Geometria sferica e geometria non euclidea

Liceo L. da Vinci, 15.3.07

Giorgio Ottaviani
`ottavian@math.unifi.it`

`www.math.unifi.it/ottavian`

Università di Firenze

La geometria del piano

- Gli oggetti primitivi della geometria piana sono i punti e le rette

La geometria del piano

- Gli oggetti primitivi della geometria piana sono i punti e le rette
- I segmenti di retta sono le curve più corte (di lunghezza minima) che uniscono due punti

La geometria del piano

- Gli oggetti primitivi della geometria piana sono i punti e le rette
- I segmenti di retta sono le curve più corte (di lunghezza minima) che uniscono due punti
- Si dice che le rette sono le geodetiche del piano.

Le geodetiche

Le geodetiche sulla sfera sono le circonferenze massime, che si trovano tagliando la sfera con un piano passante per il centro.

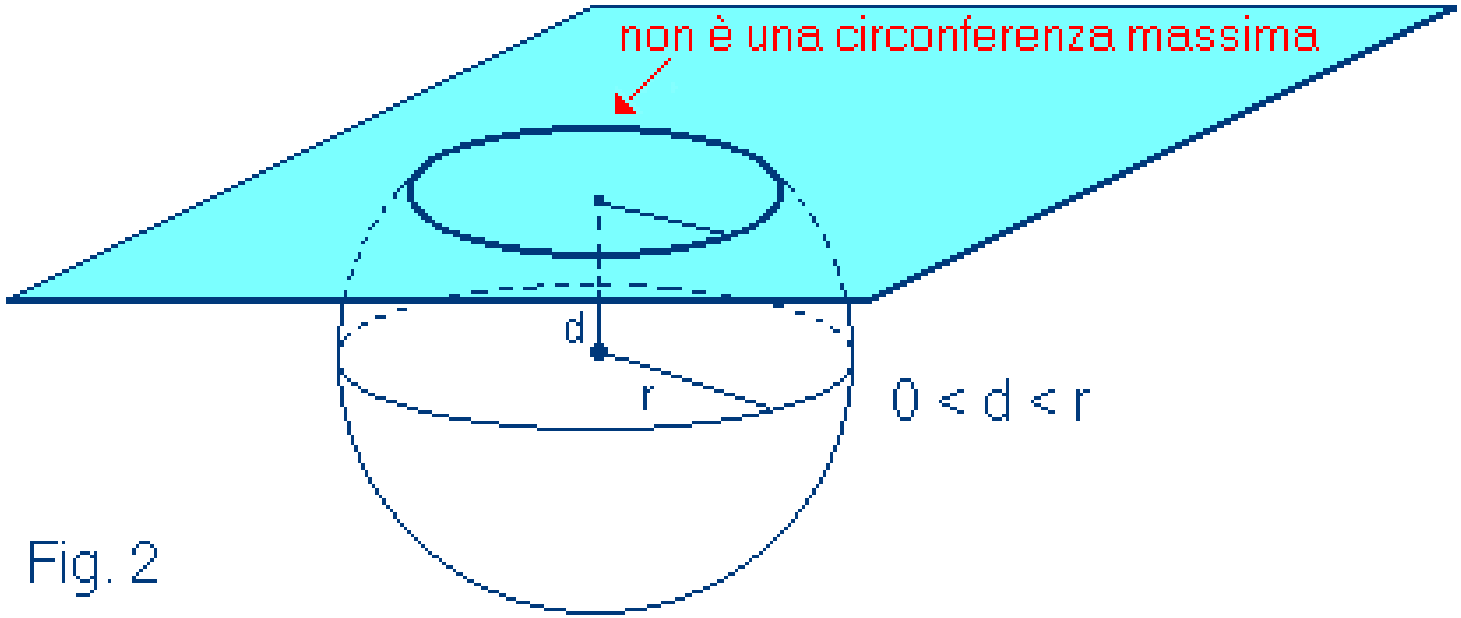


Fig. 2

Lunghezza di un parallello

Quanto vale, in funzione di d, r, la lunghezza del parallelo in

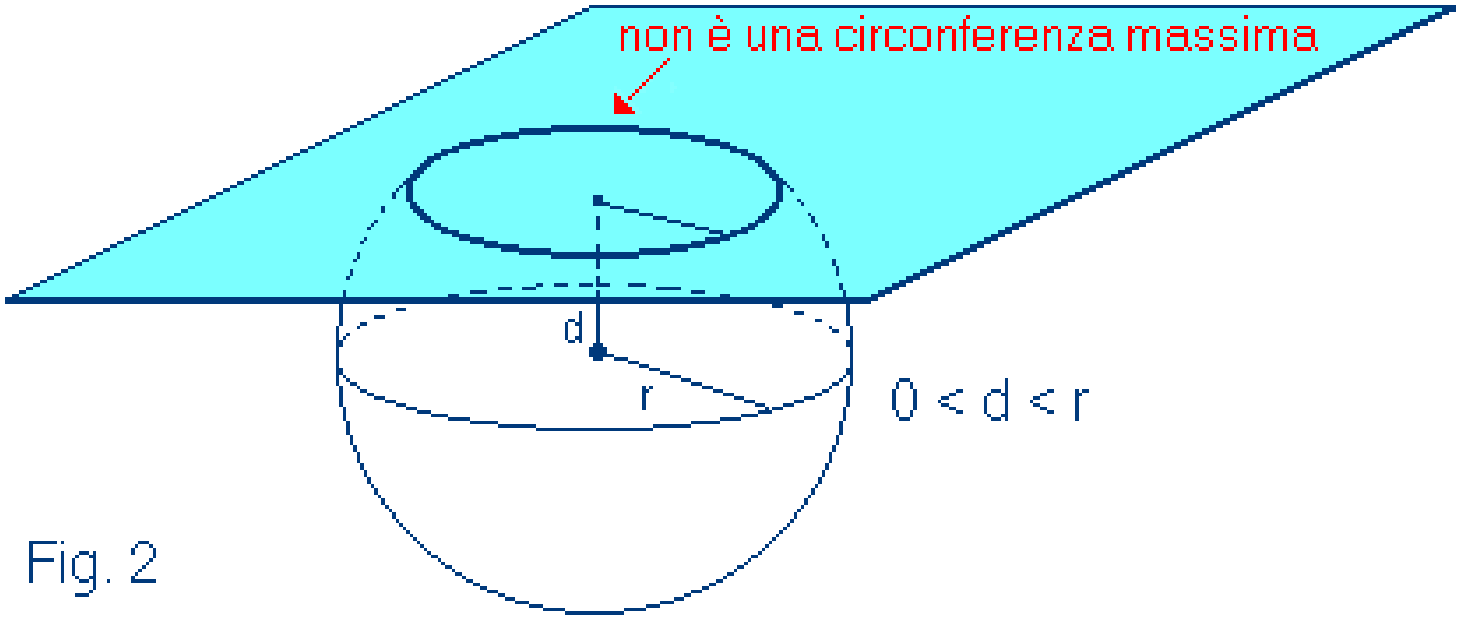


Fig. 2

figura ?

Una geodetica

Nel modello sferico le geodetiche sono gli archi di cerchio massimo. Tutte le geodetiche si incontrano in due punti antipodali.

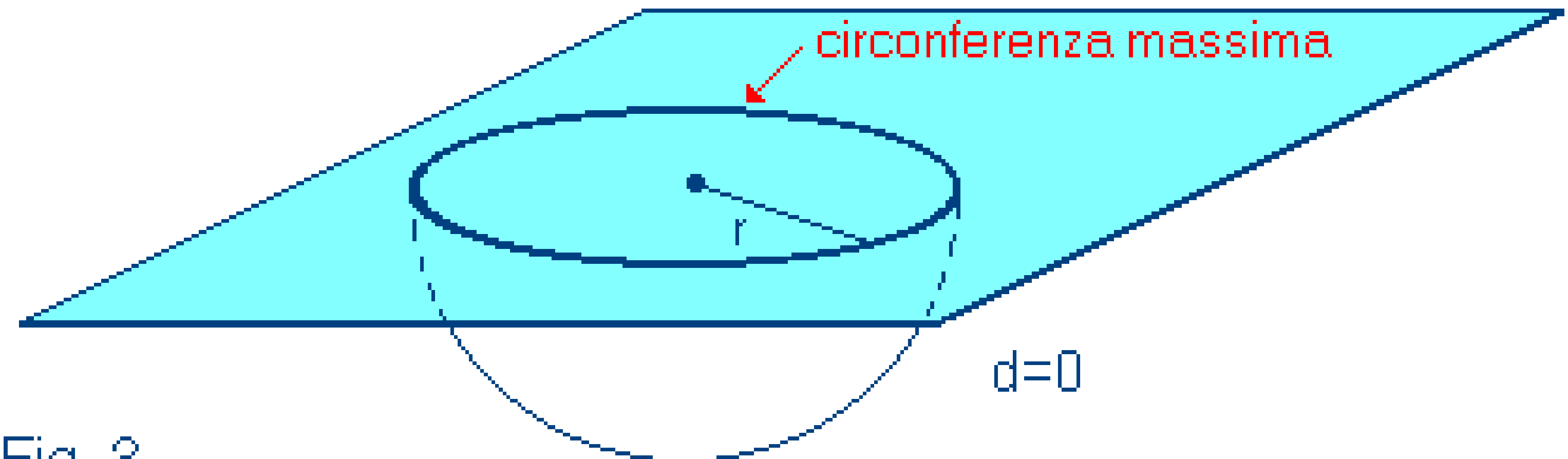


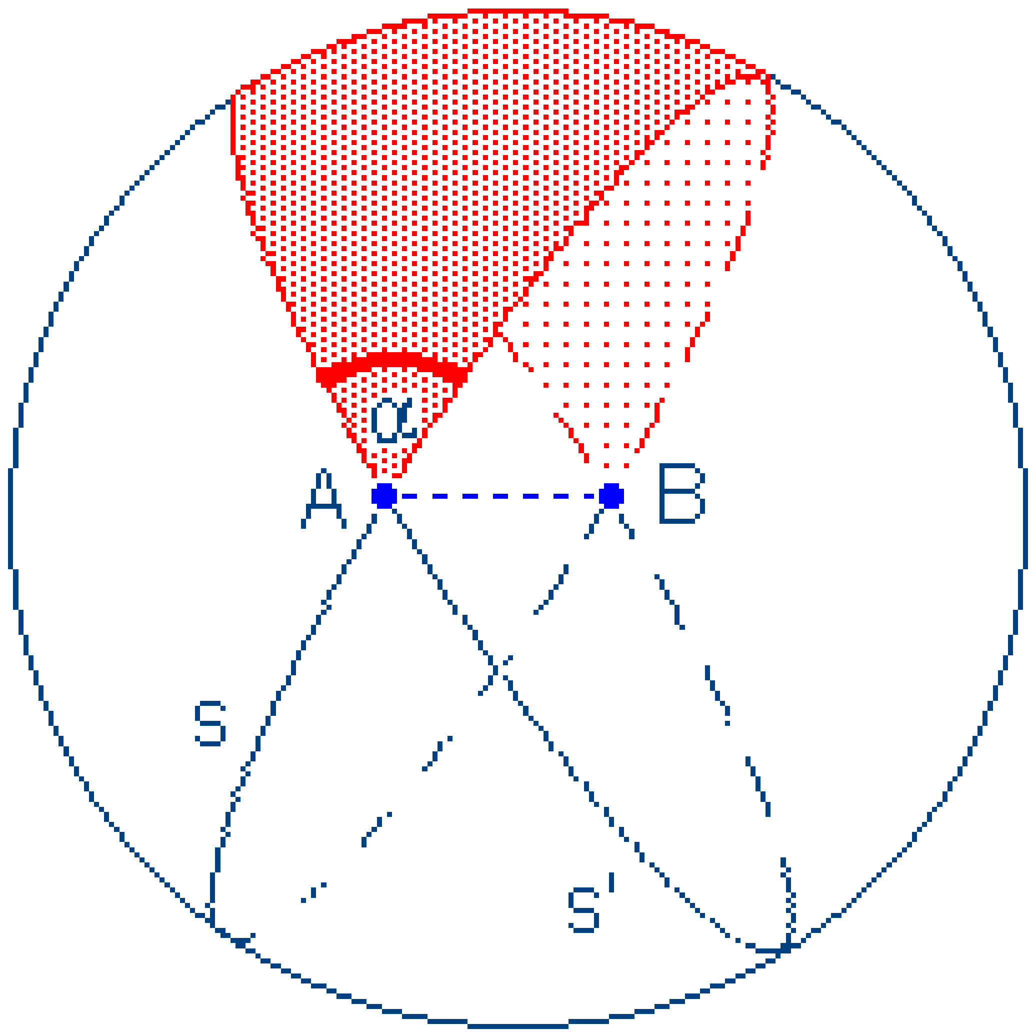
Fig. 3

Fuso sferico

- Un fuso sferico è limitato da due geodetiche.

Fuso sferico

- Un fuso sferico è limitato da due geodetiche.
- Quanto vale l'area di in fuso sferico di angolo α ?

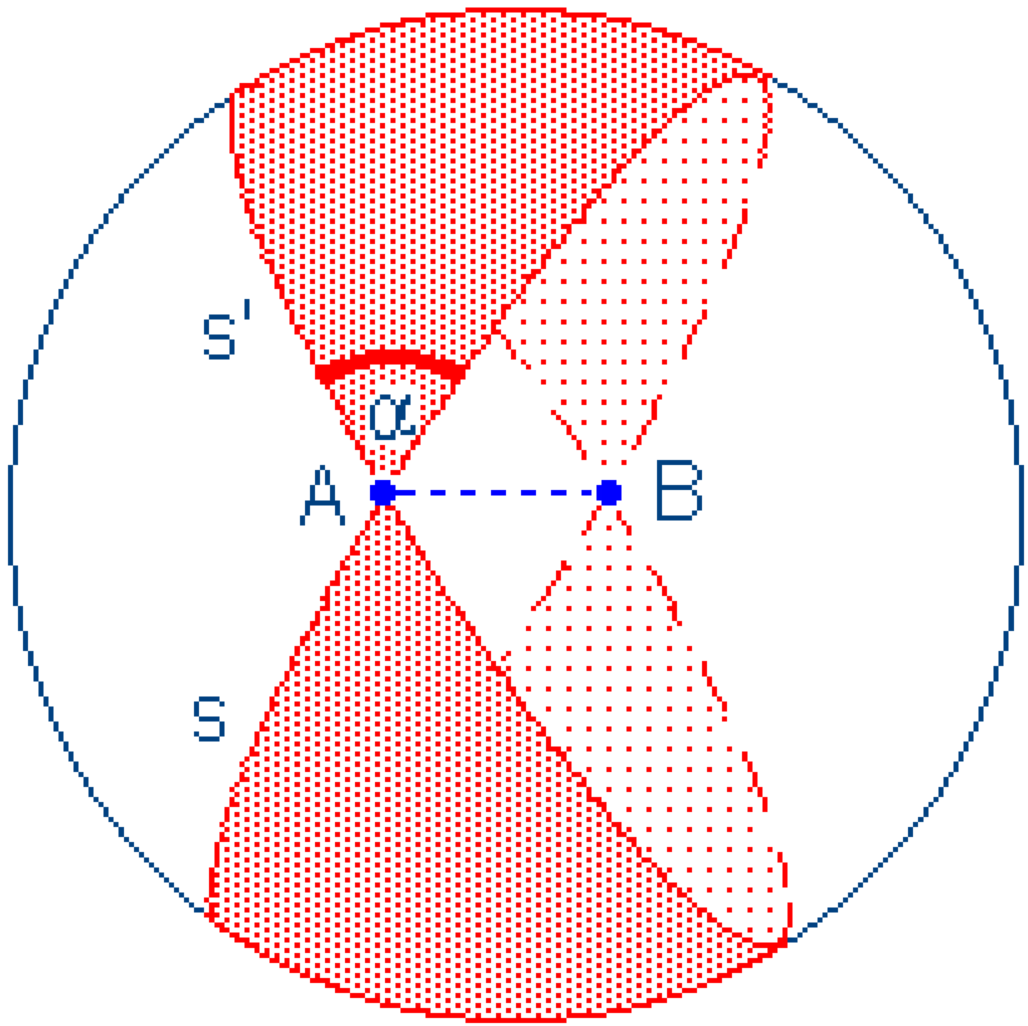


Doppio fuso sferico

- Quanto vale l'area del doppio fuso sferico di angolo α ?

Doppio fuso sferico

- Quanto vale l'area del doppio fuso sferico di angolo α ?
- Risposta: $A = 4\alpha R^2$ dove α è la misura in radianti.



2 rette sul piano

- In quante parti è suddiviso il piano da due rette ?

2 rette sul piano

- In quante parti è suddiviso il piano da due rette ?
- Risposta: 4

2 rette sul piano

- In quante parti è suddiviso il piano da due rette ?
- Risposta: 4
- E se le rette sono parallele ?

2 rette sul piano

- In quante parti è suddiviso il piano da due rette ?
- Risposta: 4
- E se le rette sono parallele ?
- Risposta: 3

2 rette sulla sfera

- In quante parti è suddivisa la sfera da due rette ?

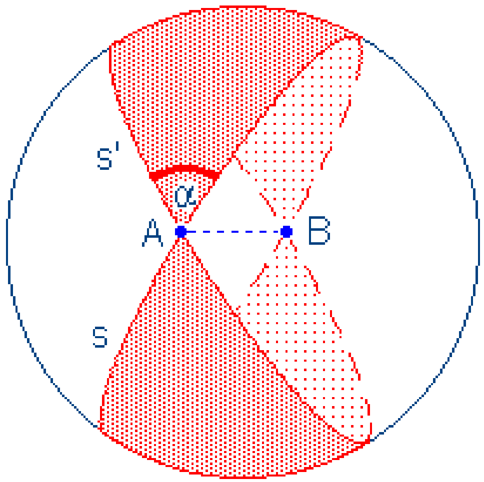


Fig. 3

2 rette sulla sfera

- In quante parti è suddivisa la sfera da due rette ?

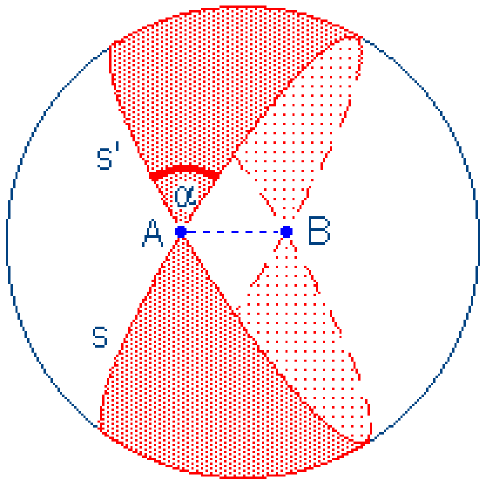


Fig. 3

- Risposta: 4

2 rette sulla sfera

- In quante parti è suddivisa la sfera da due rette ?

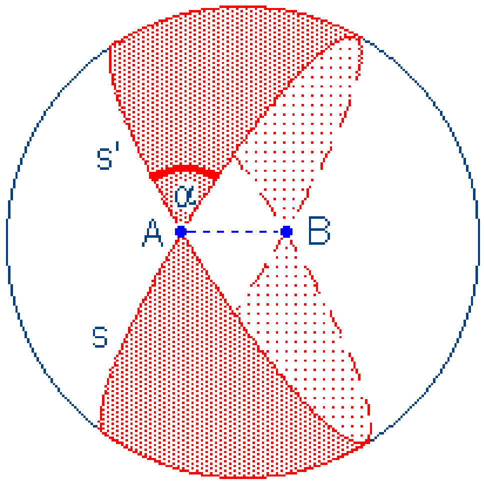
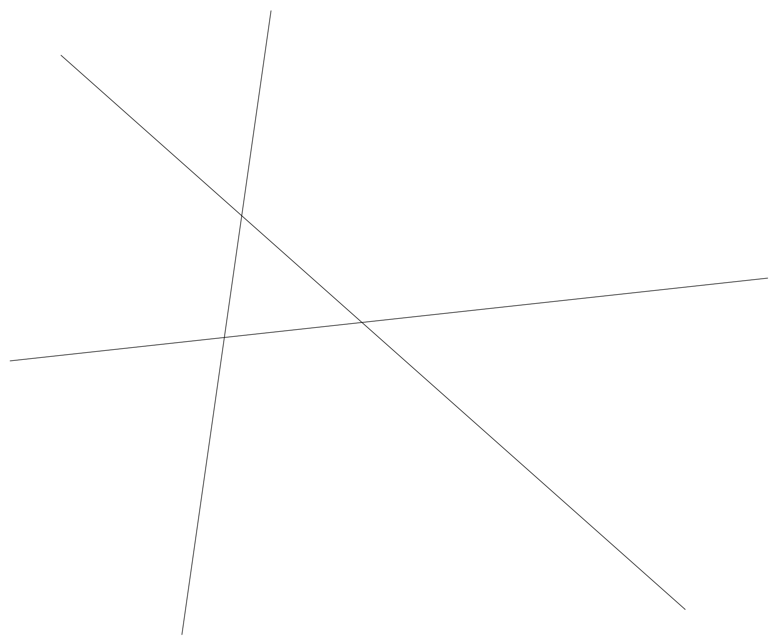


Fig. 3

- Risposta: 4
- Esistono rette parallele sulla sfera ?

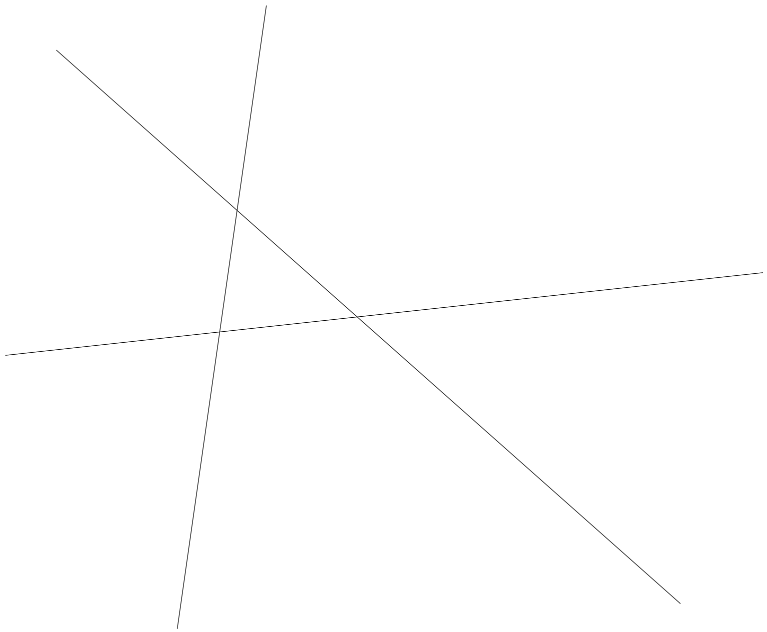
3 rette sul piano

- In quante parti è suddiviso il piano da tre rette ?



3 rette sul piano

- In quante parti è suddiviso il piano da tre rette ?



- Risposta: 7

3 rette sulla sfera

- In quante parti è suddivisa la sfera da tre rette ?

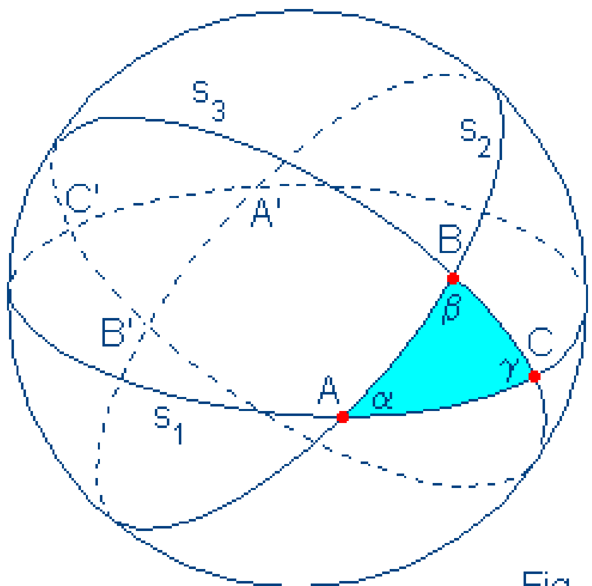


Fig. 1

3 rette sulla sfera

- In quante parti è suddivisa la sfera da tre rette ?

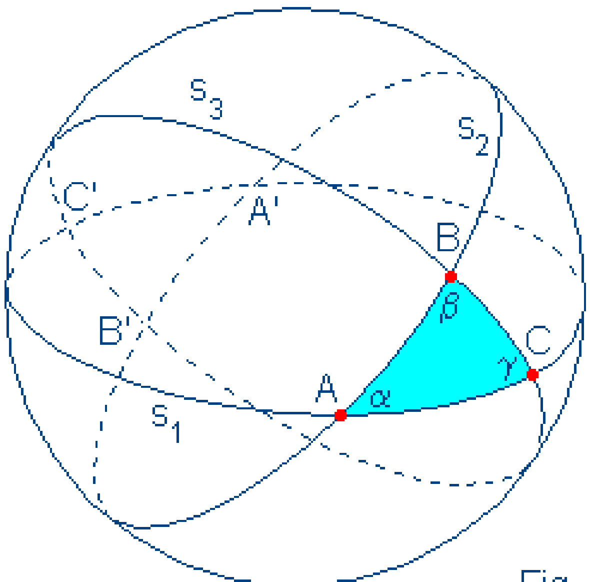


Fig. 1

- Risposta: 8, abbiamo in più il triangolo antipodale.

La somma degli angoli

- Consideriamo un triangolo sferico con angoli α, β, γ.

La somma degli angoli

- Consideriamo un triangolo sferico con angoli α, β, γ.
- Le figure ti aiutano a completare l'uguaglianza seguente ?

$$4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 = 4\pi R^2 + \dots$$

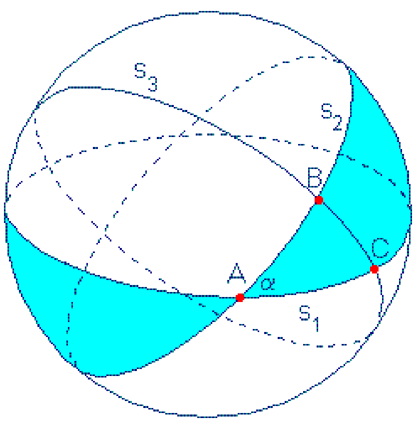


Fig. 2

La somma degli angoli

- Consideriamo un triangolo sferico con angoli α, β, γ.
- Le figure ti aiutano a completare l'uguaglianza seguente ?

$$4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 = 4\pi R^2 + \dots$$

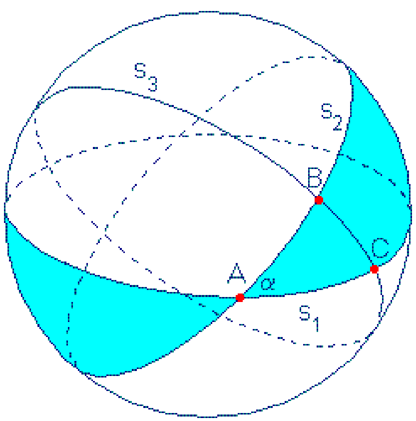


Fig. 2

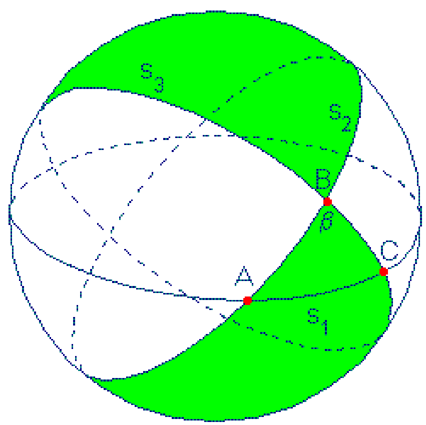


Fig. 3

La somma degli angoli

- Consideriamo un triangolo sferico con angoli α, β, γ.
- Le figure ti aiutano a completare l'uguaglianza seguente ?

$$4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 = 4\pi R^2 + \ldots$$

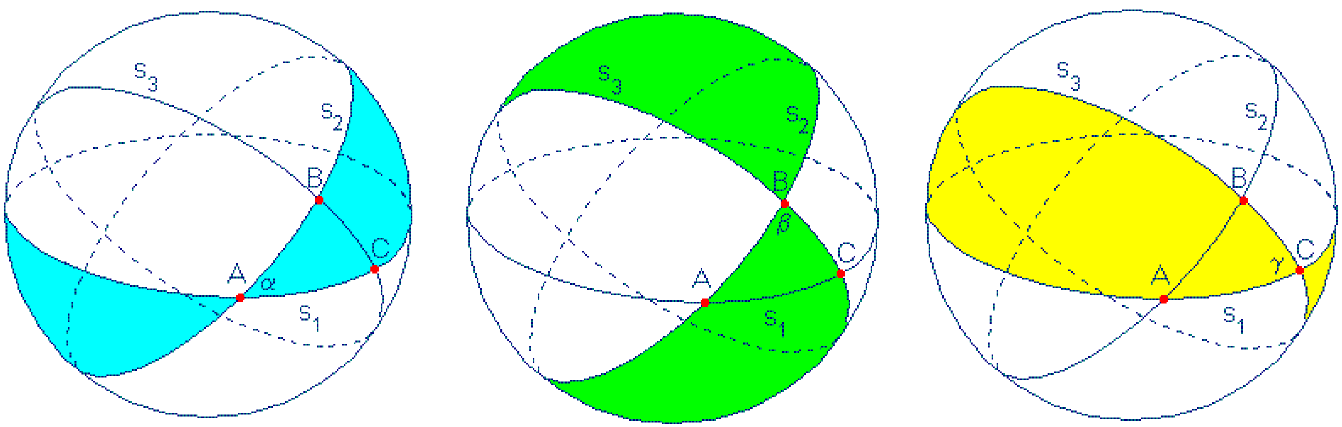


Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

L'area del triangolo

Quanto è l'area di un triangolo sferico con angoli α, β, γ ?

L’area del triangolo sulla sfera

- Si ricava che l’area di un triangolo sferico con angoli α, β, γ vale
$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

L'area del triangolo sulla sfera

- Si ricava che l'area di un triangolo sferico con angoli α, β, γ vale
$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$
- Abbiamo misurato l'area a partire dagli angoli !

L'area del triangolo sulla sfera

- Si ricava che l'area di un triangolo sferico con angoli α, β, γ vale

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

- Abbiamo misurato l'area a partire dagli angoli !
- Come conseguenza abbiamo anche che

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

in contrasto con il caso del piano dove vale l'uguaglianza.

Misura del raggio della sfera!

$$R^2 = \frac{A}{\alpha + \beta + \gamma - \pi}$$

Misura del raggio della sfera!

- $$R^2 = \frac{A}{\alpha + \beta + \gamma - \pi}$$
- Qual è il significato ?

Misura del raggio della sfera!

- $$R^2 = \frac{A}{\alpha + \beta + \gamma - \pi}$$
- Qual è il significato ?
- Il raggio della sfera può essere calcolato da misure fatte sulla sfera ! Questa è una misura di curvatura dello spazio.

Similitudine sulla sfera

- Ci sono triangoli simili sulla sfera?

Similitudine sulla sfera

- Ci sono triangoli simili sulla sfera?
- No! Due triangoli sferici con gli angoli uguali sono congruenti.

Circonferenza sulla sfera, I

La circonferenza sulla sfera (intrinseca) è il luogo dei punti che hanno distanza fissata da un punto, detto centro.

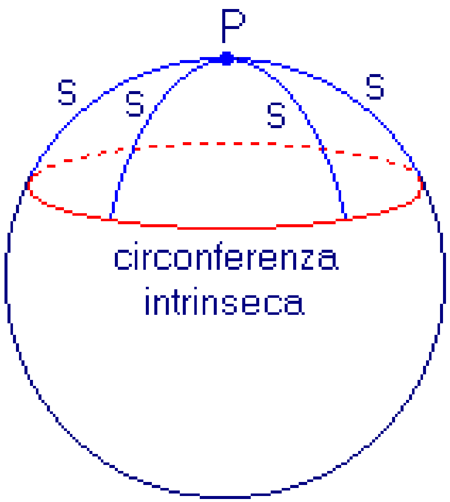


Fig. 1

Circonferenza sulla sfera, II

Sai calcolare la lunghezza della circonferenza sulla sfera di

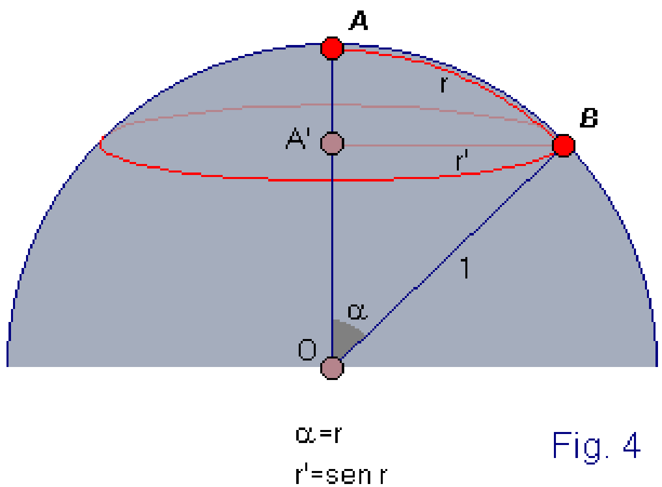


Fig. 4

raggio R ?

Confronto tra circonferenze

- La circonferenza di raggio r sulla sfera di raggio R misura
$$2\pi R \sin \frac{r}{R}$$

Confronto tra circonferenze

- La circonferenza di raggio r sulla sfera di raggio R misura

$$2\pi R \sin \frac{r}{R}$$

- La circonferenza di raggio r sul piano misura

$$2\pi r$$

Confronto tra circonferenze

- La circonferenza di raggio r sulla sfera di raggio R misura

$$2\pi R \sin \frac{r}{R}$$

- La circonferenza di raggio r sul piano misura

$$2\pi r$$

- Vale la disuguaglianza

$$2\pi R \sin \frac{r}{R} \leq 2\pi R \frac{r}{R} = 2\pi r$$

Elementi di Euclide

Gli Elementi di Euclide cominciano con cinque postulati

Il quinto postulato

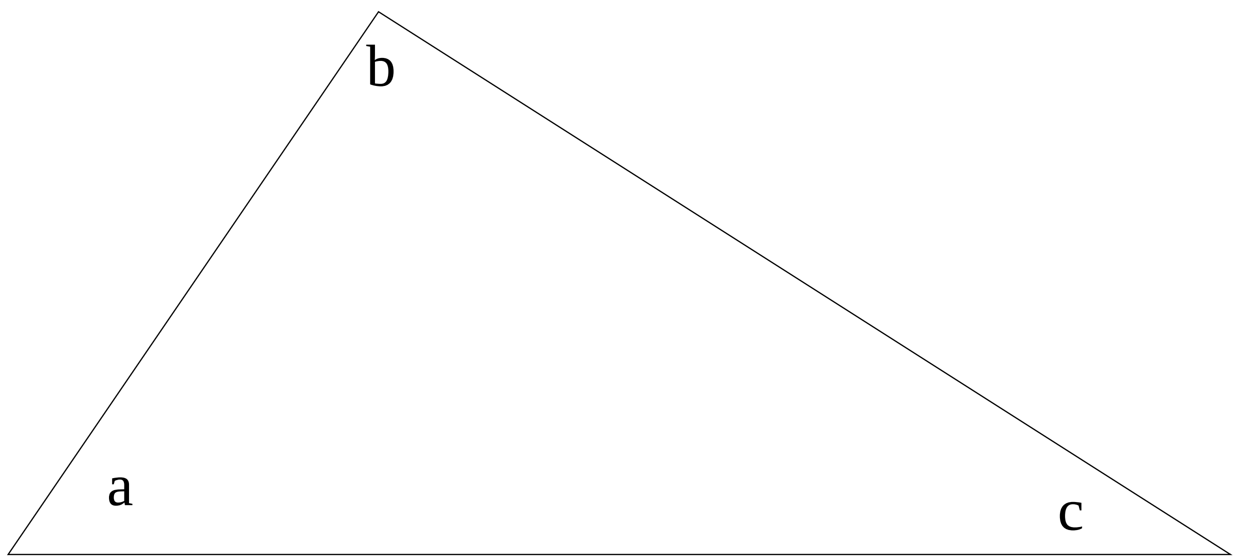
- Il quinto postulato, detto postulato delle parallele, afferma che per un punto P esterno a una retta r passa una unica parallela a r.

Il quinto postulato

- Il quinto postulato, detto postulato delle parallele, afferma che per un punto P esterno a una retta r passa una unica parallela a r.
- È necessario per dimostrare che la somma degli angoli di un triangolo vale un angolo piatto.

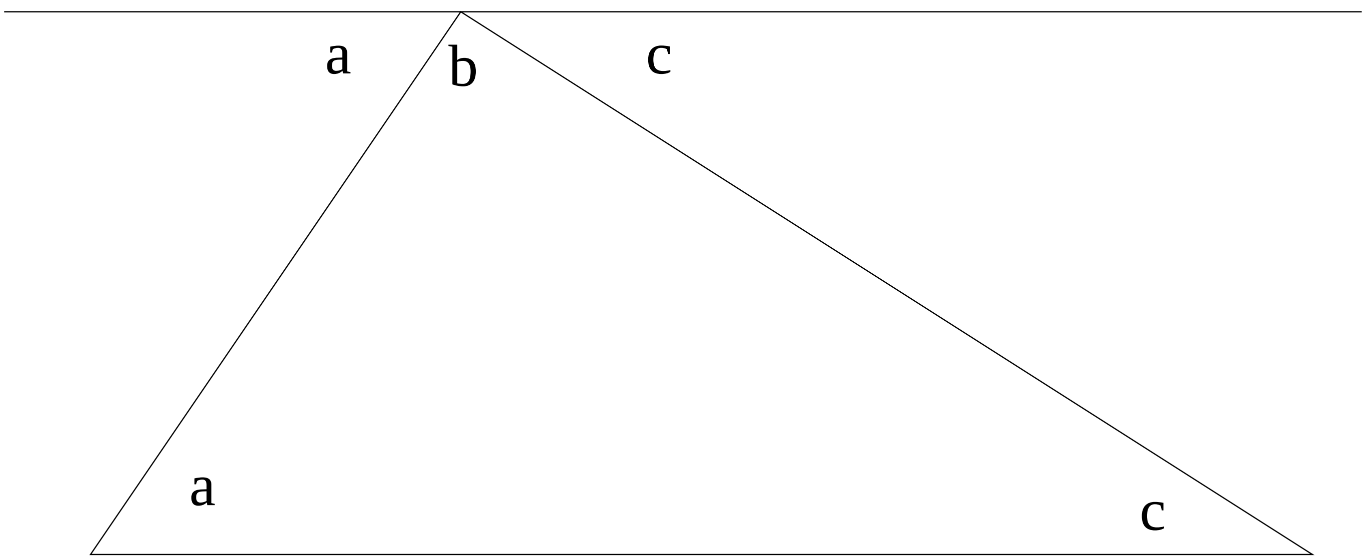
Il quinto postulato

- Il quinto postulato, detto postulato delle parallele, afferma che per un punto P esterno a una retta r passa una unica parallela a r.
- È necessario per dimostrare che la somma degli angoli di un triangolo vale un angolo piatto.



Il quinto postulato

- Il quinto postulato, detto postulato delle parallele, afferma che per un punto P esterno a una retta r passa una unica parallela a r.
- È necessario per dimostrare che la somma degli angoli di un triangolo vale un angolo piatto.



Il quinto postulato sulla sfera

- Sulla sfera il quinto postulato non vale perché non ci sono parallele!

Il quinto postulato sulla sfera

- Sulla sfera il quinto postulato non vale perché non ci sono parallele!
- Non può valere, anche perché la somma degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di un angolo piatto.

La geometria assoluta

- Il quinto postulato viene utilizzato solo a partire dalla proposizione 28.

La geometria assoluta

- Il quinto postulato viene utilizzato solo a partire dalla proposizione 28.
- Le prime 27 proposizioni dipendono solo dai primi quattro postulati e si dicono oggi proposizioni di *geometria assoluta*

Omar Khayam, I

- Omar Khayam (1048-1131), nato e morto a Nishapur, Persia, odierno Iran, prova che il postulato delle parallele e' equivalente al seguente fatto:

Omar Khayam, I

- Omar Khayam (1048-1131), nato e morto a Nishapur, Persia, odierno Iran, prova che il postulato delle parallele e' equivalente al seguente fatto:
- l'insieme dei punti equidistanti da una retta è ancora una retta (si pensi alla geometria della sfera, dove questo enunciato è falso).

Khayam, II

Cercando di provare il postulato delle parallele egli dimostra incidentalmente proprietà di figure in geometria non euclidea. Khayam misurò la lunghezza dell'anno come 365.24219858156 giorni.

Khayam venne attaccato dai Musulmani ortodossi che contestavano che i suoi risultati non si conformavano alla fede.

La stampa

Nel 1482 esce la prima edizione a stampa degli Elementi di Euclide.
Da allora si contano più di mille edizioni a stampa. Nel ’700 c’era già un’edizione in cinese.

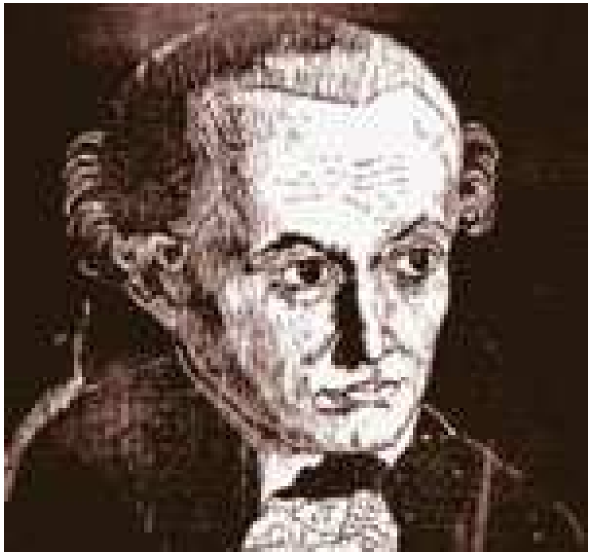
Legendre, I

Dopo 40 anni di lavoro Legendre dimostra che il quinto postulato di Euclide è equivalente al seguente
La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto. 

Legendre, II

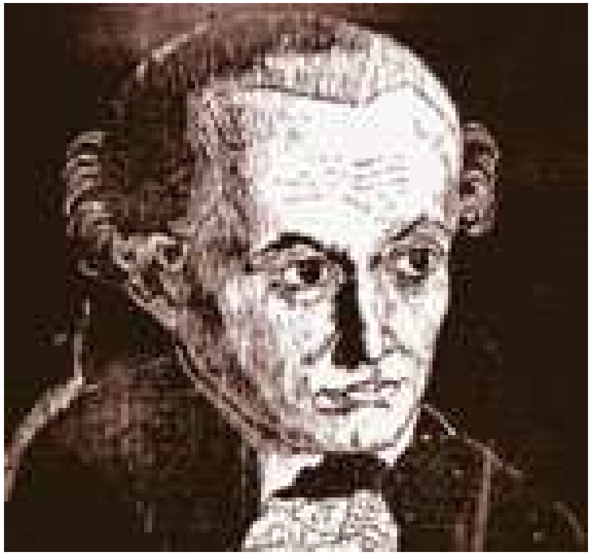
Legendre prova che la somma degli angoli interni non può essere maggiore di un angolo piatto. Questo argomento, che è analogo a quello che era stato proposto dal gesuita Girolamo Saccheri, riposa sul fatto che le rette possono essere prolungate all'infinito. Infine anche Legendre casca in un errore molto sottile. Assume che da ogni punto interno a un angolo è sempre possibile tracciare una retta che incontra entrambi i lati dell'angolo. Purtroppo anche questa è una forma equivalente del postulato delle parallele.

Kant, I



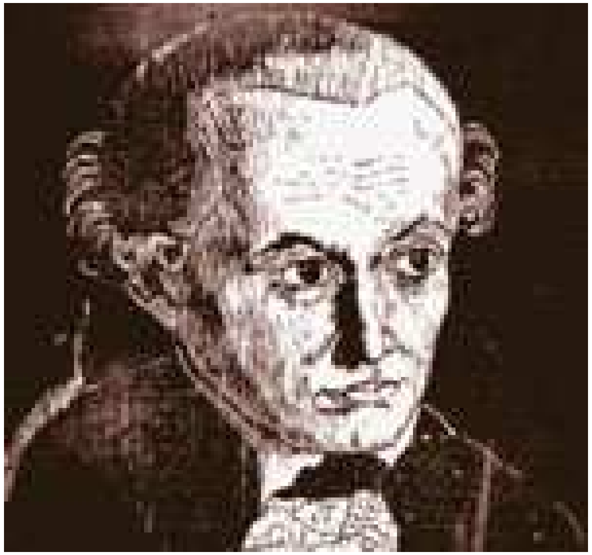
- La filosofia è dominata dalla figura di Kant. Il giudizio è un rapporto tra due termini (soggetto e predicato) e può essere

Kant, I



- La filosofia è dominata dalla figura di Kant. Il giudizio è un rapporto tra due termini (soggetto e predicato) e può essere
- giudizio analitico, ossia esplicativo quando nel predicato è detto qualcosa che è già implicito nel soggetto

Kant, I



- La filosofia è dominata dalla figura di Kant. Il giudizio è un rapporto tra due termini (soggetto e predicato) e può essere
- giudizio analitico, ossia esplicativo quando nel predicato è detto qualcosa che è già implicito nel soggetto
- giudizio sintetico, ossia estensivo della conoscenza in quanto il predicato aggiunge qualcosa non compreso nel soggetto.

Kant, II

Kant propone l'esempio della geometria euclidea, dotata di caratteri di universalità e necessità come giudizio sintetico a priori. Lo spazio è una rappresentazione necessaria a priori la quale sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne.

Farkas Bolyai

- Farkas Bolyai (1775-1854) si arrangiò con mille lavori, ma il postulato delle parallele fu il pallino della sua vita.

Farkas Bolyai

- Farkas Bolyai (1775-1854) si arrangiò con mille lavori, ma il postulato delle parallele fu il pallino della sua vita.
- A questo punto la vicenda si intreccia con quella di suo figlio János Bolyai.

János Bolyai, I

In una lettera scritta il 4 Aprile 1820 al figlio János a Vienna, F.Bolyai scriveva

È incredibile che questa oscurità testarda, questa eterna eclisse, questa macchia nella geometria, questa nuvola eterna sulla verità verginale possa essere sopportata. Non ti misurare con il problema delle parallele. Conosco tutta la strada per intero. Ho misurato la notte senza fondo e tutta la luce e la gioia della mia vita se ne sono andate via.

János Bolyai, II

- 

Nel 1825 János Bolyai mostrò al padre la sua scoperta della geometria non euclidea. Il postulato delle parallele può non valere.

János Bolyai, II

- 

Nel 1825 János Bolyai mostrò al padre la sua scoperta della geometria non euclidea. Il postulato delle parallele può non valere.
- È una svolta per la matematica. La geometria euclidea non è l’unica geometria. Kant aveva torto.

János Bolyai, II

- 

Nel 1825 János Bolyai mostrò al padre la sua scoperta della geometria non euclidea. Il postulato delle parallele può non valere.
- È una svolta per la matematica. La geometria euclidea non è l'unica geometria. Kant aveva torto.
- All'inizio il padre non fu entusiasta, ma nel 1830 persuase il figlio a pubblicare le sue scoperte.

Gauss

Gauss ricevette i risultati di Bolyai, e rispose che aveva trovato risultati analoghi venti anni prima, ma non li aveva pubbicati.

Gauss, II

 In effetti dalla lettura delle lettere private di Gauss risulta che egli aveva sviluppato un punto di vista analogo 20 anni prima, ma non osò renderlo pubblico perché temeva le strida dei beoti. Due secoli dopo il processo a Galileo da parte dell'Inquisizione, la libertà di pensiero nelle opinioni scientifiche era ancora in pericolo.

Sophie Germain, I


Sophie Germain (1776 - 1831)

I genitori si opponevano al suo studio e lei studiava la notte, di nascosto, a lume di candela. Le donne erano escluse dall'Università, ma studiò da autodidatta ottenendo gli appunti delle lezioni. Scrisse dei lavori con lo pseudonimo "Monsieur Le Blanc".

Sophie Germain, II

Quando Lagrange seppe che dietro allo pseudonimo si nascondeva una donna la sua stima per i lavori rimase immutata. Tra il 1804 e il 1809 scrive una dozzina di lettere a Gauss. C'e' un aneddoto interessante. Brunsweick viene occupata dall'esercito francese. Un amico di famiglia era comandante nell'esercito francese e venne raccomandato di rispettare Gauss e la sua famiglia, che infatti non viene toccata. Solo in seguito Gauss seppe che questo aiuto era dovuto a "Monsieur Le Blanc", e che "Monsieur Le Blanc" era una donna.

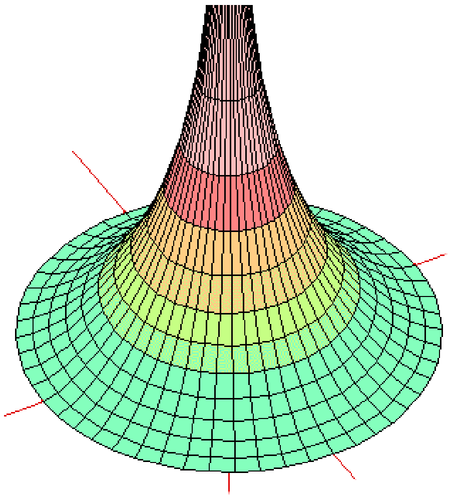
Sophie Germain, III

Grossa parte del lavoro matematico di Sophie Germain riguarda le superfici elastiche, ed esula un po' dal nostro tema. Ma alla fine della sua vita, pubblica nel 1831 uno studio molto importante sulla curvatura delle superfici, dove aveva compreso rapidamente il nuovo concetto di curvatura.

Lobachevsky

 Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) lavorò in modo indipendente sulle geometrie non euclidee. Il suo lavoro maggiore, Geometriya, completato nel 1823, non fu pubblicato nella forma originale fino al 1809.

La pseudosfera di Beltrami

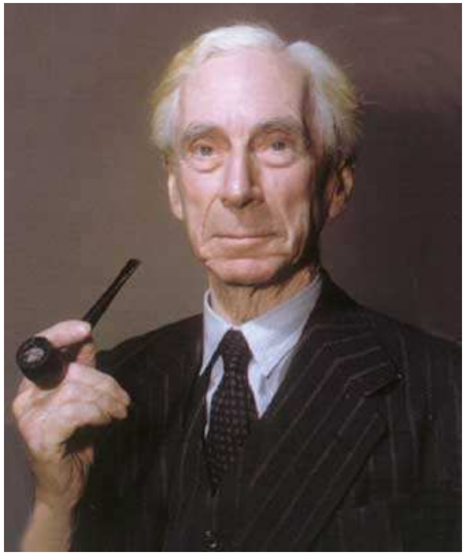

The top half of a pseudo-sphere

Il primo modello di geometria non euclidea compatibile con i quattro postulati di Euclide. è la pseudosfera di Eugenio Beltrami (1835-1900). Questa è la prima dimostrazione rigorosa che il postulato delle parallele è indipendente dagli altri.

Russell, I

A undici anni cominciai a studiare la geometria, sotto la guida di mio fratello. Fu uno dei grandi avvenimenti della mia vita, inebriante come il primo amore. Non avrei mai immaginato che al mondo ci fosse una cosa cosìsplendida. Da quel momento la matematica costituì il mio interesse dominante e la mia principale fonte di felicità.

Russell, II

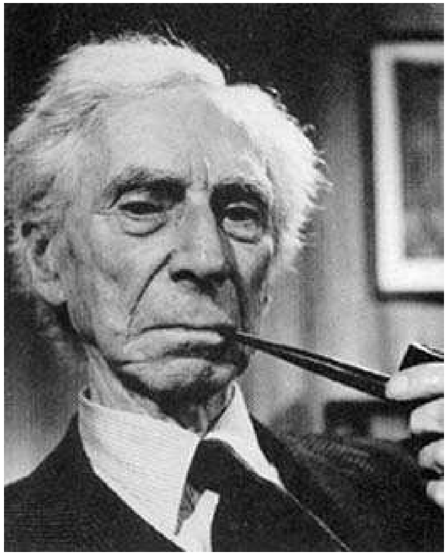


Ma come tutte le felicità non era perfetta. Mi era stato detto che Euclide dimostrava le cose, e fui molto deluso dal fatto che iniziasse con dei postulati. Dapprima rifiutati di accettarli, a meno che mio fratello non me ne offrisse un valido motivo, ma lui dichiarò
- Se non li accetti non possiamo andare avanti - e siccome desideravo proseguire, pur riluttante li accettai *pro tempore*.

Russell, III

Il dubbio che provai in quel momento circa le premesse della matematica, rimase in me e determinò l'indirizzo della mia opera successiva.

Russell, IV



Molto più difficili mi risultarono i primi elementi dell’algebra, forse per colpa di un insegnamento sbagliato.Mi costringevano a imparare a memoria: *Il quadrato della somma di due numeri è pari alla somma dei loro quadrati aumentata due volte del loro prodotto*. Non avevo la più vaga idea di che cosa volesse dire, e quando non riuscivo a ricordare le parole il mio istitutore mi tirava il libro in testa, cosa che non stimolava minimamente le mie capacità intellettuali.

Einstein, I

All’età di dodici anni provai una nuova meraviglia di natura completamente diversa; e fu leggendo un libretto sulla geometria piana euclidea, capitatomi tra le mani al principio dell’anno scolastico.

Einstein, II

C’erano delle asserzioni, ad esempio quella che le tre altezze di un triangolo si intersecano in un sol punto, che - pur non essendo affatto evidenti - potevano tuttavia essere dimostrate con tanta certezza da eliminare qualsiasi dubbio. Questa lucidità e certezza mi fecero un’indescrivibile impressione. Il fatto che l’assioma dovesse essere

accettato senza dimostrazione non mi dava fastidio.

Einstein, III

- Per me era sufficiente, in ogni caso, poter basare le dimostrazioni su proposizioni la cui validità non mi sembrava dubbia. Inoltre, mi sembrava che le cose di cui tratta la geometria non fossero essenzialmente diverse da quelle che si percepiscono coi sensi, *che si possono vedere e toccare*.

Einstein, III

- Per me era sufficiente, in ogni caso, poter basare le dimostrazioni su proposizioni la cui validità non mi sembrava dubbia. Inoltre, mi sembrava che le cose di cui tratta la geometria non fossero essenzialmente diverse da quelle che si percepiscono coi sensi, *che si possono vedere e toccare*.
- Quest'idea rudimentale, probabilmente la stessa che sta alla base della ben nota problematica kantiana sulla possibilità dei giudizi sintetici a priori, si fonda ovviamente sul fatto che il rapporto esistente fra i concetti geometrici e gli oggetti dell'esperienza sensibile (asta rigida, intervallo finito ecc.) mi era inconsciamente presente.

La relatività


La matematica ha anticipato la fisica, nel senso che la speculazione su geometrie diverse da quella euclidee ha aperto la strada alla visione di Einstein. I raggi luminosi nello spazio interplanetario non si muovono in linea retta ma sono in realtà deviati dalle presenza di masse. Le geodetiche non sono rette ! La relatività generale ebbe la sua verifica definitiva nel 1919, durante l'osservazione di un'eclissi di Sole, in cui le stelle vicine all'occultazione solare apparivano spostate.

Bibliografia

Pagina web per approfondimenti
http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo.htm

Un testo sul percorso storico
H. Meschkowski, Mutamenti nel pensiero matematico, Boringhieri