Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

ANELLI LOCALI: MOLTEPLICITÀ, NUMERI DI MILNOR E BASI STANDARD - UN APPROCCIO ALGORITMICO

LOCAL RINGS: MULTIPLICITIES, MILNOR NUMBERS AND STANDARD BASES - AN ALGORITHMIC APPROACH

LORENZO MAGHERINI

Relatore: *Giorgio Ottaviani*

Anno Accademico 2023-2024

[8 ottobre 2024 at 17:37 – Version 0.1]

RINGRAZIAMENTI

A dire la verità prima di fare dei ringraziamenti dovrei anche chiedere delle scuse, ad alcuni miei amici, dato che dalla pandemia in poi mi sono occupato quasi esclusivamente dello studio. James, Sean, Pero, Poggini, Anna, Leo ... queste scuse sono per voi. Prima di tutto voglio ringraziare la mia famiglia per avermi supportato durante questi anni, e reso le cose notevolmente più semplici. Vorrei poi ringraziare Mazza e Chiara per essermi stati di supporto durante gli ultimi 2 anni di studio, dato che dopo la pandemia mi sono ritrovato in difficoltà. Infine vorrei ringraziare il professor Ottaviani per avermi dato l'oppurtunità di vedere argomenti che probabilmente altrimenti non avrei mai visto: oltre agli argomenti della tesi il libro [2] contiene un sacco di altre cose interessanti.

INDICE

NOTAZIONE

In questa tesi per **anello** si intederà sempre un anello **commutativo** con **unità**. Dato un anello R si indicherà con $\mathcal{U}(R)$ l'insieme degli elementi invertibili di R. Con il simbolo $\mathbb{K}$ si indicherà un campo qualsiasi a meno che non sia specificato altrimenti.

INTRODUZIONE

In questa tesi, seguendo il cap. 4 di [2] abbiamo introdotto la localizzazione di un anello, con lo scopo di definire il numero di Milnor di una ipersuperficie algebrica in un punto singolare isolato, che una misura di "quanto sia singolare" in quel punto. Abbiamo esposto varie tecniche di calcolo di numeri di Milnor, utilizzando i software Macaulay2 [5] e Singular [4]. Abbiamo esposto in dettaglio l'esempio delle curve di Płoski ([6],[7]) che hanno "il secondo numero di Milnor più alto" tra le curve piane di grado d.

1 ANELLI LOCALI E LOCALIZZAZIONE

Definizione 1.1 *Un anello R si dice **locale** quando possiede un unico ideale massimale.*

Teorema 1.2 *Sia R un anello, R è locale se e soltanto se esiste un ideale proprio M tale che $R \setminus M \subseteq \mathcal{U}(R)$.*
[2, p. 139]

Dimostrazione: Iniziamo dimostrando che se esiste un ideale proprio $M \subsetneq R$ tale che $R \setminus M \subseteq \mathcal{U}(R)$ allora R è un anello locale. Per prima cosa osserviamo che M è massimale: se esistesse un ideale proprio M' di R tale che $M \subsetneq M'$ allora M' conterrebe un'invertibile! Quindi $M' = R$, assurdo. Adesso invece con M' indichiamo un'altro ideale massimale. (quindi $M \neq M'$) ma allora $\exists x \in M'$ tale che $x \notin M$ quindi $x \in \mathcal{U}(R)$ e a questo punto come prima $M' = R$, assurdo.
Il viceversa invece utilizza il lemma di Zorn. (si veda anche [1, pp. 3–4])
R è locale, ovvero ha un unico ideale massimale, chiamiamolo M. Supponiamo per assurdo che $\exists x \in R \setminus M$ tale che $x \notin \mathcal{U}(R)$, allora (x) è un'ideale proprio di R, allora per il lemma di Zorn $\exists M'$ ideale massimale tale che $(x) \subseteq M'$, però a questo punto $x \in M'$ e $x \notin M$ quindi $M \neq M'$, assurdo perché adesso avrei due ideali massimali diversi. Allora deve essere $R \setminus M \subseteq \mathcal{U}(R)$.

Proposizione 1.3 *Sia R un anello e sia $S \subsetneq R$ un sottoinsieme chiuso rispetto al prodotto.*
Consideriamo sull' insieme $R \times S$ la seguente relazione di equivalenza $\sim$: Dati $(r,s),(t,v) \in R \times S$, $(r,s) \sim (t,v)$ quando $\exists u \in S$ tale che $u(rv - st) = 0$. Dato $(r,s) \in R \times S$ indichiamo con $\frac{r}{s}$ la sua classe di equivalenza rispetto a $\sim$. Su $\frac{R \times S}{\sim}$ definiamo le seguenti operazioni di somma e prodotto:

- $\frac{r}{s} + \frac{t}{v} = \frac{rv+st}{sv}$
- $\frac{r}{s} \cdot \frac{t}{v} = \frac{rt}{sv}$

Con queste operazioni $\frac{R \times S}{\sim}$ è un anello, l'elemento neutro rispetto alla somma è $\frac{0}{1}$, quello rispetto al prodotto è $\frac{1}{1}$. Inoltre se R è un dominio di integrità, $0 \notin S$ allora $S^{-1}R$ è un sottoanello di $\mathrm{Frac}(R)$.

Definizione 1.4 *L'anello definito in 1.3, si indica con $S^{-1}R$ e prende il nome di **localizzazione** di R in S.*

[2, pp. 143–144]

Proposizione 1.5 *Se R è un anello, $P \subseteq R$ è un ideale primo allora $(R \setminus P)$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione, $(R \setminus P)^{-1}R$ è un anello locale. In questo caso l'anello si indica anche con R_P e si dice **localizzazione** di R in P.*

Dimostrazione: P è primo, cioè se $r_0 r_1 \in P$ allora $r_0 \in P$ o $r_1 \in P$, quindi se $r_0, r_1 \in R \setminus P$ allora $r_0 r_1 \in R \setminus P$ altrimenti si avrebbe una contraddizione.
Usiamo il teorema 1.2 :
Sia $M = \{\frac{r}{s} : r, s \in R, r \in P, s \notin P\}$. E' evidente che
$R_P \setminus M = \{\frac{r}{s} : r, s \in R \setminus P\} = \mathcal{U}(R)$. Controlliamo che M sia un ideale:

- Dati $\frac{r_0}{s_0}, \frac{r_1}{s_1} \in M$, allora $\frac{r_0}{s_0} - \frac{r_1}{s_1} = \frac{r_0 \cdot s_1 - r_1 \cdot s_0}{r_0 \cdot s_1} \in M$ perché se per definizione di M deve essere che $r_0, r_1 \in P$, allora anche $r_0 \cdot s_1 - r_1 \cdot s_0 \in P$.

- Dati $\frac{r_0}{s_0}, \in R_P$ e $\frac{r_1}{s_1} \in M$, allora $\frac{r_0}{s_0} \cdot \frac{r_1}{s_1} = \frac{r_0 \cdot r_1}{s_0 \cdot s_1} \in M$ perché se $r_0 \in R, r_1 \in P$ allora anche $r_0 \cdot r_1 \in P$.

Osservazione 1.6 *Un ideale massimale è un ideale primo, quindi è possibile localizzare rispetto a un ideale massimale.*

A questo punto possiamo considerare alcuni importanti esempi di anelli locali:

Esempio 1.7

Sia $\mathbb{K}$ un sottocampo di $\mathbb{C}$, sia $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$, dato che $< x_1 - a_1, ..., x_n - a_n >$ è un ideale massimale di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$, allora $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1 - a_1, ..., x_n - a_n>}$ è l'anello locale dato dalle funzioni razionali il cui denominatore non si annulla in $(a_1, ...a_n)$ e che quindi sono definite in un suo intorno (nella topologia di Zariski e quindi anche in quella Euclidea).

Esempio 1.8

$\mathbb{K}[[x_1, ..., x_n]] = \{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha : c_\alpha \in \mathbb{K}\}$ l'anello delle serie formali multivariate. E' un anello locale perché $M =< x_1, ..., x_n >= \{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha : c_\alpha \in \mathbb{K}, c_0 = 0\}$ è il suo unico ideale massimale. Infatti, sia $f \in R \setminus M$. Allora $f = c + g$ per un qualche $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $g \in M$. Allora $h = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot (\frac{g^i}{c_0^{i+1}})$ è ben definito perché dato $\alpha \in (\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ ho che $\forall i \in \mathbb{N}$ tale che $|\alpha| \leq i$ il coefficiente x^α in $(\frac{g^i}{c_0^{i+1}})$ è 0, quindi il coefficiente di x^α in h è una somma finita dei coefficienti di x^α nei $(\frac{g^i}{c_0^{i+1}})$. A questo punto sempre per un motivo simile ha senso scrivere: $(c_0 + g)h = (c_0 + g) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot (\frac{g^i}{c_0^{i+1}}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot (\frac{g^i}{c_0^i}) + (-1)^i \cdot (\frac{g^{i+1}}{c_0^{i+1}}) = 1$. Questo vuol dire che $f = (c_0 + g) \in \mathcal{U}(R)$, dunque $R \setminus M \subseteq \mathcal{U}(R)$, cioè R è un anello locale.

Esempio 1.9

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sia $\mathbb{K}\{x_1, ..., x_n\} = \{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha : c_\alpha \in \mathbb{K}$ e la serie converge assolutamente in un intorno dell'origine $\}$. La dimostrazione del fatto che $\mathbb{K}\{x_1, ..., x_n\}$ sia un sottoanello di $\mathbb{K}[[x_1, ..., x_n]]$ non è immediata nel caso $n \geq 1$, così come non è immediato dimostrare che si tratta di un anello locale che ha sempre $< x_1, ..., x_n >$ come unico ideale massimale. La dimostrazione è simile a quella svolta per $\mathbb{K}[[x_1, ..., x_n]]$.
Abbiamo quindi la seguente situazione:
$\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1, ..., x_n>} \subseteq \mathbb{K}\{x_1, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{K}[[x_1, ..., x_n]]$
E' interessante notare come più "grande" (rispetto all'inclusione) è l'anello locale che stiamo considerando tra questi, più sono "piccoli" gli insiemi intorno all'origine in cui ha senso valutare gli elementi di tale anello. (Nel caso delle serie formali abbiamo il caso "estremo" in cui ha senso valutarle soltanto nell'origine.)

Definizione 1.10 *Sia $\mathbb{F}$ un campo, una valutazione discreta su $\mathbb{F}$ è una funzione suriettiva $\nu : \mathbb{F} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ con le seguenti proprietà:*

1. $\nu(x + y) \geq min\{\nu(x), \nu(y)\}$

2. $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$

Definizione 1.11 *Dato $\mathbb{F}$ campo e $\nu : \mathbb{F} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, valutazione discreta, $R = \{x \in \mathbb{F} : \nu(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ è un sottoanello di $\mathbb{F}$, detto anello di valutazione di ν.*

Proposizione 1.12 *Se $\mathbb{F}$ e R sono come in 1.11, allora R è un anello locale.*

Dimostrazione: Notiamo che, $\nu(1) = \nu(1 \cdot 1) = \nu(1) + \nu(1)$, quindi $\nu(1) = 0$. Poi $0 = \nu(1) = \nu(-1 \cdot -1) = \nu(-1) + \nu(-1) = 2\nu(-1)$, quindi anche $\nu(-1) = 0$. Quindi dato $x \in \mathbb{F}^*$ si ha che $\nu(-x) = \nu(-1) + \nu(x) = \nu(x)$ e che $0 = \nu(1) = \nu(xx^{-1}) = \nu(x) + \nu(x^{-1})$, cioè $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$. L'insieme $M = \{x \in \mathbb{F} : \nu(x) > 0\} \cup \{0\}$ è un ideale di R, infatti $\forall x \in R, y \in M$ o uno tra x e y è 0 oppure si ha che $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) > 0$, in ogni caso $xy \in M$ e $\forall x, y \in M$ o uno tra x e y è 0 oppure si ha che $\nu(x - y) = \nu(x) + \nu(y) \geq min\{\nu(x), \nu(y)\}$, comunque si avrà sempre $x - y \in M$. Inoltre $R \setminus M \subseteq \mathcal{U}(R)$, infatti $R \setminus M = \{x \in \mathbb{F}^* : \nu(x) = 0\}$, allora dato $x \in R \setminus M$, se consideriamo il suo inverso x^{-1} in $\mathbb{F}$ si ha che $\nu(x^{-1}) = -\nu(x) = 0$, quindi anche $x^{-1} \in R$, quindi $x \in \mathcal{U}(R)$. Dunque R è un anello locale.

Esempio 1.13

Sia $\mathbb{K}$ campo, sia $\mathbb{F} = \mathbb{K}(x)$ ed $f \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio irriducibile. dato $g \in \mathbb{F}$ questo ha un'unica fattorizzazione del tipo: $g = f^a \cdot n/d$, con $a \in \mathbb{Z}$ e $n, d \in \mathbb{K}[x]$ non divisibili per f. Da questa fattorizzazione è possibile definire una funzione $\nu : \mathbb{K}(x) \to \mathbb{Z}$ con $\nu(g) = a$, dove $a \in \mathbb{Z}$ è l'intero che si ottiene dalla fattorizzazione appena detta. Tale ν è una valutazione discreta, infatti siano $g, h \in \mathbb{F}$ e siano $g = f^a n_1/d_1$, $h = f^b n_2/d_2$ le rispettive fattorizzazioni, dato che f è irriducibile $f \nmid n_1 n_2, f \nmid d_1 d_2$ poiché f non divide nessuno tra n_1, n_2, d_1, d_2. Quindi la fattorizzazione di gh è $gh = f^{a+b} \frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}$ e allora ottengo che $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h)$. Ora invece $g + h = \frac{f^a n_1 d_2 + f^b n_2 d_1}{d_1 d_2} = \frac{f^{min\{a,b\}}(f^{a-min\{a,b\}} n_1 d_2 + f^{b-min\{a,b\}} n_2 d_1)}{d_1 d_2}$, allora $\nu(g + h) \geq min\{\nu(g), \nu(h)\}$. L'ideale massimale dell'anello di valutazione di ν è $M = \{g \in \mathbb{K}(x) : \nu(g) > 0\}$, (cioè dove la fattorizzazione di g è con $a > 0$).

Esempio 1.14

Adesso dato un $p \in \mathbb{N}$ primo, dato un $g \in \mathbb{Q}$ consideriamo la fattorizzazione $g = p^a n/d$, dove $a \in \mathbb{Z}$ e $p \nmid n, d$. Allora come prima si definisce $\nu : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ come $\nu(g) = a$. In maniera analoga a prima si dimostra che anche in questo caso ν è una valutazione discreta, e che l'ideale massimale dell' anello di valutazione di ν è $M = \{g \in \mathbb{K}(x) : \nu(g) > 0\}$, (cioè dove la fattorizzazione di g è con $a > 0$).

Gli anelli locali sono legati alle parametrizzazioni locali di curve. Vediamo quache esempio: Consideriamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e la circonferenza $\{x^2 + 2x + y^2 = 0\}$, quindi di centro $(-1, 0)$ e raggio 1. Questa ammette la seguente parametrizzazione in un intorno dell'origine:

$$x(t) = \frac{-2t^2}{1 + t^2}, y(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Possiamo notare che in questo caso $x(t), y(t)$ sono elementi di $\mathbb{K}[t]_{<t>}$ (che è un anello locale). Ma potevamo anche considere un'altra parametrizzazione:

$$x(t) = -1 + cos(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^k t^{2k} / (2k)!$$

$$y(t) = sin(t) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k+1}/(2k+1)!$$

dove invece $x(t), y(t)$ sono elementi di $\mathbb{K}\{t\}$ (che però rimane sempre un anello locale). Le serie formali sono utili anche per costruire parametrizzazioni di varietà su campi arbitrari. Vediamo un risultato in questo senso:

Proposizione 1.15 *Sia $\mathbb{K}$ campo, sia $f \in \mathbb{K}[x,y]$ un polinomio della forma: $f(x,y) = y^n + c_1(x)y^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(x)y + c_n(x)$, dove $c_i(x) \in \mathbb{K}[x]$. Supponiamo che $f(0,y) = 0$ abbia n radici distinte $a_i \in \mathbb{K}$. Allora per ciascuna delle radici a_i esiste un'unica serie formale $y_i \in \mathbb{K}[[x]]$ che soddisfa $f(x, y_i(x)) = 0$ e $y_i(0) = a_i$.*
[2, p. 143]

Dimostrazione:

1. Poniamo $y_i^{(0)}(x) = a_i$, facciamo vedere che esiste un unico $a_{i,1} \in \mathbb{K}$ tale che $y_i^{(1)}(x) = a_i + a_{i,1}x$ soddisfi $f(x, y_i^{(1)}) \equiv 0 \bmod \langle x^2\rangle$. Per farlo risolviamo tale equazione rispetto a $a_{i,1}$ mostrando che c'è un'unica soluzione. Per ogni $j \in 0,\dots,n$ ho che $c_j(x) \equiv c_{j,1}x + c_{j,0} \bmod \langle x^2\rangle$, mentre $(y_i^{(1)})^j \equiv ja_{i,0}^{j-1}a_{i,1}x + a_{i,0}^j \bmod \langle x^2\rangle$, allora $c_{n-j}(x)\cdot(y_i^{(1)}(x))^j \equiv c_{n-j,0}ja_{i,0}^{j-1}a_{i,1}x + c_{n-j,1}a_{i,0}^j x + c_{n-j,0}(a_{i,0})^j \bmod \langle x^2\rangle$. Affinché sia $f(x, y_i^{(1)}) \bmod \langle x^2\rangle$, deve essere $a_{i,1}(\sum_{j=0}^n c_{n-j,0}ja_{i,0}^{j-1}) + \sum_{j=0}^n c_{n-j,1}a_{i,0}^j = 0$. Dato che $f(0,y)$ ha n radici distinte, allora $\forall i \in \{0,...,n\}$ $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,a_{j,0})} = \sum_{j=0}^n c_{n-j,0}ja_{i,0}^{j-1} \neq 0$. Quindi ottengo $a_{i,1} = -\frac{\sum_{j=0}^n c_{n-j,1}a_{i,0}^j}{\sum_{j=0}^n c_{n-j,0}ja_{i,0}^{j-1}}$.

2. Adesso supponiamo che esista un polinomio $y_i^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^n a_{i,k}x^k \in \mathbb{K}[x]$ che soddisfi $f(x, y_i^{(l)}(x)) \equiv 0 \bmod \langle x^{l+1}\rangle$, voglio far vedere che esiste un unico $a_{i,l+1} \in \mathbb{K}$ tale che $y_i^{(l+1)}(x) = y_i^{(l)}(x) + a_{i,l+1}x^{l+1}$ soddisfi $f(x, y_i^{(l+1)}(x)) \equiv 0 \bmod \langle x^{l+2}\rangle$. Per farlo risolviamo tale equazione rispetto a $a_{i,l+1}$ mostrando che c'è un'unica soluzione. $f(x, y_i^{(l+1)}(x)) = \sum_{j=0}^n c_{n-j}(x)(y_i^{(l+1)}(x))^j = \sum_{j=0}^n c_{n-j}(x)(a_{i,l+1}x^{l+1} + y_i^{(l)}(x))^j \equiv \sum_{j=0}^n(c_{n-j}(x)(y_i^{(l)}(x))^j + j(y_i^{(l)}(x))^{j-1}a_{i,l+1}x^{l+1}) \bmod \langle x^{l+2}\rangle$. Inoltre sappiamo che $f(x, y_i^{(l)}(x)) = \sum_{j=0}^n c_{n-j}(x)(y_i^{(l)}(x))^j \equiv 0 \bmod \langle x^{l+1}\rangle$ per ipotesi, quindi esiste un unico $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\sum_{j=0}^n c_{n-j}(x)(y_i^{(l)}(x))^j \equiv \alpha x^{l+1} \bmod \langle x^{l+2}\rangle$. E poi si ha che $\forall j \in \{0,\dots,n\}$ $(y_i^{(l)}(x))^{j-1}x^{l+1} \equiv (a_{i,0})^{j-1}x^{l+1} \bmod \langle x^{l+2}\rangle$. Quindi mettendo tutto insieme si ottiene che: $f(x, y_i^{(l+1)}(x)) \equiv \alpha x^{l+1} + \sum_{j=0}^n c_{n-j}(x)ja_{i,0}^{j-1}a_{i,l+1}x^{l+1} \bmod \langle x^{l+2}\rangle$ per cui per risolvere $f(x, y_i^{(l+1)}(x)) \equiv 0 \bmod \langle x^{l+2}\rangle$ deve essere $a_{i,l+1} = -\frac{\alpha}{\sum_{j=0}^n c_{n-j,0}ja_{i,0}^{j-1}}$, mostrando di nuovo l'esistenza e unicità.

3. Data una radice $a_{i,0} \in \mathbb{K}$ di $f(0,y)$ definiamo $y_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x^j$. Per i punti precedenti si ha che $\forall l \in \mathbb{N}$ $f(x, y_i(x)) \equiv 0 \bmod \langle x^{l+1}\rangle$, quindi $f(x, y_i(x)) = 0$. Un qualsiasi altro elemento $z(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_jx^j \in \mathbb{K}[[x]]$ tale che $f(x, z(x)) = 0$ deve essere tale che b_0 è una radice di $f(0,y)$, quindi a questo punto per un qualche $i \in \{0,\dots,n\}$ si ha che $\forall j \in \mathbb{N}$ $b_j = a_{i,j}$.

2 MOLTEPLICITÀ E NUMERI DI MILNOR

Adesso dato un ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ zero dimensionale vogliamo associare ad ogni punto di $V(I)$ una molteplicità, in maniera anologa a quello che si fa per le radici dei polinomi in $\mathbb{K}[x]$.

Definizione 2.1 *Sia $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ un ideale zero dimensionale e $p \in V(I)$. La **molteplicità** di p rispetto ad I è*

$$m(p) = dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{I(\{p\})}}{I \cdot \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{I(\{p\})}}$$

[2, p. 146]

Lemma 2.2 *Sia R anello e siano $I_1, ..., I_r$ ideali a due due comassimali, cioè $\forall i \neq j$ $I_i + I_j = R$, allora dato $d \geq 1, d \in \mathbb{N}$ ho che $\bigcap_{i=1}^r I_i^d = (\bigcap_{i=1}^r I_i)^d$.*
[2, pp. 155–156]

Dimostrazione:

1. Per prima cosa facciamo vedere che se ho $I, J \subseteq R$ ideali comassimali, allora $IJ = I \cap J$.
   $IJ \subseteq I \cap J$ è sempre vera. Adesso sia $f \in I \cap J$.
   $I + J = R$ quindi esistono $g \in I, h \in J$ tali che $1 = g + h$.
   Allora $f = f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h \in IJ$.

2. Adesso facciamo vedere che se ho come prima I e J ideali comassimali allora $\forall d \geq 1$ $I^d J^d = I^d \cap J^d$.
   Innanzitutto $I \cap J \subseteq I$ e $I \cap J \subseteq J$ quindi $(I \cap J)^d \subseteq I^d \cap J^d$.
   Sia poi $f \in I^d \cap J^d$, poiché I e J sono comassimali, sempre come prima, esistono $g \in I, h \in J$ tali che $1 = g + h$.
   Allora $f = f \cdot (g+h)^{2d} = \sum_{i=0}^{2d} \binom{2d}{i} f g^{2d-i} h^i \in \sum_{i=0}^{2d} (I^d \cap J^d) I^{2d-i} J^i \subseteq I^d J^d = (IJ)^d = (I \cap J)^d$.

3. Generalizziamo adesso il punto 1. precedente, cioè dimostriamo per induzione che: Se $\{I_1, ..., I_r\}$ è una famiglia di r ideali a due a due comassimali, allora $\bigcap_{i=1}^r I_i = \prod_{i=1}^r I_i$. Il punto 1. è il caso $r = 2$ e serve come base induttiva. Adesso, supponiamo che questo punto sia vero per un certo $r \geq 2$, allora se consideriamo una famiglia $I_1, ..., I_{r+1}$ di ideali a due a due comassimali, per l'ipotesi appena fatta, otteniamo che $\bigcap_{i=1}^r I_i = \prod_{i=1}^r I_i$ e $\bigcap_{i=2}^{r+1} I_i = \prod_{i=2}^{r+1} I_i$. Inoltre, I_1 e I_{r+1} sono comassimali, quindi $\exists g \in I_1, h \in I_{r+1}$ tali che $1 = g + h$. Allora, fissato $f \in \bigcap_{i=1}^{r+1} I_i = (\bigcap_{i=1}^r I_i) \cap (\bigcap_{i=2}^{r+1} I_i) = (\prod_{i=1}^r I_i) \cap (\prod_{i=2}^{r+1} I_i)$ si ha che $f = f \cdot 1 = f \cdot (g+h) \in \prod_{i=1}^{r+1} I_i$ quindi $\bigcap_{i=1}^{r+1} I_i \subseteq \prod_{i=1}^{r+1} I_i$ e dato che l'inclusione nel verso opposto vale sempre, abbiamo che $\bigcap_{i=1}^{r+1} I_i = \prod_{i=1}^{r+1} I_i$.

4. Generalizziamo adesso anche il punto 2. precedente, cioè dimostriamo per induzione che:

   Se $\{I_1, ..., I_r\}$ è una famiglia di r ideali a due due comassimali, allora $\forall d \geq 1 \bigcap_{i=1}^r I_i^d = (\bigcap_{i=1}^r I_i)^d$. Anche qui, il punto 2. è il caso $r = 2$ e serve come base induttiva. Adesso, supponiamo che questo punto sia vero per un certo $r \geq 2$, e consideriamo di nuovo una famiglia $\{I_1, ..., I_{r+1}\}$ di ideali a due a due comassimali, otteniamo che $(\bigcap_{i=1}^{r} I_i)^d = \bigcap_{i=1}^{r} I_i^d$ e $(\bigcap_{i=2}^{r+1} I_i)^d = \bigcap_{i=2}^{r+1} I_i^d$. Inoltre, I_1 e I_{r+1} sono comassimali, quindi $\exists g \in I_1, h \in I_{r+1}$ tali che $1 = g + h$. Allora fissato $f \in \bigcap_{i=1}^{r+1} I_i^d = (\bigcap_{i=1}^{r} I_i^d) \cap (\bigcap_{i=2}^{r+1} I_i^d) = (\bigcap_{i=1}^{r} I_i)^d \cap (\bigcap_{i=2}^{r+1} I_i)^d = (\prod_{i=1}^{r} I_i)^d \cap (\prod_{i=2}^{r+1} I_i)^d$ si ha che $f = f \cdot 1 = f \cdot (g+h)^{2d} = \sum_{i=0}^{2d} \binom{2d}{i} f g^{2d-i} h^i \in \sum_{i=0}^{2d} ((\prod_{i=1}^{r} I_i)^d \cap (\prod_{i=2}^{r+1} I_i)^d) I_1^{2d-i} I_{r+1}^i \subseteq \prod_{i=1}^{r+1} I_i^d = (\prod_{i=1}^{r+1} I_i)^d = (\bigcap_{i=1}^{r+1} I_i)^d$

Definizione 2.3 *Sia $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ ideale zero dimensionale e sia $V(I) = \{p_1, ..., p_n\} \subseteq \mathbb{K}^n$. Indico con $\mathcal{O}_i$ l'anello locale $\mathcal{O}_i = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{I(\{p_i\})} = \{f/g | g(p_i) \neq 0\}$.*
[2, p. 148]

Lemma 2.4 *Si considerino le notazioni della 2.3.*
Sia $M_i = I(\{p_i\})$ in $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ e $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, allora:

1. *Esiste un intero $d \geq 1$ tale che $(\bigcap_{i=1}^{m} M_i)^d \subseteq I$*
2. *Esistono polinomi $e_i \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ $i = 1, ..., m$ tali che*
   $\sum_{i=1}^{m} e_i \equiv 1 \ (mod\ I)$, $\forall i \neq j$ $e_i e_j \equiv 0 \ (mod\ I)$e $\forall i$ $e_i^2 \equiv e_i \ (mod\ I)$
   Inoltre $\forall i \neq j$ $e_i \in I\mathcal{O}_j$ e $\forall i$ $e_i - 1 \in I\mathcal{O}_i$
3. *Se $g \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \setminus M_i$, allora esiste $h \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tale che $hg \equiv e_i \ (mod\ I)$*

[2, pp. 148–149]

Dimostrazione:

1. $V(I) = \bigcup_{i=1}^{m} V(M_i) = V(\bigcap_{i=1}^{m} M_i)$, allora, poiché $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, per il Nullstellensatz, si ha che $\sqrt{I} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{m} M_i} = \bigcap_{i=1}^{m} \sqrt{M_i}$.
   Ma gli ideali M_i sono massimali, quindi sono ideali primi e quindi anche ideali radicali, questo significa che:
   $\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^{m} \sqrt{M_i} = \bigcap_{i=1}^{m} M_i$
   $\sqrt{I}$ è però ideale di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ che è un anello Noetheriano, quindi è finitamente generato, per cui se $\sqrt{I} =< f_1, ..., f_k >$ so che $\forall i = 1, ..., k$ $\exists d_i$ tale che $f_i^{d_i} \in I$ allora, posto $d = d_1 + ... + d_k$ ottengo quello che volevo.

2. Per mostrare questo punto utilizzo questo fatto:
   Dato un sottoinsieme finito $S = \{p_1, ..., p_m\}$ di $\mathbb{K}^m$ esistono polinomi $g_i \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tali che $g_i(p_j) = \delta_{i,j}$, dove δ è il delta di Kronecker.
   Chiaramente qui scelgo $S = V(I)$.
   Allora se pongo $e_i = 1 - (1 - g_i^d)^d$ allora, per il teorema binomiale e semplicando il termine noto, $\forall j \neq i$ $e_i \in M_j^d$
   mentre invece $(e_i - 1)(p_i) = 1 - (1 - \delta_{i,i}^d)^d - 1 = 0$ quindi, $e_i - 1 \in M_i^d$
   Allora $\forall i \in \{1, ..., m\}$ $\sum_{j=1}^{m} e_j - 1 = e_i - 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{m} e_j \in M_i^d$
   Quindi per il lemma 2.2 $(\sum_{i=1}^{m} e_i) - 1 \in \bigcap_{i=1}^{m} M_i^d = (\bigcap_{i=1}^{m} M_i)^d \subseteq I$.
   Inoltre:
   - $\forall i, j \in \mathbb{N}$ se $i \neq j$ allora $e_i e_j \in \bigcap_{i=1}^{m} M_i^d = (\bigcap_{i=1}^{m} M_i)^d \subseteq I$
   - $\forall i \in \mathbb{N}$ $e_i(e_i - 1) \in \bigcap_{i=1}^{m} M_i^d = (\bigcap_{i=1}^{m} M_i)^d \subseteq I$

   Dunque, dati $i, j \in \mathbb{N}$ se $i \neq j$ si ha che $(e_i - 1)(p_j) \neq 0$ per cui $e_i - 1 \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_j)$, per quanto appena detto sopra $e_i \in I\mathcal{O}_j$. In maniera simile fissato $i \in \mathbb{N}$ si ha che $e_i(p_i) \neq 0$ cioè $e_i \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_i)$ per cui $e_i - 1 \in I\mathcal{O}_i$

3. Sia quindi $g \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \setminus M_i$ e supponiamo senza pedita di generalità che $g(p_i) = 1$, allora $1 - g \in M_i$, quindi preso $h = (1 + (1 - g) + ...(1-g)^{d-1})e_i$ otteniamo che $hg = h(1-(1-g)) = (1-(1-g)^d)e_i = e_i - (1-g)^d e_i$. Ora $\forall j \in \mathbb{N}$ se $j \neq i$ allora $e_i \in M_j^d$ e inoltre $(1-g)^d \in M_i^d$ e quindi otteniamo che $(1-g)^d e_i \in I$ e cioè che $hg \equiv e_i$ $(mod\ I)$.

Definizione 2.5 *Sia $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ ideale zero dimensionale e sia $V(I) = \{p_1, ..., p_n\} \subseteq \mathbb{K}^n$ indico con A_i l'anello $\mathcal{O}_i / I\mathcal{O}_i$.*
[2, p. 148]

A questo punto possiamo enunciare il teorema:

Teorema 2.6 *Sia $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ ($\mathbb{K}$ algebricamente chiuso) e sia $V(I) = \{p_1, ..., p_m\}$. Allora gli anelli $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]/I$ e $A_1 \times ... \times A_m$ sono isomorfi.*
[2, p. 148]

Dimostrazione: per ogni $i = 1, ..., m$ consideriamo i seguenti omomorfismi di anelli:

$$\phi_i \colon \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \to A_i$$
$$f \longmapsto [f]_i$$

dove $[f]_i$ è la classe di equivalenza di f nell' anello $A_i = \mathcal{O}_i / I\mathcal{O}_i$.
Ciascuno di questi morfismi è una componenente del seguente morfismo:

$$\phi \colon \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \to A_1 \times ... \times A_m$$
$$f \longmapsto ([f]_1, ..., [f]_m)$$

Ora, se $f \in I$ allora $\forall i \in \{1, ..., m\}$ si ha che $\phi_i(f) = 0$, ovvero, $\phi(f) = 0$, quindi $I \subseteq ker(\phi)$. Notiamo che $ker(\phi) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : [f]_i = 0$ per ogni $i\} = \{f : f \in I\mathcal{O}_i$ per ogni $i\} = \{f :$ per ogni $i\ \exists g_i \notin M_i$ tale che $g_i f \in I\}$. Per il punto 3. del lemma 2.4 sappiamo che esistono h_i tali che $h_i g_i \equiv e_i\ (mod\ I)$, quindi $f \cdot \sum_i^m h_i g_i = \sum_i^m h_i(g_i f) \in I$ poiché $g_i f \in I$, d'altra parte però $f \cdot \sum_i^m h_i g_i \equiv f \cdot \sum_i^m h_i g_i \equiv f \cdot \sum_i^m e_i \equiv f\ (mod\ I)$, quindi $ker(\phi) \subseteq I$ e dunque $ker(\phi) = I$. Per concludere utilizzando il teorema di omomorfismo ci rimane da dimostrare che ϕ è suriettivo:
Sia $([n_1/d_1]_1, ..., [n_m/d_m]_m)$ un elemento qualsiasi di $A_1 \times ... \times A_m$, dove $n_i, d_i \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ ma $d_i \notin M_i$ e le parentesi quadre denotano classi di equivalenza. Per il punto 3. del lemma esistono degli $h_i \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tali che $h_i d_i \equiv e_i\ (mod\ I)$. dato che se $j \neq i$ si ha che $e_j \in I\mathcal{O}_i$, allora posto $f = \sum_{i=0}^m h_i n_i e_i \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ è facile vedere che $\phi_i(f) = [h_i n_i e_i]$. Continuando si ottiene che $\phi_i(f) = [h_i n_i e_i] = [h_i n_i] = [h_i n_i d_i / d_i] = [e_i n_i / d_i] = [n_i / d_i]$ facendo così vedere che, appunto, ϕ è suriettivo.

Corrollario 2.7 *Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, e sia I un'ideale zero dimensionale di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Allora $dim_{\mathbb{K}}[x_1, ..., x_n]/I$ è il numero di punti di $V(I)$ contati con le loro molteplicità. In maniera più esplicita se $p_1, ..., p_m$ sono i punti distinti di $V(I)$, allora $dim_{\mathbb{K}}[x_1, ..., x_n]/I = \sum_{i=1}^m dim \mathcal{O}_i / I\mathcal{O}_i = \sum_{i=1}^m m(p_i)$, dove $m(p)$ è come nella 2.1*
[2, p. 150]

Osservazione 2.8 *Dato V spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, il determinante della matrice che rappresenta un endomorfismo (lineare) da V in V rispetto a una qualche base non dipende dalla base scelta. Si può quindi definire il determinante di un endomorfismo lineare come il determinante di una di queste matrici. Un discorso analogo vale per il polinomio caratteristico.*

Proposizione 2.9 *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e sia I un ideale zero dimensionale di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Se $f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$, allora*

$$det(m_f - uI) = (-1)^d \prod_{p \in V(I)} (u - f(p))^{m(p)}$$

dove $m(p)$ è come nella 2.1, $d = dim\ \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]/I$ e m_f è la mappa lineare definita della moltiplicazione per f su $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]/I$, considerando quest'ultimo come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
[2, p. 150]

Dimostazione: Usando il teorema 2.6 possiamo dimostrare la proposizione considerando $m_f : A_1 \times \cdots \times A_m \to A_1 \times ... \times A_m$. Così facendo abbiamo che:

$$det(m_f - uI) = \prod_{i=1}^{m} det(m_{[f]_i} - uI)$$

Per cui ci siamo ridotti a dover trovare $det(m_{[f]_i} - uI)$ per ogni $i \in \{1, \ldots m\}$. Lo faremo facendo vedere che l'unico autovalore di $m_{[f]_i} : A_i \to A_i$ è $f(p_i)$. Sia $Q_i = ker(\phi_i)$, dove $\phi_i : \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \to A_i$ è la mappa definita nel teorema 2.6, notiamo subito che poiché ϕ è suriettiva allora lo è anche ϕ_i, quindi per i teoremi di omomorfismo $\frac{\mathbb{K}[x_1,...,x_n]}{Q_i} \simeq A_i$. Quindi al posto di $m_{[f]_i} : A_i \to A_i$ possiamo considerare $m_f : \frac{\mathbb{K}[x_1,...,x_n]}{Q_i} \to \frac{\mathbb{K}[x_1,...,x_n]}{Q_i}$. Per poter usare quest'ultimo fatto notiamo che $Q_i = ker(\phi_i) = \phi_i^{-1}(0_{A_i}) = \phi_i^{-1}(I\mathcal{O}_i) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : f \in I\mathcal{O}_i\}$. Dunque si ha che $f \in Q_i$ se e soltanto se $f = n/u$ con $n \in I, u \notin M_i$ (cioè $u(p_i) \neq 0$) e quindi se e soltanto se $fu = n \in I$. Quindi $Q_i = \{f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : \exists u \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] \setminus M_i$ tale che $fu \in I\}$. Facendo in questo modo si può notare che $\forall i, j, k \in \mathbb{N}$ con $j \neq i$, dati g_j e g_i come nel punto 2. della dimostrazione di 2.4 si ha $g_j g_i(p_k) = \delta_{j,k}\delta_{i,k} = 0$. Allora per il Nullstellensatz $g_j g_i \in \sqrt{I}$, quindi esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che $g_j^d g_i^d \in I$. Dunque se $g_i^d \notin M_i$ allora $g_j^d \in Q_i$. Inoltre $\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $j \neq i$ si ha $g_j^d \in Q_i$ e $g_j^d(p_i) = g_j(p_j) = 1$, allora $p_j \notin V(Q_i)$. Quindi siccome $\{p_i\} \subseteq V(Q_i)$ allora $V(Q_i) = \{p_i\}$ e per il Nullstellensatz $\sqrt{Q_i} = M_i$. Adesso per il teorema [2, 4.5 capitolo 2] λ è autovalore di $m_f : \frac{\mathbb{K}[x_1,...,x_n]}{Q_i} \to \frac{\mathbb{K}[x_1,...,x_n]}{Q_i}$ se e solo se λ è un valore di f su un punto di $V(Q_i)$, ma allora l'unico autovalore possibile è $f(p_i)$, quindi si ottiene che $det(m_f - uI) = (-1)^{m(p_i)}(u - f(p_i))^{m(p_i)}$.

Definizione 2.10 *Data una funzione $f(x_1, ..., x_n)$ analitica su un'aperto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice che $\{f = 0\}$ ha una **singolarità** in $p \in \{f = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n$ (o che p è un punto **singolare**) se $(\nabla f)(p) = 0$. Diremo anche che il punto singolare p è **isolato** se esiste un suo intorno che non contiene altri punti singolari.*
[2, p. 154]

Definizione 2.11 *Sia $f \in \mathbb{C}\{x_1, ...x_n\}$ tale che l'origine è un punto singolare isolato per $\{f = 0\}$, allora $\mu = dim\ \mathbb{C}\{x_1, ...x_n\}/\langle \partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n \rangle < \infty$. Il numero μ prende il nome di **numero di Milnor** dell'origine rispetto a f.*
[2, pp. 154–155]

Abbiamo poi un risultato che collega i numeri di Milnor alle molteplicità:

Proposizione 2.12 *Sia $\mathbb{K}$ campo, e sia $I \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ un ideale zero-dimensionale tale che l'origine sia un punto di $V(I)$ di molteplicità m. Allora*

$$m = \dim \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1,...,x_n>} / I\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1,...,x_n>}$$
$$= \dim \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]] / I\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]].$$

Se, inoltre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, in modo che possiamo parlare della convergenza di una serie di potenze, allora vale anche

$$m = \dim \mathbb{K}\{x_1, \ldots, x_n\} / I\mathbb{K}\{x_1, \ldots, x_n\}$$

Quindi se $I = \langle \partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n \rangle$ è un ideale zero dimensionale, allora utilizzando la 2.12 abbiamo che $\mu(f) = dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1,...,x_n>} / I\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1,...,x_n>}$. Arrivati a questo punto siamo in grado di calcolare il numero di Milnor di un esempio dovuto ad Arkadiusz Płoski . Nell'articolo [7] da cui è tratto l'esempio si dimostra che:

Teorema 2.13 *Per una curva algebrica $\{f = 0\}$ piana di grado $d > 1$ con un punto critico isolato $0 \in \mathbb{C}^2$, il numero di Milnor $\mu_0(f) \leq (d-1)^2 - [\frac{d}{2}]$ a meno che $\{f = 0\}$ non sia un insieme di d rette passanti per l'origine.*
[7]

Inoltre, sempre nell'articolo [7] si trovano $f \in \mathbb{C}[x, y]$ in cui $\mu_0(f) = (d-1)^2 - [\frac{d}{2}]$. Una volta controllato che $I = \langle \partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n \rangle$ sia zero dimensionale useremo la proposizione 2.9, per ottenere un'algoritmo per il calcolo di $\mu_0(f)$ per questo particolare esempio. Nell'articolo si mostra che l'uguaglianza nel teorema 2.13 si ha per:

$$f(x,y) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{d/2} (x + ix^2 + y^2) & \text{if } d \equiv 0 \pmod 2, \\ x \prod_{i=1}^{\frac{d-1}{2}} (x + ix^2 + y^2) & \text{if } d \not\equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \tag{2.14}$$

L'idea è di scegliere nella prop. 2.9, $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tale che m_g ha autovalore 0 con molteplicità algebrica $\mu_0(f)$. Per farlo ci serve che $V(g) \cap V(\langle \partial f/\partial x, \partial f/\partial y \rangle) = \{0\}$. Mostriamo per il nostro esempio che la condizione è soddisfatta per $g = x$. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{d/2} (1 + 2ix) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d/2} (x + jx^2 + y^2) & \text{if } d \equiv 0 \pmod 2, \\ \prod_{i=1}^{\frac{d-1}{2}} (x + ix^2 + y^2) + x \cdot (\sum_{i=1}^{\frac{d-1}{2}} (1 + 2ix) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\frac{d-1}{2}} (x + jx^2 + y^2)) & \text{if } d \not\equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Quando $x = 0$ affinchè $\nabla f = 0$ deve essere anche $y = 0$. Scegliamo $g = x$, dunque la mappa lineare che vogliamo considerare è m_x. Posto $I = \langle \partial f/\partial x, \partial f/\partial y \rangle$, preso un ordine monomiale qualsiasi per la teoria delle basi di Gröbner si ha che $B = \{x^a y^b + I | x^a y^b \notin LT(I)\}$ è una base di $\mathbb{C}[x, y]/I$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. La molteplicità algebrica di un'autovalore è uguale alla dimensione del suo autospazio generalizzato. Data una matrice $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ l'autospazio generalizzato relativo ad un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ è $ker((M - \lambda I)^m)$.

Mettendo tutti questi fatti insieme, vediamo del codice Macaulay2 [5] che ci permette di calcolare $\mu_0(f)$ (quando f è come in 2.14):

```
R = QQ[x,y]

ploskiMilnor = d -> (
  n = d//2;
  f = if d%2==0 then 1 else x;
  for i from 1 to n do f = f * (x+i*x^2+y^2);
  I = ideal( diff(x,f), diff(y,f) );
  S = R^1;
  T = S/(I*S);
  b = basis T;
  bR = flatten entries basis T;
  -- calcola la matrice che rappresenta la moltiplicazione per [x
      ] da T in T
  mx = matrix(  apply( bR, c -> apply(bR, a->coefficient(a, (x *
      c * b_0)_0 ) ) )  );
  --calcola il numero di milnor in (0,0) di f usando il rango di
      mx^(numColumns mx)
  (numColumns mx) - (rank (mx^(numColumns mx)))
)

--calcola i numeri di Milnor nell'esempio di ploski fino a d=20
for i in 2..20 do print (i,ploskiMilnor i )
```

Se l'ideale I non fosse zero dimensionale (ma in questo caso lo è) il programma darebbe errore perché $\mathbb{C}[x,y]/I$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ avrebbe dimensione infinita (e quindi non si potrebbe calcolarne esplicitamente una sua base).

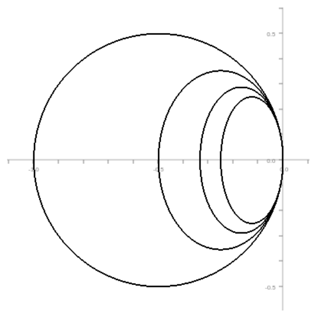

Figura 2.1: $\{f = 0\}$ quando $d = 8$

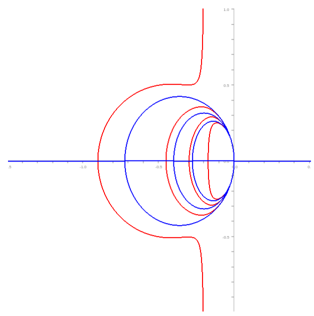

Figura 2.2: $\{\partial f/\partial x = 0\}$ (rosso) e $\{\partial f/\partial y = 0\}$ quando $d = 8$

Le figure sono relative al caso $d = 8$, in questo caso il numero di Milnor dell'origine $\mu_0(f) = (d^2 - 1) - d/2 = (8-1)^2 - 4 = 45$.
Eseminando con più attenzione i conti svolti dal codice sopra, si vede che (almeno per $d = 2$ fino a $d = 20$) $\dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[x,y]}{\langle \partial f/\partial x, \partial f/\partial y \rangle} = (d-1)^2$. Nella figura a destra si vede in fatti che le curve $\{\partial f/\partial x = 0\}$ e $\{\partial f/\partial y = 0\}$ si incontrano nell'origine e in altri 4 punti, che devono quindi essere ciascuno con molteplicità 1 (rispetto all'ideale $\langle \partial f/\partial x, \partial f/\partial y \rangle$).

Un altro modo con cui calcolare il numero di Milnor di f è di utilizzare questo risultato che si può trovare sia in [7] che in [6]:

Proposizione 2.15

1. *Se* $f = f_0\tilde{f}$ *in* $\mathbb{C}[x,y]$ *con* $f_0(0) \neq 0$ *allora* $\mu_0(f) = \mu_0(\tilde{f})$.
2. *Se* $f = f_1 \cdots f_m$ *con* $f_1, ..., f_m \in \mathbb{C}[x,y]$ *coprimi a due a due* <u>*in* $\mathbb{C}\{x,y\}$</u> *e* $f_i(0) = 0$ *per* $i = 1, \dots, m$ *allora*

$$\mu_0(f) + m - 1 = \sum_{i=1}^{m} \mu_0(f_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le m} i_0(f_i, f_j). \tag{2.16}$$

dove $i_0(f_i, f_j)$ *è la molteplicità dell'origine* $0 \in \mathbb{C}^2$ *rispetto all'ideale* $\langle f_i, f_j \rangle$.

Se $f_a = x + ax^2 + y^2$ e $f_b = x + bx^2 + y^2$ con $a, b \in \mathbb{C}^*$ e $a \neq b$ allora $i_0(f_a, f_b) = 4$. Per farlo consideriamo $f_a^h = xz + ax^2 + y^2$ e $f_b^h = xz + bx^2 + y^2$. Se consideriamo il sistema

$$\begin{cases} f_a^h = xz + ax^2 + y^2 = 0 \\ f_b^h = xz + bx^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

e sottriamo la seconda equazione alla prima otteniamo

$$\begin{cases} (a-b)x^2 = 0 \\ xz + bx^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

dato che per ipotesi $a \neq b$ si ricava che $x = 0$ e quindi anche $y = 0$. Quindi anche nel proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ le due ellissi si incontrano soltanto in $[0, 0, 1]$ (l'origine del piano affine). Per il teorema di Bezout (anch'esso collegato alle molteplicità) si ha che $i_0(f_a, f_b) = deg(f_a)deg(f_b) = 4$. In maniera analoga si ottiene che $i_0(f_a, x) = 2$ come ci aspetta per un'ellisse ed una retta tangente ad essa. Inoltre, se $g \in \mathbb{C}[x,y]$ e $\{g = 0\}$ è regolare (cioè non ha una singolarità) nell'origine allora $\mu_0(g) = 0$. Se così non fosse infatti l'origine avrebbe molteplicità > 0 rispetto all'ideale $< \partial f/\partial x, \partial f/\partial y >$ e quindi dovrebbe essere $(\nabla f)(0) = 0$, assurdo. Nel caso di 2.14, i fattori possono essere presi corrispondenti a curve regolari nell'origine (la retta $\{x = 0\}$ e le ellissi $\{x + ix^2 + y^2 = 0\}$). Se si sostituiscono i valori trovati per $\mu_0(f_i)$ e le molteplicità di intersezione $i_0(f_i, f_j)$ nella 2.16:

$$\mu_0(f) = \begin{cases} 0 + 2 \sum\limits_{1 \le i < j \le d/2} 4 - \dfrac{d}{2} + 1 = 8\dbinom{d/2}{2} - \dfrac{d}{2} + 1 & \text{if } d \equiv 0 \pmod 2, \\ 0 + 2 \sum\limits_{1 \le i < j \le (d-1)/2} 4 + 4\dfrac{d-1}{2} - \dfrac{d-1}{2} = 8\dbinom{\frac{d-1}{2}}{2} - 3\dfrac{d-1}{2} & \text{if } d \not\equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

In entrambi i casi $\mu_0(f) = (d-1)^2 - [\frac{d}{2}]$.

3 ORDINI SUI MONOMI E DIVISIONE NEGLI ANELLI LOCALI

Per lavorare negli anelli locali vogliamo definire ordini sui monomi che non sono ordini monomiali.

Definizione 3.1 *Un ordine totale $\geq$ sui monomi compatibile con la moltiplicazione si dice* ***antigraduato*** *se soddisfa la condizione: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ se $|\alpha| \leq |\beta|$ allora $x^\alpha \geq x^\beta$. dove $|\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i, |\beta| = \sum_{i=0}^n \beta_i$.*

Definizione 3.2 *Un ordine totale $\geq$ sui monomi compatibile con la moltiplicazione si dice* ***locale*** *se soddisfa la condizione: per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ si ha che $1 \geq x^\alpha$.*

Un ordine antigraduato è locale, ma non vale il viceversa.

Definizione 3.3 (Ordine Lessicografico Antigraduato) *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Diciamo che $x^\alpha >_{alex} x^\beta$ se $|\alpha| < |\beta|$ oppure $|\alpha| = |\beta|$ e $x^\alpha >_{lex} x^\beta$.*

Definizione 3.4 (Ordine Lessicografico Inverso Antigraduato) *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Diciamo che $x^\alpha >_{arevlex} x^\beta$ se $|\alpha| < |\beta|$ oppure $|\alpha| = |\beta|$ e $x^\alpha >_{revlex} x^\beta$.*

Definizione 3.5 *Un ordine su un insieme di monomi x^α con $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ dell' anello $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ si dice un* ***ordine di semigruppo*** *se è un'ordine totale ed è compatibile con la moltiplicazione.*

Dalle definizioni 3.3 e 3.4 notiamo che in generale questi ordini non sono buoni ordinamenti. Ad esempio in $\mathbb{K}[x]$ usando alex o arevlex (in questo caso sono uguali) si ha che

$$1 > x > x^2 > x^3 > ...$$

Definizione 3.6 *Sia $\geq$ un ordine di semigruppo sui monomi di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ e sia $S = \{1 + g : LT(g) < 1\}$. La* ***localizzazione*** *di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ rispetto a $\geq$ è definita come l'anello $Loc_{\geq}(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]) = S^{-1}\mathbb{K}[x_1, ..., x_n] = \{f/(1 + g) : f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n], 1 + g \in S\}$*

Per esempio se $\geq$ è un ordine monomiale allora ogni monomio è ≥ 1 e quindi $Loc_{\geq}(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]) = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$, mentre invece se $\geq$ è un ordine locale allora ogni monomio è ≤ 1 e si ha $Loc_{\geq}(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]) = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1,...,x_n>}$.

Definizione 3.7 *Dato un ordine di semigruppo $\geq$ sui monomi di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ e $h = f/(1 + g) \in Loc_{\geq}(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n])$ (con $g = 0$ oppure $LT(g) < 1$) definiamo*

- $multideg(h) = multideg(f)$
- $LC(h) = LC(f)$
- $LM(h) = LM(f)$
- $LT(h) = LT(f)$

Si tratta di buone definizioni: dati $f_1, g_1 \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ con $LT(g_1) < 1$ oppure $g_1 = 0$ e tali che $h = f_1/(1 + g_1)$ ottengo che $f(1 + g_1) = f_1(1 + g)$. Allora siccome $LT(g), LT(g_1) < 1$ e $\geq$ è compatibile con la moltiplicazione si ha che $LT(f) = LT(f + fg_1) = LT(f_1 + f_1g) = LT(f_1)$, e lo stesso vale per $LC, LM, multideg$.

Definizione 3.8 *Sia $\geq$ un ordine di semigruppo, e siano $f, g \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tali che $LT(f) = m \cdot LT(g)$ per un qualche $m = cx^\alpha$ (e $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$). Definiamo **Red**$(f, g) = f - mg$ e le diamo il nome di **riduzione** di f per g.*

Vorremmo trovare un analogo dell'algoritmo di divisione nel caso di ordini di semigruppo arbitrari, ma il problema è che non possiamo fare esattamente come nell' algoritmo di divisione usuale (cioè riducendo f ripetutamente per g). Infatti, consideriamo l'anello $\mathbb{K}[x]$, con l'unico ordine locale sui suoi monomi,e poniamo $f = x, g = x - x^2 \in \mathbb{K}[x]$. Si ottiene:

$$f_1 = Red(f, g) = x^2, f_2 = Red(f_1, g) = x^3, \dots f_n = Red(f_{n-1}, g) = x^{n+1} \dots$$

senza terminare mai. Dobbiamo trovare il modo di aggirare questo problema. Utilizzando un approccio che combina idee di Mora, con altre di Lazard, otterremo in maniera relativamente semplice un algoritmo che funziona per ogni ordine di semigruppo (e non solo per ordini locali come nel metodo utilizzato originariamente da Mora). Prima di tutto, dato $g \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ indicheremo con g^h l'omogeneizzazione di g rispetto alla variabile t, cioè se d è il grado (totale) di g e $g = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha$ allora:

$$g^h = \sum_{i=0} c_\alpha t^{d-|\alpha|} x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n, t]$$

Poi, dato l'anello $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ e un ordine di semigruppo $\geq$ sui suoi monomi, estendo $\geq$ ad un ordine $\geq'$ sui monomi di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n, t]$:

Proposizione 3.9 *Ogni ordine di semigruppo $\geq$ sui monomi di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ si può estendere ad un ordine monomiale $\geq'$ sui monomi di $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n, t]$ nel seguente modo: $t^a x^\alpha >' t^b x^\beta$ se $a + |\alpha| > b + |\beta|$ oppure $a + |\alpha| = b + |\beta|$ e $x^\alpha > x^\beta$.*

Dimostrazione: $\geq'$ è compatibile con la moltiplicazione: infatti se $t^a x^\alpha >' t^b x^\beta$ allora $\forall d \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ si ha o che $a + d + |\alpha| + |\gamma| > b + d + |\beta| + |\gamma|$ oppure che $a + d + |\alpha| + |\gamma| = b + d + |\beta| + |\gamma|$ e $x^{\alpha+\gamma} > x^{\beta+\gamma}$. In ogni caso $t^{a+d} x^{\alpha+\gamma} > t^{b+d} x^{\beta+\gamma}$. $\geq'$ è un ordine monomiale poichè $t^a x^\alpha \geq' t^0 x^0 = 1$.

Osservazione 3.10 *Se $t^a >' t^{a'} x^\beta$ per qualche a, a', β, con $a = a' + |\beta|$, allora $1 > x^\beta$. Quindi, posto $R = Loc_{\geq}(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n])$ si ha che*
$t^a >' t^{a'} x^\beta$ e $a = a' + |\beta| \implies 1 + x^\beta \in \mathcal{U}(R)$. Inoltre, se $g \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$, l'omogeneizzazione porta il $\geq$-leading term di g nel $\geq'$-leading term di g^h. Analogamente dato un polinomio omogeneo $G \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n, t]$ deomogeneizzare (cioè sostituire $t = 1$ in G) porta $LT_{\geq'}(G)$ in $LT_{\geq}(g)$, dove $g = G_{|t=1}$.

Definito l'ordine monomiale $\geq'$ vediamo un algoritmo che funge da passo intermedio per arrivare alla forma normale di Mora.

Teorema 3.11 (Algoritmo della Forma Normale di Mora Omogenea) *Dati polinomi omogenei non nulli $F, F_1, \dots, F_s$ in $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ e l'ordine monomiale $\geq'$ che estende l'ordine di semigruppo $\geq$ sui monomi (come in 3.9), esiste un algoritmo per produrre polinomi omogenei $U, A_1, \dots, A_s, H \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ che soddisfano*

$$U \cdot F = A_1 F_1 + \dots + A_s F_s + H,$$

dove $\mathrm{LT}(U) = t^a$ per qualche a,

$$a + \deg(F) = \deg(A_i) + \deg(F_i) = \deg(H)$$

ogni volta che $A_i, H \neq 0$, inoltre $t^a \mathrm{LT}(F) \geq' \mathrm{LT}(A_i)\mathrm{LT}(F_i)$, e nessun $\mathrm{LT}(F_i)$ divide $t^b \mathrm{LT}(H)$ per ogni $b \geq 0$.

La dimostrazione è presente in [2] e mostra che il seguente algoritmo calcola $U, A_1, ..., A_s, H$ come indicato nel teorema:
Input: $F, F_1, \dots, F_s \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ omogenei e non nulli
Output: $U, A_1, ..., A_s, H$ come nell'enunciato del teorema

$U[\,] := \{1\}; A_1[\,] := \{0\}, ..., A_s[\,] := \{0\}$
$i := 0;$
$H[\,] := \{F\}; L[\,] := \{F_1, \dots, F_s\};$
$M := \{G \in L : \mathrm{LT}(G) | \mathrm{LT}(t^a H[i])$ per qualche $a\}$
while $(H[i] \neq 0$ AND $M \neq \emptyset)$ **do**
  SELECT j tale che $L[j] \in M$ con a minimo
  if $a > 0$ **then**
    $k := i + 1$
    $L[k] := H[i]$
  else
    $k := i$
  end if
  $(H[k], m) := \mathrm{Red}(t^a H[i], L[j])$
  if $j < s$ (cioè $L[j] \in \{F_1, ..., F_s\}$) **then**
    for $l = 1$ to s **do**
      $A_l[k] := t^a A_l[i]$
    end for
    $A_j[k] := A_j[k] + m$
    $U\ [k] := t^a U[i]$
  else
    for $l = 1$ to s **do**
      $A_l[k] := t^a A_l[i] - m A_l[j - s]$
      $U\ [k] := t^a U\ [i] - m U\ [j - s]$
    end for
  end if
  $i := k$
  if $H[i] \neq 0$ **then**
    $M := \{G \in L : \mathrm{LT}(G) | \mathrm{LT}(t^a H[i])$ per qualche $a\}$
  end if
end while
return $U[i], A_1[i], ..., A_s[i], H[i]$

Corrollario 3.12 (Algoritmo della Forma Normale di Mora) *Supponiamo che $f, f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ siano non nulli e $\geq$ sia un ordine di semigruppo sui monomi nelle x_i. Allora esiste un algoritmo per produrre polinomi $u, a_1, \dots, a_s, h \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tali che*

$$uf = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + h,$$

dove $\mathrm{LT}(u) = 1$ (quindi u è un'unità in $\mathrm{Loc}_{\geq}(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n])$), $\mathrm{LT}(a_i)\mathrm{LT}(f_i) \leq \mathrm{LT}(f)$ per tutti gli i con $a_i \neq 0$, e o $h = 0$, oppure $\mathrm{LT}(h)$ non è divisibile da alcun $\mathrm{LT}(f_i)$.

Dimostrazione: Omogeneizziamo $f, f_1, ..., f_s$ ottenendo $F, F_1, ..., F_s$. Calcoliamo $U, A_1, ..., A_s, H$ come nel teorema 3.11 e deomogenizziamo ottendo $u, a_1, ..., a_s, h$. Sappiamo che se $A_i \neq 0$ allora esite un $a \in \mathbb{N}$ tale che
$a + deg(F) = deg(A_i) + deg(F_i)$ e
$t^a \mathrm{LT}(F) \geq' \mathrm{LT}(A_i)\mathrm{LT}(F_i)$.
Posto $LT(F) = c_F t^{deg(F) - |\alpha|} x^\alpha, LT(A_i) = c_{A_i} t^{deg(A_i) - |\beta|} x^\beta, LT(F_i) = c_{F_i} t^{deg(F_i) - |\gamma|} x^\gamma$ con $c_F, c_{A_i}, c_{F_i} \in \mathbb{K}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ si ha che

$c_F t^{a+deg(F)-|\alpha|} x^\alpha \geq' c_{A_i} c_{F_i} t^{deg(A_i)-|\beta|+deg(F_i)-|\gamma|} x^{\beta+\gamma}$ ma dato che $a + deg(F) - |\alpha| + |\alpha| = deg(A_i) - |\beta| + |\beta| + deg(F_i) - |\gamma| + |\gamma|$ per definizione di $\geq'$ deve essere $x^\alpha \geq x^{\beta+\gamma}$. Quindi $LT(f) \geq LT(a_i)LT(f_i)$. Adesso supponiamo per assurdo che per un qualche i si abbia $LT(f_i)|LT(h)$. Posto $LT(f_i) = c_f x^\alpha$ e $LT(h) = c_h x^\beta$ con $c_f, c_h \in \mathbb{K}, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, si ha che $LT(F_i) = c_f t^{deg(f)-|\alpha|} x^\alpha$ e $LT(H) = t^{deg(h)-|\beta|} x^\beta$. Ponendo $b = max\{0, deg(f) - |\alpha| - deg(h) + |\beta|\}$, si ottiene $LT(F_i)|t^b LT(H)$, assurdo. Per concludere, il leading term di U è t^a dunque il leading term di u è 1, quindi per la 3.10 $u \in \mathcal{U}(\text{Loc}_\geq(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]))$.

Corrollario 3.13 *Sia $\geq$ un ordine di semigruppo sui monomi nell'anello $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ e sia $R = \text{Loc}_\geq(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n])$. Siano $f \in R$ e $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ non nulli. Allora esiste un algoritmo per calcolare $h, a_1, \ldots, a_s \in R$ tali che*

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + h$$

dove $\text{LT}(a_i)\text{LT}(f_i) \leq \text{LT}(f)$ per tutti gli i con $a_i \neq 0$, e o $h = 0$, oppure $\text{LT}(h) \leq \text{LT}(f)$ e $\text{LT}(h)$ non è divisibile da alcuno dei $\text{LT}(f_1), \ldots, \text{LT}(f_s)$.

Dimostrazione: Se scriviamo $f = f'/u'$ con $f', u' \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ e $u' \in \mathcal{U}(R)$ allora per il corollario 3.12 otteniamo

$$uf' = a'_1 f_1 + \cdots + a'_s f_s + h'$$

dove $u, a'_1, \ldots, a'_s, h'$ sono come nel corollario 3.12 Dividere un polinomio per un invertibile di R non cambia il suo leading term se non per la moltiplicazione per una costante. Allora dividendo l'equazione sopra per uu' abbiamo

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + h$$

dove $a_1 = a'_1/(uu'), ..., a_s = a'_s/(uu'), h = h'/(uu')$ hanno le proprietà richieste. Arrivati a questo punto alcune osservazioni sono d'obbligo:

- Restringersi a considerare ideali generati da polinomi non comporta perdita di generalità quando si studiano ideali in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ o in $\text{Loc}_\geq(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$ per un ordine locale $\geq$. La ragione principale per limitare gli input a polinomi, però, è che ci permette di specificare un algoritmo che termini. In $\mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ o $\mathbb{K}\{x_1, \ldots, x_n\}$ anche una singola riduzione $\text{Red}(f, g)$, richiederebbe infiniti passaggi se f o g fossero serie di potenze con infiniti termini non nulli.

- In 3.12, otteniamo un "resto" h il cui leading term non è divisibile da nessuno dei $\text{LT}(f_i)$. Nell'algorimo divisione usuale, invece, otterremmo un resto senza termini divisibili da qualche $\text{LT}(f_i)$, il problema è che imitare così in maniera così simile l'algoritmo di divisione porta ancora una volta ad un procedimento che potrebbe non terminare.

I risultati dell'algoritmo della forma normale di Mora allora sembrerebbero più deboli rispetto all' algoritmo di divisione usuale. In realtà però sono utili per molti scopi, incluse le versioni locali sia del criterio che dell'algoritmo di Buchberger.

Definizione 3.14 *Sia $\geq$ un ordine di semigruppo e sia R l'anello delle frazioni $\text{Loc}_\geq(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n])$ come nella Definizione (3.5), oppure sia $\geq$ un ordine locale e sia $R = \mathbb{K}[[x_1, \ldots, x_n]]$ o $\mathbb{K}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Sia $I \subset R$ un ideale. Una **base standard** di I è un insieme $\{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ tale che $\langle \text{LT}(I) \rangle = \langle \text{LT}(g_1), \ldots, \text{LT}(g_t) \rangle$.*

Teorema 3.15 *Sia $S \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ finito, sia $\geq$ un ordine di semigruppo qualsiasi, e sia I l'ideale in $R = \mathrm{Loc}_{\geq}(\mathbb{K}[x_1, ..., x_n])$ generato da S.*

1. *(Analogo del Criterio di Buchberger) $S = \{g_1, \dots, g_t\}$ è una base standard per I se e solo se applicando l'algoritmo della forma normale di Mora dato nel Corollario (3.13) a ogni S-polinomio formato dalle coppie di elementi di S si ottiene un resto zero.*

2. *(Analogo dell'Algoritmo di Buchberger) L'algoritmo di Buchberger, utilizzando l'algoritmo della forma normale di Mora al posto del consueto algoritmo di divisione polinomiale, calcola una base standard polinomiale per l'ideale generato da S, e termina dopo un numero finito di passaggi.*

La dimostrazione è analoga a quella per le basi di Gröbner, soltanto che stavolta $\geq$ non è necessariamente un buon ordinamento, per i dettagli si veda [2]

Definizione 3.16 *Sia R uno tra gli anelli $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1,...,x_n>}$, $\mathbb{K}[[x_1, ..., x_n]]$ o $\mathbb{K}\{x_1, ..., x_n\}$. Sia $\geq$ un'ordine locale sia I un ideale di R. Un monomio x^α si dice **standard** se $x^\alpha \notin LT(I)$.*

Per concludere vediamo un'ultimo risultato:

Teorema 3.17 *Sia R uno degli anelli locali $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1,...,x_n>}$, $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ o $\mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\}$. Se $I \subset R$ è un ideale e $\geq$ è un ordine locale, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $\dim R/I$ *è finito.*
2. $\dim R/\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$ *è finito.*
3. *Ci sono solo un numero finito di monomi standard.*

Inoltre, quando una qualsiasi di queste condizioni è soddisfatta, abbiamo

$$\dim R/I = \dim R/\langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \textit{numero di monomi standard}$$

e ogni $f \in R$ può essere scritto in modo unico come somma $f = g + r$, dove $g \in I$ e r è una combinazione lineare di monomi standard. In aggiunta, questa decomposizione può essere calcolata algoritmicamente quando $R = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_{<x_1,...,x_n>}$.

E un'ultima applicazione, ovvero possiamo usare il teorema 3.17 per calcolare i numeri di Milnor $\mu_0(f)$ quando f è come in 2.14 (l'esempio dovuto a Płoski). Stavolta è preferibile usare Singular [4] dato che implementa di default gli algoritmi visti sopra negli anelli locali. L'implementazione gira velocemente,con il vantaggio di non richiedere controlli supplementari, mostrando l'utilità delle basi standard.

```
ring r = 0,(x,y),ds; //QQ[x,y], ds indica arevlex
proc ploskiMilnor(int d) {
  poly f = 1;
  if(d%2 != 0)
  { f = x; }
  for(int i=0; i < d div 2; i++ )
  { f = f * (x+i*x^2+y^2); }
  ideal I = diff(f,x), diff(f,y);
  ideal J = std(I); //calcola LT(I) con l'ordine arevlex
  return(vdim(J)); //calcola la dimensione del quoziente R/I come
       spazio vett su QQ
}
for(int d=2; d < 16; d++ )
{ print(ploskiMilnor(d)); }
```

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Atiyah e I. G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[2] David A. Cox, John B. Little e Donal O'Shea. *Using Algebraic Geometry*. 2ª ed. Springer, 2005.

[3] David A. Cox, John B. Little e Donal O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. 4ª ed. Springer Cham, 2015.

[4] Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister e Hans Schönemann. *Singular 4-3-1 — A computer algebra system for polynomial computations*. http://www.singular.uni-kl.de. 2022.

[5] Daniel R. Grayson e Michael E. Stillman. *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*. Available at http://www2.macaulay2.com.

[6] Arkadiusz Płoski. «Invariants of plane curve singularities and Newton diagrams». In: *Univ. Iagel. Acta Math.* (2011).

[7] Arkadiusz Płoski. «A bound for the Milnor number of plane curve singularities». In: *Cent. Eur. J. Math.* (2014).