Il modello di Poincarè
versione 12.5.08

Giorgio Ottaviani

Contents

1 L'inversione circolare

Sia data nel piano complesso una circonferenza Γ di centro O e raggio r. L'inversione circolare rispetto a Γ è l'applicazione biunivoca da $\mathbf{C} \setminus \{O\}$ in sé definita nel modo seguente. L'immagine di $A \in \mathbf{C} \setminus \{O\}$ è il punto A' sulla semiretta OA tale che $|OA| \cdot |OA'| = r^2$.

È immediato verificare che i punti di Γ sono lasciati fissi, mentre i punti interni a Γ vanno in punti esterni e viceversa. Inoltre l'inversione circolare σ è involutoria, cioè soddisfa $\sigma^2 = id$.

Proposizione 1.1 *Sia σ l'inversione circolare rispetto a una circonferenza Γ.*

(i) Se r è una retta passante per O allora $\sigma(r) = r$

(ii) Se r è una retta non passante per O allora $\sigma(r)$ è una circonferenza passante per O.

(iii) Se ϕ è una circonferenza passante per O allora $\sigma(\phi)$ è una retta non passante per O.

(iv) Se ϕ è una circonferenza non passante per O allora $\sigma(\phi)$ è una circonferenza non passante per O.

Dimostrazione (i) è banale. Per provare (ii), sia A il piede della perpendicolare condotta da O su r e e sia B un altro punto di r. Siano A', B' le immaginhi di A e B. L'uguaglianza $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$ mostra che OBA é simile a $OA'B'$. Quindi l'angolo $O\hat{B'}A'$ è uguale all'angolo $O\hat{A}B$ che è retto. Pertanto B' appartiene alla circonferenza di diametro OA' che risulta essere $\sigma(r)$.

(iii) è analoga a (ii). Per provare (iv), sia AB il diametro di ϕ che prolungato passa per O e C un altro punto di ϕ. Siano A', B', C' le tre immagini. Come nel punto precedente abbiamo che OAC è simile a $OC'A'$, OBC è simile a $OC'B'$. Allora $B'\hat{C'}A' = O\hat{C'}A' - O\hat{C'}B' = O\hat{A}C - O\hat{B}C = A\hat{C}B$ che è retto. Questo mostra che C' appartiene alla circonferenza di diametro $A'B'$ che risulta essere $\sigma(\phi)$. $\square$

L'equazione dell'inversione circolare di centro 0 e raggio 1 è data da

$$z' = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\overline{z}}$$

L'equazione dell'inversione circolare di centro z_0 e raggio r è data da

$$z' = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}$$

Corollario 1.2 *L'applicazione*

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

porta l'insieme delle rette e circonferenze in sé.

Proposizione 1.3 *L'inversione circolare è conforme, cioè conserva gli angoli.*

Dimostrazione L'inversione circolare si ottiene coniugando l'applicazione

$$z \mapsto z_0 + \frac{r^2}{z - z_0}$$

che é un'applicazione olomorfa. Siccome le appliaczioni olomorfe sono conformi e il coniugio é un'applicaizone conforme, segue la tesi. $\square$

2 Le trasformazioni di Möbius

Definizione 2.1 *Una trasformazione di Möbius è l'applicazione definita da*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ *e* $ad - bc \neq 0$.

L'applicazione precedente non è definita nel punto $z = -\frac{d}{c}$ (se $c \neq 0$).

Esercizio 2.2 *Sia* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$. *Provare che la composizione* fg *è data da*

$$fg(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

dove

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

Suggerimento: si cerchi di risolvere l'esercizio senza eseguire i calcoli, impostando le notazioni matriciali

L'esercizio precedente mostra anche che l'inversa di una trasformazione di Möbius è ancora una trasformazione di Möbius. Indichiamo con M il gruppo delle trasformazioni di Möbius.

Ogni elemento di M non è definito al più in un punto, notiamo che questo rimane vero per la composizione, cioè se f non è definita in P e g non è definita in Q, allora gf non è definita nel solo punto $f^{-1}(Q)$, e quindi può essere estesa a P se $P \neq f^{-1}(Q)$.

Teorema 2.3 *Il gruppo* M *delle trasformazioni di Möbius agisce in modo transitivo sull'insieme delle rette e delle circonferenze del piano. Questo significa che se* ϕ *è una retta o una circonferenza allora esiste* $g \in M$ *tale che* $g(\phi)$ *è l'asse reale.*

Dimostrazione Il gruppo M è generato dalle trasformazioni

$$z \mapsto z + b \text{ traslazioni}$$

$$z \mapsto az \text{ similitudini}$$

$$z \mapsto \frac{1}{z} \text{ inversione circolare composta col coniugio}$$

L'immagine di una retta o una circonferenza è ancora una retta o una circonferenza, questo è evidente per le traslazioni e le similitudini, mentre per il caso $z \mapsto \frac{1}{z}$ segue dal Coroll. 1.2. Una qualunque retta può essere portata nell'asse reale componendo opportunamente similitudini e traslazioni. Una qualunque circonferenza può essere portata nella circonferenza ϕ' di centro $\frac{i}{2}$ e raggio $\frac{1}{2}$ componendo opportunamente similitudini e traslazioni. Rimane da osservare che l'inversione circolare rispetto alla circonferenza di centro i e raggio 1 porta ϕ' nell'asse reale (si veda la Prop. 1.1 (iii).$\square$

3 Il birapporto come invariante

Definizione 3.1 *Dati quattro punti distinti* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ *il loro birapporto è definito dall'espressione*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

Teorema 3.2 Invarianza del birapporto per trasformazioni di Möbius *Se $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ sono quattro punti distinti e $g \in M$, vale*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4))$$

Dimostrazione Il teorema è evidente per le trasformazioni generatrici $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$. Per $z \mapsto \frac{1}{z}$ si calcola

$$(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}) = \frac{\frac{z_1-z_3}{z_1z_3}\frac{z_2-z_4}{z_2z_4}}{\frac{z_2-z_3}{z_2z_3}\frac{z_1-z_4}{z_1z_4}} = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

□

Teorema 3.3 *Quattro punti distinti del piano complesso appartengono a una retta o a una circonferenza se e solo se il loro birapporto è reale.*

Supponiamo che z_1, z_2, z_3, z_4 appartengano a una retta o a una circonferenza ϕ. Per il Teor. 2.3 esiste $g \in G$ tale che $g(\phi)$ é l'asse reale. Quindi per il Teor. 3.2

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) \in \mathbf{R}$$

Viceversa supponiamo che $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbf{R}$. Consideriamo la circonferenza ϕ per z_1, z_2, z_3 (oppure la retta nel caso siano allineati). Sappiamo che esiste $g \in M$ tale che $g(\phi)$ è l'asse reale. Allora

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = \frac{(g(z_3)-g(z_1))(g(z_4)-g(z_2))}{(g(z_3)-g(z_2))(g(z_4)-g(z_1))} \in \mathbf{R}$$

Quindi $\frac{g(z_4)-g(z_2)}{g(z_4)-g(z_1)} \in \mathbf{R}$ da cui segue che i vettori $g(z_4) - g(z_2)$ e $g(z_4) - g(z_1)$ sono paralleli e quindi $g(z_4)$ appartiene all'asse reale. Segue che $z_4 = g^{-1}(g(z_4))$ appartiene a ϕ come volevamo. □

Corollario 3.4 *Se $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ sono tre punti distinti e non allineati allora la circonferenza passante per z_1, z_2, z_3 ha equazione*

$$Im(z_1, z_2, z_3, z) = 0$$

Posto $z_i = x_i + iy_i$, l'equazione precedente si scrive anche in forma reale come

$$\det \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Basta osservare che l'equazione descrive una circonferenza che passa per i tre punti, perché il determinante viene ad avere due righe uguali.

Esercizio Qual é il significato geometrico del fatto che il birapporto di quattro punti é un numero reale positivo?

4 Il modello di Poincarè

Il semipiano di Poincarè è formato da tutti i punti del piano cartesiano reale che hanno ordinata positiva. In altre parole, l'asse delle ascisse divide il piano in due semipiani, e noi prendiamo in considerazione il semipiano superiore (privato dei punti al bordo sull'asse delle ascisse. Diamo a questo semipiano il nome di $\mathcal{H}$.

In formula

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y > 0\}$$

I punti di $\mathcal{H}$ sono i punti usuali. Le rette di $\mathcal{H}$ sono di due tipi

(i) v-rette, che corrispondono ai punti giacenti in $\mathcal{H}$ di rette verticali ($\{x = k\}$), in formula

$$\{(x, y) \in \mathcal{H} | x = k\} \qquad \text{per qualche } k \in \mathbf{R}$$

(ii) h-rette, che corrispondono ai punti giacenti in $\mathcal{H}$ di circonferenze con centro sull'asse delle ascisse, in formula

$$\{(x, y) \in \mathcal{H} | (x - k)^2 + y^2 = r^2\} \qquad \text{per qualche } k, r \in \mathbf{R}$$

Useremo il termine retta iperbolica per indicare una v-retta oppure una h-retta. La relazione di incidenza tra punti e rette è quella usuale.

Teorema 4.1 *Il semipiano $\mathcal{H}$ con punti e rette iperboliche soddisfa i primi tre assiomi di incidenza di Hilbert I1, I2, I3. Non soddisfa l'assioma delle parallele I4.*

Dimostrazione

I1) per due punti distinti di $\mathcal{H}$ passa una unica retta iperbolica.

Verifica Se P, Q hanno la stessa ascissa, appartengono a una unica v-retta, e a nessuna h-retta. Se P, Q non hanno la stessa ascissa, l'asse euclideo del segmento PQ taglia l'asse delle ascisse in C, che è il centro della unica h-retta che contiene P e Q.

I2) Ogni retta iperbolica contiene almeno due punti

La verifica è banale

I3) esistono tre punti non allineati

Verifica Scegliamo $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$

L'assioma I4), che esiste al più una retta parallela per un punto a una retta data, non è verificato. È facile costruire infinite h-rette che passano per $(1, 1)$ e non incontrano la v-retta ottenuta dall'asse delle ordinate. $\square$

Definizione 4.2 *Dati tre punti distinti A, B, C in $\mathcal{H}$, definiamo $A * B * C$ se è verificato uno dei due casi seguenti*

(i) A, B, C appartengono a una v-retta e vale $A * B * C$ con l'usuale relazione euclidea.

(ii) A, B, C appartengono a una h-retta e, dette A', B', C' le loro proiezioni ortogonali sull'asse delle ascisse, vale $A' * B' * C'$ con l'usuale relazione euclidea.

Notiamo che la definizione precedente ci permette di parlare di segmento iperbolico e di triangolo iperbolico. I lati di un triangolo iperbolico sono tutti e tre segmenti contenuti in h-rette, oppure al più uno di essi è contenuto in una v-retta.

Teorema 4.3 *Il semipiano $\mathcal{H}$ soddisfa i primi quattro assiomi di ordine di Hilbert B1, B2, B3, B4.*

Dimostrazione
B1) Se vale $A * B * C$ allora A, B, C sono allineati e vale anche $C * B * A$.
La verifica è banale
B2) Per ogni A, B punti distinti, esiste C tale che $A * B * C$
La verifica è banale
B3) Dati tre punti distinti e allineati, esattamente uno è tra gli altri due.
La verifica è banale
B4) (Assioma di Pasch) Dati A, B, C non allineati e una retta l che contiene D tale che $A * D * B$ allora si verifica esattamente una tra le due affermazioni seguenti:
(a) l contiene E tra A e C (b) l contiene E tra B e C.
Verifica Consideriamo il triangolo iperbolico di vertici A, B, C. Il triangolo è intersezione di tre semipiani, di equazioni $f_i(x, y) \geq 0$ per $i = 1, 2, 3$ dove $f_i = 0$ è l'equazione di una h-retta oppure di una v-retta. I punti dove almeno una delle disuguaglianze è violata costituiscono l'esterno del triangolo. Parametrizziamo un punto su $P(t) \in l$ con il parametro $t \in \mathbf{R}$, in modo che $P(t)$ sia continua.

Per $t \ll 0$ oppure $t \gg 0$ abbiamo che $P(t)$ è esterno. La retta iperbolica l incontra ciascuno dei lati prolungati in al più un punto, e l'intersezione è trasversa. Per ipotesi esiste t_0 tale che $D = P(t_0)$ e quindi $P(t)$ cambia da esterno ad interno in un intorno di t_0. Possiamo supporre che $P(t)$ sia esterno per $t_0 - \epsilon \leq t < t_0$ e $P(t)$ sia interno per $t_0 < t < t_0 + \epsilon$. Quindi esiste $t_0 < t_1$ tale che $P(t)$ è interno per $t_0 < t < t_1$ e $P(t)$ è esterno per $t_1 < t < t_1 + \epsilon'$. Per $t_1 < t$ il punto $P(t)$ non può tornare interno, altrimenti l dovrebbe toccare una quarta volta un lato, ma i lati sono solo tre. Posto $P(t_1) = E$ abbiamo verificato B4). $\square$

In corrispondenza dei due tipi di rette consideriamo le seguenti trasformazioni di $\mathcal{H}$,
(i) simmetrie assiali rispetto alle v-rette
(ii) inversioni circolari rispetto alle h-rette

Sia G il gruppo delle trasformazioni di $\mathcal{H}$ in sè, generato dalle trasformazioni ai punti (i) e (ii) precedenti. Cioè ogni elemento di G si scrive composizione $g_1 \cdots g_t$ dove ogni g_i è una simmetria assiale come in (i) oppure una inversione circolare come in (ii). Notiamo che G è un sottogruppo del gruppo $\widetilde{M}$ delle trasformazioni di Möbius estese, che hanno la forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

oppure

$$z \mapsto \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$$

Precisamente gli elementi di G sono generati da
(i) $z \mapsto -\overline{z} + a$ con $a \in \mathbf{R}$
(ii) $z \mapsto az$
(iii) $z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$
Osserviamo che componendo due generatori del tipo (i) si ottiene
$z \mapsto z + c$ con $c \in \mathbf{R}$.
In generale (esercizio) gli elementi di G si scrivono come

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ con } ad - bc > 0$$

oppure

$$z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \text{ con } ad - bc < 0$$

Lemma 4.4 *Sia r una retta iperbolica e $g \in G$. Allora $g(r)$ è una retta iperbolica.*

Dimostrazione È sufficiente dimostrare l'enunciato per i generatori di G. Se g è una simmetria assiale l'enunciato è ovvio. Se g è una inversione circolare, l'enunciato segue dalla Prop. 1.1.

Teorema 4.5 *Il gruppo G agisce in modo transitivo sull'insieme delle rette iperboliche. Questo significa che se r è una retta iperbolica allora esiste $g \in G$ tale che $g(r)$ è l'asse immaginario $\{x = 0\}$.*

Dimostrazione Osserviamo che componendo due opportune simmetrie assiali posso trovare in G qualunque traslazione orizzontale. Quindi una qualunque v-retta può essere portata nell'asse immaginario. Analogamente una qualunque h-retta (con raggio euclideo r) può essere portata nella h-retta C_r con centro euclideo in $(r, 0)$ e raggio r. L'inversione circolare rispetto alla circonferenza di centro $(2r, 0)$ e raggio $2r$ porta C_r nell'asse immaginario (si veda la Prop. 1.1 (iii). □

Il teorema precedente può essere rinforzato.

Teorema 4.6 *Siano r e s due semirette iperboliche, di origine rispettivamente P e Q. Allora esiste $g \in G$ tale che $g(P) = Q$ e $g(r) = s$.*

Dimostrazione Per esercizio.

Proposizione 4.7 *Sia $g \in G$ e $z_i \in \mathcal{H}$ quattro punti distinti per $i = 1, \ldots, 4$. Allora*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4))$$

Dimostrazione È una facile modifica della dimostrazione del Teor. 3.2 che è lasciata al lettore. □

Definizione 4.8 *Un segmento AB si dice congruente a un segmento CD se esiste $g \in G$ tale che $g(A) = C$, $g(B) = D$.*

Proposizione 4.9 *Siano A, B, B' punti su una retta iperbolica tali che $A * B * B'$ e $AB \simeq AB'$. Allora $B = B'$.*

Dimostrazione Possiamo supporre che la retta iperbolica s sia una h-retta. Siano U e V le sue intersezioni con l'asse reale. Per ipotesi esiste $g \in G$ tale che $g(A) = A$ e $g(B) = B'$. Pertanto $g(s) = s$ e i punti $g(U)$ e $g(V)$ (estendendo g da $\mathcal{H}$ al piano complesso) giacciono ancora sull'asse reale. Per l'ipotesi sull'ordine abbiamo $g(U) = U$, $g(V) = V$. Siccome g conserva il birapporto, segue che

$$(U, V, B, A) = (U, V, B', A)$$

da cui

$$\frac{B - U}{B - V} = \frac{B' - U}{B' - V}$$

e prendendo le norme

$$\frac{|B - U|}{|B - V|} = \frac{|B' - U|}{|B' - V|}$$

Il rapporto dell'uguaglianza precedente è un rapporto tra due cateti di un triangolo rettangolo, e quindi è uguale a $\tan(\widehat{BUV})$, rispettivamente $\tan(\widehat{B'UV})$. Segue che $B = B'$. $\square$

Teorema 4.10 *La relazione di congruenza ora definita soddisfa gli assiomi di Hilbert C1, C2, C3.*

Dimostrazione

C1) dato un segmento AB, e una semiretta s di origine C, esiste unico $D \in s$ tale che AB è congruente a CD.

Verifica: La retta per AB è divisa da A in due semirette. Sia r la semiretta contenente B. Per Teor. 4.6 esiste $g \in G$ tale che $g(A) = C$ e $g(r) = s$. Basta porre $D = g(B)$. L'unicità segue dalla Prop. 4.9.

C2) la relazione di congruenza è di equivalenza.

Verifica: È immediata dal fatto che G è un gruppo.-

C3) Sia $AB \simeq DE$ e $BC \simeq EF$ con $A * B * C$ e $D * E * F$. Allora $AC \simeq DF$.

Verifica: Sia $g \in G$ tale che $g(A) = D$ e $g(B) = E$. Inoltre abbiamo g' tale che $g'(B) = E$ e $g'(C) = F$. Posto $g(C) = F'$, abbiamo $EF \simeq BC \simeq EF'$ e dalla Prop. 4.9 segue $F = F'$. come volevamo. $\square$

Definizione 4.11 *L'angolo tra due rette iperboliche che si incontrano in un punto è l'angolo euclideo tra le loro tangenti.*

Quindi due angoli si dicono congruenti in $\mathcal{H}$ se sono congruenti come angoli euclidei.

Teorema 4.12 *Le relazioni di congruenza per segmenti e angoli in $\mathcal{H}$ soddisfa gli assiomi di Hilbert C4, C5, C6.*

Dimostrazione

C4) (trasporto degli angoli) Per ogni coppia di semirette con vertice comune A e angolo α e per ogni semiretta r con vertice B, esiste una semiretta s con vertice B tale che l'angolo tra r e s è pari a α.

Verifica: Si tratta di costruire una retta iperbolica passante per B con tangente in B prefissata. Si può costruire facilmente una h-retta con qualunque tangente prefissata passante per B, con l'eccezione della tangente verticale. Nel caso verticale, scegliamo s lungo la v-retta passante per B.

C5) La relazione di congruenza tra angoli è di equivalenza.

La verifica è ovvia

C6) (SAS) Due triangoli iperbolici cha hanno congruenti rispettivamente due lati e l'angolo compreso sono congruenti.

Verifica: Siano ABC e $A'B'C'$ i due triangoli e supponiamo $AB \simeq A'B'$, $BC \simeq B'C'$, $\widehat{ABC} \simeq \widehat{A'B'C'}$.

Per ipotesi troviamo $g \in G$ tale che $g(A) = A'$ e $g(B) = B'$. Sia r la semiretta uscente da B contenente C. Abbiamo che $g(r)$ è una semiretta uscente da B' che forma un angolo congruente a $\widehat{A'B'C'}$ con $A'B'$. Componendo eventualmente con la simmetria rispetto a $A'B'$, posso supporre che $g(r)$ coincide con la semiretta uscente da B' e che contiene C'. Inoltre abbiamo $B'C' \simeq BC \simeq B'g(C)$ e per la Prop. 4.9 segue $g(C) = C'$. Quindi g porta tutto il triangolo ABC in $A'B'C'$ come volevamo. $\square$

Corollario 4.13 *L'assioma delle parallele è indipendente dagli altri assiomi di incidenza, ordine e congruenza.*

Il corollario precedente ci dice che il semipiano di Poincarè fornisce un modello di geometria non euclidea, dove valgono tutti gli assiomi di un piano di Hilbert, ad eccezione dell'assiome delle parallele. La geometria di questo modello si dice geometria iperbolica.

Tutti i teoremi di geometria euclidea che non fanno uso dell'assioma delle parallele valgono anche nel semipiano di Poincarè. Ad esempio un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli congruenti.

Proposizione 4.14 L'asse di un segmento *Dati due punti A e B, sia t la retta che li contiene entrambi.*

(i) se A e B hanno la stessa ordinata esiste unica v-retta s tale che la simmetria assiale σ rispetto a s porta A in B. Inoltre vale $\sigma(t) = t$.

(ii) se A e B non hanno la stessa ordinata esiste unica h-retta s tale che l'inversione circolare σ rispetto a s porta A in B. Inoltre vale $\sigma(t) = t$.

In entrambi i casi la retta iperbolica s si dice l'asse del segmento iperbolico AB.

Nel caso (i) s coincide con l'asse euclideo di AB. Nel caso (ii) sia O l'intersezione dell'asse reale con la retta per A e B. La circonferenza s ha centro O e raggio r tale che $r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$. Per il teorema della secante e della tangente, la tangente condotta da O a t è tangente in un punto Z tale che $\overline{OZ} = r$. Segue che $Z \in s$ e che s e t sono circonferenze ortogonali. Quindi $\sigma(t)$ è una circonferenza ortogonale a s, passante per Z, e con il centro sull'asse reale, e deve coincidere con t. $\square$

Esercizio Verificare che l'asse di AB coincide con il luogo dei punti P tali che $AP \simeq BP$.

Teorema 4.15 *Sia $g \in G$ che fissa tre punti di $\mathcal{H}$ non allineati. Allora g è l'identità.*

Dimostrazione Se esiste P tale che $g(P) \neq P$, segue che $AP \simeq Ag(P)$, $BP \simeq Bg(P)$, $CP \simeq Cg(P)$. Quindi A, B, C appartengono all'asse di $Pg(P)$, contro l'ipotesi che non sono allineati. $\square$

Le proprietà che abbiamo studiato finora hanno esplorato le analogie tra la geometria euclidea e la geometria iperbolica (asse di un segmento, riflessioni).

Adesso vedremo alcune delle differenze tra geometria euclidea e geometria iperbolica.

5 Geometria Iperbolica

Osservazione Due circonferenze si dicono ortogonali se nei punti di intersezione entrambi gli angoli sono retti. Se Γ_1 e Γ_2 sono circonferenze ortogonali, allora l'inversione rispetto a Γ_1 porta Γ_2 in se stessa e viceversa. Notiamo che il triangolo che unisce i due centri con uno dei due punti di intersezione è rettangolo, e ciascuno dei suoi cateti è tangente a una delle due circonferenze. Adesso tracciamo dal centro di Γ_1 una secante a Γ_2, che sia secante in A e B, con A interno a Γ_1 e B esterno. Allora, per il teorema della secante e della tangente, ogni circonferenza per A e B è ancora tangente a Γ_1.

Teorema 5.1 La circonferenza iperbolica *Dati due punti O e $A \in \mathcal{H}$, il luogo dei punti $P \in \mathcal{H}$ tali che OP è congruente a OA è una circonferenza euclidea Γ, il cui centro euclideo C è diverso da O e può essere costruito nel modo seguente: sia O' il simmetrico di O rispetto all'asse reale e sia r la tangente in P alla crf per O, O', A, allora $C = OO' \cap r$.*

Dimostrazione lasciata al lettore.

Osservazione Il teorema precedente mostra che il compasso euclideo funge anche da compasso iperbolico, al prezzo di cambiare il centro!

Corollario 5.2 *Ci sono triangoli nel modello di Poincarè che non ammettono una circonferenza circoscritta.*

Dimostrazione Per il teorema precedente, l'eventuale circonferenza circoscritta a ABC deve coincidere con la circonferenza euclidea per i tre punti A, B, C. Basta scegliere tre punti per cui la circonferenza risultante non è contenuta in $\mathcal{H}$.

Teorema 5.3 *Sia r una retta iperbolica, e siano U e V i suoi punti sull'asse reale. Per ogni punto P sia P' il piede della perpendicolare (iperbolica) condotta su r. Il luogo dei punti P tali che PP' è congruente ad un segmento fissato QQ' è la circonferenza Γ euclidea passante per Q, U, V quindi non è una retta, in contrasto con il caso euclideo.*

Dimostrazione Sia P un punto di Γ. Sia s l'asse iperbolico del segmento (iperbolico) $P'Q'$. Quindi r è ortogonale a s che ha centro sull'asse reale contenente U e V. Pertanto anche Γ è ortogonale a s, e l'inversione circolare rispetto a s porta Γ in se stessa, porta la retta $P'P$ nella retta $Q'Q$ e quindi porta P in Q. Pertanto PP' è congruente a QQ', come volevamo.

6 La distanza iperbolica

Definiamo distanza tra due punti A e B distinguendo i due casi

(i) Se A e B non hanno la stessa ascissa allora

$$d(A,B) := |\log(A,B,U,V)|$$

dove U e V sono i punti in cui la retta per A e B incontra l'asse reale. La definizione è ben posta perché $(A,B,U,V) \in \mathbf{R}$

(ii) Se A e B hanno la stessa ascissa allora

$$d(A,B) = |\log \frac{y_A}{y_B}|$$

La distanza tra due punti A e B è per definizione la lunghezza del segmento AB.

Teorema 6.1 *Due segmenti sono congruenti se e solo se hanno la stessa lunghezza.*

Dimostrazione Se AB è congruente a CD allora esiste $g \in G$ tale che $g(A) = C$ e $g(B) = D$. Se U e V sono i punti sull'asse reale della retta per AB, allora $g(U)$ e $g(V)$ sono i punti sull'asse reale della retta per C e D. Sappiamo che $(A,B,U,V) = (g(A), g(B), g(U), g(V))$ per Prop. 4.7 e quindi i due segmenti hanno la stessa lunghezza.

Viceversa, dati due segmenti AB e CD con la stessa lunghezza, e detti U, V i punti sull'asse reale della prima retta, e U', V' i punti della seconda retta, esiste $g \in G$ tale che $g(A) = C$, la prima retta va nella seconda e inoltre $g(B)$ e D stanno sulla stessa semiretta rispetto a C. Abbiamo che $g(U)$ e $g(V)$ coincidono, a meno dell'ordine, con U' e V'. Ma $(A,B,U,V) = (A,B,V,U)^{-1}$ da cui

$$|\log(A,B,U,V)| = |\log(A,B,V,U)|$$

e quindi segue che

$$|\log(C,D,U',V')| = |\log(A,B,U,V)| = |\log(g(A),g(B),g(U),g(V))| = |\log(C,g(B),U',V')|$$

e un ragionamento analogo a quello della dimostrazione della Prop. 4.9 mostra che $g(B) = D$ e quindi AB è congruente a CD. $\square$

Proposizione 6.2 Costruzioni alternative per la distanza iperbolica *(i) Siano A' e B' le proiezioni ortogonali di A e B sull'asse reale. Allora*

$$|\log(A,B,U,V)| = \frac{1}{2}|\log(A',B',U,V)|$$

(ii) Sia O il centro euclideo dell'arco $UABV$ e poniamo $\alpha = \widehat{VOA}$ e $\beta = \widehat{VOB}$. Allora

$$|\log(A,B,U,V)| = \left|\log \frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}\right|$$

Dimostrazione Poniamo $U = a - r$, $A = a + r\exp i\alpha$, $B = a + r\exp i\beta$, $V = a + r$. Allora

$$(A,B,U,V) = \frac{r^2(1+\exp i\alpha)(-1+\exp i\beta)}{r^2(-1+\exp i\alpha)(1+\exp i\beta)}$$

Siccome il birapporto è reale, possiamo prendere i moduli, ottenendo

$$(A,B,U,V) = \frac{\sqrt{(\cos\alpha+1)^2+\sin^2\alpha}\sqrt{(\cos\beta-1)^2+\sin^2\beta}}{\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha}\sqrt{(\cos\beta+1)^2+\sin^2\beta}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}\sqrt{2-2\cos\beta}}{\sqrt{2-2\cos\alpha}\sqrt{2+2\cos\beta}} = \frac{\tan(\beta/2)}{\tan(\alpha/2)}$$

e questo prova (ii). Per provare (i) basta osservare che

$$(A',B',U,V) = \frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)} = \frac{\tan^2(\beta/2)}{\tan^2(\alpha/2)}$$

Proposizione 6.3 *Siano $A * B * C$ punti in $\mathcal{H}$.*
Allora $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$

Dimostrazione Segue da

$$(A,B,U,V)\cdot(B,C,U,V) = (A,C,U,V)$$

$$\log(A,B,U,V) + \log(B,C,U,V) = \log(A,C,U,V)$$

Lemma 6.4 *Proprietà della distanza (i) $d(A,B) \geq 0$ e $d(A,B) = 0$ se solo se $A = B$*
(ii) $d(A,B) = d(B,A)$
(iii) $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ e vale $=$ se e solo se B appartiene al segmento AC (disuguaglianza triangolare).

Dimostrazione (i) e (ii) sono immediate. Per dimostrare (iii) si può ripercorrere la dimostrazione euclidea (Elementi, libro I, prop. X) che si può riadattare parola per parola al nostro caso grazie alla proposizione precedente. La dimostrazione euclidea passa attraverso il confronto tra lati e angoli (ad angolo maggiore sta opposto il lato maggiore). Si veda a proposito l'osservazione successiva al teorema dei seni.

7 Trigonometria iperbolica

Teorema 7.1 Teorema di Pitagora iperbolico *Consideriamo un triangolo rettangolo con cateti a e b e ipotenusa c. Allora*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

Dimostrazione Cominciamo col provare che

$$\cosh c = \frac{1}{\tan\alpha \tan\beta} \tag{1}$$

Agendo col gruppo G, possiamo ricondurci al caso in cui l'ipotenusa collega i punti $(0,1)$ e $(0,\eta)$, da cui $c = \log\eta$ e $\cosh c = \frac{e^c+e^{-c}}{2} = \frac{\eta^2+1}{2\eta}$.

Siano $D = (\delta, 0)$ e $E = (-\epsilon, 0)$ i centri euclidei degli archi rispettivamente BC e AC. Per ipotesi ECD è rettangolo in C e quindi per l'usuale teorema di Pitagora vale

$$(\epsilon+\delta)^2 = (\epsilon^2+\eta^2) + (1+\delta^2)$$

da cui

$$\eta^2 + 1 = 2\epsilon\delta$$

Siccome $\tan\alpha = \frac{\eta}{\epsilon}$ e $\tan\beta = \frac{1}{\delta}$
segue

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{\eta}{\epsilon\delta} = \frac{2\eta}{1+\eta^2}$$

come volevamo.

Abbiamo $\widehat{EDB} = \beta$ e $\widehat{EDC} = \phi$ da cui
$e^a = \frac{\tan(\phi/2)}{\tan(\beta/2)}$

$$\tanh(a) = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1} = \frac{\tan^2(\phi/2) - \tan^2(\beta/2)}{\tan^2(\beta/2) + \tan^2(\phi/2)}$$

che dopo qualche calcolo trigonometrico si semplifica a

$$\tanh(a) = \frac{\cos\beta - \cos\phi}{1 - \cos\beta\cos\phi}$$

Sostituendo le espressioni

$$\cos\beta = \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \qquad \cos\phi = \frac{\sqrt{1+\delta^2}}{\epsilon+\delta}$$

otteniamo

$$\tanh a = \frac{\epsilon\delta - 1}{\epsilon\sqrt{1+\delta^2}}$$

D'altronde abbiamo

$$\tanh(c) = \frac{e^{2c}-1}{e^{2c}+1} = \frac{\eta^2+1-2}{\eta^2+1} = \frac{\epsilon\delta-1}{\epsilon\delta}$$

e quindi

$$\tanh(a) = \tanh(c)\cos\beta$$

Ragionando sugli altri lati

$$\tanh(b) = \tanh(c)\cos\alpha$$

Adesso abbiamo

$$\cosh^2 a = \frac{1}{1-\tanh^2 a} = \frac{1}{1-\tanh^2 c\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{1}{1-(1-\frac{1}{\cosh^2 c})\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\beta + \frac{\cos^2\beta}{\cosh^2 c}} = \frac{1}{\sin^2\beta(1+\tan^2\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}$$

e analogamente

$$\cosh^2 b = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}$$

da cui finalmente

$$\cosh^2 a\cosh^2 b = \frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\beta\sin^2\alpha} = \frac{1}{\tan^2\alpha\tan^2\beta} = \cosh^2 c$$

Interpretazione del teorema di Pitagora iperbolico Dato $R > 0$, possiamo definire $d_R(A,B) = Rd(A,B)$ e, con queste nuove lunghezze, il teorema di Pitagora prende la forma

$$\cosh(c/R) = \cosh(a/R)\cosh(b/R)$$

da cui

$$(c^2 - a^2 - b^2) = R^2 o(1/R^2)$$

Al limite $R \to +\infty$ otteniamo il teorema di Pitagora classico.

Teorema 7.2 Teorema dei seni iperbolico, Bolyai

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sinh a}{\sinh b}$$

Dimostrazione Proviamo dapprima che in un triangolo rettangolo con γ retto, vale

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \sinh c$$

Infatti

$$\frac{\sinh^2 a}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\beta\tan^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\tan^2\beta}{\tan^2\beta\tan^2\alpha} - \frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\tan^2\alpha\tan^2\beta} - 1 = \cosh^2 c - 1 = \sinh^2 c$$

Tracciando un'altezza, il triangolo viene suddiviso in due triangoli rettangoli, e applicando a ciascuno di essi il risultato trovato, si ottiene la tesi.

Osservazione Il teorema dei seni esprime quantitativamente il fatto che in un triangolo ad angolo maggiore è opposto il lato maggiore. Notiamo che da qui la dimostrazione euclidea della disuguaglianza triangolare è immediatamente generalizzabile. Dato ABC, basta prolungare AB di un segmento BD congruenta a BC e osservare che BDC è isoscele e quindi $\widehat{BDC}$ (opposto a AC) è minore di $\widehat{ACD}$ (opposto a $AB + BD = AB + BC$).

Teorema 7.3 Somma degli angoli in un triangolo*Ìn un triangolo iperbolico con angoli α, β, γ abbiamo*

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

Dimostrazione Proviamo prima che in un triangolo rettangolo con angoli α e β vale $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Infatti da (1) abbiamo $\tan\alpha \tan\beta > 1$ da cui

$$\tan\alpha < \tan(\frac{\pi}{2} - \beta)$$

e siccome la tangente è una funzione crescente da 0 a $\frac{\pi}{2}$

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$$

come volevamo. La tesi segue dividendo un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli, tracciando l'altezza.

Definizione 7.4 *Il difetto di un triangolo iperbolico con angoli α, β, γ è il numero reale positivo*

$$\delta(ABC) := \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Proposizione 7.5 Additività del difetto *Dato un triangolo ABC , sia H un punto sul lato AC. Allora il triangolo è suddiviso nei due triangoli ABH e BHC e vale*

$$\delta(ABC) = \delta(ABH) + \delta(BHC)$$

Dimostrazione Chiamo $\beta_1 = \widehat{ABH}$ e $\beta_2 = \widehat{HBC}$. Inoltre $\epsilon_1 = \widehat{AHB}$ e $\epsilon_2 = \widehat{BHC}$. Allora

$$\delta(ABH) = \pi - (\alpha + \beta_1 + \epsilon_1)$$

$$\delta(BHC) = \pi - (\gamma + \beta_2 + \epsilon_2)$$

e sommando i secondi membri otteniamo

$$2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \pi) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta(ABC)$$

come volevamo. □

Inoltre due triangoli congruenti hanno ovviamente lo stesso difetto. Queste osservazioni mostrano che il difetto soddisfa i requisiti di una funzione area, in modo che l'area di un poligono iperbolico può essere definita come la somma dei difetti dei triangoli ottenuti in una sua triangolazione. È facile verificare che questa definizione non dipende dalla triangolazione scelta, raffinando con una sottotriangolazione comune due triangolazioni.

Angolo di parallelismo. Data una retta (iperbolica) r e un punto P, sia H il piede della perpendicolare condotta da P su r. Ogni retta uscente da P forma un angolo β con PH. Per valori piccoli di β, tali rette incontrano r. Ci proponiamo di determinare l'estremo superiore degli angoli β per cui la retta corrispondente incontra r. Tale valore si dice angolo di parallelismo, e dipende solo dalla lunghezza (iperbolica) a di PH, e viene denotato con $\Pi(a)$. In geometria euclidea vale naturalmente $\Pi(a) = \frac{\pi}{2}$.

Teorema 7.6 Lobachevski-Bolyai

$$\tan\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-a}$$

Dimostrazione Nella dimostrazione del teorema di Pitagora abbiamo già incontrato l'espressione

$$\cosh a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

valida in un triangolo rettangolo. L'espressione che ci interessa si ottiene quando $\alpha \to 0$, quindi

$$\cosh a = \frac{1}{\sin\Pi(a)}$$

da cui si ottiene

$$e^a = \frac{1+\cos\Pi(a)}{\sin\Pi(a)} = \frac{1}{\tan(\Pi(a)/2)}$$

come volevamo. □

Cenno al tensore metrico Il tensore metrico

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

definisce una metrica su $\mathcal{H}$, vista come varietà Riemanniana, le cui geodetiche sono le nostre rette iperboliche. Questa metrica induce una distanza tra due punti che coincide con la distanza iperbolica che abbiamo definito. Notiamo che questa metrica differisce per lo scalare $\frac{1}{y^2}$ dalla metrica euclidea, a cui è conforme. In particolare gli angoli hanno la stessa misura euclidea, come sapevamo.

L'area di un triangolo geodetico coincide con quello che abbiamo chiamato difetto. La curvatura Gaussiana viene ad essere -1. Ogni varietà Riemanniana di dimensione due con curvatura Gaussiana costante, pari a -1, è localmente isomorfa a $\mathcal{H} \simeq \Delta$ con la metrica appena introdotta.

Il gruppo G che abbiamo introdotto coincide con il gruppo delle isometrie di $\mathcal{H}$.

La metrica permette di calcolare lunghezze di curve che non sono geodetiche. Sviluppiamo questo calcolo su $\mathcal{H}$. Il luogo dei punti che ha distanza iperbolica r dal punto (x, y) è una circonferenza euclidea con centro in $(x, y \cosh r)$ e raggio euclideo $y \sinh r$. La lunghezza iperbolica di questa circonferenza è pari a (Gauss, 1831)

$$2\pi \sinh r$$

il cui primo termine dello sviluppo di Taylor coincide col valore euclideo $2\pi r$.

Il disco unitario Il semipiano $\mathcal{H}$ è biolomorfo al disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbf{C} | |z| < 1\}$ mediante l'applicazione

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

Infatti $\mathcal{H}$ coincide con il luogo dei punti che sono più vicini a i rispetto a $-i$ (l'asse reale è asse del segmento di estremi $-i$ e i) e quindi se $z \in \mathcal{H}$ abbiamo $|z - i| < |z + i|$ e quindi $|f(z)| < 1$.

Le circonferenze di Apollonio $\{z \in \mathcal{H} | |z - i| = k|z + i|\}$ con $0 < k < 1$ hanno per immagine i numeri complessi di modulo k (circonferenze concentriche al variare di k).

La geometria iperbolica può essere sviluppata direttamente su Δ. Le rette (iperboliche) vengono ad essere circonferenze ortogonali al bordo $S^1 = \partial\Delta$ oppure diametri di Δ. La metrica su Δ si scrive bene con la variabile complessa z e diventa

$$\frac{4dz^2}{(1 - |z|^2)^2}$$

Per questo motivo, per sviluppare il punto di vista analitico, è spesso preferibile lavorare direttamente su Δ. L'approccio che abbiamo scelto, di lavorare su $\mathcal{H}$, si presta meglio a considerazioni geometriche elementari per l'uso che abbiamo fatto dell'involuzione circolare. Naturalmente i due modelli $\mathcal{H}$ e Δ sono equivalenti.

References

[Me] H. Meschkowski, Noneuclidean geometry, Academic press, 1964

[MC] J. McCleary, Geometry from a differentiable viewpoint, Cambridge, 1994