{BnF

gallica
BIBLIOTHÈQUE NUMÉRIQUE

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1987/07/30.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF.Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer ici pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 257-260, 1987

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Critères de scindage pour les fibrés vectoriels sur les grassmanniennes et les quadriques

Giorgio Ottaviani

Résumé — On donne des conditions cohomologiques nécessaires et suffisantes pour le scindage des fibrés vectoriels sur les grassmanniennes et les quadriques.

Splitting criteria for vector bundles on Grassmannians and quadrics

Abstract — *We give some necessary and sufficient cohomological conditions for vector bundles on Grassmannians and quadrics to be a direct sum of line bundles.*

1. Introduction. — Un critère dû à Horrocks [11] assure qu'un fibré vectoriel E sur un espace projectif complexe est (complètement) décomposable (i. e. est une somme directe de fibrés en droites) si et seulement si les groupes de cohomologie $H^i(\mathbb{P}^n, E(t))$ sont nuls pour $0<i<\dim \mathbb{P}^n=n$ et pour tout $t\in\mathbb{Z}$, où $E(t)=E \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)$.

Nous étudions ici quelques généralisations de ce critère aux grassmanniennes $\mathrm{Gr}(k, n)$ des k-variétés linéaires dans $\mathbb{P}^n$ et aux quadriques Q_n dans $\mathbb{P}^{n+1}$. Comme $\mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}(k, n))=\mathrm{Pic}(Q_n)=\mathbb{Z}$ pour $n\geqq 3$, nous gardons la notation $E(t)$, E étant un fibré vectoriel sur une grassmannienne ou sur une quadrique. La première classe de Chern de E est alors un entier.

Soit $X=\mathrm{Gr}(k, n)$ ou $X=Q_n$. Il est d'abord naturel de se demander si l'annulation des groupes $H^i(X, E(t))$ pour $0<i<\dim X$ implique le scindage de E. La réponse est négative: si $X=\mathrm{Gr}(k, n)$ n'est pas un espace projectif le fibré quotient sur X est un contre-exemple, et sur $X=Q_n$ nous construisons des fibrés stables de rang $2^{[(n-1)/2]}$, que nous appelons fibrés spineurs, qui donnent des contre-exemples dans ce cas.

Pour donner des critères cohomologiques de scindage pour un fibré vectoriel E il faut alors analyser aussi le comportement des produits tensoriels de E avec le fibré quotient $(X=\mathrm{Gr}(k, n))$ ou les fibrés spineurs $(X=Q_n)$.

Nous renvoyons à [15] pour les propriétés qui concernent les fibrés vectoriels.

Je remercie V. Ancona, pour m'avoir posé le problème et m'avoir beaucoup encouragé pendant le travail.

2. Critères de scindage sur les grassmanniennes. — Notre résultat principal sur les grassmanniennes est le suivant:

Théorème 1. — *Soit* E *un fibré vectoriel sur* $\mathrm{Gr}(k, n)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) E *se décompose.*

(b) $H^i(\mathrm{Gr}(k, n), \overset{i_1}{\Lambda} Q^* \otimes \ldots \otimes \overset{i_s}{\Lambda} Q^* \otimes E(t))=0$, $\forall i_1, \ldots, i_s$ *tels que* $s\leqq k$, $0\leqq i_1, \ldots, i_s\leqq n-k$, $\forall t\in\mathbb{Z}$, $\forall i: 0<i<(k+1)(n-k)=\dim \mathrm{Gr}(k, n)$

(c) $H^i(\mathrm{Gr}(k, n), \overset{i_1}{\Lambda} Q^* \otimes \ldots \otimes \overset{i_s}{\Lambda} Q^* \otimes E(t))=0$, $\forall t\in\mathbb{Z}$, $\forall i_1, \ldots, i_s$, i *tels que*

$$\sum_{n=1}^{s} i_n\leqq i<\sum_{n=1}^{s} i_n+\dim \mathrm{Gr}(k-s, n-s)$$

Note présentée par Paul Malliavin.

0249-6291/87/03050257 \$ 2.00 © Académie des Sciences

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

$$0 < i, \qquad 0 \leqq i_1, \ldots, i_s \leqq n-k$$

où on pose Q^* *=fibré dual du fibré quotient* Q, $\overset{0}{\Lambda} Q^* = \mathcal{O}_{Gr}$, $\dim \operatorname{Gr}(p, q) = 0$ *si* $p < 0$.

Si la grassmannienne est un espace projectif, le théorème 1 est le critère de Horrocks. Pour prouver l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ nous écrivons $\operatorname{Gr}(k, n)$ comme la variété homogène complexe $SL(n+1)/P$, où

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} \in SL(n+1) \mid h_4 \in GL(k+1) \right\} \quad [17],$$

et utilisons le théorème de Bott pour les fibrés vectoriels homogènes ([5], [12]). Pour appliquer le théorème de Bott nous devons d'abord décomposer les représentations qui définissent nos fibrés vectoriels en représentations irréductibles, suivant l'algorithme de Littlewood-Richardson pour les représentations de GL(V) ([18], [14], [4], p. 879).

L'implication $(b) \Rightarrow (c)$ est triviale: si $s > k$ la condition (c) est vide.

La preuve de l'implication $(c) \Rightarrow (a)$ se fait par récurrence et suit la démonstration du critère de Horrocks donnée dans [3].

Nous remarquons que $S^{k+1} Q^*(-1)$ est un facteur direct de $\underbrace{Q^* \otimes \ldots \otimes Q^*(-1)}_{k+1 \text{ fois}}$ et $H^{k+1}(\operatorname{Gr}(k, n), S^{k+1} Q^*(-1)) = \mathbb{C}$ (d'après le théorème de Bott), donc la condition (b) du théorème 1 ne peut pas être améliorée.

Nous considérons maintenant le cas particulier rang $E = 2$. Posons $F = Q^{\oplus k} \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus n-k-1}$; c'est un fibré engendré par ses sections globales dont une section générique s'annule exactement sur une droite de $\operatorname{Gr}(k, n)$.

On démontre le:

THÉORÈME 2. — *Soit* E *un* 2-*fibré sur* $\operatorname{Gr}(k, n)$ $(n \geqq 3)$. *Soit*

$$d = (k+1)(n-k) = \dim \operatorname{Gr}(k, n).$$

(*a*) *Si* $c_1(E) = 0$, E *se décompose si et seulement si*

$$H^i(\operatorname{Gr}(k, n), \overset{i-1}{\wedge} F^* \otimes E(-1)) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, d-2.$$

(*b*) *Si* $c_1(E) = -1$, E *se décompose si et seulement si*

$$H^i(\operatorname{Gr}(k, n), \overset{i-1}{\wedge} F^* \otimes E(-1)) = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, d-1.$$

On démontre d'abord que E est uniforme, et ensuite on utilise la classification ([16], [10]) des 2-fibrés uniformes sur $\operatorname{Gr}(k, n)$.

Si $k = 0$ ou $k = n-1$, la grassmannienne $\operatorname{Gr}(k, n)$ est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. Dans ce cas $F^* = \mathcal{O}(-1)^{\oplus n-1}$ et dans le théorème 2 on peut lire $\mathcal{O}(-1)$ à la place de $\overset{i}{\Lambda} F^*$, et alors la condition (a) donne le corollaire 1.8(i) de [6] et la condition (b) (avec le théorème de dualité de Serre) donne le corollaire 1.8 (ii) de [6].

3. CRITÈRES DE SCINDAGE SUR LES QUADRIQUES. — Notons S_k la variété des spineurs de dimension $k(k+1)/2$, qui paramétrise la famille des sous-variétés linéaires de dimension $k-1$ sur une quadrique lisse Q_{2k-1} de dimension impaire, ou l'une des deux familles de sous-variétés linéaires de dimension k sur une quadrique lisse de dimension paire $2k$ ([9], ch. 6). Il est bien connu ([13], p. 16) que $\operatorname{Pic}(S_k) = \mathbb{Z}$ et que $H^0(S_k, \mathcal{O}(1))$ est un espace vectoriel de dimension 2^k.

Pour $x \in Q_{2k-1}$, désignons par $(S_{k-1})_x$ la variété

$$\{ \mathbb{P}^{k-1} \in \operatorname{Gr}(k-1, 2k) \mid x \in \mathbb{P}^{k-1} \subset Q_{2k-1} \};$$

c'est une variété isomorphe à S_{k-1}, et on a un plongement naturel $i_x:(S_{k-1})_x \to S_k$.

Pour $x \in Q_{2k}$, considérons la variété $\{\mathbb{P}^k \in \mathrm{Gr}(k, 2k+1) \mid x \in \mathbb{P}^k \subset Q_{2k}\}$; elle a deux composantes connexes, chacune isomorphe à S_{k-1}. On les note $(S'_{k-1})_x$, $(S''_{k-1})_x$. On a des plongements naturels

$$j'_x: \ (S'_{k-1})_x \to S'_k, \qquad j''_x: \ (S''_{k-1})_x \to S''_k$$

les notations étant évidentes.

PROPOSITION 3. — (i) *Soit* $x \in Q_{2k-1}$, *Alors* $i_x^* \mathcal{O}_{S_k}(1) \simeq \mathcal{O}_{(S_{k-1})_x}(1)$ *et l'application de restriction :*

$$H^0(S_k, \mathcal{O}(1)) \to H^0((S_{k-1})_x, \mathcal{O}(1)),$$

est surjective.

(ii) *Soit* $x \in Q_{2k}$. *Alors* $j'^*_x \mathcal{O}_{S'_k}(1) \simeq \mathcal{O}_{(S'_{k-1})_x}(1)$, $j''^*_x \mathcal{O}_{S''_k}(1) \simeq \mathcal{O}_{(S''_{k-1})_x}(1)$ *et les applications de restriction*:

$$H^0(S'_k, \mathcal{O}(1)) \to H^0((S'_{k-1})_x, \mathcal{O}(1))$$

$$H^0(S''_k, \mathcal{O}(1)) \to H^0((S''_{k-1})_x, \mathcal{O}(1))$$

sont surjectives.

D'après la proposition 3, en prenant les duaux des espaces des sections on obtient les plongements naturels :

$$Q_{2k-1} \xrightarrow{s} \mathrm{Gr}(2^{k-1}-1, 2^k-1)$$

$$Q_{2k} \xrightarrow{s'} \mathrm{Gr}(2^{k-1}-1, 2^k-1), \qquad Q_{2k} \xrightarrow{s''} \mathrm{Gr}(2^{k-1}-1, 2^k-1)$$

DÉFINITION. — Soit U le fibré universel de rang 2^{k-1} sur $\mathrm{Gr}(2^{k-1}-1, 2^k-1)$. On définit

$$s^* U = S \text{ fibré spineur sur } Q_{2k-1}$$

$$s'^* U = S', \qquad s''^* U = S'' \qquad \text{fibrés spineurs sur } Q_{2k}.$$

Si f est un automorphisme qui échange les deux familles de k-sous-variétés, alors $f^* S' = S''$, $f^* S'' = S'$. Les fibrés spineurs sont homogènes.

THÉORÈME 4. — (i) *Soient* S', S'' *les fibrés spineurs sur* Q_{2k}, *et* $i: Q_{2k-1} \to Q_{2k}$ *une section hyperplane lisse. Alors* $i^* S' = i^* S'' = S$ *est le fibré spineur sur* Q_{2k-1}.

(ii) *Soient* S *le fibré spineur sur* Q_{2k+1}, *et* $i: Q_{2k} \to Q_{2k+1}$ *une section hyperplane lisse. Alors* $i^* S = S' \oplus S''$, *où* S' *et* S'' *sont les fibrés spineurs sur* Q_{2k}.

(iii) *Les fibrés spineurs sont stables (au sens de Mumford-Takemoto).*

Exemples. — Sur $Q_4 \simeq \mathrm{Gr}(1,3)$ les fibrés spineurs sont le fibré universel et le dual du fibré quotient.

Nous énonçons le résultat principal concernant les quadriques.

THÉORÈME 5. — *Soient* E *un fibré vectoriel sur* Q_n $(n \geqq 3)$ *et* S *un fibré spineur sur* Q_n. *Alors* E *se décompose si et seulement si*

$$H^i(Q_n, E(t)) = 0 \qquad \textit{pour} \quad 2 \leqq i \leqq n-1$$

$$H^i(Q_n, E \otimes S(t)) = 0 \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n-2, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

On prouve d'abord le théorème pour Q_3, et ensuite par récurrence sur n, en utilisant une simple généralisation du corollaire 1.7 de [7] (*voir* [1]). Sur $Q_4 \simeq \mathrm{Gr}(1,3)$ le théorème 5 donne un critère un peu plus fort que le théorème 1.

L'analogue du théorème 2 pour les quadriques est le suivant :

THÉORÈME 6. — *Soient* E *un 2-fibré sur* $Q_n (n \geqq 3)$, *et* S *un fibré spineur sur* Q_n.

(*a*) *Si* $c_1(E)=0$, E *se décompose si et seulement si* $H^i(Q_n, E(-i))=0$ *pour* $1 \leqq i \leqq [n/2]$.

(*b*) *Si* $c_1(E)=-1$, E *se décompose si et seulement si*

$$H^i(Q_n, E(-i))=0 \qquad pour \quad 1 \leqq i \leqq n-2$$

$$H^i(Q_n, E \otimes S(-i+1))=0 \qquad pour \quad 2 \leqq i \leqq n-1$$

(*c*) *Si* $c_1(E)=-1$, E *est uniforme* (*et se décompose pour* $n \geqq 5$) *si et seulement si* $H^i(Q_n, E(-i))=0$ *pour* $1 \leqq i \leqq n-1$.

Pour démontrer le théorème 6, on utilise la classification des 2-fibrés uniformes sur les quadriques donnée dans [8].

Note reçue le 18 mai 1987, acceptée le 25 mai 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. BALLICO, Uniform vector bundles on quadrics, *Ann. Univ. Ferrara*, VII, 27, 1981, p. 135-146.

[2] E. BALLICO et P. E. NEWSTEAD, Uniform bundles on quadric surfaces and some related varieties, *J. London Math. Soc.*, 31, 1985, p. 211-223.

[3] W. BARTH et K. HULEK, Monads and moduli of vector bundles, *Manuscripta Math.*, 25, 1978, p. 323-347.

[4] E. BERGER, R. BRYANT et P. GRIFFITHS, The Gauss equations and rigidity, *Duke Math. J.*, 50, n° 3, 1983, p. 803-892.

[5] R. BOTT, Homogeneous vector bundles, *Ann. of Math.*, 66, 1957, p. 203-248.

[6] L. CHIANTINI et P. VALABREGA, Subcanonical curves and complete intersections in projective 3-space, *Annali di Mat.*, IV, 138, 1984, p. 309-330.

[7] G. ELENCWAJG et O. FORSTER, Bounding cohomology groups of vector bundles on $\mathbb{P}^n$, *Math. Ann.*, 246, 1980, p. 251-270.

[8] K. FRITZSCHE, Linear-Uniforme Bündel auf Quadriken, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, (4), 10, 1983, p. 313-339.

[9] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, New York, Wiley, 1978.

[10] M. GUYOT, Caractérisation par l'uniformité des fibrés universels sur la Grassmannienne, *Math. Ann.*, 270, 1985, p. 47-62.

[11] G. HORROCKS, Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 14, 1964, p. 689-713.

[12] M. ISE, Some properties of complex analytic vector bundles over compact complex homogeneous spaces, *Osaka Math. J.*, 12, 1960, p. 217-252.

[13] R. LAZARSFELD et A. VAN DE VEN, Topics in the geometry of projective spaces, Recent work of F. L. Zak, *D.M.V. Seminar* 4, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhäuser, 1984.

[14] D. LITTLEWOOD, *The theory of groups characters and matrix representations of groups*, Oxford, 1940.

[15] C. OKONEK, M. SCHNEIDER et H. SPINDLER, *Vector bundles on complex projective spaces*, Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1980.

[16] A. VAN DE VEN, On uniform vector bundles, *Math. Ann.*, 195, 1972, p. 245-248.

[17] J. WEHLER, *Beiträge zur algebraischen Geometrie auf homogenen komplexen Mannigfaltigkeiten, Habilitationsschrift*, München, 1984.

[18] H. WEYL, *The classical groups*, Princeton University Press, 1946.

Istituto Matematico U. Dini., viale Morgagni 67 *A*, 50134 *Firenze, Italy.*