA

- decidere se ci sono relazioni tra aree delle figure
- confrontare varie figure di uno stesso tipo
- capire la differenza tra equivalenza, congruenza ed equiscomponibilità facendo esempi
- leggenda sul teorema di Pitagora
- dimostrazione geometrica e algebrica del teorema di Pitagora
- applicazione del teorema di Pick per verificare il teorema di Pitagora

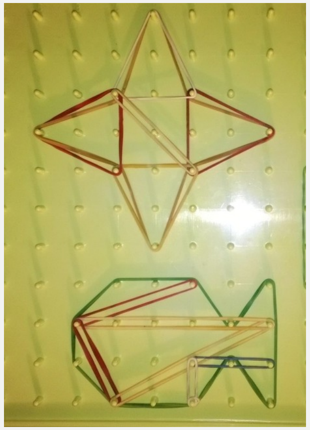
MATERIALE: Geopiano, griglie stampate su carta + SCHEDA 4

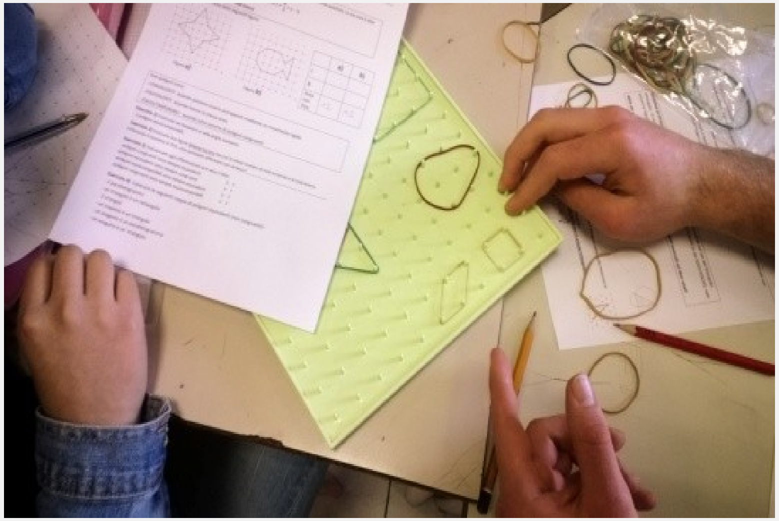
LEZIONE 5: PROPORZIONALITA' TRA AREE ed INCOMMENSURABILITA'

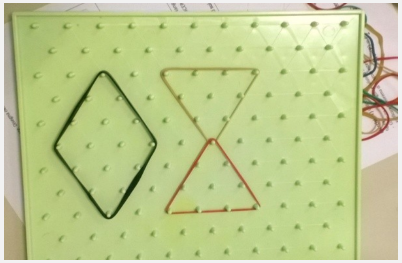
- capire come variano le aree e i perimetri
- rapporti tra aree
- cenno al Dialogo del Menone riguardo lo sdoppiamento del quadrato
- numeri irrazionali
- dimostrazione dell'irrazionalità di radice di 2

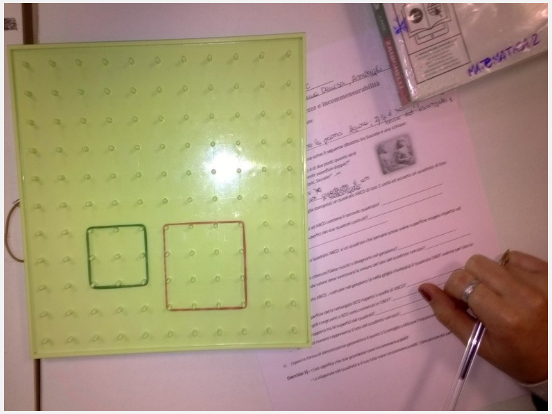
Alcune SCHEDE I

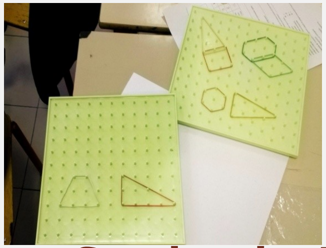
- scheda 1
- scheda 2
- scheda 3
- scheda 4
- scheda 5











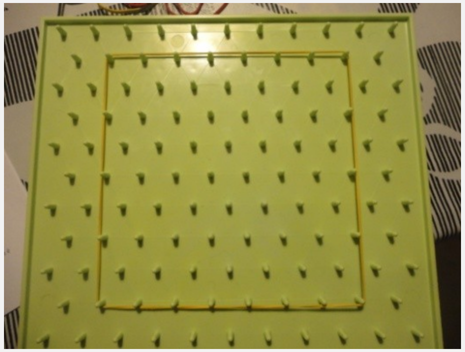
POF e attività con il Geopiano

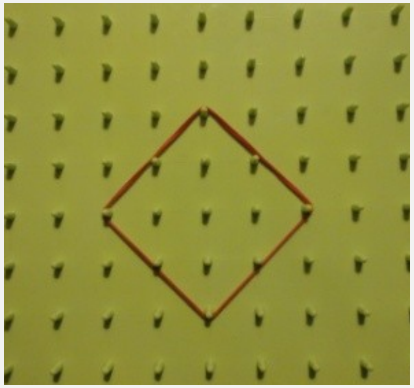
La scelta degli argomenti e dei criteri di presentazione del progetto è stata fatta adattandosi alle esigenze della classe e quanto più possibile ai programmi previsti dal POF elaborato dai docenti dell'Istituto

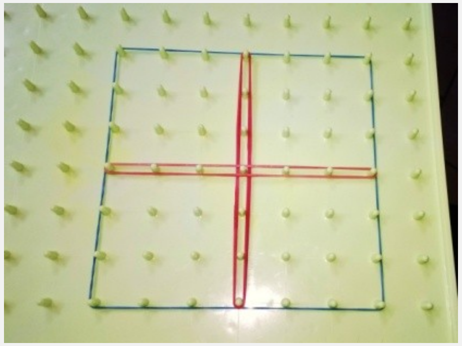
1. Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.
2. Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
3. Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.
4. Analizzare dati e interpretarli anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche e sussidi informatici.

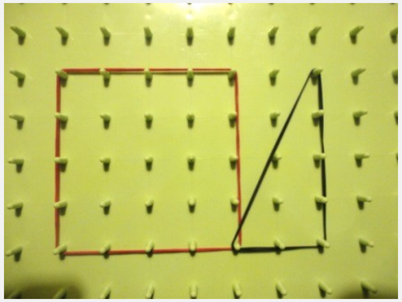
RIFLESSIONI durante l'esperienza:

- Ci ha permesso di mostrare una **Matematica differente**
- **Atteggiamento** attivo e molto positivo
- **Misconcetti**: individuazione e correzione
- **Linguaggio matematico** : sottolineare importanza di un linguaggio rigoroso e preciso



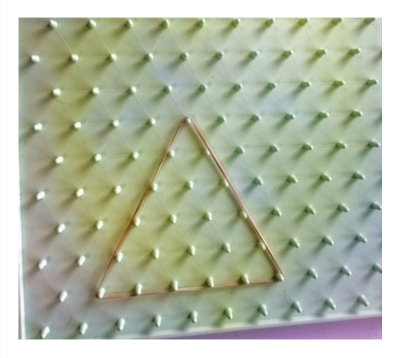




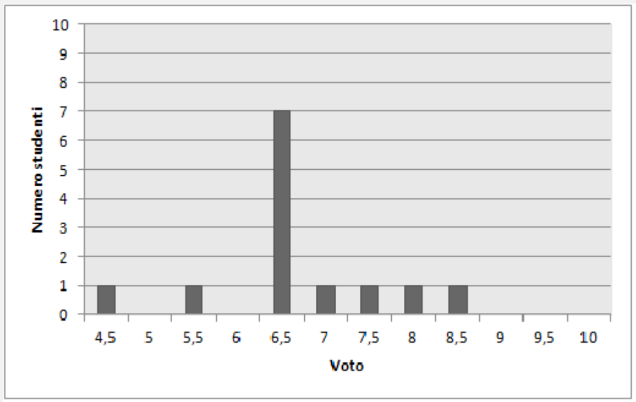


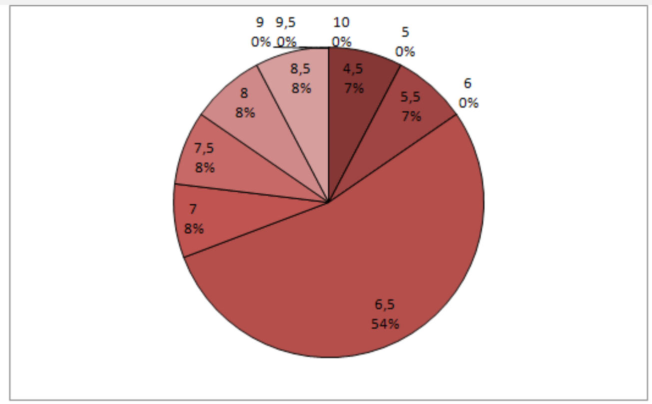
“Questo non è un quadrato. Diventa un quadrato solo se ‘ruoto’ il Geopiano”

‘’Un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente base ed altezza congruente‘’

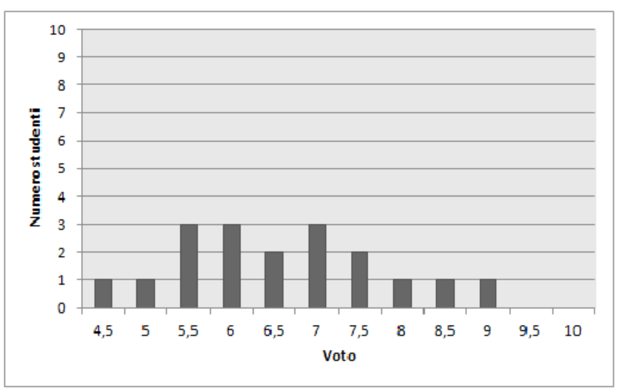


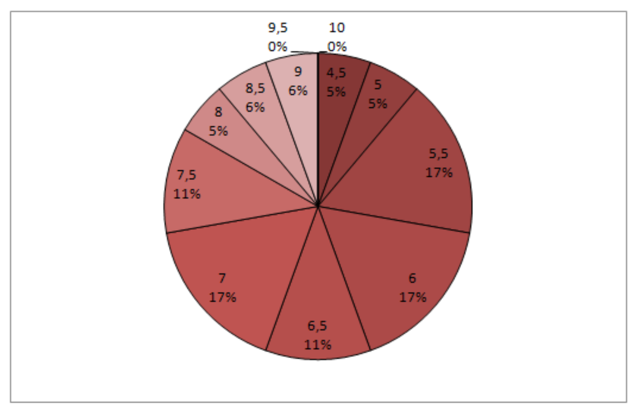
TEST FINALI di conoscenze





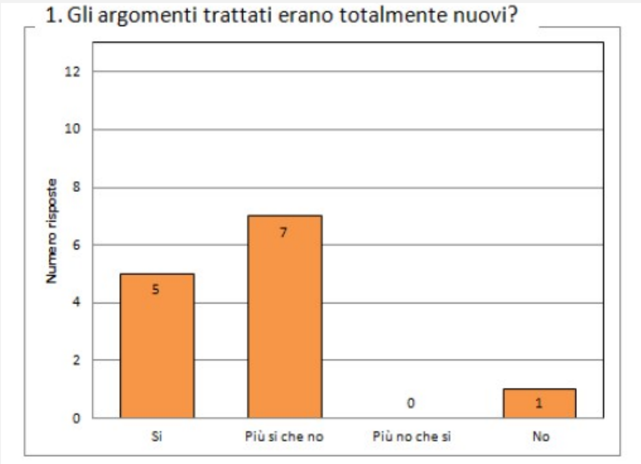
I A test

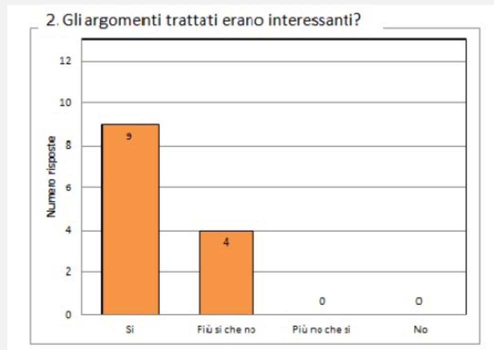


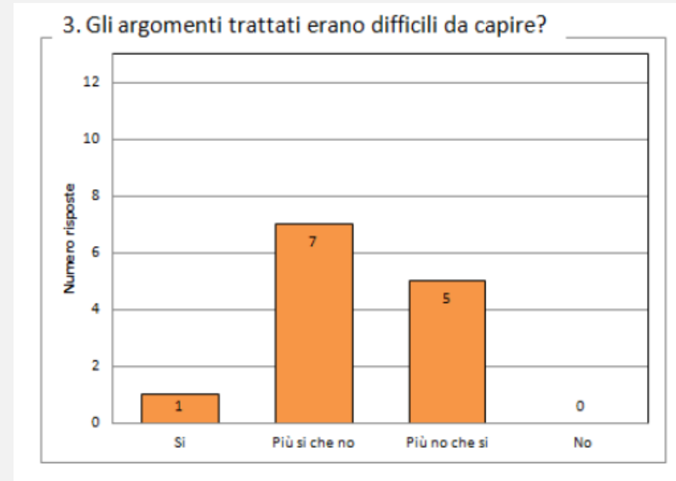


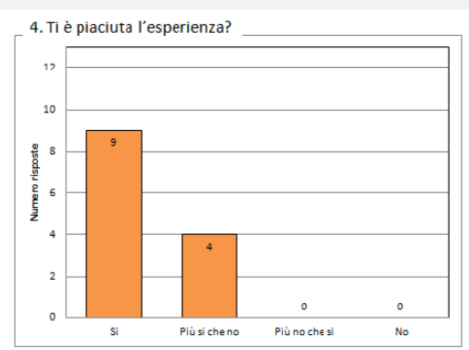
II A test

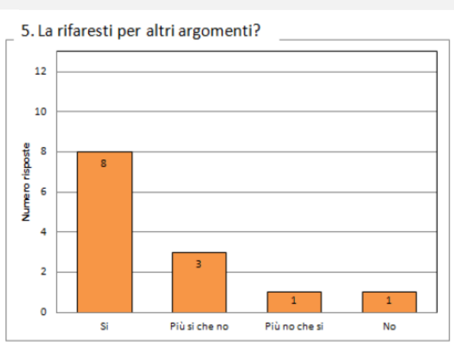
Valutazione

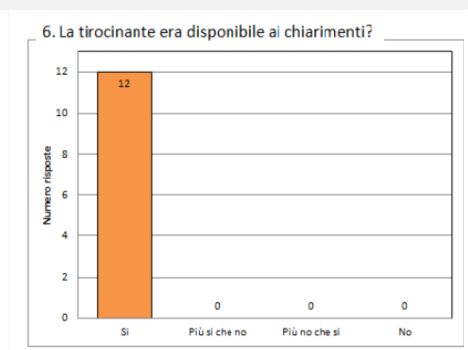


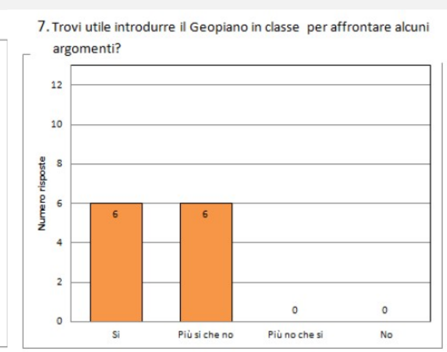


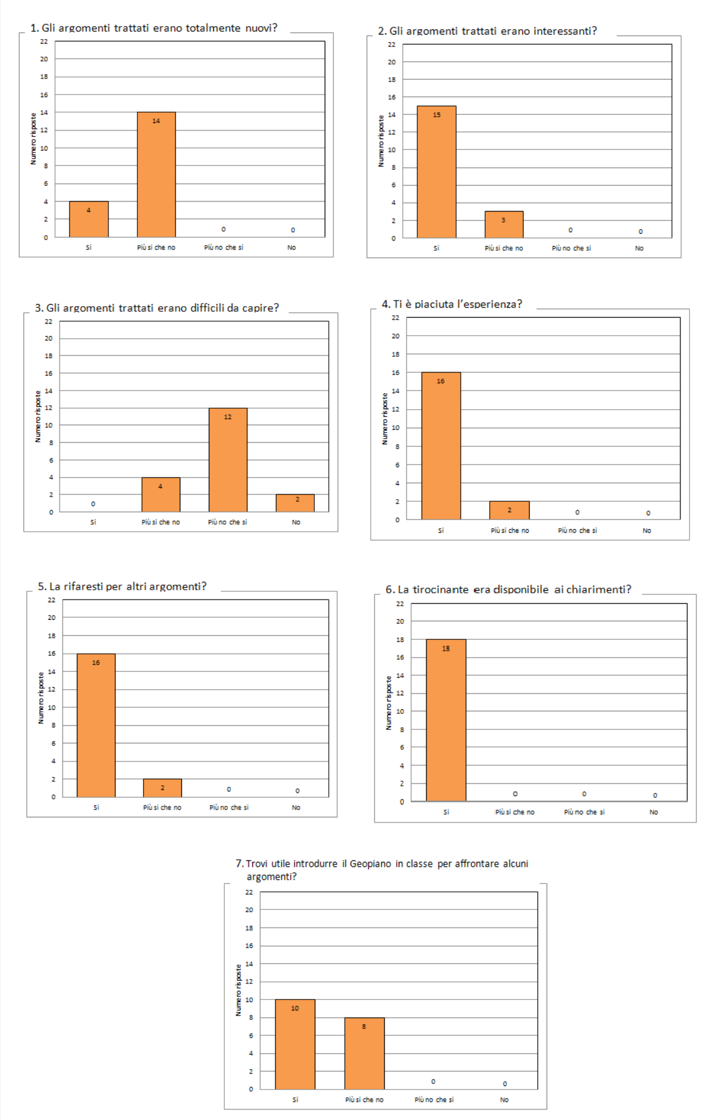











1. Gli argomenti trattati erano totalmente nuovi?
Numero risposte
Sì 4
Più sì che no 14
Più no che sì 0
No 0
2. Gli argomenti trattati erano interessanti?
Numero risposte
Sì 15
Più sì che no 3
Più no che sì 0
No 0
3. Gli argomenti trattati erano difficili da capire?
Numero risposte
Sì 0
Più sì che no 4
Più no che sì 12
No 2
4. Ti è piaciuta l'esperienza?
Numero risposte
Sì 16
Più sì che no 2
Più no che sì 0
No 0
5. La rifaresti per altri argomenti?
Numero risposte
Sì 16
Più sì che no 2
Più no che sì 0
No 0
6. La tirocinante era disponibile ai chiarimenti?
Numero risposte
Sì 18
Più sì che no 0
Più no che sì 0
No 0
7. Trovi utile introdurre il Geopiano in classe per affrontare alcuni argomenti?
Numero risposte
Sì 10
Più sì che no 8
Più no che sì 0
No 0

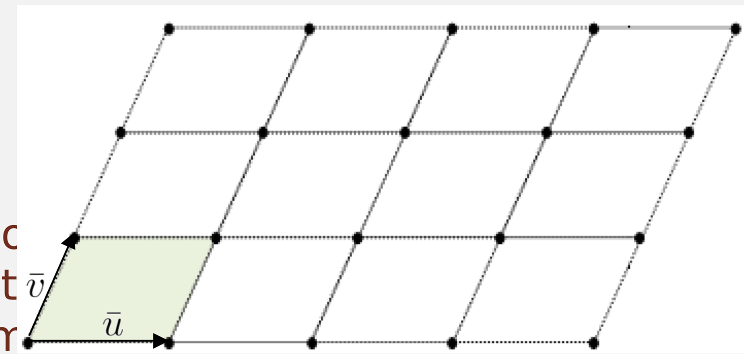
Commenti finali sull'esperienza

- ✓ Argomenti preferiti
- ✓ Argomenti non piaciuti
- ✓ Difficoltà riscontrate

Approfondimenti teorici

RETICOLI

Def. Chiamiamo *reticolo*, un sottogruppo discreto R < $\mathbb{R}^n$ tale che *rg(R) = n*.



Ogni elemento di questi insiemi può essere scritto co combinazione lineare di vettori di $\mathbb{R}^n$ a coefficienti int quindi possiamo definire i reticoli in $\mathbb{R}^2$ come l'insiem **punti** dati dalla combinazione:

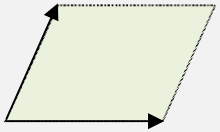
$$a\bar{u} + b\bar{v}$$

con a, b interi e $\bar{u} = (u_1, u_2)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2)$ vettori linearmente indipendenti.

Def. $\bar{u} = (u_1, u_2)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2)$ sono detti *base* del reticolo R.

$$R = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$ è detta *matrice base* del reticolo R

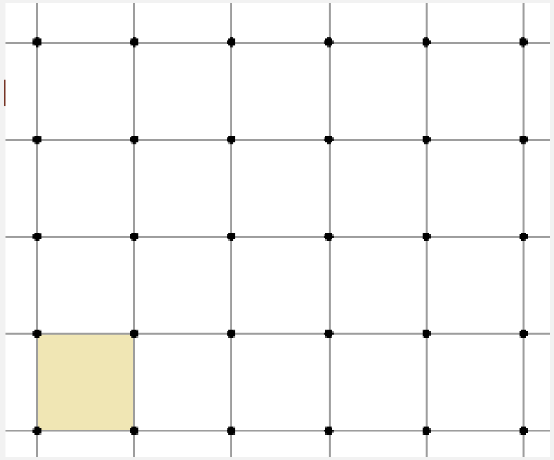
Def. Dati i due vettori base chiameremo *parallelogramma generatore* del reticolo, quel parallelogramma che ha per lati i vettori



Def. Definiamo *parallelogrammi elementari* quei parallelogrammi con i 4 vertici nei nodi nel reticolo e nessun altro nodo interno.

Teorema. *Tutti i parallelogrammi elementari hanno la stessa area, data da |det(R)| con R matrice di base del reticolo*.

RETICOLO QUADRATO



- I vettori generatori del reticolo, in questo caso so[…]

$$\bar{u} = (1,0) \qquad \bar{v} = (0,1)$$

- Quindi i nodi sono dati da:

$$(a,b) = a\bar{u} + b\bar{v} = a(1,0) + b(0,1)$$

- La matrice base, associata al reticolo è:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- L'area di ogni singolo parallelogramma elementare è **1.**

Teorema. *Tre vertici a coordinate intere (nodi di un reticolo quadrato) non formano mai un triangolo equilatero*

Dimostrazione. Si dimostra per assurdo utilizzando il teorema di Pitagora ed imponendo l'uguaglianza dei tre lati. Analizzando tutti i vari casi si ottiene la contraddizione

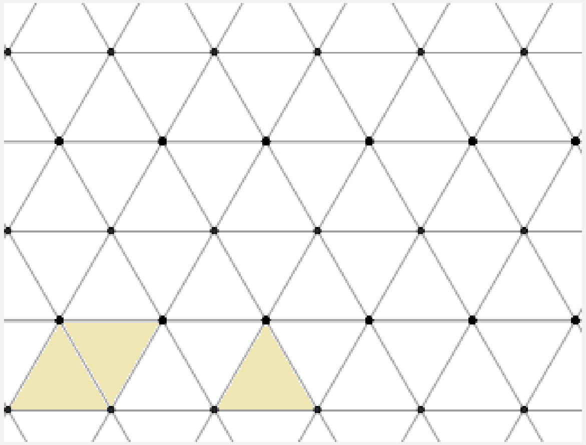
RETICOLO TRIANGOLARE

- I vettori generatori del reticolo, in questo caso sono: $\bar{u} = (1,0)$ $\bar{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
- Si ricava da quello quadrato tramite un' affinità.
- Quindi i nodi sono dati da:

$$a\bar{u} + b\bar{v} = a(1,0) + b(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (a + b\frac{1}{2}, b\frac{\sqrt{3}}{2})$$

- La matrice base, associata al reticolo è:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$



- L'area di ogni singolo parallelogramma elementare è $\frac{\sqrt{3}}{2}$

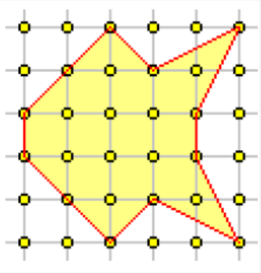
Teorema. *Dato un triangolo rettangolo ABC, nel reticolo triangolare, rettangolo in C, abbiamo che* $\frac{BC}{CA} = t\sqrt{3}$ *con t razionale*

Corollario 1. Non posso costruire triangoli isosceli rettangoli nel reticolo triangolare

Corollario 2. Non posso costruire quadrati nel reticolo triangolare

Teorema di Pick

Def. Chiamiamo *poligoni reticolari*, i poligoni i cui vertici sono soltanto
nodi del reticolo e la cui frontiera e una poligonale chiusa.

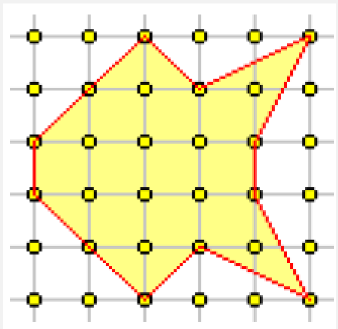


Teorema.*(1899_**Teorema di Pick per reticolo quadrato**).*
Per un poligono reticolare P semplice (non intrecciato) a vertici interi, siano:
I*=numero dei nodi interni al poligono P*
B*=numero dei nodi contenuti nel bordo di P*
Allora:

$$Area(P) = A(P) = \frac{B}{2} + I - 1$$

Dimostrazione. La dimostrazione è strutturata in tre parti:
1) Si dimostra che la formula è additiva e sottrattiva
2) Si dimostra che la formula vale per rettangoli, triangoli rettangoli senza nodi sull'ipotenusa, triangoli rettangoli generici.
3) Poiché ogni triangolo può essere inscritto in un rettangolo, la formula vale per esso
4) Ogni poligono è triangolabile, quindi la formula vale per ogni poligono reticolare

Applicazione:



Nodi sul bordo	Nodi interni	**Area** con Pick
12	10	$\frac{12}{2} + 10 - 1 =$ **15** u2

Grazie al Teorema di Pick è possibile dimostrare che:

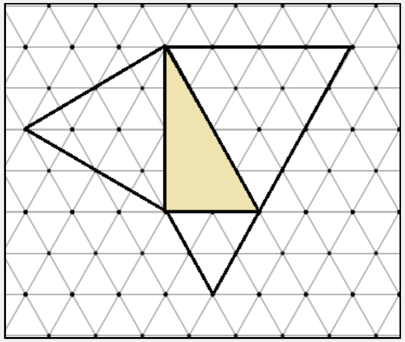
Teorema.

1. L'unico poligono regolare costruibile nel reticolo quadrato è il quadrato
2. Gli unici poligoni regolari costruibili nel reticolo triangolare sono il triangolo equilatero e l'esagono.

GENERALIZZAZIONI

- **Per reticolo qualunque:**

$$A(P) = (\frac{B}{2} + I - 1) \cdot |det(M)|$$



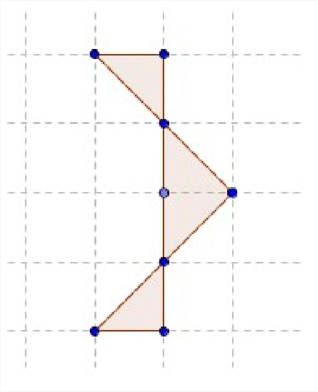
$$A(P) = (\frac{B}{2} + I - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- **Per poligoni intrecciati (Rosenholz)**

$$\boxed{A(P) = \frac{B}{2} + I + k}$$

$$con \qquad k = \frac{1}{2}\alpha_{\partial P} - \alpha_P$$

$$dove: \begin{cases} \alpha_{\partial P} = V - L \\ \alpha_P = V - L + F \end{cases}$$



V=8
L=10
F=3

$$\begin{cases} \alpha_{\partial P} = -2 \\ \alpha_P = 1 \end{cases}$$

k= -2

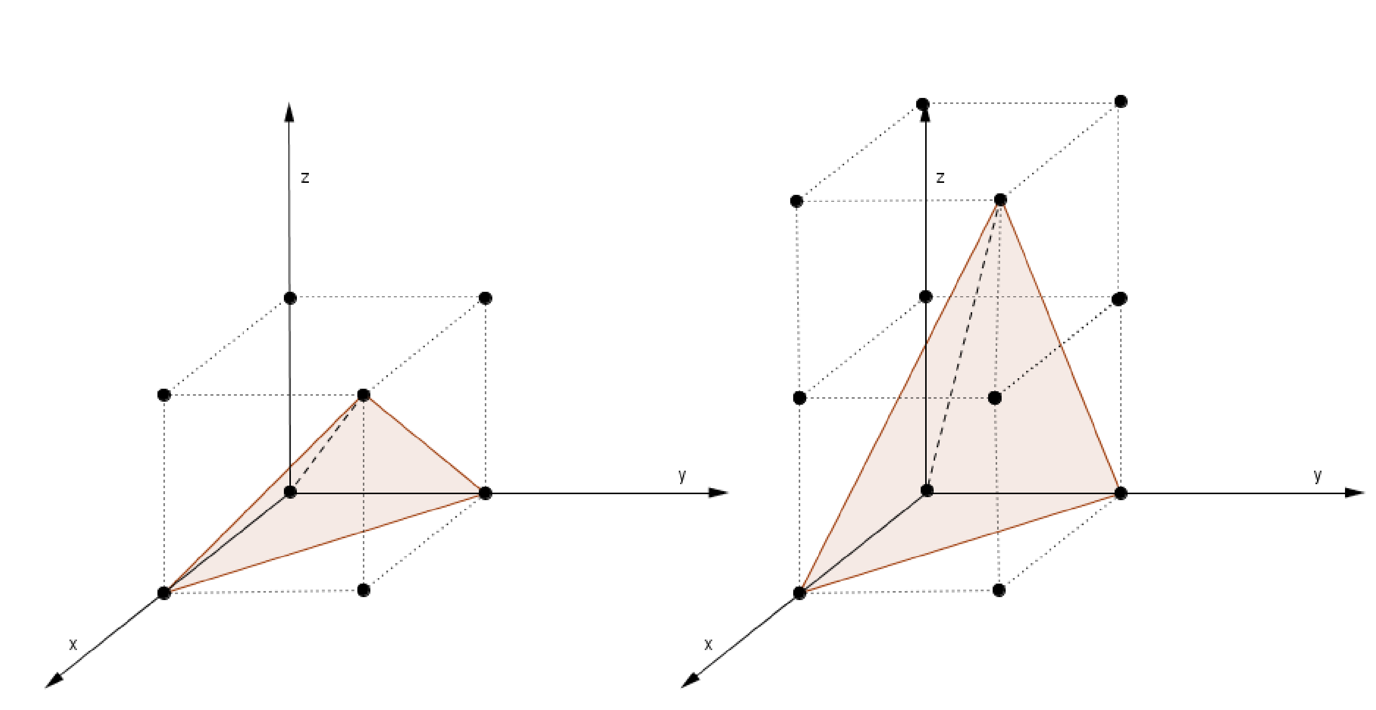
B=8, I=0
Area=2

Pick vale in 3 dimensioni?

- ***Reeve*** **(1957)**

(0,0,0)
(0,1,0)
(1,0,0)
(1,1,r)

con r intero



- ***Ehrhart* (1967)**

Dilatare il poliedro e conteggiare i punti interi contenuti nei poliedri dilatati.

Def. Dato un poliedro P e un intero t, chiamiamo *dilatazione di P* il poliedro tP ottenuto moltiplicando le coordinate di ogni vertice per t.

Def. $L_P(t)$ è l'insieme dei vertici, interni e sul bordo, di P.

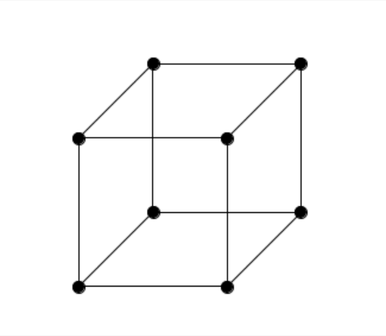
Teorema. $L_P(t)$ *è un polinomio in t, detto polinomio di Ehrhart.*

Cioè esistono ***a0,…,a3*** coefficienti reali tali che

$$L_P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

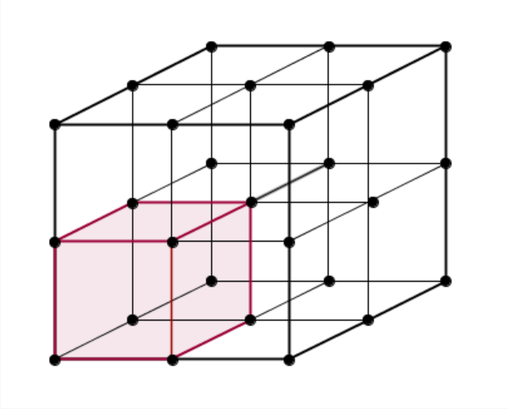
Vediamo un esempio. Sia P un cubo unitario e tP il cubo dilatato. Allora:

$$L_P(t) = (t+1)^3 \; = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$



Per t=1

$$L_P(1) = 8$$



Per t=2

$$L_P(2) = 27$$

Chi sono i coefficienti del polinomio?

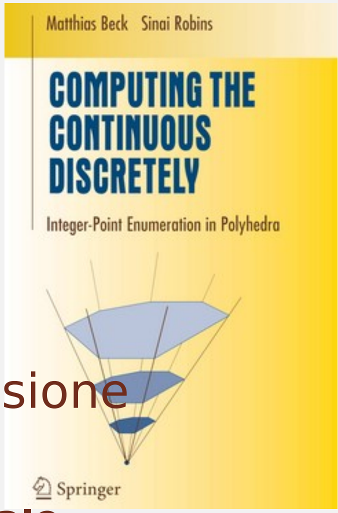
Ehrhart dimostra che

$$L_P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Volume del poliedro P

Metà della superficie delle facce di P

Caratteristica di Eulero di P
a0 =1 per poliedri semplici



- $L_P(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

- Esiste anche la versione per una generica dimensione *n.*

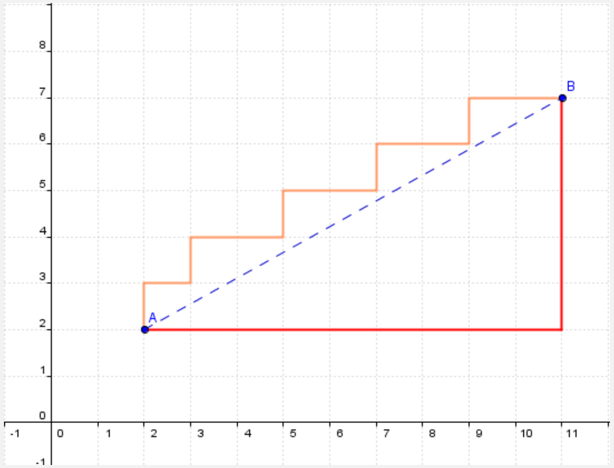
Taxigeometria

T-piano: $\mathbb{Z}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$

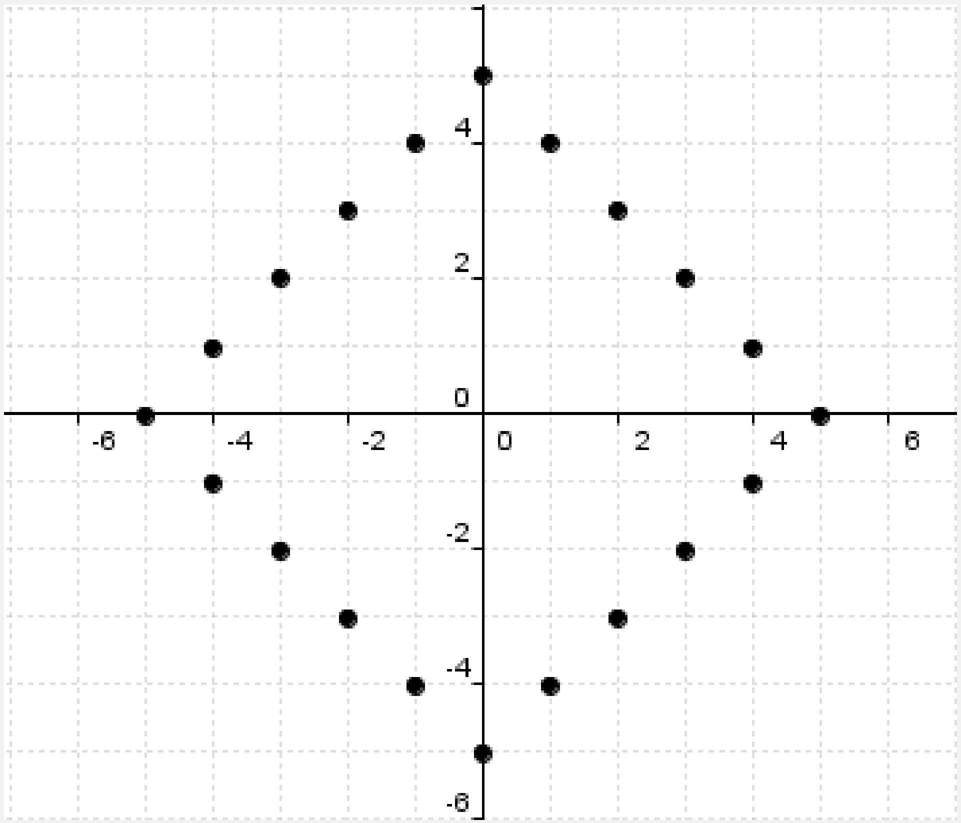
T-punto: $P = (x,y) \in \mathbb{Z}^2$

T-distanza: Dati due punti $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, allora

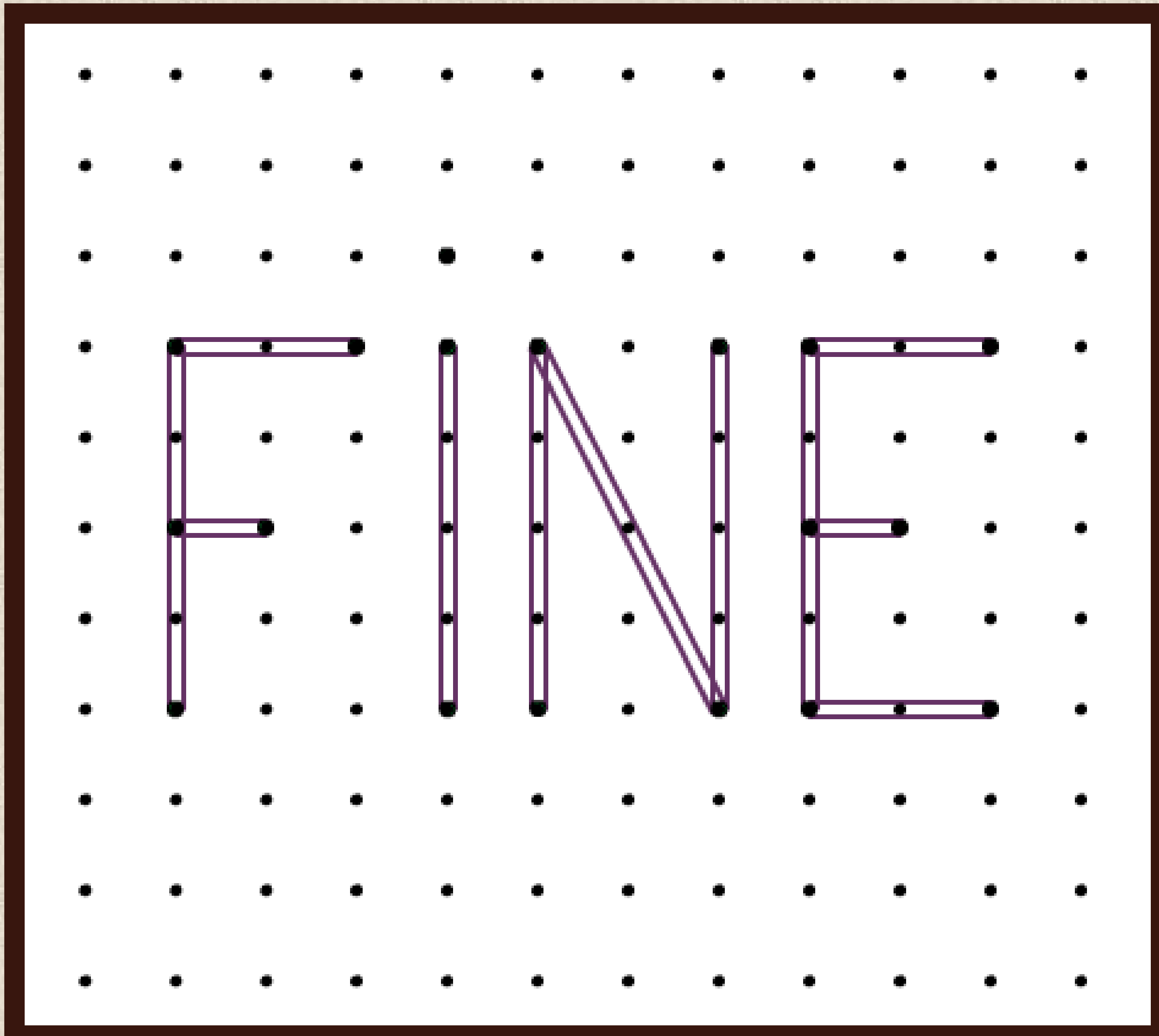
$$d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$



La T-distanza è la distanza che dovrebbe percorrere un taxi in una città in cui le strade sono disposte secondo un sistema squadrato regolare (New York, Torino)



$$\pi = 4$$


FINE