

Il lungo cammino della geometria non euclidea

Liceo Gobetti , Pianeta Galileo 2010

Giorgio Ottaviani

Università di Firenze

4.11.2010

La scuola di Atene (Raffaello)





- In Grecia intorno al 300 a.C la Geometria trova un fondamento assiomatico-deduttivo
- Gli Elementi di Euclide danno una trattazione sistematica della Geometria del piano e dello spazio, e dell'aritmetica conosciuta
- A partire da cinque postulati, tutti i teoremi sono seguiti da una **dimostrazione**

Albert Einstein, 1879-1955

All'età di dodici anni provai una nuova meraviglia di natura completamente diversa; e fu leggendo un libretto sulla geometria piana euclidea, capitatomi tra le mani al principio dell'anno scolastico. C'erano delle asserzioni, ad esempio quella che le tre altezze di un triangolo si intersecano in un sol punto, che - *pur non essendo affatto evidenti - potevano tuttavia essere dimostrate con tanta certezza da eliminare qualsiasi dubbio. Questa lucidità e certezza mi fecero un'indescrivibile impressione. Il fatto che l'assioma dovesse essere accettato senza dimostrazione non mi*

dava fastidio.



dal Convivio di Dante Alighieri

La Geometria è bianchissima, in quanto è senza macula d'errore e certissima per sé e per la sua ancella, che si chiama Prospettiva.



- Gli Elementi di Euclide non erano certamente completi. Forse la più grande lacuna riguarda la sfera.
- Il calcolo del volume della sfera era uno dei più importanti problemi aperti.
- Viene risolto un secolo più tardi da Archimede, il più grande



genio dell'antichità.

- Per una versione interattiva degli Elementi di Euclide, digita



“Euclid Elements” su Google

Struttura degli Elementi

Gli Elementi si compongono di tredici libri, non soltanto di Geometria. Ad esempio nel libro IX c'è la dimostrazione che i numeri primi sono infiniti. I numeri primi sono oggi molto utilizzati nella crittografia, necessaria ad esempio per effettuare acquisti



sicuri su Internet.

- Definizioni
- 5 Postulati, il quinto postulato (delle parallele), è una soluzione a delle critiche poste da Aristotele
- Il quinto postulato viene utilizzato solo a partire dalla proposizione 28. Le prime 27 proposizioni dipendono solo dai primi quattro postulati e si dicono oggi proposizioni di geometria assoluta.

Risultati del Libro I

- prop. 32 la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto (risale alla scuola pitagorica)



- prop. 47 teorema di Pitagora
- prop. 48 inverso del teorema di Pitagora

Omar Khayam (1048-1131)



- nato e morto a Nishapur, Persia, odierno Iran
- prova che il postulato delle parallele è equivalente al seguente:
l'insieme dei punti equidistanti da una retta è una retta.
- vedremo che, nella geometria della sfera, questo enunciato è falso
- Cercando di provare il postulato delle parallele egli dimostra incidentalmente proprietà di figure in geometria non euclidea.

Il gesuita Girolamo Saccheri costruisce una lunga teoria a partire da quello che oggi è noto come il quadrilatero di Saccheri.

Negando l'assioma delle parallele cerca di trovare una



contraddizione.

Purtroppo alla fine anche Saccheri commette un errore e crede di trovare una contraddizione, in realtà inesistente.

Dopo 40 anni di lavoro Legendre dimostra che il quinto postulato di Euclide è equivalente al seguente

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto.

Legendre prova che la somma degli angoli interni non può essere maggiore di un angolo piatto. Questo argomento, come quello di Saccheri, riposa sul fatto che le rette possono essere prolungate all'infinito. Infine anche Legendre casca in un errore molto sottile.

Farkas Bolyai (1775-1854)



si arrangiò con mille lavori, ma il postulato delle parallele fu il pallino della sua vita.

A questo punto la vicenda si intreccia con quella di suo figlio János Bolyai (1802-1860)



Farkas Bolyai credeva che una buona mente poteva ottenere buoni risultati solo se era in un corpo sano, e quindi pose molta attenzione alla salute fisica del figlio János. Nel 1816 Farkas scrisse al suo amico Gauss chiedendogli se voleva prendere János a vivere con lui e crescerlo come studente, in modo che potesse ricevere la migliore educazione matematica possibile. Gauss rifiutò questa proposta.

In una lettera scritta il 4 Aprile 1820 al figlio János, F.Bolyai scriveva:

E' incredibile che questa oscurità testarda, questa eterna eclisse, questa macchia nella geometria, questa nuvola eterna sulla verità verginale possa essere sopportata. Non ti misurare con il problema delle parallele. Conosco tutta la strada per intero. Ho misurato la notte senza fondo e tutta la luce e la gioia della mia vita se ne sono andate via.



- Nel 1825 János Bolyai mostra al padre la sua scoperta della geometria non euclidea. Il postulato delle parallele può non valere.
- E' una svolta per la matematica. **La geometria euclidea non è l'unica geometria.** Kant aveva torto.
- All'inizio il padre non fu entusiasta, ma nel 1830 persuase il figlio a pubblicare le sue scoperte.

Il 20 June 1831 il testo era stato stampato e Farkas Bolyai ne spedì una copia a Gauss, che dopo averlo letto, scrisse a un amico con queste parole:

Questo giovane geometra Bolyai è un genio di primo ordine



A Farkas Bolyai, però, Gauss scrisse:
L'intero contenuto del lavoro coincide quasi esattamente con le mie meditazioni che hanno occupato la mia mente negli ultimi 30 o 35 anni.

Carl Friederich Gauss (1777-1855)



In effetti dalla lettura delle lettere private di Gauss risulta che egli aveva sviluppato un punto di vista analogo 20 anni prima, ma non osò renderlo pubblico perché temeva le *strida dei beati*. Due secoli dopo il processo a Galileo da parte dell'Inquisizione, la libertà di pensiero nelle opinioni scientifiche era ancora in pericolo

Sophie Germain (1776 - 1831)



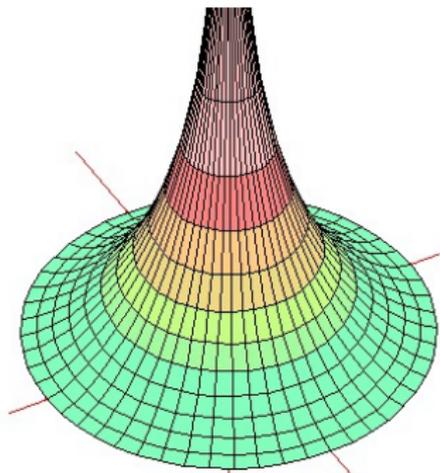
I genitori si opponevano al suo studio e lei studiava di nascosto durante la notte, a lume di candela. Non poté andare all'Università, ma studiò da autodidatta ottenendo gli appunti delle lezioni. Scrisse dei lavori con lo pseudonimo "Monsieur Le Blanc".

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)



Il suo maggiore lavoro, *Geometriya* completato nel 1823, non fu pubblicato nella forma originale fino al 1909. Le sue scoperte sulla geometria non euclidea sono contemporanee e indipendenti rispetto a quelle di János Bolyai.

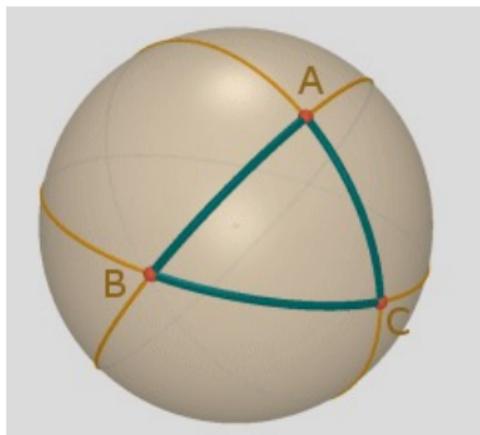
La pseudosfera di Beltrami (1835-1900)



The top half of a pseudo-sphere

Nel 1868 Beltrami scrisse un saggio sull'interpretazione della geometria non euclidea dove produsse il modello disegnato qui sopra, detto pseudosfera, con curvatura gaussiana negativa. E' il primo modello di geometria non euclidea compatibile con i quattro postulati di Euclide. **La somma degli angoli interni a un triangolo è minore di un angolo piatto** sulla pseudosfera.

Area di un triangolo sferico



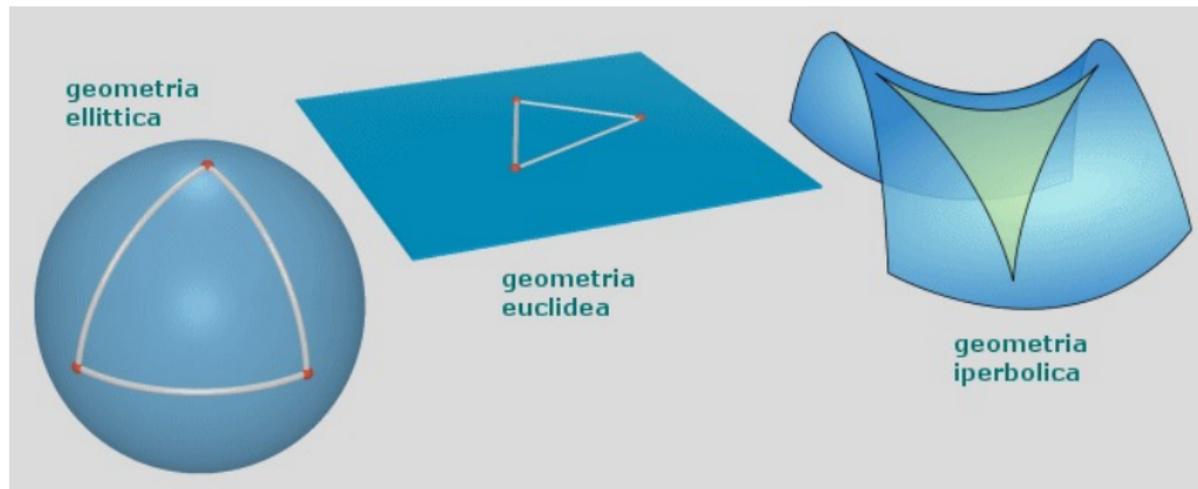
Per un triangolo sferico, l'area vale

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

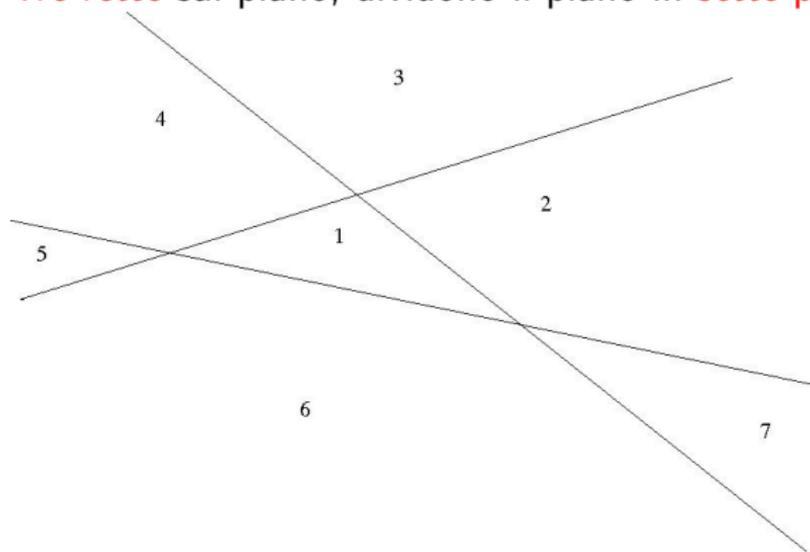
in particolare **la somma degli angoli interni $\alpha + \beta + \gamma$ è maggiore di un angolo piatto**, mentre sulla pseudosfera di Beltrami, il segno cambia

$$A = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

Le tre geometrie



Tre rette sul piano, dividono il piano in sette parti



Tre geodetiche sulla sfera, dividono la sfera in otto triangoli

