Un omaggio a Corrado Segre

Franco Ghione e Giorgio Ottaviani
Dipartimento di Matematica
II Università di Roma, Tor Vergata, I-00133 Roma

In questa nota ci proponiamo di recensire alcuni lavori di Corrado Segre apparsi negli anni '80 del secolo XIX, quando Segre aveva poco più di 20 anni[1]. Pensiamo che questo possa essere utile, non solo da un punto di vista storico, ma anche per collegare quelle ricerche e quei metodi, poco noti nella letteratura moderna, a una serie di risultati riscoperti (spesso senza saperlo) nell'ultimo secolo cercando così di ricostruire le origini di quel percorso che ci ha condotti, poi, alla moderna teoria dei fibrati vettoriali su una curva algebrica.

§1. Il programma di Corrado Segre

Per meglio capire il carattere innovativo delle idee di cui Segre si fece portatore giovanissimo, conviene ricordare l'accesa polemica che divampava in quel periodo circa l'utilità di studiare la geometria degli iperspazi. Alcuni sostenevano che la geometria degli iperspazi era solo uno sterile gioco intellettuale di nessuna utilità per la comprensione della "vera" geometria che riguardava lo spazio a due o tre dimensioni. Per contro, già Veronese e Bertini, e poi Segre, si rendevano perfettamente conto che, non solo la geometria degli iperspazi gettava una nuova luce chiarificatrice nello studio delle curve e delle superfici dello spazio ordinario, ma anche, idea modernissima, questi enti potevano essere riguardati come punti, dipendenti da un certo numero di parametri, di nuove varietà algebriche non più, in generale, collocabili nello spazio ordinario.

Il primo, forse più suggestivo, risultato in questa direzione si deve a Veronese([V] p.208):

Ogni curva piana razionale di ordine n è proiezione di un'unica curva C_n dello spazio $\mathbb{P}^n$ a n dimensioni le cui coordinate(affini) funzioni di un parametro t sono semplicemente

$$C_n:\ \begin{cases} x_i = t^i \\ i=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Così, ad esempio, se guardiamo alle cubiche razionali del piano abbiamo tantissime forme ognuna delle quali è solo una diversa "ombra" della cubica gobba di $\mathbb{P}^3$. Per analogia, se ci riferiamo al mito della caverna di Platone, possiamo pensare al piano od allo spazio come alla parete della caverna che ci riflette le ombre di oggetti che vivono naturalmente negli iperspazi.

[1]C.Segre è nato nel 1863

Veronese può facilmente estendere questo risultato:

Ogni curva razionale C di ordine n, gobba in $\mathbb{P}^r$, *è proiezione della* $C_n \subset \mathbb{P}^n$.

In particolare $r \leq n$ e la C_n sarà chiamata da Veronese il *modello normale* di C. Il fatto che ogni varietà proiettiva di ordine d $X \subset \mathbb{P}^r$ ammetta un "modello normale" (o come diremmo oggi linearmente normale), cioè che la X sia proiezione di una ben definita varietà $Y \subset \mathbb{P}^N$ di ordine d la quale non sia più ottenibile come una proiezione da una varietà del medesimo ordine posta in uno spazio di più grande dimensione, era ben chiaro a Segre così come era chiara l'importanza di calcolare questa massima dimensione N, problema che riporta, come ben noto, al problema di calcolare la dimensione $H^0(X,\mathcal{O}(1))$, cioè al problema di Riemann-Roch.

Una volta determinato questo numero N, Segre si pone l'obiettivo di trovare tutti i modelli normali delle varietà del tipo considerato a meno di trasformazioni proiettive dello spazio $\mathbb{P}^N$. Compiuto anche questo secondo passo ogni varietà del tipo considerato sarà l'ombra di tali modelli normali la cui geometria, e il modo di proiettarli nello spazio $\mathbb{P}^r$, permetterà di prevederne le proprietà.

§2. Superfici rigate razionali

Segre si cimenta subito (1884) in questo arduo programma nel caso delle superfici rigate razionali, risolvendo completamente la questione [S1]:

Ogni superficie rigata razionale di ordine n che non sia un cono, gobba in $\mathbb{P}^3$ *(o* $\mathbb{P}^r$*) ha come modello normale una delle seguenti superfici* $F_m \subset \mathbb{P}^{n+1}$, $m=1,2,\ldots,[\frac{n}{2}]$, *dove la* F_m *ha equazioni:*

$$F_m: \begin{cases} x_i = t^i & x_{m+1+j} = ut^j \\ i=1,2,\ldots,m & j=0,1,\ldots,n-m \end{cases}$$

Le superfici F_m così calcolate, oggi dette superfici di Hirzebruch, sono proiettivamente caratterizzate dall'essere costituite dalle rette che congiungono una C_m e una C_{n-m} in corrispondenza poste in due spazi $\mathbb{P}^m$ e $\mathbb{P}^{n-m}$ sghembi in $\mathbb{P}^{n+1}$.

Vogliamo qui accennare brevemente alla prova di Segre che contiene anche una prova, per il rango 2, del celebre teorema, noto oggi come *teorema di Grothendieck*[2] [Gr], secondo il quale ogni fibrato algebrico su $\mathbb{P}^1$ si decompone in somma diretta di fibrati di rango 1.

Se $S \subset \mathbb{P}^r$ è la superficie rigata razionale di ordine n la sua sezione iperpiana $C = S \cap H$ sarà una

[2]questo teorema ha una lunga storia, vedi ad esempio [OSS], ed in forma algebrica era stato provato anche da Dedekind e Weber [DW].

curva razionale di ordine n gobba in H, se infatti così non fosse potremmo trovare un iperpiano H' che contiene C e un punto $p \in S \setminus C$, ma allora tale iperpiano viene a contenere la fibra r per p (contenendo p e $x = C \cap r$). Ne segue che $H' \cap S$ ha ordine almeno $n+1$ e quindi $H' \supset S$ contro l'ipotesi. Dal teorema di Veronese segue allora che $n \geq r-1$. La disuguaglianza opposta, cioè il fatto che ogni superficie rigata razionale in $\mathbb{P}^r$ di ordine n ($r<n+1$) può sempre ottenersi come proiezione di un'analoga superficie rigata posta in $\mathbb{P}^{n+1}$, è data dal Segre come evidente. A ben guardare a noi è parso che la cosa fosse meritevole di una qualche giustificazione anche in relazione al fatto che Bertini, nel suo trattato sulla geometria degli iperspazi [Ber] dà di questo fatto una prova piuttosto complicata che è un adattamento al caso razionale della dimostrazione dello stesso Segre relativa al caso delle rigate su una curva ellittica [vedi appendice I].

In ogni caso Segre si riduce a classificare le superfici rigate razionali S di ordine n in $\mathbb{P}^{n+1}$, che non siano coni, che risulterebbero allora coni su una C_n. Ora, se C è una unisecante irriducibile di ordine $m \leq n$ allora C è normale, cioè genera uno spazio $\mathbb{P}^m$. Se infatti fosse in uno spazio $\mathbb{P}^\mu$ con $\mu<m$ "*siccome tutte le generatrici dovrebbero tagliare quella curva, si potrebbe per lo spazio stesso e per $n-\mu$ punti della superficie posti fuori di esso e su generatrici diverse far passare un iperpiano il quale conterrebbe le $n-\mu$ generatrici passanti per quel punto ed inoltre la curva di ordine m e quindi taglierebbe la superficie in una curva composta di ordine $n+m-\mu>n$ il che non può essere se quell'iperpiano non contiene tutta la superficie*".

Stabilito ciò Segre considera la curva C_m unisecante di minimo grado m contenuta in S. Poichè esiste sempre un iperpiano che contiene $[\frac{n+1}{2}]$ generatrici e la S non è un cono, tale iperpiano segherà ulteriormente la S lungo una curva unisecante dell'ordine $\leq n-[\frac{n+1}{2}]$. *E' pertanto* $m \leq [\frac{n}{2}]$. Ottenuto ciò considera un iperpiano H passante per m generatrici distinte di S e per altri $n-2m+1$ punti posti su generatrici diverse dalle precedenti. E' facile vedere che, poichè $m \leq [\frac{n}{2}]$, tale iperpiano esiste e in più *non contiene altre generatrici oltre alle m imposte.* Infatti se H contenesse $m+1$ generatrici segherebbe la C_m in almeno $m+1$ punti e pertanto la conterrebbe, ma allora conterrebbe anche le generatrici per gli ulteriori $n-2m+1$ punti. In definitiva H conterrebbe la C_m e $m+(n-2m+1)=n-m+1$ generatrici e dunque intersecherebbe la S in una curva di ordine $n+1$ mentre si è supposto la superficie gobba in $\mathbb{P}^{n+1}$. Ne segue che H taglia S lungo le m generatrici e una ulteriore curva irriducibile C_{n-m} di ordine $n-m$. Da cui è facile concludere che $C_m \cap C_{n-m} = \emptyset$ e *la S è proiettiva a una F_m.*

Che questo teorema sia equivalente, in altro linguaggio, al teorema di decomponibilità dei fibrati risulta immediatamente se noi utilizziamo un semplice dizionario che permette di tradurre il linguaggio della geometria proiettiva in quello dei fibrati vettoriali e viceversa.

§3. Un utile dizionario

Una varietà S rigata in $\mathbb{P}^s$ di genere g contenuta in $\mathbb{P}^n$ sarà da intendersi come definita da un morfismo di una curva X di genere g nella grassmanniana dei sottospazi di $\mathbb{P}^n$ di dimensione s birazionale sull'immagine:

$$\phi : X \to Gr(\mathbb{P}^s, \mathbb{P}^n)$$

in modo che sia $S = \bigcup_{x \in X} S_x$ essendo $S_x = \phi(x)$ un sottospazio di $\mathbb{P}^n$ di dimensione s che diremo la fibra su x o, con linguaggio più classico, la *generatrice* su x.

A S si può associare canonicamente un fibrato olomorfo(algebrico) su X di rango s+1, dato dall'immagine inversa tramite ϕ, del fibrato tautologico sulla grassmanniana. Più concretamente tale fibrato, che denoteremo con E_S è dato dai punti

$$E_S = \{(x,y) | y \in E_x\} \subset X x \mathbb{C}^{n+1}$$

dove abbiamo posto, scelte le coordinate, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ e $S_x = \mathbb{P}(E_x)$, essendo E_x un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^{n+1}$ di dimensione s+1.

In più se $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(H)$ è un iperpiano del $\mathbb{P}^n$, esso definisce (in modo non canonico) una sezione olomorfa di E_S^* o più canonicamente un elemento di $\mathbb{P}(\Gamma(X, E_S^*))$, infatti fissata una base in $\mathbb{C}^{n+1}/H$ che è di dimensione uno resta definita la proiezione $p: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}/H \simeq \mathbb{C}$ e quindi la sezione globale

$$s_H : X \to E_S^* \text{ definita da } s_H(x)(y) = p(y) \quad x \in X,\ y \in E_x \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

che si annulla nei punti $x \in X$ tali che $E_x \subset H$. E' inoltre immediato vedere che tali sezioni generano la fibra in ogni punto. Naturalmente se si cambia base per $\mathbb{C}^{n+1}/H$, la sezione verrà moltiplicata per una costante non nulla, avendo così una inclusione naturale

$$\mathbb{P}^{n*} \to \mathbb{P}(\Gamma(X, E_S^*)) \tag{1}$$

E' ora facile verificare che se S è proiezione di S' da un punto esterno ad S', cioè se S e S' hanno lo stesso ordine, allora E_S è isomorfo ad $E_{S'}$ ed inoltre se E^* è un fibrato generato dalle sue sezioni, cioè se esiste un morfismo di fibrati

$$X x \mathbb{C}^{n+1} \to E^*$$

suriettivo su ogni fibra allora $\bigcup_{x \in X} \mathbb{P}(E_x) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ defisce una varietà rigata S il cui fibrato associato è E. Insomma la S risulterà linearmente normale se e solo se la (1) è un isomorfismo e inoltre, se N è la dimensione dove vive il modello normale, allora $N = \dim H^0(X, E_S^*) - 1$. Osserviamo anche che le sezioni s_H permettono di calcolare la *classe di Chern* di E_S^*, infatti il luogo dove s+1 sezioni generiche di E_S^* diventano dipendenti corrisponde dualmente all'insieme delle fibre S_x toccate dallo spazio $\mathbb{P}^{n-s-1}$, intersezione degli s+1 iperpiani corrispondenti alle sezioni, e quindi

$$\deg S = \deg E_S^* \tag{2}$$

Sottovarietà rigate della S corrisponderanno allora a sottofibrati di E_S e viceversa, i cui gradi saranno ancora legati dalla relazione (2) e in particolare *curve unisecanti* corrisponderanno a sottofibrati in rette di E; sezioni iperpiane generiche, che non contengono fibre, corrisponderanno a sottofibrati di E con quoziente banale, coni in $\mathbb{P}^n$ con vertice un $\mathbb{P}^k$ e base una varietà rigata S in $\mathbb{P}^{n-k-1}$ corrisponderanno a fibrati del tipo $1^{k+1}\oplus E_S$ (indicando con $1=X\times\mathbb{C}$ il fibrato banale); due sottovarietà rigate S_1 e S_2 di S daranno luogo per addizione fibra per fibra in $\mathbb{C}^{n+1}$ alla mappa

$$E_{S_1}\oplus E_{S_2} \to E_S \tag{3}$$

che risulterà iniettiva(come mappa di fasci), se le fibre S_{1_x} e S_{2_x} non si incontrano genericamente e risulterá un isomorfismo se S_{1_x} e S_{2_x} generano S_x in ogni punto e $S_1\cap S_2=\emptyset$.

In particolare se S è una superficie rigata, C_1 e C_2 due sue unisecanti distinte ed L_1,L_2 fibrati in rette associati allora abbiamo

$$0 \to L_1\oplus L_2 \to E_S \to T \to 0$$

ove T è un fascio di torsione con supporto in $C_1\cap C_2$. Si ritrova così, calcolando le classi di Chern, la semplice formula di intersezione, già nota a Segre:

$$\deg C_1\cap C_2=(\deg C_1+\deg C_2)-\deg S \tag{4}$$

Osserviamo infine che se si proietta $S\subset\mathbb{P}^n$ in $S'\subset\mathbb{P}^{n-1}$ da un punto $p\in S_{x_0}$ la proiezione E_x in E'_x sarà un isomorfismo per $x\neq x_0$ e in x_0 avrà conucleo di dimensione uno, otteniamo pertanto la successione esatta(di fasci)

$$0 \to E_S \to E_S{}' \to \mathcal{O}_{x_0} \to 0 \tag{5}$$

dove $\mathcal{O}_{x_0}$ è il fascio concentrato in x_0 con fibra $\mathbb{C}$; in più se si proietta con centro una fibra S_{x_0} di S si otterrà

$$E_{S'}\simeq E_S(x_0)$$

Notiamo che la trasformazione (5) definisce ciò che molti autori(ad es. [M],[MN],[T]) chiamano una *trasformazione elementare.*

§4. Fibrati su $\mathbb{P}^1$ di rango superiore

In un lavoro del 1885-86[S2], Segre considera il caso di fibrati su $\mathbb{P}^1$ di rango i+1 con particolare riguardo al caso i=2. Egli dà la formula di Riemann-Roch che potremmo enunciare dicendo che se E è generato dalle sezioni globali ed è di grado n e rango i+1 allora

$$h^0(\mathbb{P}^1,E)-1=n+i$$

Egli per il caso i=2, con gli stessi metodi ed argomentazioni usate per il caso i=1, studia le superfici rigate razionali di grado minimo contenute nella S e le curve unisecanti di grado minimo nella S e può dimostrare che esistono sempre tre curve di gradi m_1,m_2 e m_3 che generano il piano S_x per ogni x da cui ricaviamo che

$$E=L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$$

Il caso di rango qualunque che sarà oggetto della tesi di laurea di un suo allievo, il Bellatalla [Bel] è qui accennato in questa forma: "*i ragionamenti qui fatti pel caso i=2 si estenderanno facilmente ad i qualunque e l'analogia permetterà di prevederne senz'altro i risultati, sicchè non ne farò più oggetto di un nuovo lavoro*".

§5. Fibrati di rango due su una curva ellittica

I metodi usati per il caso razionale si applicano ancora con poche modifiche nel caso ellittico essenzialmente per il fatto che se $X \subset \mathbb{P}^n$ è una curva ellittica allora X è non speciale. E' facile vedere che se $S \subset \mathbb{P}^N$ è una superficie rigata ellittica gobba di ordine n allora anche la sua sezione iperpiana C sarà gobba in $\mathbb{P}^{N-1}$ e quindi, essendo non speciale, sarà $n-1 \geq N-1$. D'altra parte non può essere $n=N$, se S non è un cono, infatti in tal caso un generico iperpiano H di $\mathbb{P}^N$ che contiene una generatrice taglierebbe la S secondo una ulteriore curva unisecante ellittica C_{n-1} di ordine $n-1$, la quale genererà al più uno spazio L di dimensione $n-2$. Ora il fascio di iperpiani per L taglierebbe la superficie S lungo la C_{n-1} fissa e una retta variabile così che S risulterebbe una rigata razionale contro l'ipotesi. Risulta pertanto $N \leq n-1$. D'altra parte Segre riesce a costruire esplicitamente (vedi appendice I) a partire dalla S in $\mathbb{P}^n$ (se $N<n-1$) una nuova rigata ellittica $S' \subset \mathbb{P}^{n-1}$ di ordine n che si proietta nella S.

Risolto in questo modo il problema di Riemann-Roch Segre comincia a classificare le rigate ellittiche di ordine n in $\mathbb{P}^{n-1}$, che non sono coni, andando a cercare i possibili gradi delle unisecanti di grado minimo ed il numero di tali unisecanti ed, a partire da questi possibili caratteri fornisce espliciti esempi di rigate ellittiche con i caratteri assegnati.

Vale la pena di segnalere che questa analisi conduce ad un fatto nuovo, rispetto al caso razionale: l'esistenza di superfici rigate *indecomponibili*, cioè tali che ogni coppia di curve unisecanti ha una intersezione non vuota. *Appaiono insomma, crediamo per la prima volta, dei fibrati di rango due indecomponibili.* Per costruire l'esempio più semplice (e facilmente estendibile) consideriamo una cubica piana liscia Γ e fissiamo su di essa un punto di flesso O elemento neutro di Γ pensato come gruppo algebrico. Sia ora $A \in \Gamma, A \neq O$ un punto e $\tau_A : \Gamma \to \Gamma$ la *traslazione* che associa a P il punto $P \oplus A$ (dove con $\oplus$ si è indicata la somma nel gruppo Γ). Immergendo due copie del piano di Γ in $\mathbb{P}^5$ in modo che siano sghembe, possiamo costruire una superficie rigata $S_A \subset \mathbb{P}^5$ congiungendo con una retta le immagini in $\mathbb{P}^5$ dei punti P e $\tau(P)$. E' facile vedere che il fibrato E_{S_A} associato a tale superficie è decomposto, e anzi

$$E_{S_A} = \mathcal{O}(-3O) \oplus \mathcal{O}(-3A)$$

Inoltre la superficie S_A contiene solo 2 unisecanti cubiche e ∞^2 unisecanti di grado 4 che formano un sistema algebrico di grado 2 cioè 2 curve generiche del sistema si incontrano trasversalmente in 2 punti. Proiettando ora la superficie S_A in $\mathbb{P}^4$ da un punto P_0 scelto per la generatrice per O, fuori dai 2 piani, otteniamo una superficie $S'_A \subset \mathbb{P}^4$ di ordine 5 la quale contiene un sistema algebrico ∞^1 di unisecanti di ordine minimo 3 ottenuto proiettando le quartiche di S_A che passano per P_0. La superficie S'_A non contiene coniche le quali sarebbero proiezione o di una conica di S_A(che non esiste) o di una cubica di S_A passante per P_0 (che non esiste stante la scelta del punto P_0). La superficie S'_A che risulta liscia e normale è pertanto indecomponibile poichè se C_1 e C_2 sono due unisecanti di grado n_1 e n_2 in S'_A con $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ risulta(4) $n_1 + n_2 = 5$ e quindi $n_1$oppure $n_2 \leq 2$.

E' anche facile vedere che fissato O, le immersioni dei due piani in $\mathbb{P}^5$ ed il punto P_0, le superfici S'_A, ottenute al variare di A, non sono proiettive nel loro $\mathbb{P}^4$ mentre con una scelta opportuna delle coordinate possiamo fissare arbitrariamente O, i due piani ed il punto P_0. Insomma in $\mathbb{P}^4$ abbiamo una famiglia S'_A $A \in \Gamma \setminus \{0\}$ di superfici rigate indecomponibili di ordine 5. Per A=0 la costruzione precedente degenera ad una superficie decomponibile generata da una cubica piana e una retta doppia, ma cambiando la scelta dell'elemento neutro per Γ otteniamo che le superfici indecomponibili sono parametrizzatate dai punti di Γ, ed ogni altra è proiettiva ad una di queste. Pertanto, contando i moduli, abbiamo che i fibrati corrispondenti provengono tutti da uno fissato tensorizzando per un fibrato in rette di grado zero.

Traducendo questo nel linguaggio moderno il fibrato indecomponibile $E^*_A := E_{S'_A}$ è dato dalla successione

$$0 \to \mathcal{O}(-3O) \oplus \mathcal{O}(-3A) \to E^*_A \to \mathcal{O}_O \to 0$$

da cui ricaviamo, con facili conti, l'estensione

$$0 \to \mathcal{O} \to E_A(-2O) \to \mathcal{O}(3A-2O) \to 0$$

e da qui vediamo che i fibrati indecomponibili di rango 2 e grado 1 si ottengono tutti come estensioni del tipo

$$0 \to \mathcal{O} \to ? \to \mathcal{O}(P) \to 0$$

per qualche $P \in C$. E' adesso facile ritrovare il fatto(vedi [H] p.377) che i fibrati suddetti si ottengono tutti dalla particolare estensione con $P=O$ tensorizzando per un opportuno fibrato in rette. Questo è in accordo col corollario a p.434 di [A], dove è trattato anche il caso del rango superiore a 2.

§6. Le superfici rigate di genere qualunque

Il problema di Riemann-Roch per i fibrati di rango qualunque su una curva di genere p viene risolto definitivamente dal Segre in una nota Lincea[S5] del 1887 seguendo una nuova strada. Da una corrispondenza epistolare con Schubert, Segre viene a conoscenza di una interessante formula enumerativa che unita a una formula di Zeuthen (oggi nota come teorema di Hurwitz) permette di calcolare il genere di una curva plurisecante γ, tracciata su una varietà $S \subset \mathbb{P}^n$, rigata in spazi lineari di dimensione s, parametrizzati da una curva di genere p, in funzione dei caratteri proiettivi della S e dell'ordine della γ. Da tale formula Segre deduce in modo molto ingegnoso(vedi appendice II) la dimensione dello spazio proiettivo ove si trova il modello normale della S, che potremmo scrivere

$$h^0(E_S^*) \geq n-(s+1)(g-1) \tag{6}$$

distinguendo i casi (speciale e non speciale) nei quali la (6) è una disuguaglianza o uguaglianza ($h^1(E_S^*) \neq 0$, $h^1(E_S^*)=0$). Successivamente la stessa formula del genere, unita al "lemma di Castelnuovo", permetterà a Segre di dare una nuova dimostrazione proiettiva ed iperspaziale del teorema di Riemann-Roch per le curve.

Stabilita la dimensione dello spazio dove vive il modello normale di una superficie rigata di genere p Segre si propone di studiare tali modelli in una ricerca pubblicata a due riprese in Mathematische Annalen ([S4][S6]) nel 1887 e nel 1889. Lo studio e i risultati cui l'autore perviene sono molto profondi anche se spesso, come talora Segre avverte, il rigore delle dimostrazioni può lasciare qualche legittimo dubbio tanto che solo in tempi molto recenti si è potuto precisare le ipotesi e provare i suoi risultati con tutto il rigore necessario.

Lo scopo principale della ricerca è quello di determinare, per una superficie rigata $S \subset \mathbb{P}^N$, di ordine n e genere p $(N=n-2p+1)$ la famiglia $\mathcal{C}_m$ delle sue unisecanti di un fissato ordine m; e poichè Segre ben vede che, solo in ipotesi di sufficiente generalità sulla superficie S, è possibile descrivere tali famiglie egli assume che tali ipotesi, non ben precisate, siano verificate. Così, posto $d_m=2m-n-p+1$, egli può concludere con le seguenti affermazioni:

$$\textit{se } d_m \geq 0, \quad \dim \mathcal{C}_m = d_m \tag{7}$$

$$\textit{se } d_m < 0, \quad \mathcal{C}_m = \emptyset \tag{8}$$

l'indice della famiglia $\mathcal{C}_m$, cioè il numero di curve della famiglia che passano per $d_m \geq 0$ punti generici di S, è 2^p (9)

in particolare:

$$\textit{se } d_m=0 \quad \mathcal{C}_m \textit{ è costituita da } 2^p \textit{ unisecanti del grado minimo } \frac{(n+p-1)}{2} \tag{10}$$

Se la superficie non è sufficientemente generale, tali dimensioni d_m possono in casi particolari aumentare. Il metodo usato da Segre per costruire rigate normali in $\mathbb{P}^N$ e per studiare le loro famiglie di unisecanti $\mathcal{C}_m$ consiste, come nell'esempio della rigata quintica ellittica di $\mathbb{P}^4$, nel partire da rigate decomponobili, facili da studiare, poste in uno spazio $\mathbb{P}^{N+x}$ e proiettare tali rigate in $\mathbb{P}^N$ da x loro punti. Una analisi accurata e molto semplice permette di confrontare le unisecanti della rigata di $\mathbb{P}^{N+x}$ con quelle della sua proiezione e poichè, nel caso di rigate decomponibili il computo delle dimensioni d_m si riduce, essenzialmente, al teorema di Riemann-Roch sulla curva base X, se i punti da cui si proietta sono generici si riesce a descrivere le famiglie $\mathcal{C}_m$ che interessano. (Una descrizione moderna di questo metodo si trova in [Gh]).

Il calcolo dell'indice 2^p si basa invece su una formula numerativa di Castelnuovo[C] sulla validità della quale lo stesso Segre non nasconde dei dubbi: "*La démonstration ingénieuse, que ce géomètre y donne de cette importante formule, pourrait laisser sur sa validité absolue des doutes, qui se réfléchiraient sur le n° présent et plus loin sur les n°° 20 et 21 de ces Recherches; cependant les confirmations qu'on trove de ces résultats me portent à penser qu'ils sont absolument vrais*".

E' piuttosto strano pensare che questi risultati siano stati completamente ignorati, per quasi 100 anni, fino a quando, dagli anni 1950 in poi, vari autori, come Gunning, Nagata, Maruyama, Atiyah ed altri ritrovavano in varie forme, e senza saperlo, le stesse cose, o meglio alcune, e neppure le più profonde, delle cose trovate da Segre. Così ad esempio la (7) implica che, su una superficie rigata di genere p, l'autointersezione minima di una sua unisecante C_0 è sempre non più grande di p:

$$C_0^2 \leq p$$

come è subito visto osservando che l'autointersezione di una unisecante C di grado m sulla S di ordine n è data da

$$C^2 = 2m - n$$

E' in questa forma che Nagata[N] dà questo teorema senza citare, nè conoscere probabilmente, il lavoro di Segre. Un'altra formulazione equivalente di questo fatto, nel linguaggio dei fibrati, consiste nell'affermare che se E è un fibrato di rango 2 e grado n su X di genere p e L_0 è il sottofibrato in rette di E che ha il grado massimo allora risulta

$$\deg L_0 \geq [\frac{n-p+1}{2}],$$

cosa che, se E è generato dalle sezioni globali è una immediata conseguenza di (7) e, nel caso contrario, al caso precedente possiamo ridurci tensorizzando per un opportuno fibrato in rette. E' in questa forma che ritroviamo in Gunning[Gu] e altri, tra cui Stuhler[St], Lange-Narasimhan[LN],Lange[L1], alla fine degli anni '70 l'antico risultato di Segre. Lo studio delle famiglia di unisecanti $\mathcal{C}_m$ oltre che una revisione critica dell'insieme dei risultati di Segre, precisando le ipotesi di generalità in cui egli si pone, può trovarsi nel lavoro di Ghione[G] dove viene pure calcolato (vedi anche [GhLa]) il numero 2^p senza usare la formula numerativa di Castelnuovo. Questo numero è stato anche ricalcolato da Hirschowitz[Hi] nel 1984 e da Lange[L2] nel 1985. Notiamo anche che le rigate generali, nel senso di

Segre, danno luogo a fibrati per i quali il sottofibrato di grado massimo ha il grado $[\frac{n-p+1}{2}]$ risultando così particolari *fibrati stabili nel senso di Mumford*. Che il fibrato generico sia più che stabile o, come dicono alcuni([Hi],[T]), fortemente stabile, cioè tale che per ogni $L \subset E$ risulti

$$\deg L \leq \frac{\deg E - p + 1}{2}$$

è una nozione che è stata estesa al rango qualunque e utilizzata da vari autori.

Notiamo anche che la famiglia di unisecanti $\mathcal{C}_m$ della superficie S corrisponde, usando il nostro vocabolario, allo schema(di Grothendieck) dei quozienti di E_S^* di rango 1 e grado m, schemi dei quali, in un certo senso, Segre aveva dato la dimensione d_m e per $d_m=0$ il numero dei punti.

Per concludere vogliamo osservare come l'interesse di Segre allo studio delle varietà rigate fosse motivato anche dallo studio delle curve algebriche da un punto di vista proiettivo. Infatti una serie lineare g_1^k su una curva $X \subset \mathbb{P}^n$ definisce una varietà rigata razionale S, costituita dagli spazi lineari generati dai divisori della serie, che contiene la X come k-secante. Viceversa l'esistenza di una tale varietà S assicura la presenza su X della g_1^k. E' partendo da questa osservazione che in tempi recenti E.Mezzetti e G.Sacchiero [MS] hanno potuto studiare quelle componenti dello schema di Hilbert delle curve di $\mathbb{P}^n$ che nascono dalla considerazione delle curve k-gonali.

Alla luce di queste osservazioni ci piace riflettere sul come l'andamento irregolare delle mode matematiche possa, come anche avviene ed è avvenuto in altri campi della cultura, seppellire per decenni intere teorie, ottimi risultati e metodi, per vederle poi riaffiorare come una nuova necessità e senza che, apparentemente, di quelle ci sia l'impronta.

Appendice I: Riemann-Roch per superfici rigate razionali ed ellittiche

In questa appendice vogliamo dare la prova del teorema di Riemann-Roch per una superficie rigata ellittica seguendo le idee di Segre. In realtà la costruzione che seguirà è relativa al caso razionale così come il Bertini ce la presenta([Ber]pag.356) ma essa è essenzialmente identica a quella fornita da Segre per il caso ellittico[S3], e con poche modifiche a quella può estendersi.

Premettiamo alla dimostrazione il seguente lemma: *Sia $C_n \subset \mathbb{P}^n$ la curva di Veronese, $O \notin C_n$ un punto fissato e Γ il cono di vertice O e direttrice C_n. Presi n+1 punti di Γ indipendenti esiste una curva razionale normale contenuta in Γ che li contiene.* Siano infatti $P_1,\dots,P_{n+1}$ i fissati punti di Γ, H l'iperpiano generato da $P_1,\dots,P_n$ e C l'intersezione di Γ con H. Immergiamo ora lo spazio ambiente in un $\mathbb{P}^{n+1}$ in modo che H sia contenuto in un iperpiano H' di $\mathbb{P}^{n+1}$ non contenente O, che contiene il modello normale C' della C, proiezione da un punto $O' \in H'$. Sia Γ' il cono di vertice O e direttrice C'. Γ' si proietta da O' in Γ e i punti $P_1,\dots,P_{n+1}$ provengono dai punti $P_1',\dots P_{n+1}'$ di Γ' indipendenti che generano l'iperpiano H" di $\mathbb{P}^{n+1}$. H" taglia il cono Γ' in una curva razionale di ordine n che si proietta su Γ nella curva cercata.

Sia dunque S una superficie rigata razionale di ordine n posta in uno spazio $\mathbb{P}^{n+1-k}$ che essa genera. Vogliamo ora costruire esplicitamente una nuova superficie rigata S' razionale di ordine n che genera uno spazio $\mathbb{P}^{n+1}$ e che si proietta sulla originale S. Per facilitare il lettore nel seguire questa costruzione alleghiamo uno schizzo(fig.1) nel quale gli indici indicano la successione "temporale" dei vari passi.

1. Nello spazio $H_0=\mathbb{P}^{n+1-k}$ della S scegliamo un iperpiano generico $H_1=\mathbb{P}^{n-k}$ che segherà la S lungo una curva C_1 irriducibile, razionale di ordine n.
2. La curva C_1 possiamo sempre ottenerla come proiezione di una curva V_2 razionale normale di ordine n posta in un $H_2=\mathbb{P}^n$ con centro uno spazio $O_2=\mathbb{P}^{k-1}$ che potremmo immergere in uno spazio $K_2=\mathbb{P}^{n+1}$ generato da H_0 e O_2. Sia Γ_2 il cono proiettante.
3. Un iperpiano $H_3=\mathbb{P}^{n-1}$ passante per O_2 e contenuto in H_2 segherà la V_2 in n punti $P_1,P_2,\dots,P_n$ indipendenti.
4. Tale H_3 si proietterà in un iperpiano $H_4=\mathbb{P}^{n-k-1}$ di H_1 che segherà la C_1 nei punti $P_1', P_2',\dots,P_n'$ proiezione dei precedenti $P_1,P_2,\dots P_n$
5. Sia ora $H_5=\mathbb{P}^{n-k}$ un iperpiano di H_0 passante per H_4, esso incontrerà la rigata lungo la curva C_5 che avrà in comune con la C_1 i detti punti $P_1', P_2',\dots,P_n'$.
6. Costruiamo in K_2 il cono Γ_6 di vertice O_2 generato dalla C_5, tale cono di ordine n genererà uno spazio $H_6=\mathbb{P}^n$ e conterrà gli n punti indipendenti $P_1,\dots,P_n$. Scegliamo su Γ_6 un ulteriore punto generico P_{n+1} indipendente dagli altri. Per questi n+1 punti possiamo far passare, visto il lemma precedente, una curva razionale V_6 di ordine n che si proietterà pertanto

da O_2 nella C_5.

7. Sia ora A un punto di V_2, A' la sua proiezione su C_1, B' il punto che gli corrisponde sulla C_5 mediante la generatrice della rigata S per A' e B il punto che si proietta in B' da O_2. Congiungendo A con B mediante una retta nel $K_2 = \mathbb{P}^{n+1}$ si ottiene una rigata razionale di ordine n che genera il K_2 e si proietta in S.

La costruzione si adatta con poche modifiche al caso di genere 1([S3] n.4).

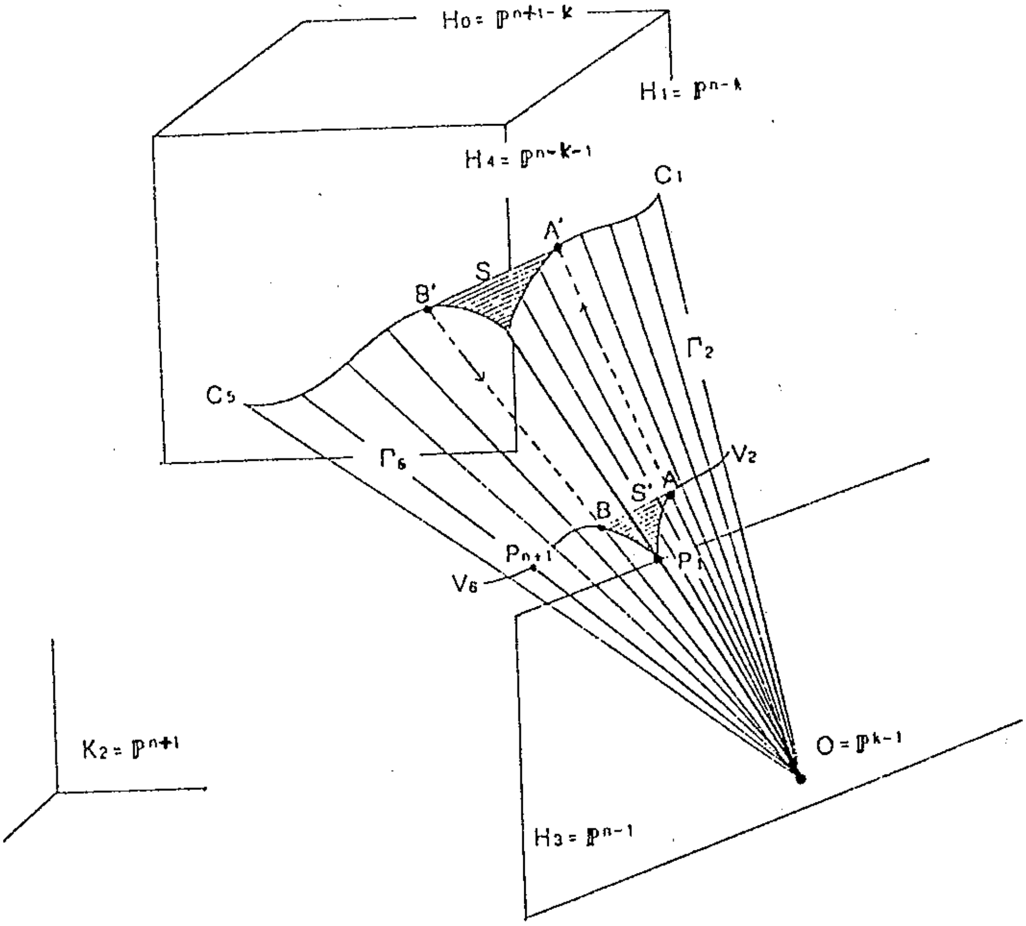

Fig. 1

Appendice II Riemann-Roch per varietà rigate

La prova di Segre del teorema di Riemann-Rich per varietà rigate in spazi proiettivi su una curva X di genere p si basa su una formula numerativa che Schubert gli aveva comunicato per lettera. Una dimostrazione moderna con una analisi delle ipotesi di validità si trova in [GS].

Sia dunque $S \subset \mathbb{P}^N$ una varietà di ordine n rigata in spazi proiettivi di dimensione s sulla curva X di genere p. Sia $\gamma \subset S$ una curva di ordine m k-secante ($k \geq s+1$) cioè tale che il morfismo

$$\pi|_\gamma : \gamma \to X$$

sia un rivestimento k-plo della base X. Ora in funzione di questi caratteri numerici e di un ulteriore carattere z, che misura essenzialmente il numero di divisori di grado s+1 contenuti in $\gamma_x = \gamma \cap S_x$ e che non generano la fibra S_x, in opportune, quanto naturali, ipotesi, il genere della curva γ è dato dalla:

$$g = \frac{k-1}{s(s+1)}[(s+1)(m-s)-kn]+kp-\frac{z}{\binom{k-2}{s-1}}$$

Supponiamo ora che sulla S esista una curva γ (s+1)-secante tale che per tutti gli $x \in X$ gli s+1 punti di γ sulla fibra $S_x = \mathbb{P}^s$ siano indipendenti. E' in questo caso $z=0$ e la formula del genere fornisce per la γ il valore

$$g = m+(s+1)(p-1)+1-n$$

E' chiaro che la S sarà normale se e solo se la γ sarà normale, cioè

$$\chi(\gamma, \mathcal{O}_\gamma(1)) = \chi(S, \mathcal{O}_S(1)) = \chi(X, E_S^*)$$

e applicando allora il teorema di Riemann-Roch alla curva γ si ottiene

$$\chi(S, \mathcal{O}_S(1)) = m-g+1$$

e sostituendo il valore del genere calcolato

$$\chi(S, \mathcal{O}_S(1)) = n-(s+1)(p-1)$$

In definitiva il punto della questione è costruire sulla S la curva γ con la proprietà richiesta. Il metodo escogitato da Segre consiste nell'intersecare la S con un opportuno cono Γ di $\mathbb{P}^N$ del quale ora diamo la costruzione(vedi fig. 2).

1. Scegliamo in $\mathbb{P}^N$ uno spazio $O_1 = \mathbb{P}^{N-s-2}$ in modo che $O_1 \cap S = \emptyset$ e una curva razionale normale C_1 di ordine s+1 posta in uno spazio $H_1 = \mathbb{P}^{s+1}$ in $\mathbb{P}^N$ sghembo con O_1. Costruiamo così il cono Γ di vertice O_1 generato dalla C_1. Sarà dim $\Gamma = N-s$.
2. Sia ora $S_x = \mathbb{P}^s$ una qualunque direttrice della varietà rigata S ($x \in X$) e consideriamo uno spazio $H_2 = \mathbb{P}^{s+1}$ che contiene S_x ma che non interseca il vertice O_1 del cono. Tale spazio esiste poichè $O_1 \cap S_x = \emptyset$ e quindi O_1 e S_x generano un iperpiano di $\mathbb{P}^N$. Tale H_2 intersecherà il cono Γ lungo una curva C_2 razionale normale di ordine s+1. Ora S_x è un iperpiano di H_2 e quindi incontrerà la C_2 in s+1 punti $P_x, P'_x, P''_x\ldots$ indipendenti. Ne segue che

$\Gamma \cap S_x$ sono (s+1) punti indipendenti per ogni x e quindi $\Gamma \cap S$ è una curva γ con le proprietà richieste.

Bibliografia

[A] *M.F.Atiyah*, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. (3)VII 27(1957), 414-452

[Bel] *A.Bellatalla*, Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari, Atti R. Accad. Torino, 36(1901), 803-833

[Ber] *E.Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, Messina 1923

[C] *G.Castelnuovo*, Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche, Rend. Circ. Mat. Palermo,III n.4(1889)

[DW] *J.W.R.Dedekind*, *Weber*, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen,Crelle J. 92(1882),181-290

[Gh] *F.Ghione*, Quelques résultats de Corrado Segre sur les surfaces réglées, Math. Ann. 255(1981), 77-95

[GhLa] *F.Ghione*, *A.Lascu*, Unisecant curves on a general ruled surface, Manuscripta Math. 26(1978), 169-177

[GS] *F.Ghione*, *G.Sacchiero*, Genre d'une courbe lisse traceé sur une varieté réglée, Lect. Notes Math 1260(1987), 97-107

[Gr] *A.Grothendieck*, Sur la classification de fibré holomorphe sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math. 79(1957), 121-138

[Gu] *R.C.Gunning*, On the divisor order of vector bundles of rank 2 on a Riemann surface, Bull.Inst.Math.Acad.Sinica 6(1978), 295-302

[Ha] *R.Hartshorne*, Algebraic geometry, New York 1977

[Hi] *A.Hirschowitz*, Rank techniques and jump stratifications, 1984

[L1] *H.Lange*, Higher secant varieties of curves and the Theorem of Nagata on ruled surfaces, Manuscripta Math. 47(1984), 263-269

[L2] *H.Lange*, Höhere sekantvarietäten und Vektorbündel auf Kurven, Manuscripta Math. 52(1985), 63-80

[LN] *H.Lange*, *M.S.Narasimhan*, Maximal subbundles of rank two vector bundles on curves, Math. Ann. 266(1983), 55-72

[N] *M.Nagata*, On self-intersection number of a section on a ruled surface, Nagoya Math. J. 37(1970), 191-196

[NM] *M.Nagata*, *M.Maruyama*, Note on the structure of a ruled surface, J.reine angew.Math., 239-240(1969), 68-73

[M] *M.Maruyama*, Elementary transformations in the theory of algebraic vector bundles, Lect. Notes Math. 961(1982), 241-266

[MS] *E.Mezzetti*, *G.Sacchiero*, Gonality and Hilbert schemes of smooth curves, Lect. Notes Math. 1389, 183-194, Berlin 1989

[OSS] *C.Okonek. M.Schneider*, *H.Spindler*, Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. 3(1980), Boston 1980

[S1]* *C.Segre*, Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque, Atti R. Accad. Torino, 19(1883-84), 265-282

[S2]* *C.Segre*, Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani, Atti R. Accad. Torino, 21(1885-86),95-115

[S3]* *C.Segre*, Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine, Atti R. Accad. Torino, 21(1885-86), 628-651

[S4]* *C.Segre*, Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques I, Math. Ann. 30(1887), 203-226

[S5]* *C.Segre*, Sulle varietà algebriche composte di una serie sempicemente infinita di spazi, Atti Ac. Lincei, (IV),3(1887), 149-153

[S6]* *C.Segre*, Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques II, Math. Ann. 34(1889), 1-25

[St] *U.Stuhler*, Unterbündel maximalen Grades von Vektor-bündeln auf algebraischen Kurven, Manuscripta Math. 27(1979), 313-321

[T] *A.N.Tyurin*, The geometry of moduli of vector bundles, Russian Math.Surveys 29:6(1974), 57-88

[V] *G.Veronese*, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, Math. Ann. 19(1882), 161-234

*Le opere di C.Segre qui contrassegnate con * sono ristampate in "Opere scelte", Ed. Cremonese, Roma* 1957.