Introduzione alla cartografia e alla geometria della sfera

Liceo L. da Vinci, 13.3.07

Giorgio Ottaviani
ottavian@math.unifi.it

www.math.unifi.it/ottavian

Università di Firenze

Dal piano alla sfera

- In prima approssimazione la superficie della Terra assomiglia a un piano

Dal piano alla sfera

- In prima approssimazione la superficie della Terra assomiglia a un piano
- si estende lungo due dimensioni

Dal piano alla sfera

- In prima approssimazione la superficie della Terra assomiglia a un piano
- si estende lungo due dimensioni
- tutti i bambini si immaginano una Terra piatta

Gli albori della geometria

- La Geometria nasce in Egitto con la motivazione di misurare i confini dei campi coltivati attorno al Nilo

Gli albori della geometria

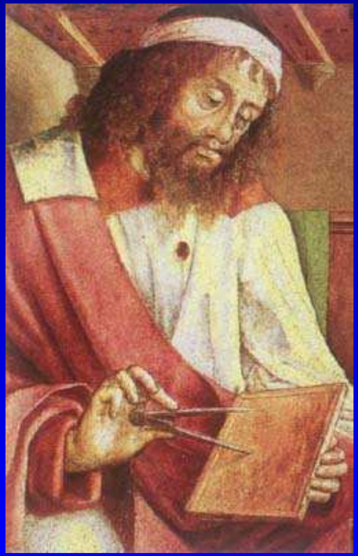
- La Geometria nasce in Egitto con la motivazione di misurare i confini dei campi coltivati attorno al Nilo
- la prima Geometria che si sviluppa è la geometria del piano

Gli Elementi di Euclide

- In Grecia intorno al 300 a.C la Geometria trova un fondamento assiomatico-deduttivo

Gli Elementi di Euclide

- In Grecia intorno al 300 a.C la Geometria trova un fondamento assiomatico-deduttivo
- Gli Elementi di Euclide danno una trattazione sistematica della Geometria del piano e dello spazio, e dell'aritmetica conosciuta



Gli Elementi di Euclide

- In Grecia intorno al 300 a.C la Geometria trova un fondamento assiomatico-deduttivo
- Gli Elementi di Euclide danno una trattazione sistematica della Geometria del piano e dello spazio, e dell'aritmetica conosciuta
- A partire da cinque postulati, tutti i teoremi sono seguiti da una dimostrazione

Matematica e Democrazia

- Ogni lettore può convincersi della validità degli enunciati verificando le relative dimostrazioni

Matematica e Democrazia

- Ogni lettore può convincersi della validità degli enunciati verificando le relative dimostrazioni
- Cade così il principio di autorità che era proprio della scuola pitagorica e della matematica precedente. Il nuovo sviluppo della matematica va di pari passo con quello della Democrazia

Matematica e Filosofia

- La Geometria degli Elementi di Euclide rimane per due millenni un esempio insuperato di rigore e bellezza

Matematica e Filosofia

- La Geometria degli Elementi di Euclide rimane per due millenni un esempio insuperato di rigore e bellezza
- Da Aristotele a Kant tutti i grandi pensatori si misurano con la Geometria, che diventa un paradigma per il metodo scientifico.

La sfera

- Gli Elementi di Euclide non erano certamente completi. Forse la più grande lacuna riguarda la sfera.

La sfera

- Gli Elementi di Euclide non erano certamente completi. Forse la più grande lacuna riguarda la sfera.
- Il calcolo del volume della sfera era uno dei più importanti problemi aperti.

La sfera

- Gli Elementi di Euclide non erano certamente completi. Forse la più grande lacuna riguarda la sfera.
- Il calcolo del volume della sfera era uno dei più importanti problemi aperti.
- Viene risolto un secolo più tardi da Archimede, il più grande genio dell'antichità.

La proiezione cilindrica, I

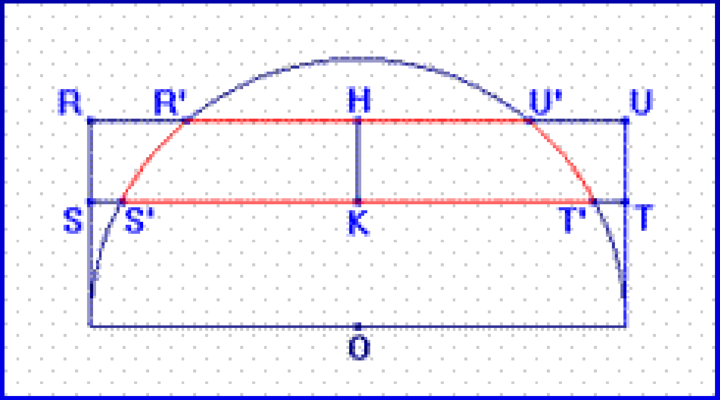
- Archimede studia la sfera con il metodo della proiezione cilindrica.

La proiezione cilindrica, I

- Archimede studia la sfera con il metodo della proiezione cilindrica.
- Studia la porzione della sfera compresa tra due paralleli.

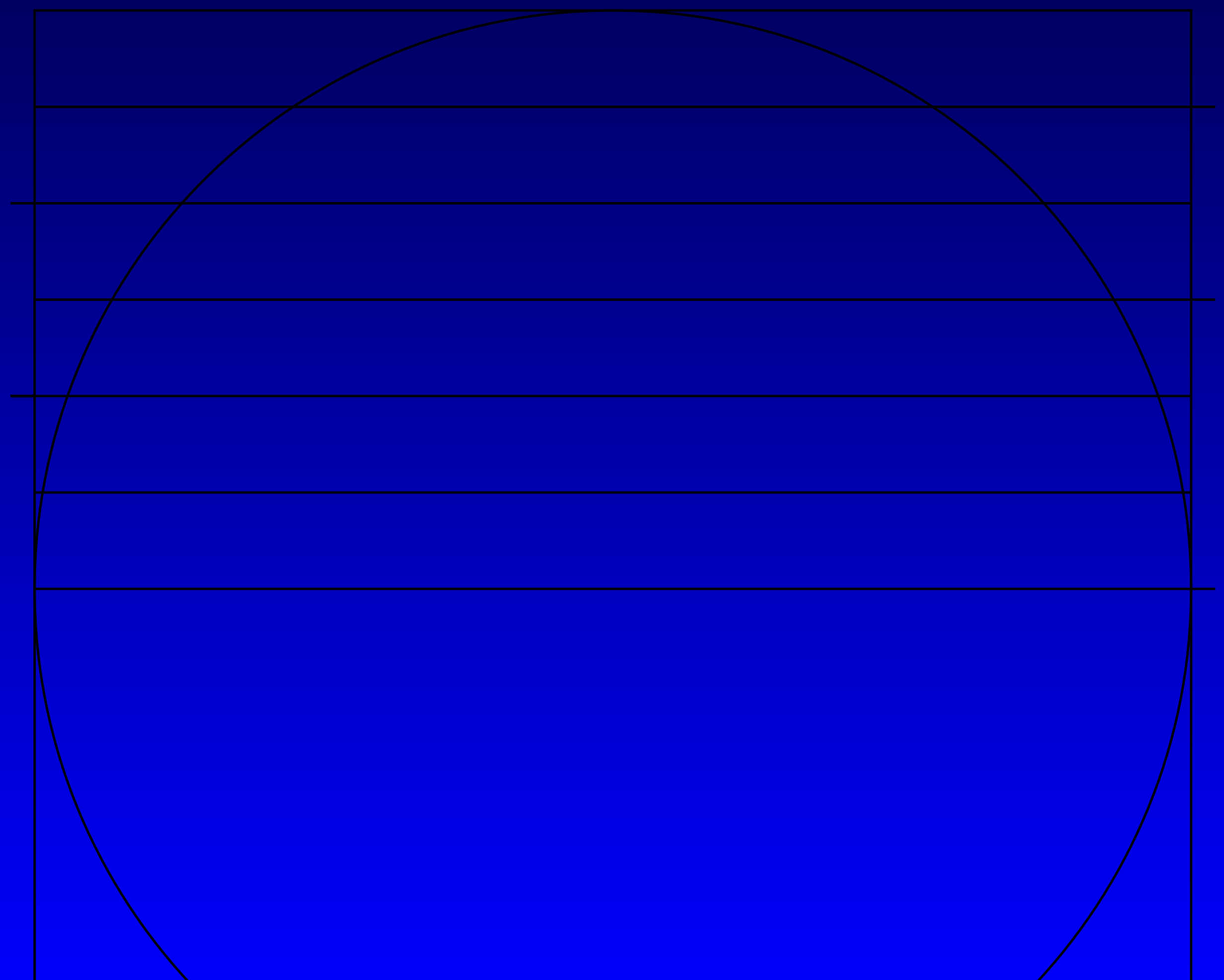
La proiezione cilindrica, I

- Archimede studia la sfera con il metodo della proiezione cilindrica.
- Studia la porzione della sfera compresa tra due paralleli.
- Dimostra che la superficie di un settore della sfera è equivalente a quella corrispondente sul cilindro, che può essere riportata su un piano ed è facile da calcolare.



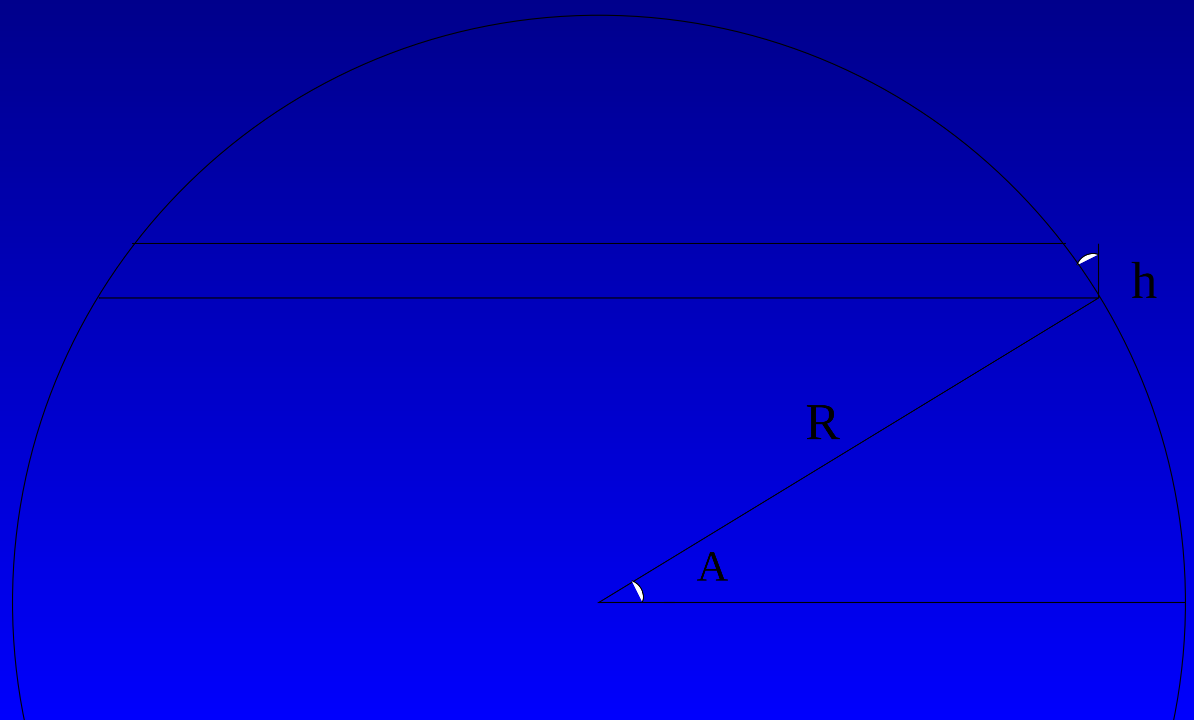
La proiezione cilindrica, II

- Archimede dimostra che le superfici della sfera comprese tra paralleli equidistanti sono tutte equivalenti



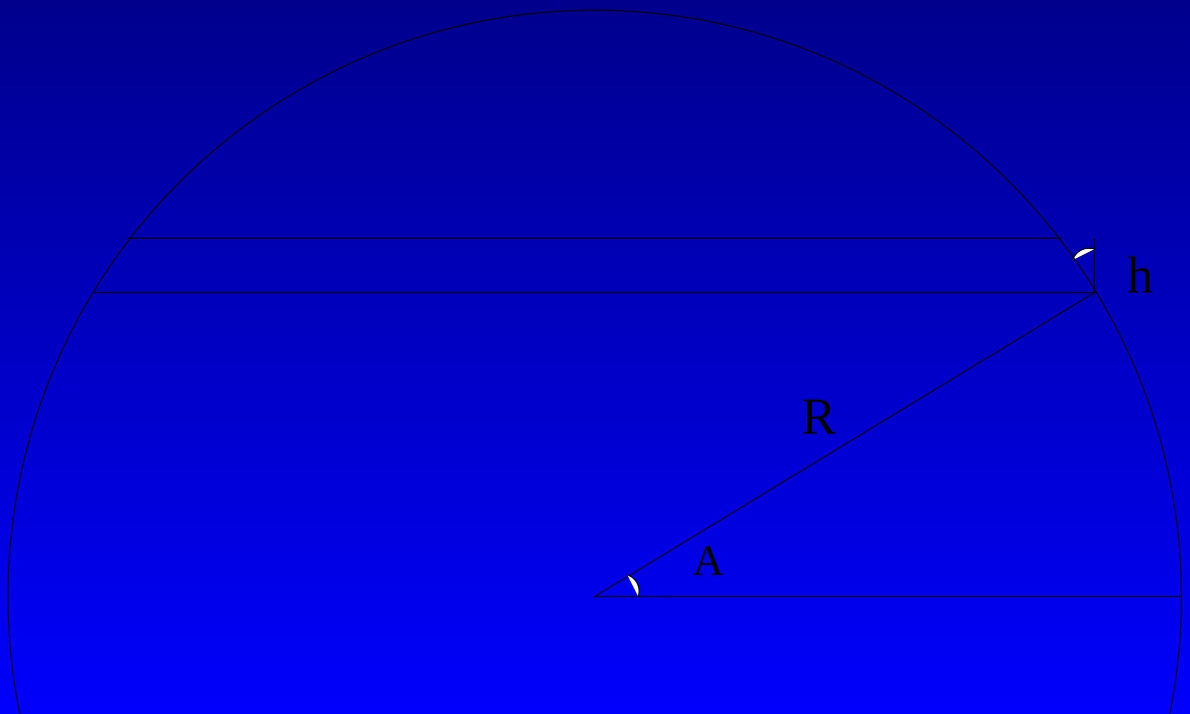
La proiezione cilindrica, III

- Consideriamo la superficie della sfera compresa tra due paralleli vicini tra loro



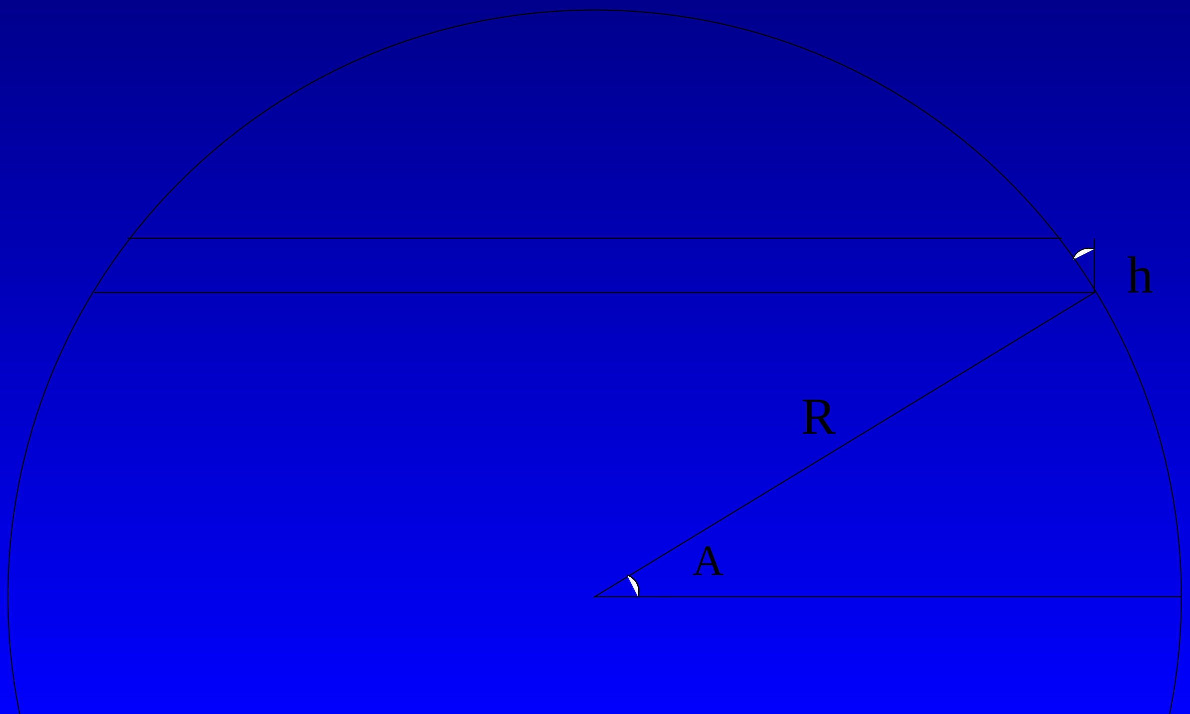
La proiezione cilindrica, III

- Consideriamo la superficie della sfera compresa tra due paralleli vicini tra loro
- $2\pi(R\cos A)\frac{h}{\cos A} = 2\pi Rh$



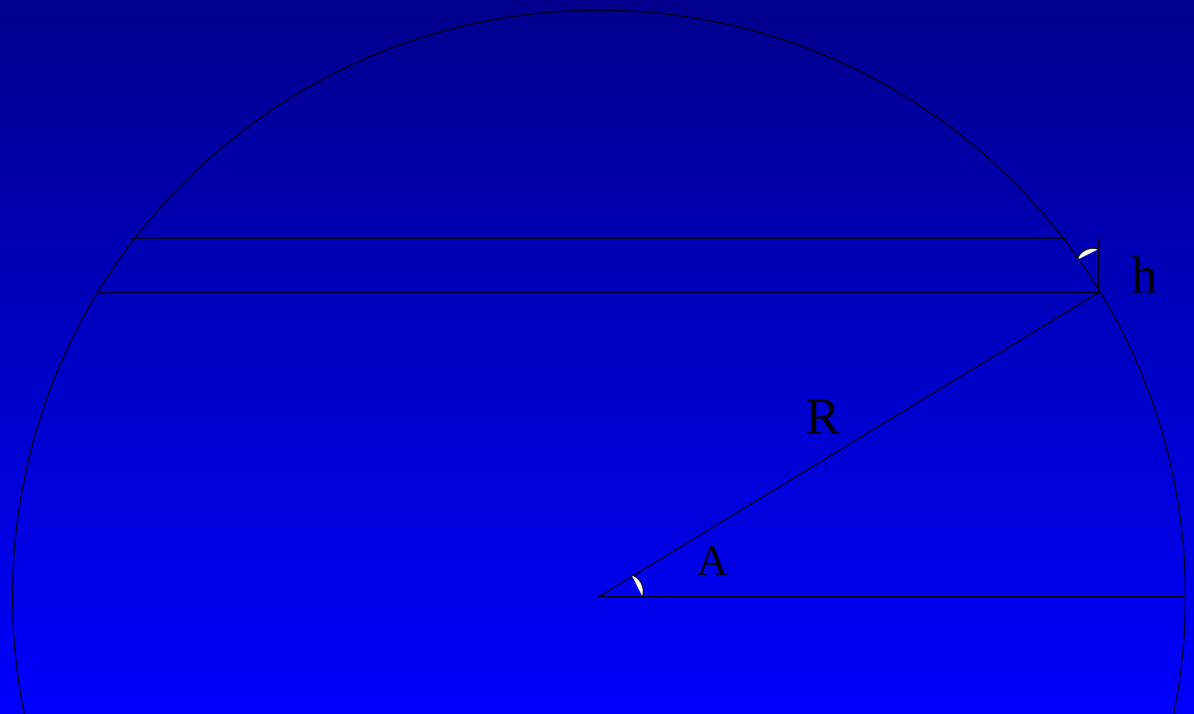
La proiezione cilindrica, III

- Consideriamo la superficie della sfera compresa tra due paralleli vicini tra loro
- $2\pi(R\cos A)\frac{h}{\cos A} = 2\pi Rh$
- non dipende da A !!



La proiezione cilindrica, III

- Consideriamo la superficie della sfera compresa tra due paralleli vicini tra loro
- $2\pi(R\cos A)\frac{h}{\cos A} = 2\pi Rh$
- non dipende da A !!
- Questo dimostra l'affermazione di Archimede.



La superficie ed il volume della sfera

- Archimede calcola in questo modo la superficie della sfera, come la superficie del cilindro circoscritto. Il risultato è

$$S = (2\pi r)(2r) = 4\pi r^2$$

La superficie ed il volume della sfera

- Archimede calcola in questo modo la superficie della sfera, come la superficie del cilindro circoscritto. Il risultato è

$$S = (2\pi r)(2r) = 4\pi r^2$$

- Il volume è

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

La superficie ed il volume della sfera

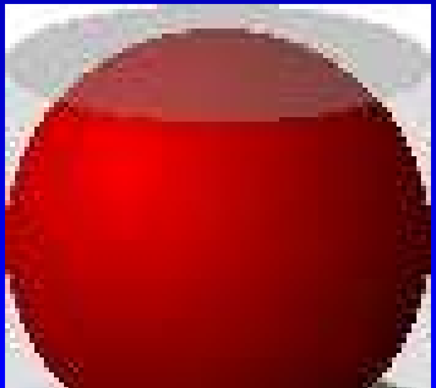
- Archimede calcola in questo modo la superficie della sfera, come la superficie del cilindro circoscritto. Il risultato è

$$S = (2\pi r)(2r) = 4\pi r^2$$

- Il volume è

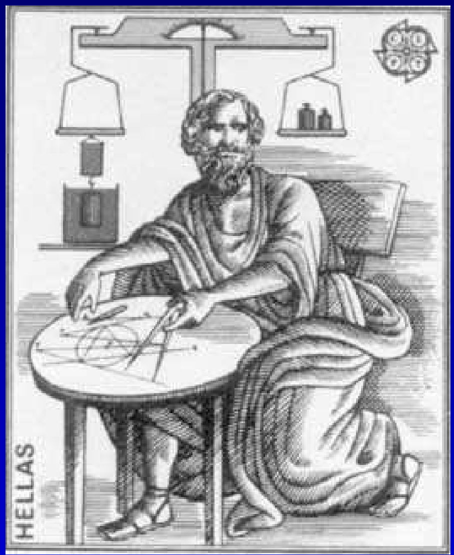
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Sulla tomba di Archimede, nei pressi di Siracusa, viene scolpita una sfera inscritta in un cilindro.



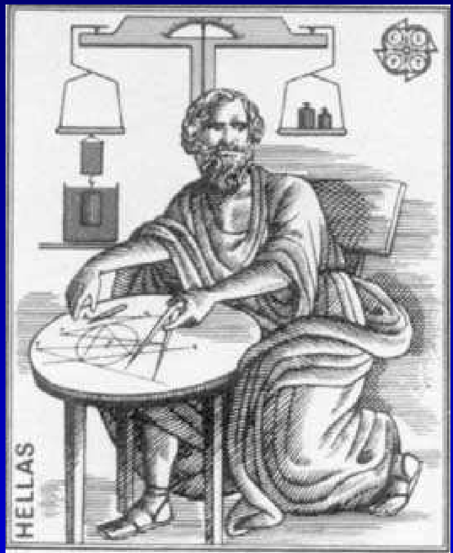
Archimede al lavoro

- Archimede fonde la teoria con le applicazioni, calcola i primi decimali di π

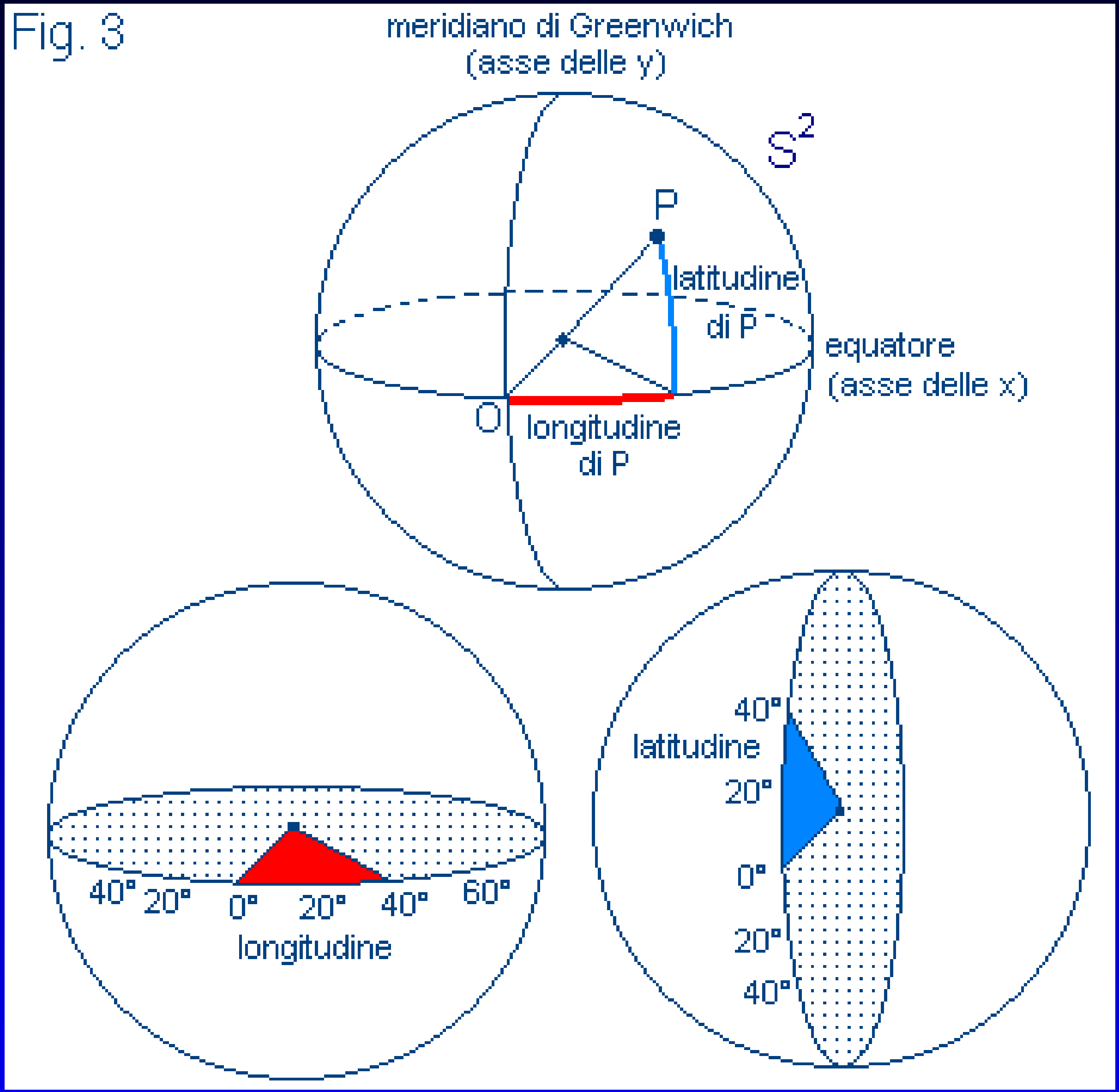


Archimede al lavoro

- Archimede fonde la teoria con le applicazioni, calcola i primi decimali di π
- La teoria di Euclide è costruttiva, gli strumenti di lavoro sono la riga e il compasso.



Coordinate sulla sfera

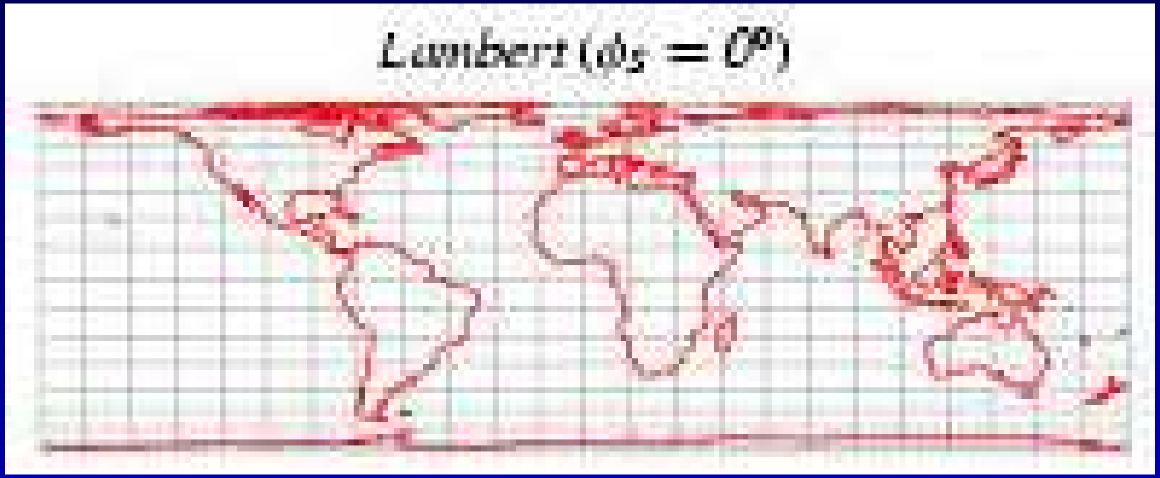


Il problema delle carte geografiche

- Il metodo di Archimede può servire per rappresentare la sfera su una carta piana

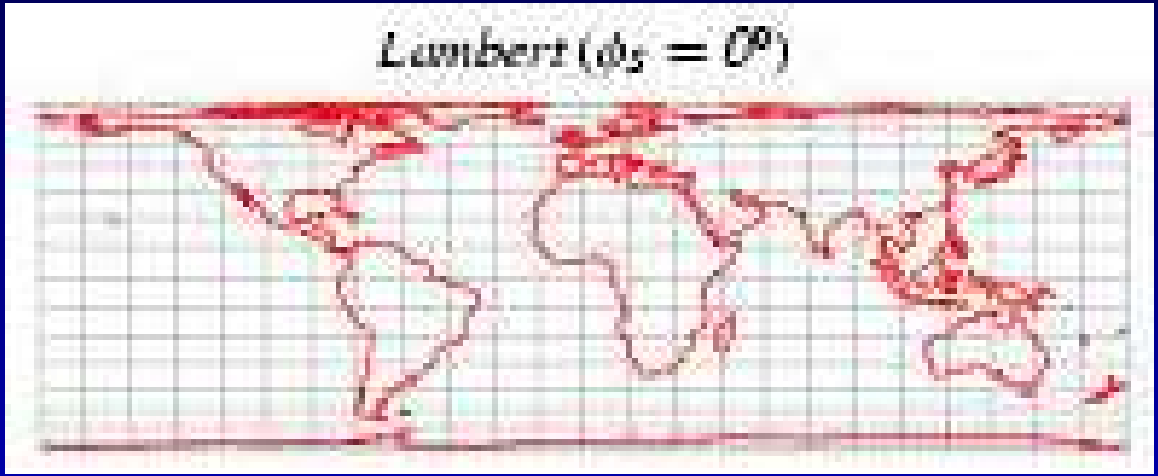
Il problema delle carte geografiche

- Il metodo di Archimede può servire per rappresentare la sfera su una carta piana
- La rappresentazione che si trova è la seguente



Il problema delle carte geografiche

- Il metodo di Archimede può servire per rappresentare la sfera su una carta piana
- La rappresentazione che si trova è la seguente



- Questa rappresentazione conserva le aree, ma ha il difetto di non conservare le distanze e nemmeno gli angoli.

Carte geografiche e navigazione, I

- Una piccola porzione della sfera può essere rappresentata abbastanza fedelmente sul piano

Carte geografiche e navigazione, I

- Una piccola porzione della sfera può essere rappresentata abbastanza fedelmente sul piano

- Questo non è più vero per porzioni consistenti di una sfera.

Carte geografiche e navigazione, II

- Il problema diventa drammaticamente attuale nell'epoca delle grandi navigazioni e delle esplorazioni

Carte geografiche e navigazione, II

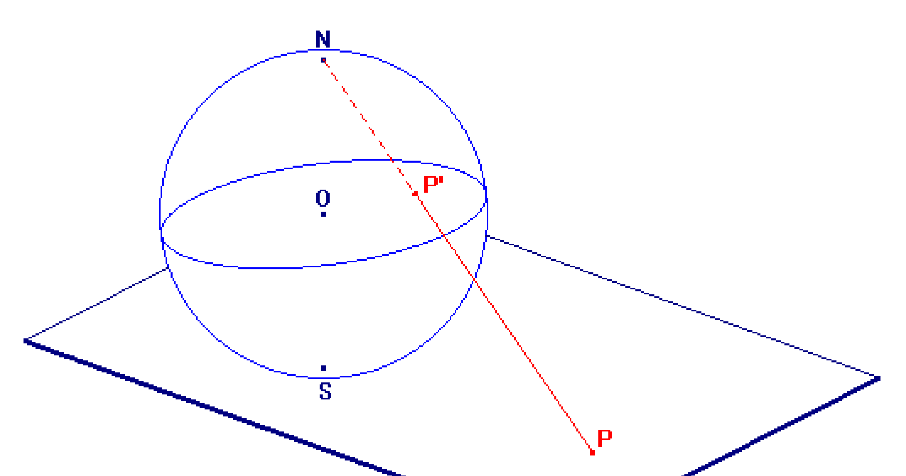
- Il problema diventa drammaticamente attuale nell'epoca delle grandi navigazioni e delle esplorazioni
- La nuova geografia che si configura a partire dal '500 ha bisogno di nuovo strumenti matematici.

La proiezione stereografica

- Un metodo efficiente di rappresentare la sfera su un piano è dato dalla proiezione stereografica

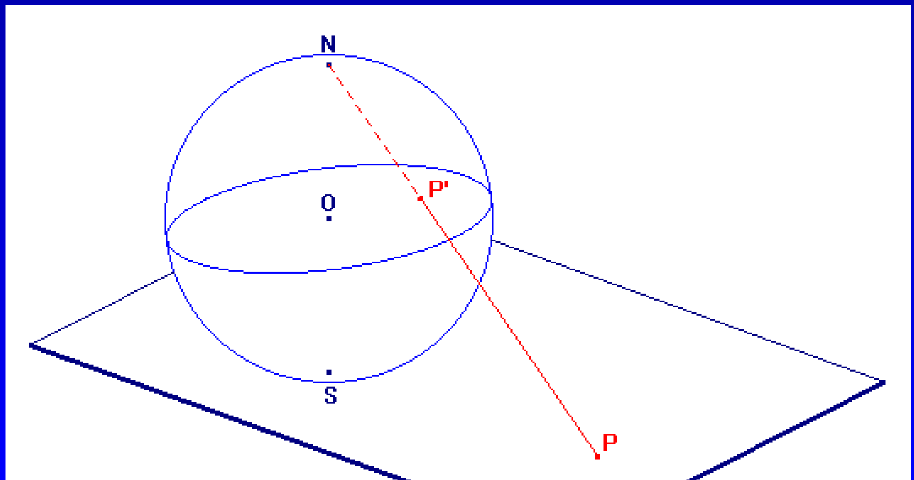
La proiezione stereografica

- Un metodo efficiente di rappresentare la sfera su un piano è dato dalla proiezione stereografica
- Si proietta la sfera dal polo Nord su un piano tangente nel polo Sud



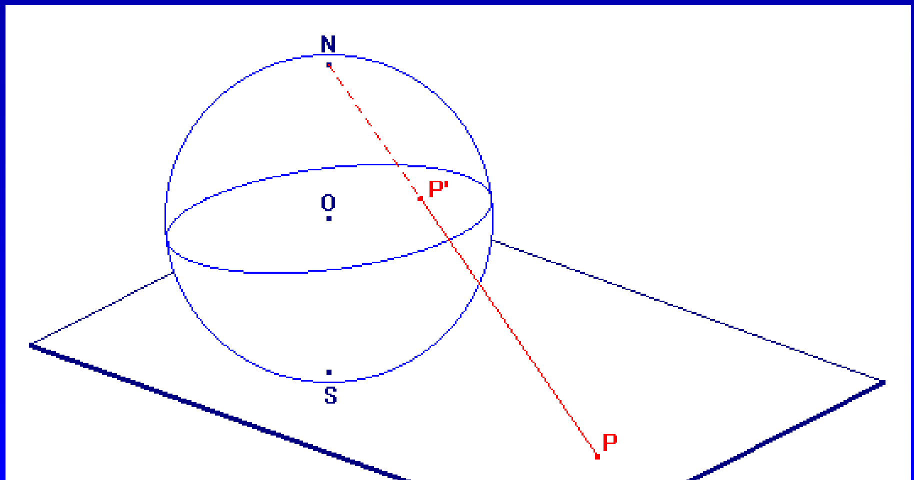
La proiezione stereografica

- Un metodo efficiente di rappresentare la sfera su un piano è dato dalla proiezione stereografica
- Si proietta la sfera dal polo Nord su un piano tangente nel polo Sud
- La rappresentazione che si ottiene conserva gli angoli (è conforme) !

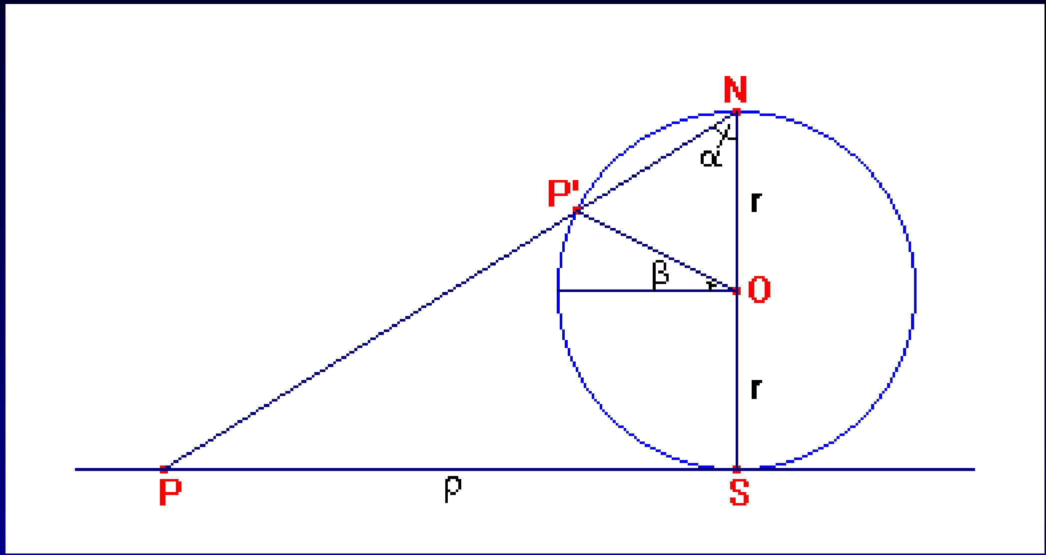


La proiezione stereografica

- Un metodo efficiente di rappresentare la sfera su un piano è dato dalla proiezione stereografica
- Si proietta la sfera dal polo Nord su un piano tangente nel polo Sud
- La rappresentazione che si ottiene conserva gli angoli (è conforme) !
- Sembra quindi utile per effettuare delle triangolazioni

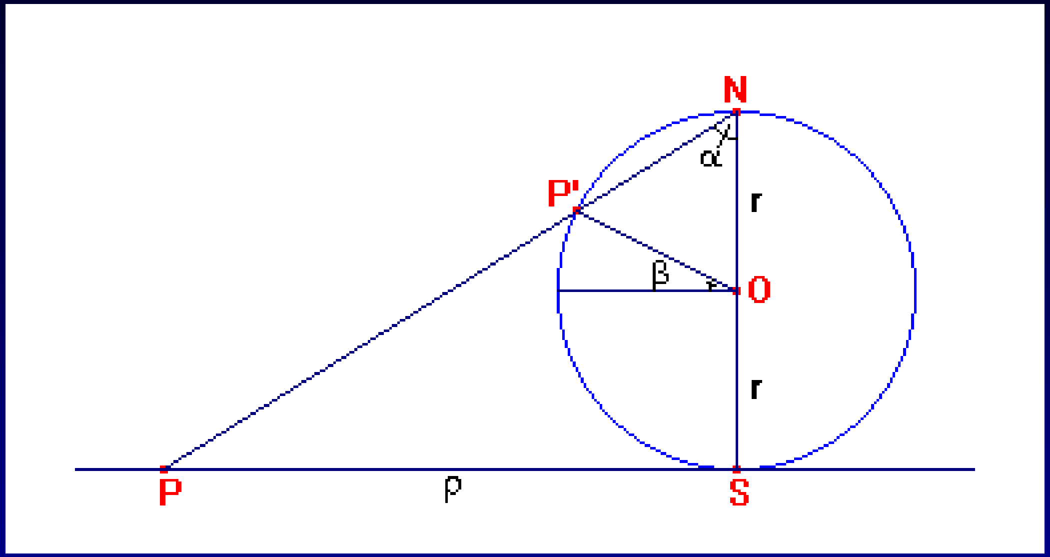


Coordinate della proiezione stereografica



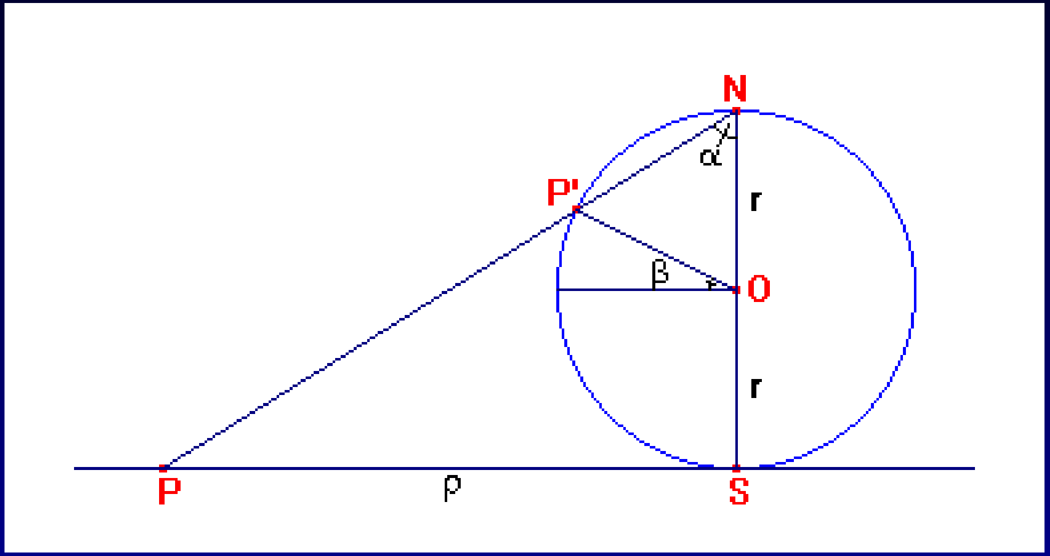
- Sia β la latitudine e λ la longitudine. Si ottiene

Coordinate della proiezione stereografica



- Sia β la latitudine e λ la longitudine. Si ottiene
- $2\alpha = P'\hat{O}S = \frac{\pi}{2} + \beta \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$

Coordinate della proiezione stereografica



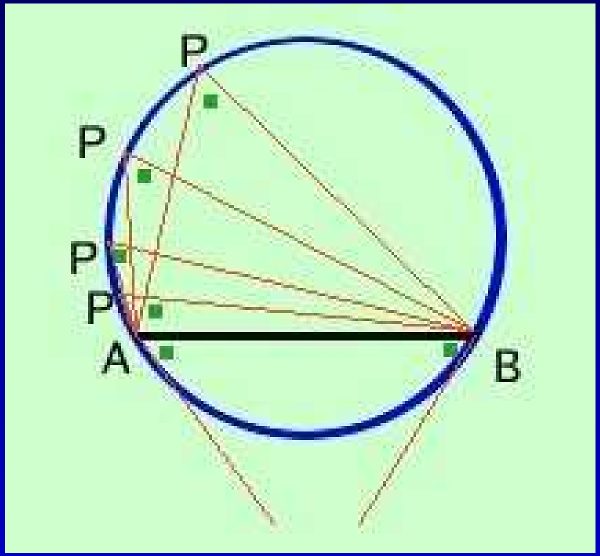
- Sia β la latitudine e λ la longitudine. Si ottiene
- $2\alpha = P'\hat{O}S = \frac{\pi}{2} + \beta \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$
-

$$\begin{cases} x = 2r\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2})\cos\lambda \\ y = 2r\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2})\sin\lambda \end{cases}$$

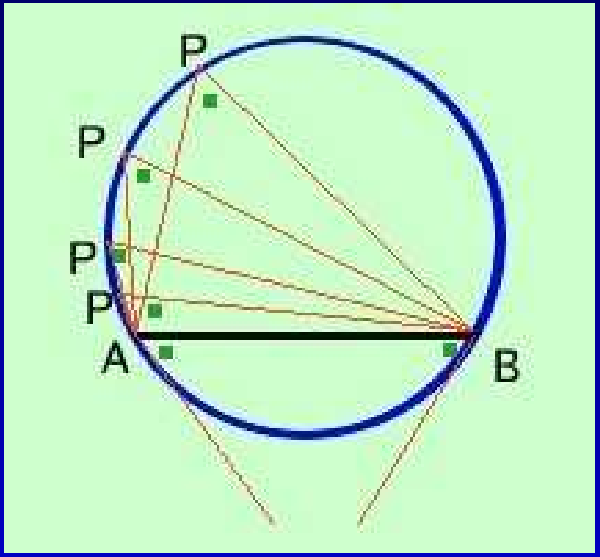
Le triangolazioni

- Con le triangolazioni si può determinare un punto sulla carta

Le triangolazioni

- Con le triangolazioni si può determinare un punto sulla carta
- Il luogo dei punti sulla carta che vedono due punti sotto un determinato angolo è un arco di circonferenza 

Le triangolazioni

- Con le triangolazioni si può determinare un punto sulla carta
- Il luogo dei punti sulla carta che vedono due punti sotto un determinato angolo è un arco di circonferenza 

- Occorrono almeno tre punti per trovare la posizione, quattro se si vuole una approssimazione migliore.

La bussola, I

Con la bussola il metodo si affina, il luogo dei punti che vede un punto ad una determinata inclinazione è una semiretta.

La bussola, II

sono sufficienti due punti, con tre si ottiene una approssimazione migliore.

La rotta nautica

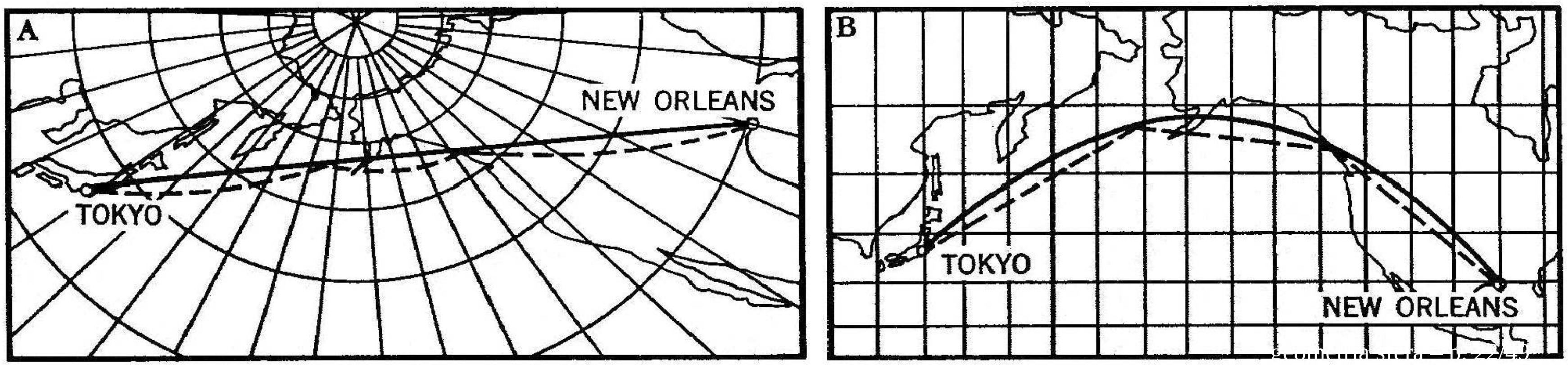
- Un metodo efficace di mantenere la rotta è di condurre la nave in modo che la prua sia rivolta sempre verso la medesima (ad esempio: rotta a $30°$).

La rotta nautica

- Un metodo efficace di mantenere la rotta è di condurre la nave in modo che la prua sia rivolta sempre verso la medesima (ad esempio: rotta a $30°$).
- Quale rotta si segue in questo modo ?

La rotta nautica

- Un metodo efficace di mantenere la rotta è di condurre la nave in modo che la prua sia rivolta sempre verso la medesima (ad esempio: rotta a 30°).
- Quale rotta si segue in questo modo ?
- La rotta non è rettilinea con la proiezione cilindrica e nemmeno con la proiezione stereografica.

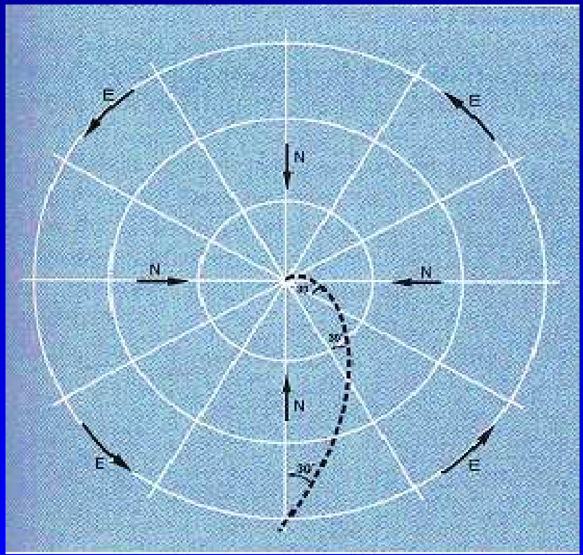


Una soluzione geniale: la proiezione di Mercatore

- Mercatore è un astronomo fiammingo del XVI secolo

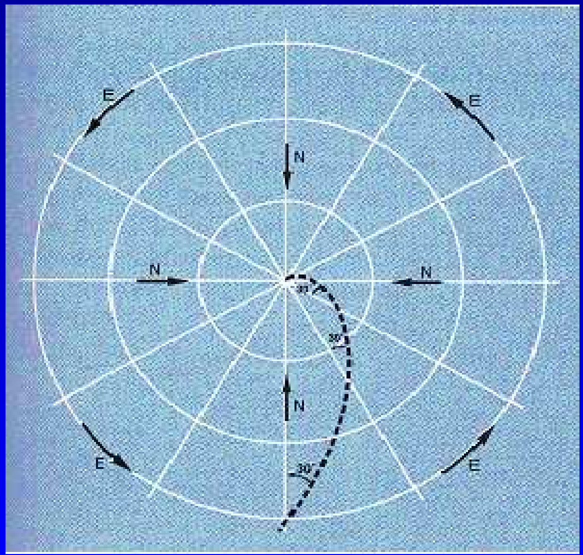
Una soluzione geniale: la proiezione di Mercatore

- Mercatore è un astronomo fiammingo del XVI secolo
- Scopre che una modifica alla proiezione cilindrica (di Archimede) permette di rappresentare le rotte nautiche seguite con la bussola come dei segmenti.



Una soluzione geniale: la proiezione di Mercatore

- Mercatore è un astronomo fiammingo del XVI secolo
- Scopre che una modifica alla proiezione cilindrica (di Archimede) permette di rappresentare le rotte nautiche seguite con la bussola come dei segmenti.
- Inoltre anche gli angoli vengono conservati !



La matematica della proiezione di Mercatore

- Per trovare le coordinate della proiezione di Mercatore oggi il metodo più rapido è quello di risolvere una equazione differenziale

La matematica della proiezione di Mercatore

- Per trovare le coordinate della proiezione di Mercatore oggi il metodo più rapido è quello di risolvere una equazione differenziale
- Il calcolo differenziale introdotto da Newton e Leibniz trova un'altra applicazione

La matematica della proiezione di Mercatore

- Per trovare le coordinate della proiezione di Mercatore oggi il metodo più rapido è quello di risolvere una equazione differenziale
- Il calcolo differenziale introdotto da Newton e Leibniz trova un'altra applicazione
- servirà da motore per la rivoluzione scientifica.

Coordinate della proiezione di Mercatore

$$\begin{cases} x = r\lambda \\ y = r \log \tan \left| \frac{1}{\cos\beta} + \tan\beta \right| \end{cases}$$

La navigazione con le carte di Mercatore

- Con una carta di Mercatore la navigazione diventa semplicissima

La navigazione con le carte di Mercatore

- Con una carta di Mercatore la navigazione diventa semplicissima
- Si uniscono i punti sulla carta con un segmento e si misura la sua inclinazione

La navigazione con le carte di Mercatore

- Con una carta di Mercatore la navigazione diventa semplicissima
- Si uniscono i punti sulla carta con un segmento e si misura la sua inclinazione
- Si segue la rotta. Questa rotta si chiama lossodromia.

Teoria e pratica

- La carta di Mercatore è un successo del rapporto tra teoria e pratica

Teoria e pratica

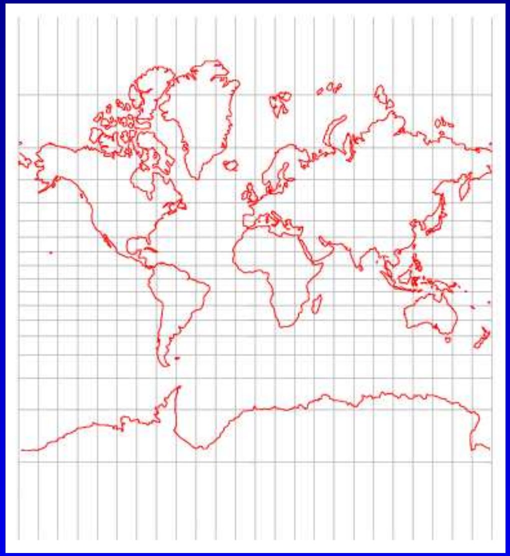
- La carta di Mercatore è un successo del rapporto tra teoria e pratica
- *Quelli che si innamorano della pratica senza la scienza sono come il nocchiero che monta sulla nave senza il timone o la bussola,*
  e non ha mai la certezza di dove va,
  Leonardo da Vinci

I limiti della proiezione di Mercatore

- La carta di Mercatore si diffonde anche al di là dell'uso nella navigazione

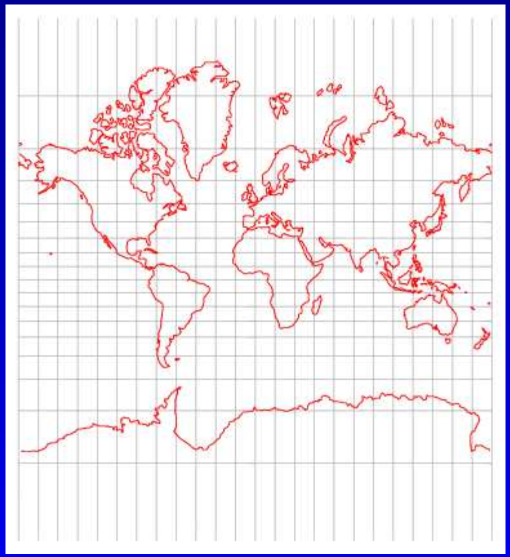
I limiti della proiezione di Mercatore

- La carta di Mercatore si diffonde anche al di là dell’uso nella navigazione
- Dà una immagine distorta del mondo. La Groenlandia diventa 12 volte più estesa rispetto alla realtà !



I limiti della proiezione di Mercatore

- La carta di Mercatore si diffonde anche al di là dell'uso nella navigazione
- Dà una immagine distorta del mondo. La Groenlandia diventa 12 volte più estesa rispetto alla realtà !
- L'Africa risulta sottostimata rispetto all'Europa.



La geografia politica

- Ogni rappresentazione sottintende una visione del mondo

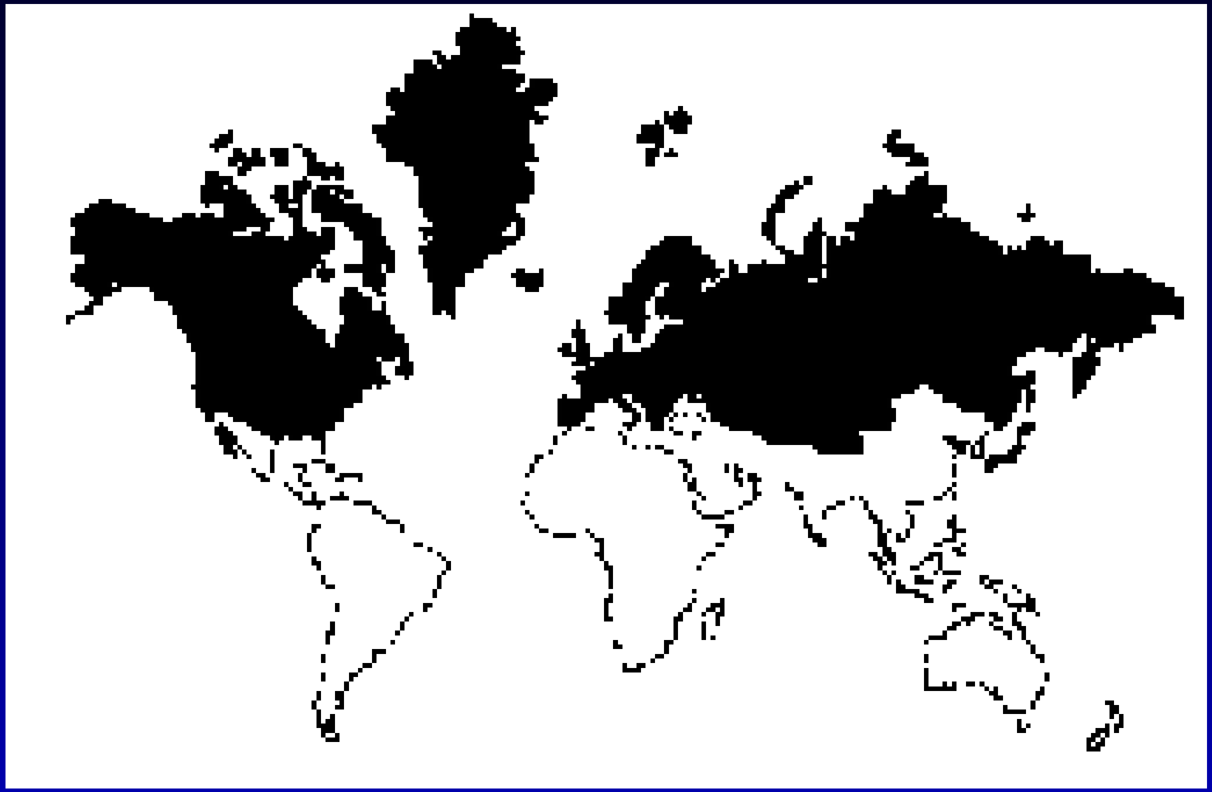
La geografia politica

- Ogni rappresentazione sottintende una visione del mondo
- Ogni disegno mette in risalto alcuni aspetti e non altri

La geografia politica

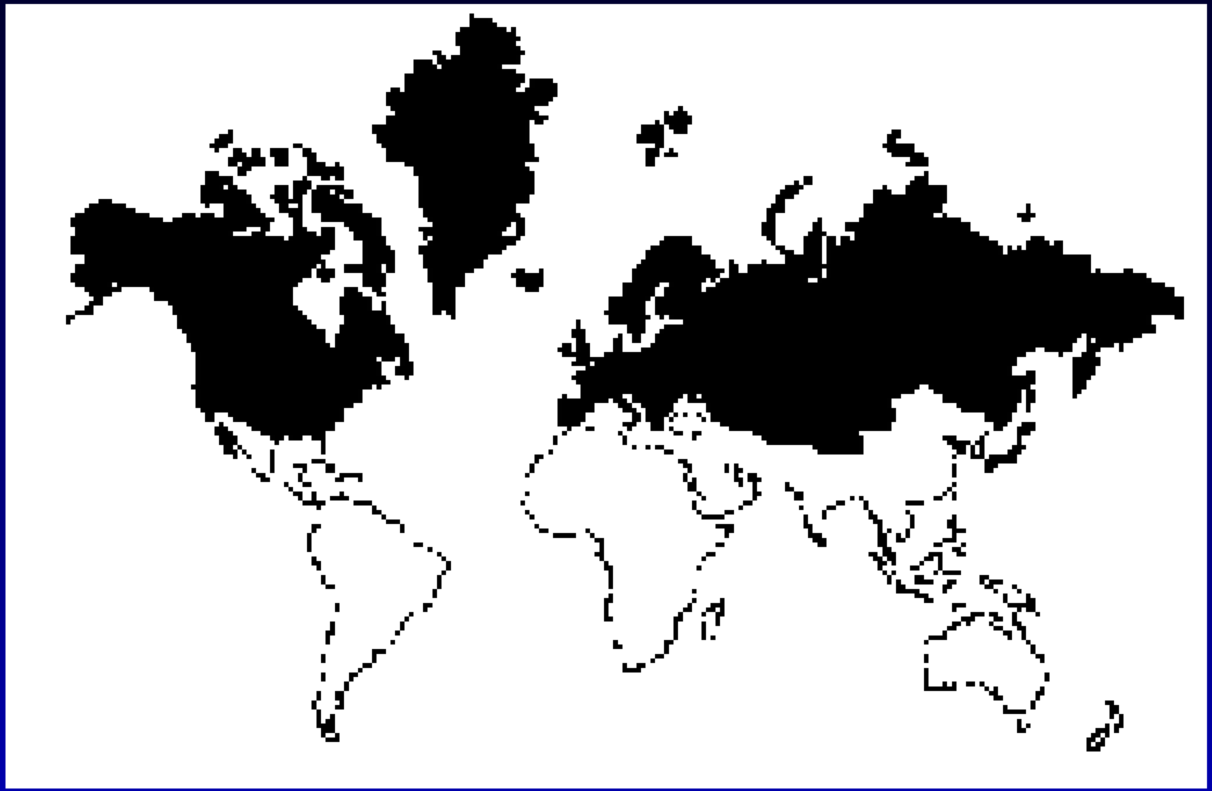
- Ogni rappresentazione sottintende una visione del mondo
- Ogni disegno mette in risalto alcuni aspetti e non altri
- Se il Nord del mondo viene rappresentato in posizione centrale assume maggiore importanza rispetto al Sud.

Rapporto Nord-Sud nella proiezione di Mercatore



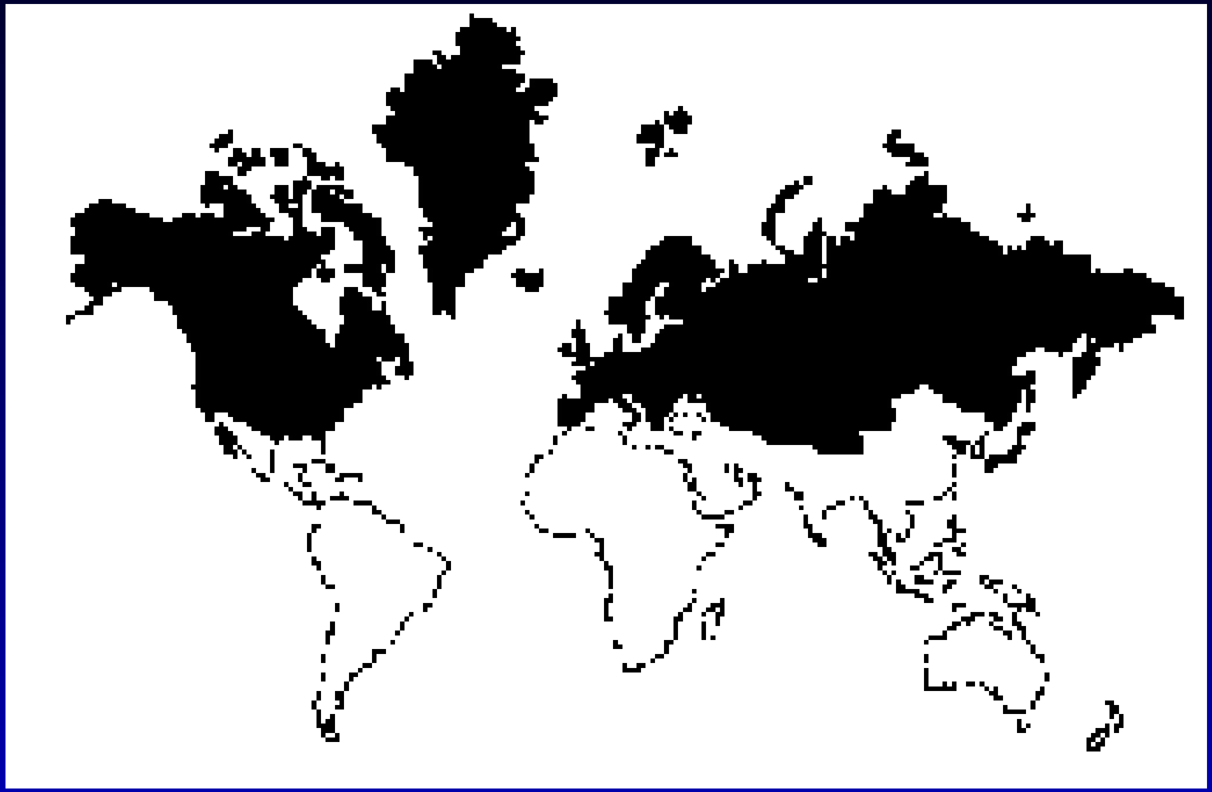
- Il Nord misura $48,7 \cdot 10^6\ Km^2$

Rapporto Nord-Sud nella proiezione di Mercatore



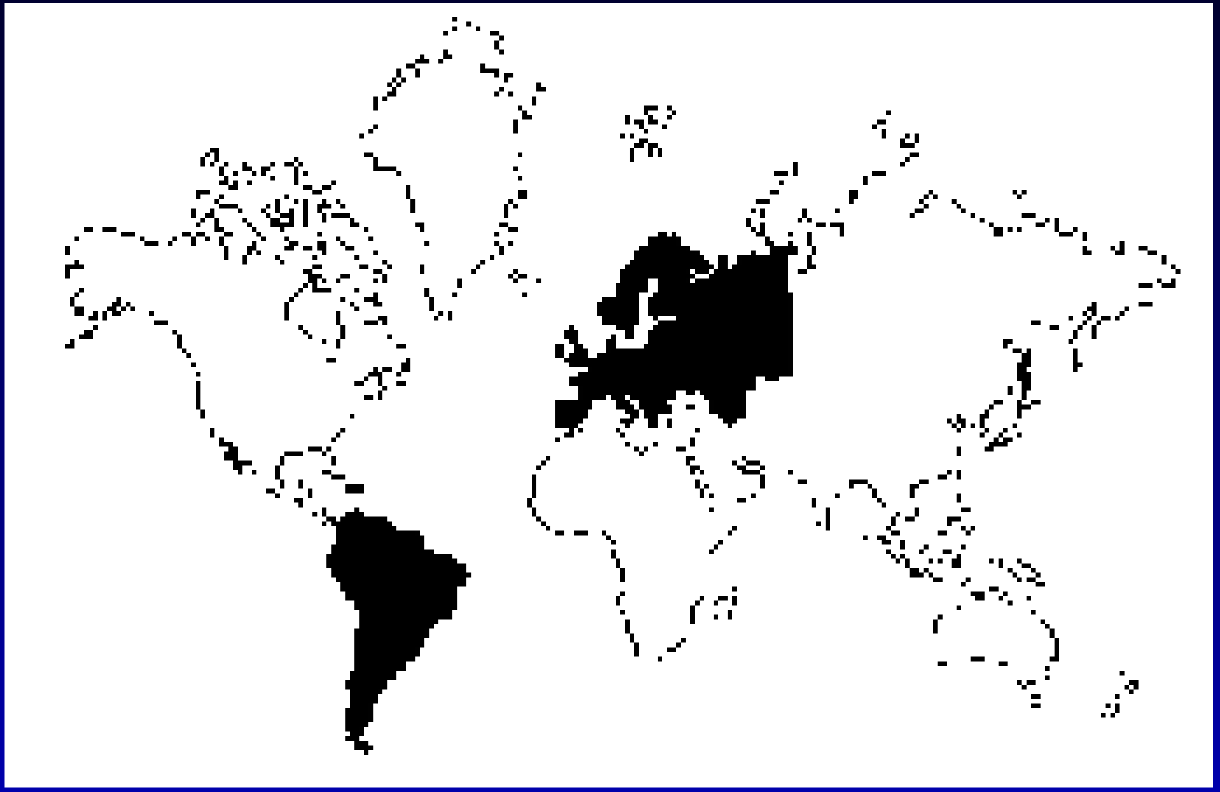
- Il Nord misura $48,7 \cdot 10^6\ Km^2$
- Il Sud misura $93,6 \cdot 10^6\ Km^2$

Rapporto Nord-Sud nella proiezione di Mercatore



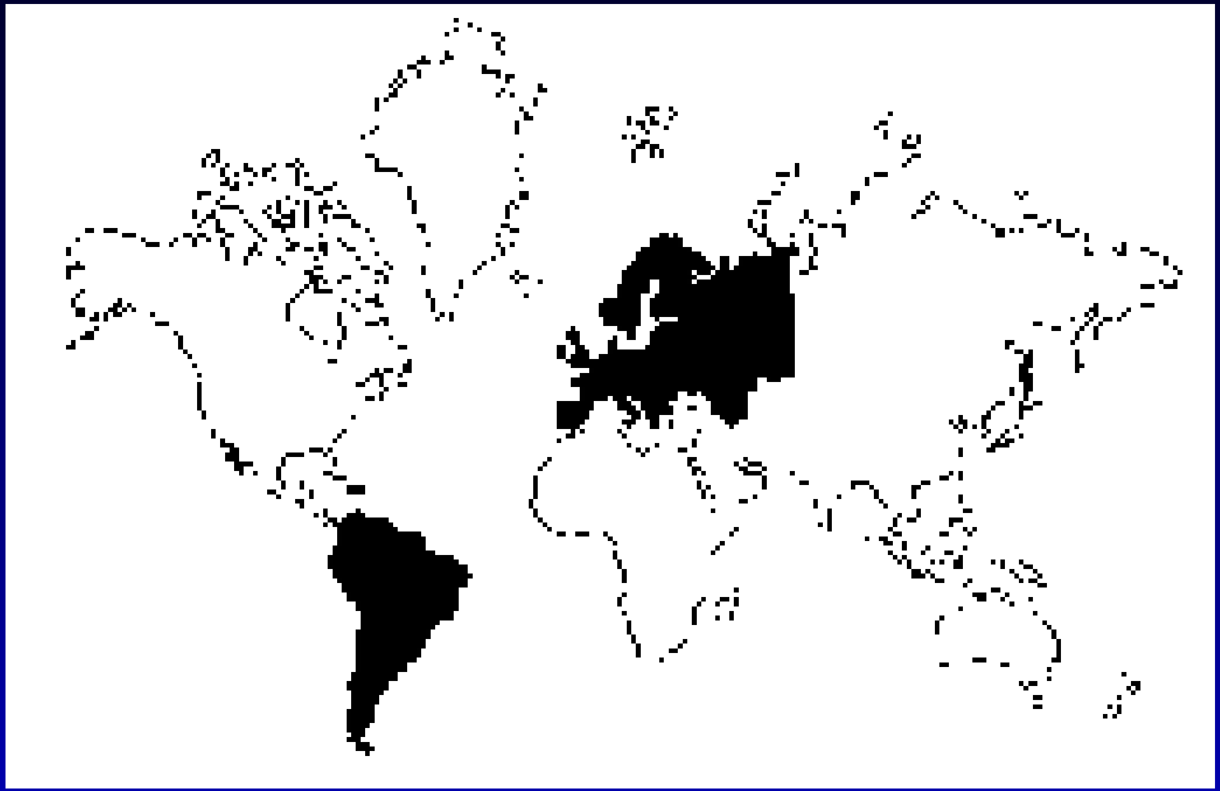
- Il Nord misura $48,7 \cdot 10^6\ Km^2$
- Il Sud misura $93,6 \cdot 10^6\ Km^2$
- Siccome il Nord ha molte regioni lontane dall'Equatore sembra piú grande.

Europa-SudAmerica



- L'Europa misura circa 10 milioni di Km^2

Europa-SudAmerica

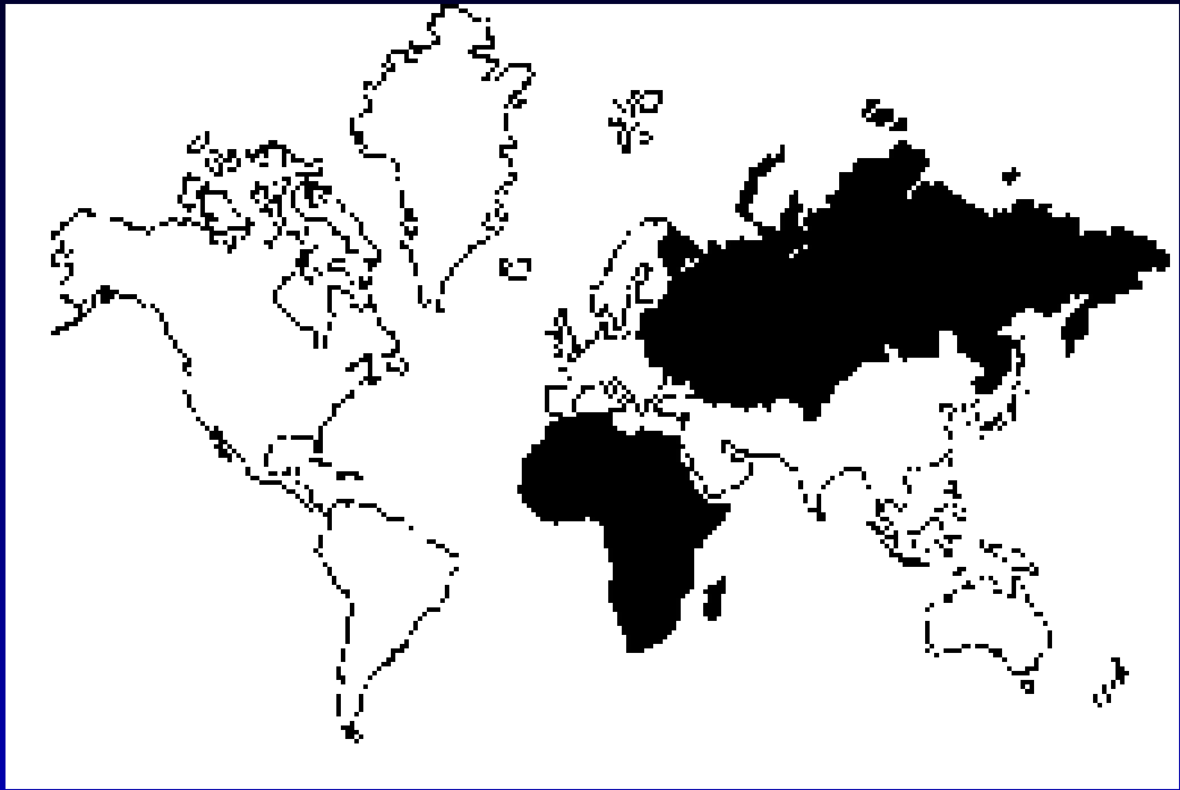


- L'Europa misura circa 10 milioni di Km^2
- Il Sud America misura circa 18 milioni di Km^2

Europa-SudAmerica

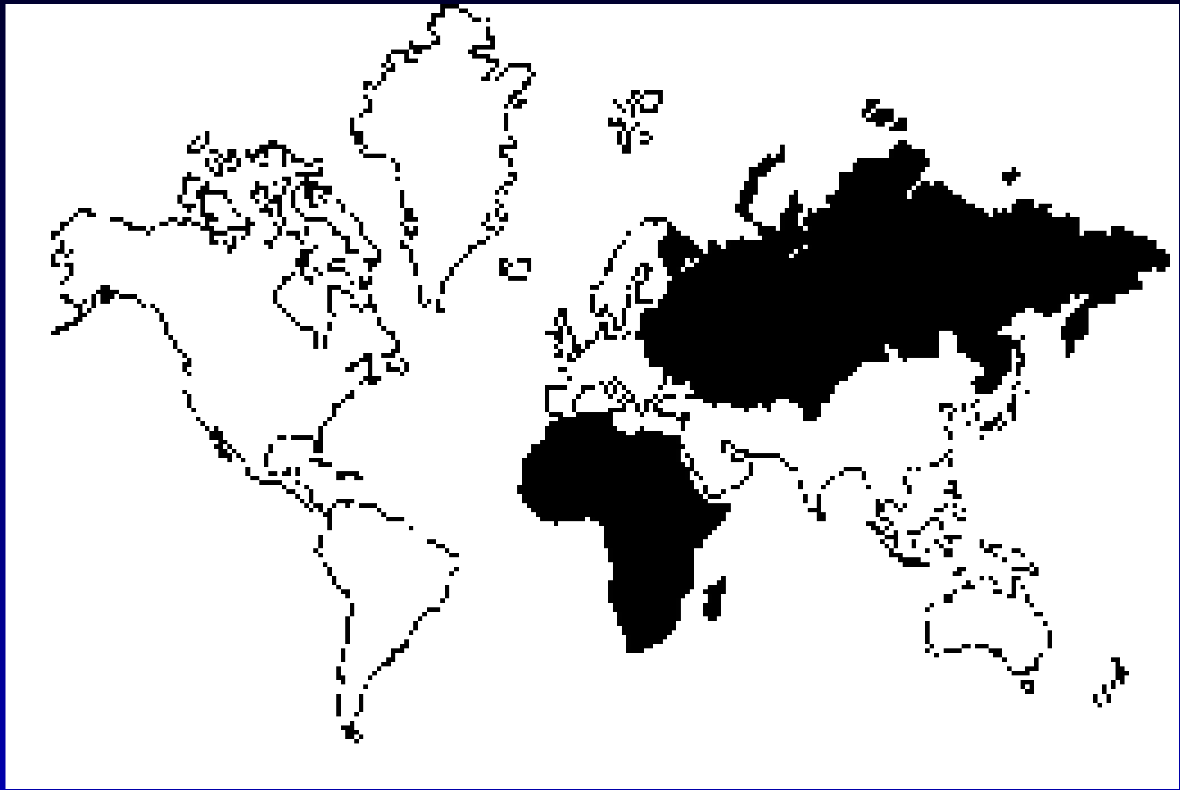
- L'Europa misura circa 10 milioni di Km^2
- Il Sud America misura circa 18 milioni di Km^2
- Siccome il Sud America è vicino all'Equatore sembra più piccolo.

Africa-ex Unione Sovietica



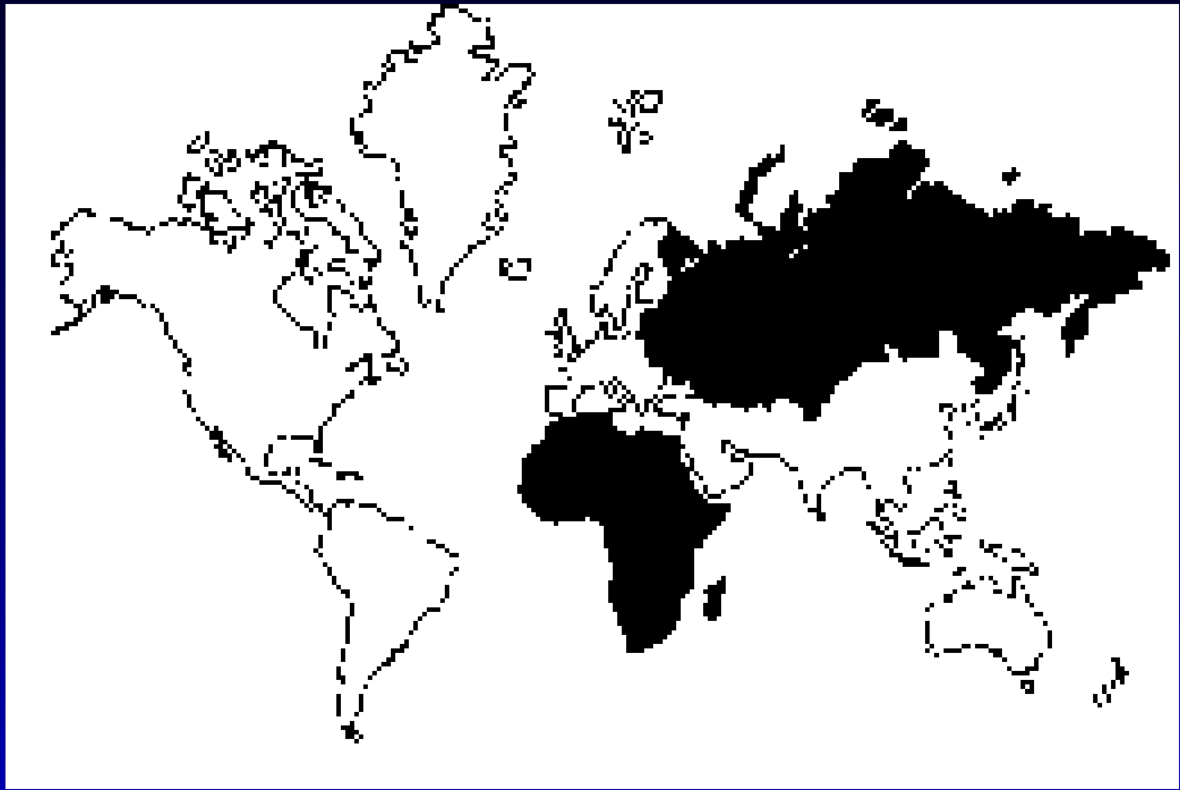
- L'ex Unione Sovietica misura 22 milioni di Km^2

Africa-ex Unione Sovietica



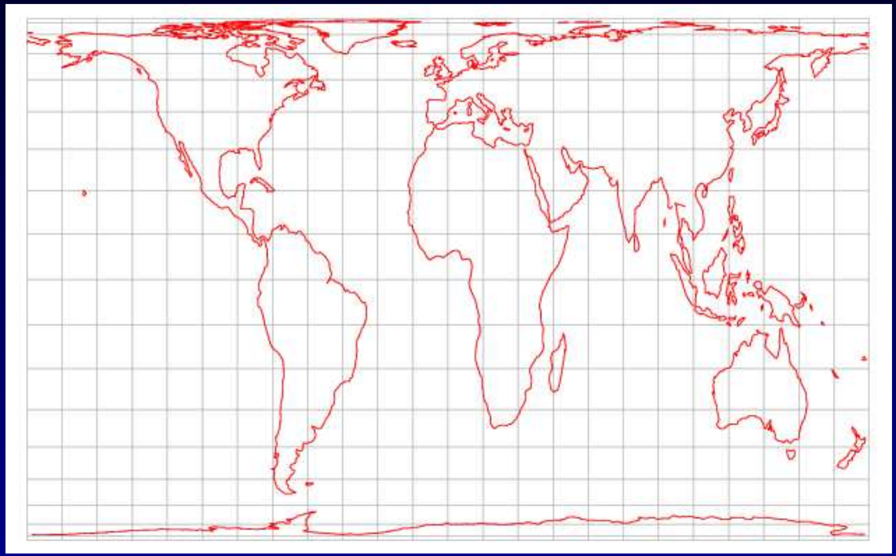
- L'ex Unione Sovietica misura 22 milioni di Km^2
- L' Africa misura 30 milioni di Km^2

Africa-ex Unione Sovietica



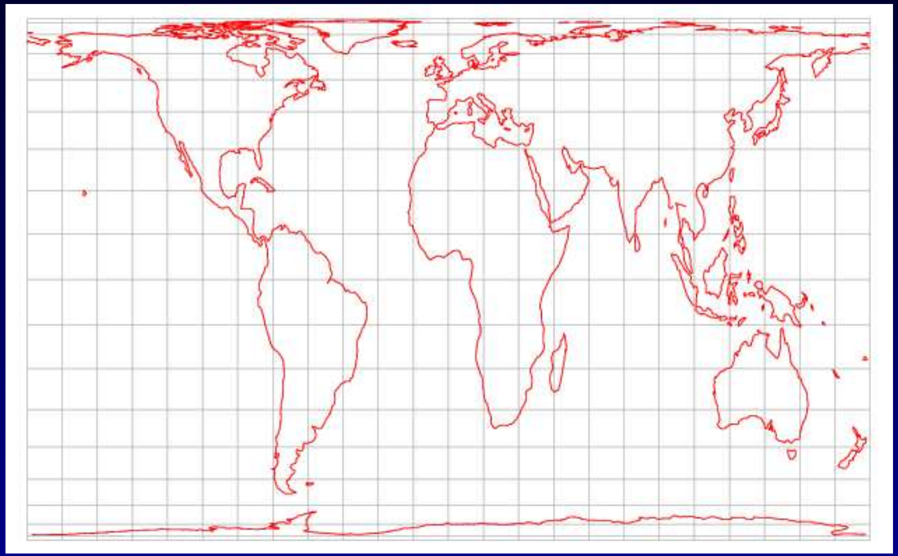
- L'ex Unione Sovietica misura 22 milioni di Km^2
- L' Africa misura 30 milioni di Km^2
- Siccome l'Africa è attraversata dall' Equatore sembra più piccola.

La proiezione di Peters



- Peters propone di applicare un’affinità alla proiezione cilindrica

La proiezione di Peters



- Peters propone di applicare un’affinità alla proiezione cilindrica
- I rapporti tra le aree rimangono invariati ma la distorsione si sposta

Affinità

- Siamo interessati ad affinità della forma seguente

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

Un quadrato di lato 1 diventa un rettangolo di lati a, b.

Affinità

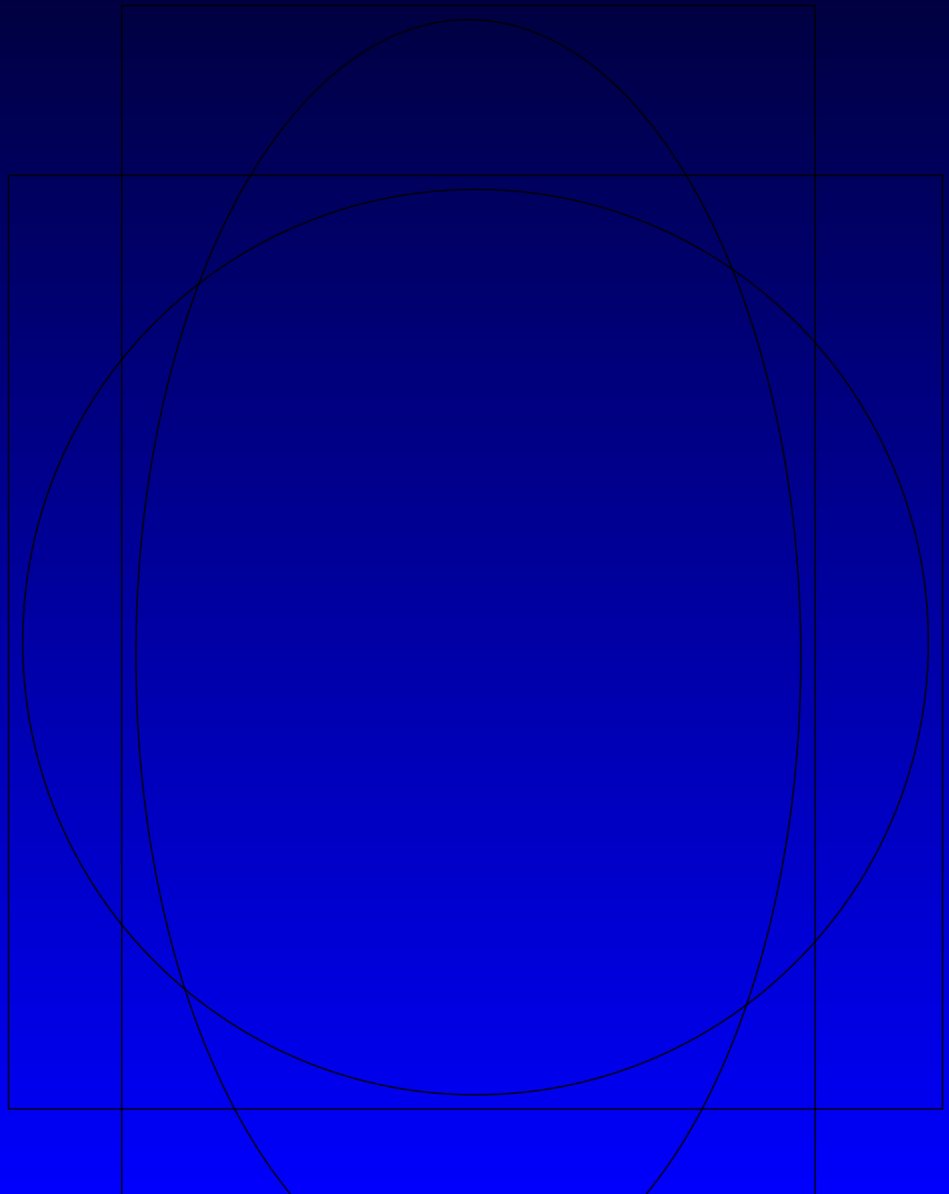
- Siamo interessati ad affinità della forma seguente

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

  Un quadrato di lato 1 diventa un rettangolo di lati a, b.
- Se $a = \frac{1}{b}$ allora le aree si conservano.

Grafico affinità

Qui $0 < a < 1$ e $1 < b = \frac{1}{a}$.



Le equazioni

- Le coordinate della proiezione cilindrica sono

$$\begin{cases} x = r\lambda \\ y = r\sin\beta \end{cases}$$

Le equazioni

- Le coordinate della proiezione cilindrica sono

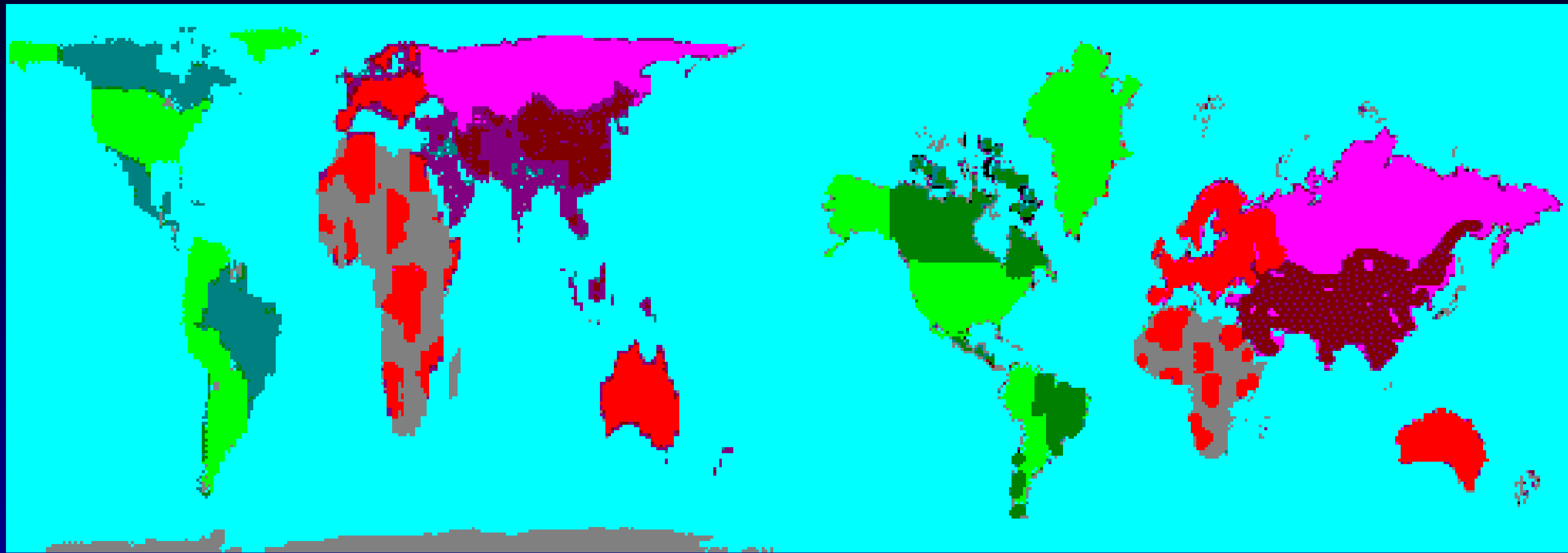
$$\begin{cases} x = r\lambda \\ y = r\sin\beta \end{cases}$$

- Le coordinate della proiezione di Peters diventano

$$\begin{cases} x = r\lambda\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = r\sin\beta\sqrt{2} \end{cases}$$

Carta Politica di Peters

Confronto tra Mercatore e Peters



A Cesare quel che è di Cesare

- La carta di Peters non è la prima carta che rispetta le aree. Anche la proiezione cilindrica di Archimede rispetta le aree. C’è un dibattito esagerato su questa questione.

A Cesare quel che è di Cesare

- La carta di Peters non è la prima carta che rispetta le aree. Anche la proiezione cilindrica di Archimede rispetta le aree. C'è un dibattito esagerato su questa questione.
- Nessuna carta geografica piana può riprodurre fedelmente la Terra (dimostrato da Eulero nel 1775).

Varie proiezioni, I

- La proiezione stereografica conserva gli angoli ma le lossodromie diventano curve

Varie proiezioni, I

- La proiezione stereografica conserva gli angoli ma le lossodromie diventano curve
- La proiezione di Mercatore conserva ancora gli angoli e le lossodromie diventano rette

Varie proiezioni, II

- La proiezione cilindrica e le sue parenti (come la proiezione di Peters) conservano le aree ma non conservano gli angoli.

Varie proiezioni, II

- La proiezione cilindrica e le sue parenti (come la proiezione di Peters) conservano le aree ma non conservano gli angoli.
- Le geodetiche (curve che minimizzano le distanze) diventano circonferenze con la proiezione stereografica. Diventano curve complicate con la proiezione di Mercatore e con le proiezioni cilindriche.

Le geodetiche

Le geodetiche sulla sfera sono le circonferenze massime, che si trovano tagliando la sfera con un piano passante per il centro.

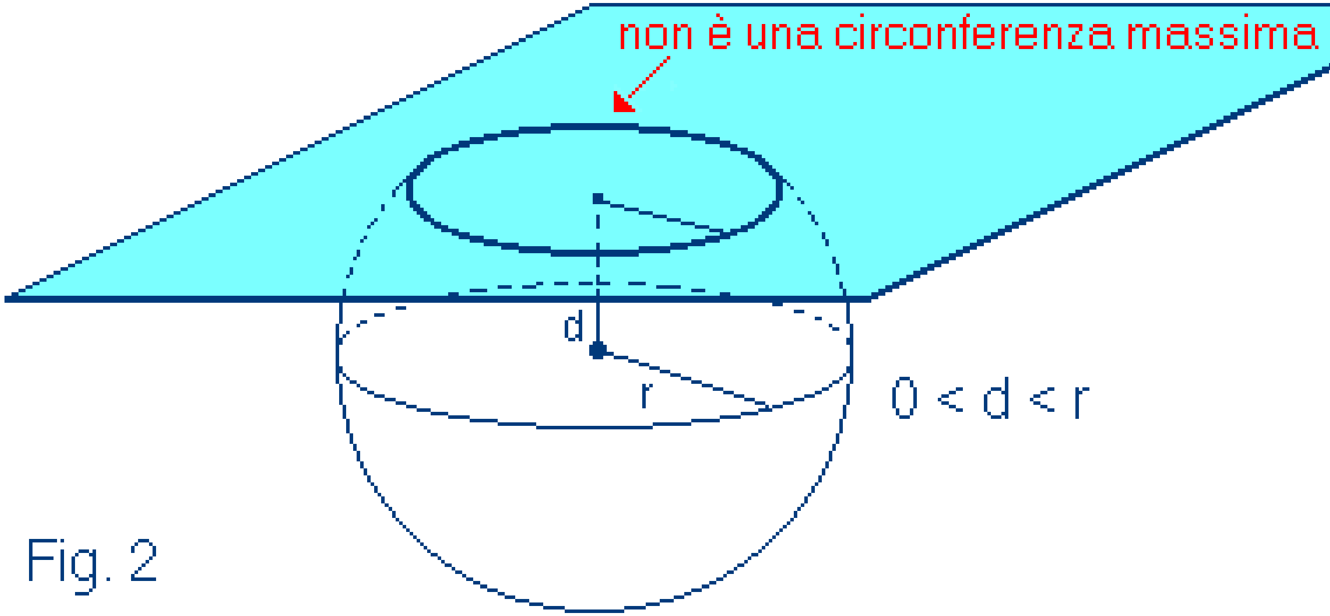


Fig. 2

Una geodetica

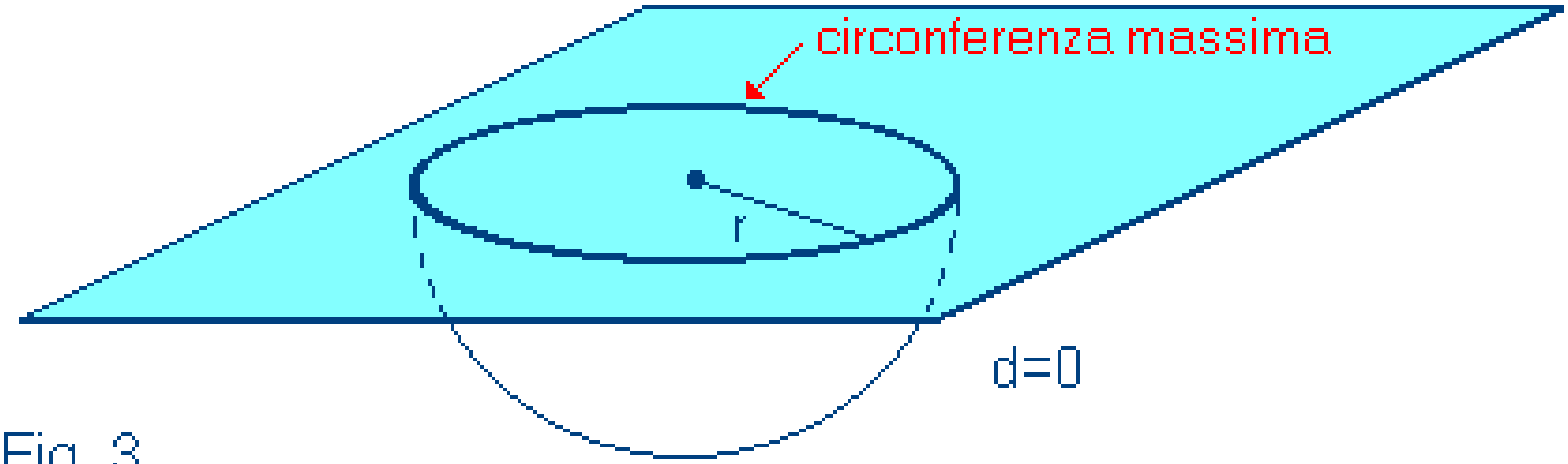


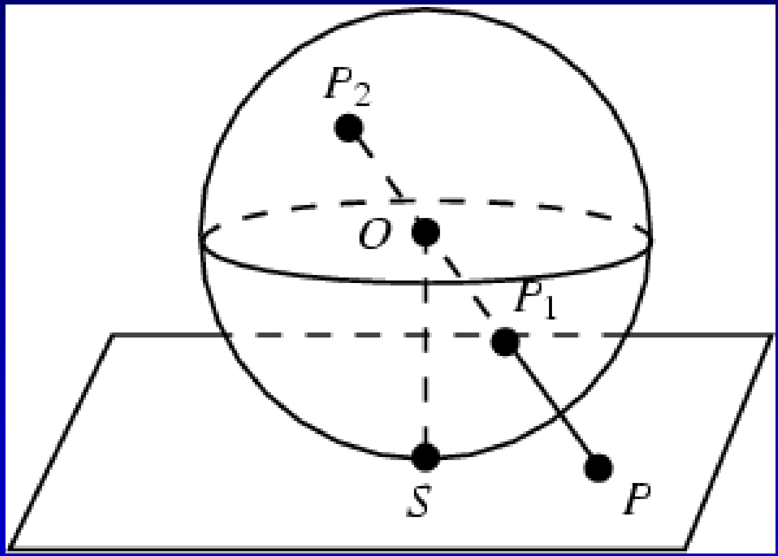
Fig. 3

La proiezione centrale

- La proiezione centrale è analoga alla proiezione stereografica.

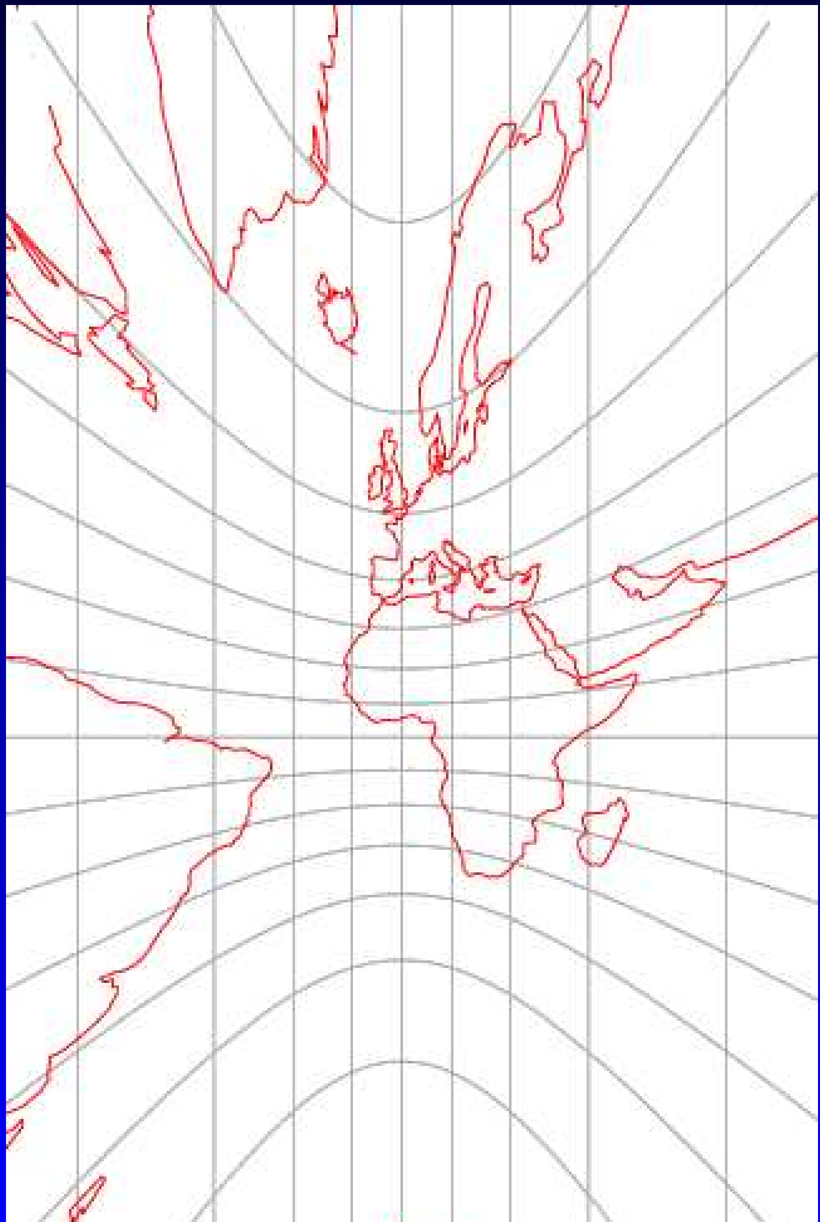
La proiezione centrale

- La proiezione centrale è analoga alla proiezione stereografica.
- Si proietta dal centro della sfera invece che dal Polo Nord.

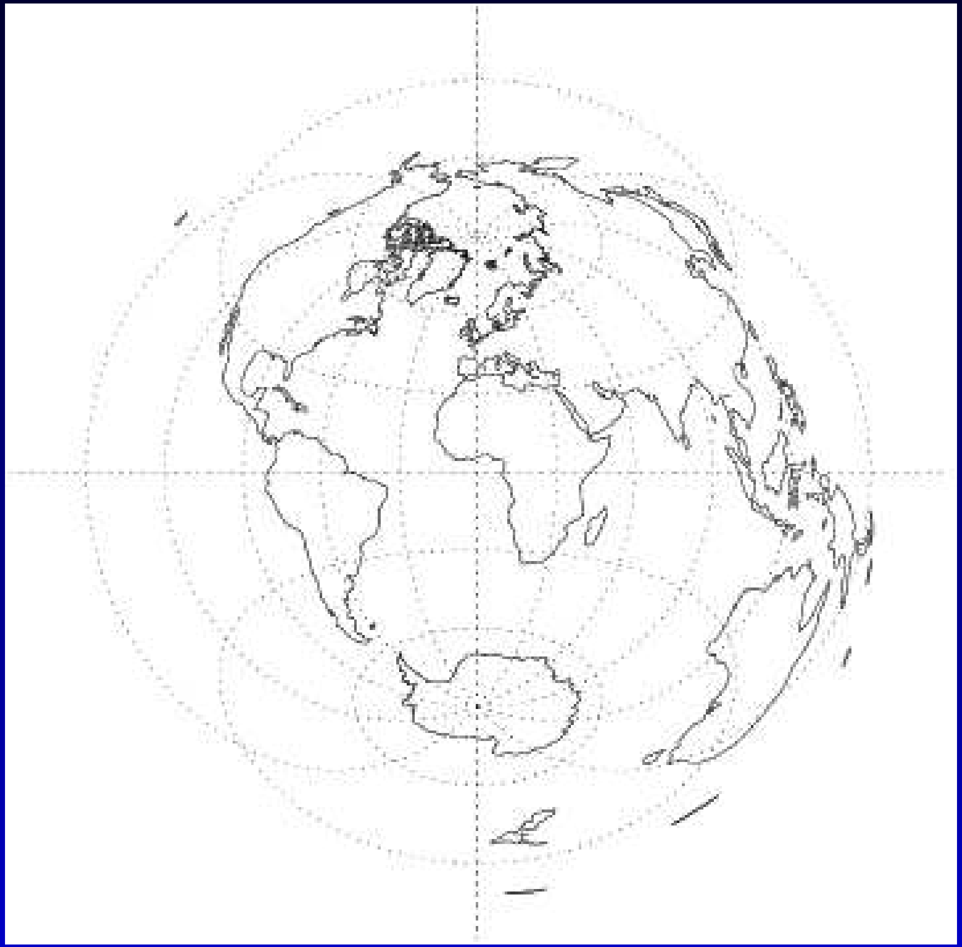


Carta ottenuta con la proiezione centrale

Le geodetiche sulla sfera divantano rette sulla carta!

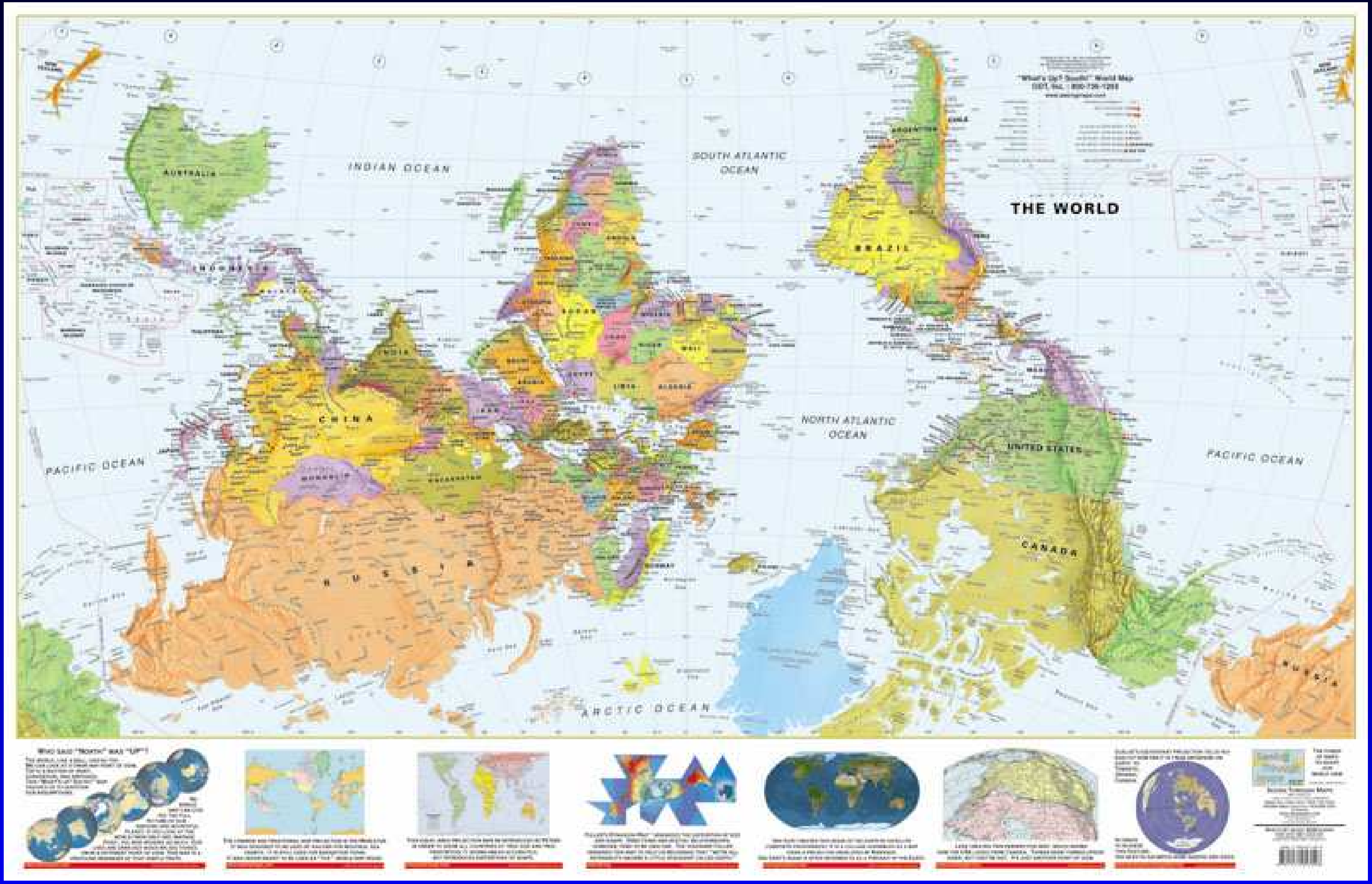


La proiezione azimutale



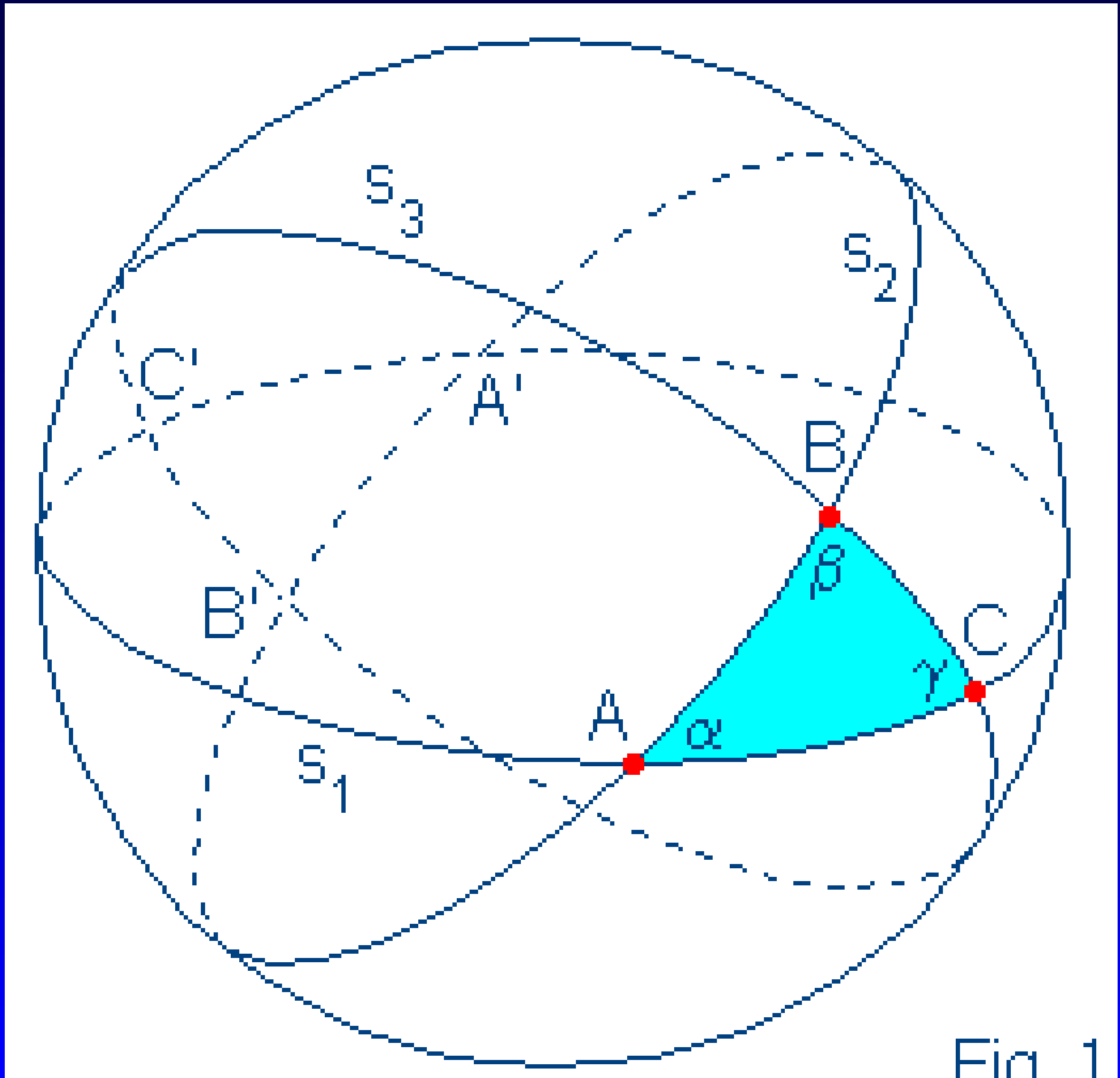
Conserva le distanze da un punto fissato.

Una carta sottosopra



E adesso?

Vedremo la sfera come nuovo ambiente dove sviluppare la geometria. Questo è un triangolo sferico



La somma degli angoli

- La somma degli angoli di un triangolo piano è sempre uguale a un angolo piatto

La somma degli angoli

- La somma degli angoli di un triangolo piano è sempre uguale a un angolo piatto
- La somma degli angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore di un angolo piatto

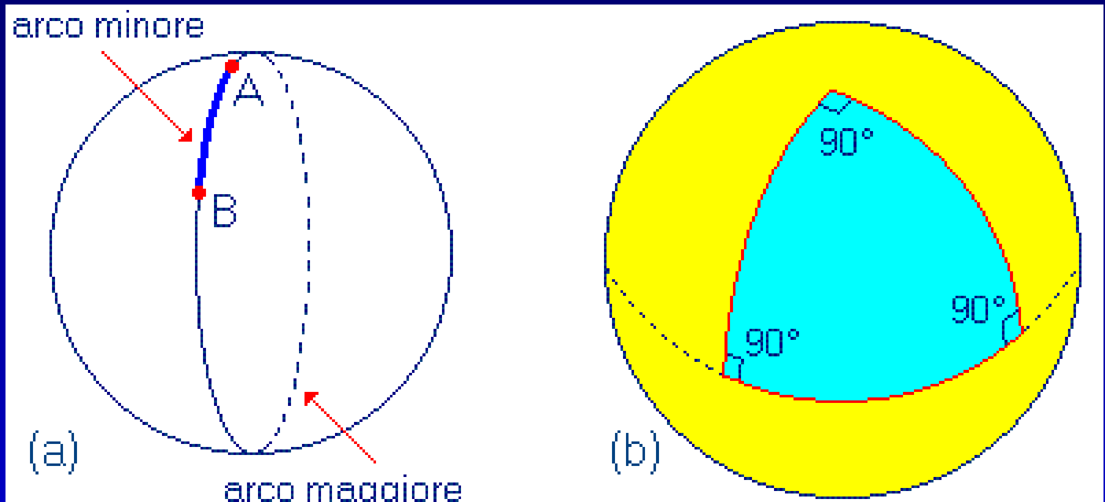


Fig. 1