Rango di una matrice

Giorgio Ottaviani

Abstract

Dimostriamo che il rango per righe e per il rango per colonne di una matrice coincidono. Per una dimostrazione alternativa si veda il teorema 5.1 del testo di E. Sernesi "Geometria I".

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice $m \times n$ a coefficienti nel campo K (in prima lettura si può supporre $K = \mathbb{R}$).

Denotiamo con $A^i \in K^n$ per $i = 1, \ldots, m$ le righe di A e con $A_j \in K^m$ per $j = 1, \ldots, n$ le colonne di A.

Lo *spazio delle righe* di A è il sottospazio di K^n generato dalle righe di A, cioè $< A^1, \ldots, A^m >$, analogamente lo *spazio delle colonne* di A è il sottospazio di K^m generato dalle colonne di A, cioè $< A_1, \ldots, A_n >$.

Ad esempio se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

abbiamo che lo spazio delle righe di A è

$$< [0, 1, 3], \left[-2, \sqrt{0}, 0\right] >=$$

$$= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in K^3 | \mathbf{x} = c_1 [0, 1, 3] + c_2 \left[-2, \sqrt{0}, 0\right] \text{ per qualche } c_1, c_2 \in K\}$$

mentre lo spazio delle colonne di A è

$$< [0, -2], \left[1, \sqrt{2}\right], [3, 0] >=$$

$$= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in K^2 | \mathbf{x} = c_1 [0, -2] + c_2 \left[1, \sqrt{2}\right] + c_3 [3, 0] \text{ per qualche } c_1, c_2, c_3 \in K\}$$

Notiamo che lo spazio delle righe di A coincide con lo spazio delle colonne della trasposta A^t.

Definizione Il *rango per righe* di A è la dimensione dello spazio delle righe di A. Il *rango per colonne* di A è la dimensione dello spazio delle colonne di A.

Segue subito dalla definizione che il rango per righe di A coincide con il rango per colonne di A^t.

Proposizione 1 *Il rango per righe (o per colonne) di $A \in M_{m,n}(K)$ è $\leq \min(m, n)$.*

Dimostrazione Lo spazio delle righe è un sottospazio di K^n e quindi la sua dimensione è $\leq n$. Lo spazio delle righe ha m generatori, quindi la sua dimensione è $\leq m$. Il ragionamento per il rango per colonne è analogo.

Teorema 2 *Il rango per righe e il rango per colonne di una matrice A coincidono. Il loro valore si chiama il rango di A e si indica con $r(A)$ (o anche con $rg(A)$ o $rk(A)$).*

Dimostrazione Sia k il rango per righe di A e sia $C^1, \dots C^k$ una base dello spazio delle righe di A.

Per $i = 1, \dots m$ abbiamo che esistono scalari b_{ij}, con $1 \leq j \leq k$ tali che $A^i = \sum_{j=1}^{k} b_{ij} C^j$.

Denotiamo con C la matrice $k \times n$ che ha per righe C^i e con B la matrice $m \times k$ con coefficienti b_{ij}. Con queste notazioni l'uguaglianza precedente diventa

$$A = BC$$

da cui trasponendo

$$A^t = C^t B^t$$

Segue che le righe di A^t sono combinazione lineare delle righe di B^t, che sono in numero di k e quindi lo spazio delle righe di A^t ha k generatori. Pertanto il rango per colonne di A è $\leq k$.

Questo prova che per ogni matrice il rango per colonne è minore o uguale del rango per righe. Applicando questa disuguaglianza alla matrice trasposta, segue la disuguaglianza opposta e quindi la tesi.