Esercizi di geometria analitica negli spazi affini
Giorgio Ottaviani

Percorse a cavallo duemila chilometri di steppa russa, superó gli Urali, entró in Siberia, viaggió per quaranta giorni fino a raggiungere il lago Bajkal, che la gente del luogo chiamava: mare. da A. Baricco, Seta.

Questi esercizi sono a complemento della teoria esposta nel testo "Geometria 1" di E. Sernesi.

Rette nel piano.

i) Scrivere la retta per $P = (2, \sqrt{5})$ parallela alla retta $\frac{x}{2} + 3y = 1$

ii) Scrivere la retta per l'origine passante per il punto medio del segmento che unisce $(2, 4)$ e $(5, -7)$.

iii) Scrivere la condizione di allineamento di (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con l'origine.

iv) Provare che 3 rette $a_i x + b_i y = c_i$ per $i = 1, 2, 3$ sono incidenti (tre rette parallele si considerano incidenti "all'infinito") se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 0$$

Azioni di gruppi e spazi affini.

Definizione. *Sia G un gruppo e X un insieme. Una azione (destra) di G su X é un applicazione*

$$\begin{array}{rcl} a\colon G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & a(g, x) \end{array}$$

che denotiamo con $a(g, x) = x \cdot g$ che soddisfa i seguenti assiomi:

1) $x \cdot e = x \qquad \forall x \in X$, dove e é l'unitá di G
2) $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 \cdot g_2) \qquad \forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G$

Definizione. *Una azione si dice transitiva se $\forall x, y \in X \quad \exists g \in G$ tale che $y = x \cdot g$*

Esercizio. *Data una azione di G su X, si definisce l'orbita di x il sottoinsieme di X $x \cdot G := \{y \in X | \exists g \in G$ tale che $y = x \cdot G\}$. Provare che*

i) $y \in x \cdot G$ *se e solo se* $x \cdot G = y \cdot G$
ii) La relazione $x \sim y$ se $y \in x \cdot G$ é di equivalenza, e le orbite sono le classi di equivalenza. Dedurre che le orbite formano una partizione di X.
iii) Una azione é transitiva se e solo se ammette una unica orbita data da X stesso.

Definizione. *Una azione si dice libera in $x \in X$, se lo stabilizzatore di x $G_x := \{g \in G | x \cdot g = x\}$ é uguale a $\{e\}$. Una azione si dice libera se é libera in ogni $x \in X$.*

Esercizi.

1) Provare che gli stabilizzatori sono sottogruppi.

2) Provare che una azione é libera se lo é per almeno un punto di ogni orbita. In particolare una azione transitiva é libera se lo é per almeno un punto $x \in X$.

3) Provare che una azione é libera e transitiva se e solo se $\forall x, y \in X \exists! g \in G$ tale che $y = x \cdot g$.

Esercizio. *Provare che la definizione di spazio affine puó essere riformulata nel modo seguente: uno spazio affine sullo spazio vettoriale V é un insieme su cui agisce V (visto come gruppo abeliano) con una azione libera e transitiva.*

Coordinate dei triangoli e dei poligoni convessi

Osservazione. *Il triangolo di vertici $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ si parametrizza con le equazioni*

$$\begin{cases} x = (1-s-t)x_1 + sx_2 + tx_3 \\ y = (1-s-t)y_1 + sy_2 + ty_3 \end{cases}$$

per $(s,t) \in \mathbf{R}^2, s \geq 0, t \geq 0, s+t \leq 1$

oppure

$$\begin{cases} x = sx_1 + tx_2 + ux_3 \\ y = sy_1 + ty_2 + uy_3 \end{cases}$$

per $(s,t,u) \in \mathbf{R}^3$, $s \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, $s+t+u = 1$

Il segmento per P_2 e P_3 è parametrizzato dalla prima terna di equazioni dell'enunciato per per $s = t - 1$, $0 \leq t \leq 1$. Il segmento per P_3 e P_1 per $s = 0$, $1 \geq t \geq 0$.

La coppia (s,t) della prima parametrizzazione e la terna (s,t,u) della seconda parametrizzazione sono uniche.

Insiemi convessi e poligoni piani

Definizione. *Un sottoinsieme X del piano si dice convesso se dati due qualunque punti di X il segmento che li unisce é tutto contenuto in X.*

Esercizio. *Provare che l'angolo convesso di vertice $V = (x_v, y_v)$ delimitato dalle semirette passanti per $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ (non allineati con V) é parametrizzato da*

$$\begin{cases} x = x_v + s(x_1 - x_v) + t(x_2 - x_v) \\ y = y_v + s(y_1 - y_v) + t(y_2 - y_v) \end{cases}$$

per $(s,t) \in \mathbf{R}^2$, $s \geq 0$, $t \geq 0$.

Esercizio. *Provare che l'intersezione di una famiglia di insiemi convessi $\{X_i\}_{i \in I}$ é un insieme convesso.*

soluzione Se $P_1, P_2 \in \cap_{i \in I} X_i$ allora per ogni $i \in I$ abbiamo $P_1, P_2 \in X_i$ e quindi per l'ipotesi il segmento che unisce P_1 a P_2 é contenuto in X_i. Segue che tale segmento é contenuto in $\cap_{i \in I} X_i$.

Definizione. *Siano P_i per $i = 1, \ldots, n$ punti distinti del piano. L'intersezione tra gli insiemi convessi che contengono tutti i P_i si dice l'inviluppo convesso di $\{P_1, \ldots, P_n\}$ e si indica con $Conv(P_1, \ldots, P_n)$.*

Per il lemma precedente $Conv(P_1, \ldots, P_n)$ é un insieme convesso, ed é il piú piccolo insieme convesso che contiene $\{P_1, \ldots, P_n\}$, nel senso che un qualunque insieme convesso che contiene $\{P_1, \ldots, P_n\}$ contiene anche il loro inviluppo convesso.

Esercizio. *Siano $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \ldots, n$ punti (distinti) del piano. $Conv(P_1, \ldots, P_n)$ si parametrizza con le equazioni*

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i \end{cases}$$

per $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n$, $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Attenzione. *Se $n \geq 4$ la n-pla $(t_1, \ldots, t_n)$ non è unica.*

Consideriamo 4 punti non allineati nel piano. Il loro inviluppo convesso puó essere un triangolo oppure un quadrilatero, che diremo quadrilatero convesso.

Esercizio.

i) Dati tre punti non allineati nel piano, descrivere la regione del piano in cui ponendo un quarto punto, si ottiene che l'inviluppo convesso dei 4 punti é un triangolo.

ii) Descrivere un algoritmo che dalle coordinate di 4 punti $P_i = (x_i, y_i)$ permette di stabilire la forma dell'inviluppo convesso (triangolo, quadrilatero, ...).*

Definizione. *L'inviluppo convesso di n punti nel piano si dice poligono convesso.*

Esercizi.

i) Scrivere l'equazione della mediana del triangolo di vertici $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(7, 7)$ passante per $(1, 4)$

ii) Provare che il baricentro di un triangolo coincide con il punto di intersezione delle tre mediane.

iii) Verificare che $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \ldots 4$ sono vertici di un parallelogramma se e solo se

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \end{cases}$$

iv) Provare che i quattro punti medi di un qualunque quadrilatero sono vertici di un parallelogramma (questo esercizio si puó provare sia per via sintetica che per via analitica).

v)* Dare condizioni necessarie e sufficienti perché un punto $P = (x, y)$ sia:

a) interno all'angolo convesso di vertice P_1 e lati passanti per P_2 e P_3

b) interno al triangolo di vertici $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, 2, 3$.

vi) Calcolare il punto di incontro delle diagonali del quadrilatero che ha come coppie di vertici opposti $\{O, P_3\}$ e $\{P_2, P_4\}$.

Risposta: $x = \frac{x3(x2y4-x4y2)}{(x2y3+x3(y4-y2)-x4y3)}, y = \frac{y3(x2y4-x4y2)}{(x2y3+x3(y4-y2)-x4y3)}$

Rette e piani nello spazio

i) Parametrizzare la retta per $P = (2, \sqrt{5}, 4)$ con vettore direttore $(1, 1, -2)$. Questa retta passa per l'origine? E per il punto $(1, 1, 1)$?

ii) Parametrizzare la retta per l'origine passante per il punto medio del segmento che unisce $(2, 4, 6)$ e $(5, -7, -1)$.

iii) Scrivere la condizione di allineamento di (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) con l'origine.

Esercizio. *Provare che 4 punti $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \ldots, 4$ sono complanari se e solo se*

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Due piani $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$ sono paralleli se e solo se

$$\text{rango} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 1$$

In particolare i piani della forma $ax + by + cz = \lambda$ descrivono al variare di λ un fascio di piani paralleli.

Se il rango precedente é due, i due piani si incontrano nella retta

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Le equazioni precedenti si dicono equazioni cartesiane della retta nello spazio. Un vettore direttore della retta scritta in questa forma é dato da (l, m, n) dove

$$l = \det \begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} \quad m = \det \begin{pmatrix} c & a \\ c' & a' \end{pmatrix} \quad n = \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

(per dimostrarlo basta osservare che ponendo $d = d' = 0$ si ottiene una retta parallela che ha quindi la stessa direzione. Si arriva allora ad un sistema omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite,...)

Al variare di $t \in \mathbf{R}$ l'equazione

$$(ax + by + cz - d) + t(a'x + b'y + c'z - d') = 0 \qquad (F)$$

descrive il fascio dei piani che contengono la retta precedente. Precisamente ogni piano che contiene la retta ha equazione della forma (F) con l'eccezione del piano $a'x + b'y + c'z = d'$. Si dice che quest'ultimo piano appartiene al fascio per $t = \infty$.

I fasci di piani sono utili per risolvere problemi del tipo seguente:

Esercizio. *Sia r la retta per $P = (2, 1, 1)$ con vettore direttore $(2, -1, 7)$. Si trovi il piano passante per r e per il punto $Q = (\frac{1}{3}, 0, -1)$.*

Suggerimento: Equazioni parametriche per r sono $x = 2 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 7t$. Sostituendo $t = 1 - y$ nelle altre due equazioni si ricavano le equazioni cartesiane $x + 2y = 4$ e $7y + z = 8$. Basta allora trovare il valore di $s \in \mathbf{R}$ tale che Q appartiene al piano $(x + 2y - 4) + s(7y + z - 8) = 0, \ldots$

Esempio. *Verificare se la retta ed il piano seguenti sono paralleli:*

$$\begin{cases} x = 2 + 4s \\ y = -1 \\ z = 5 + \sqrt{7}s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 5t - 7u \\ y = 19 - \frac{11}{3}u \\ z = \frac{13}{3}t \end{cases}$$

Occorre verificare se

$$(4, 0, \sqrt{7}) \in \ Span\ \{(5, 0, \frac{13}{3}), (-7, -\frac{11}{3}, 0)\}$$

Si verifica facilmente (con un conveniente sistema lineare) che questa condizione non é verificata e quindi la retta ed il piano non sono paralleli.

Nel caso in cui retta e piano sono date in equazioni cartesiane, la condizione di parallelismo si verifica con il seguente:

Esercizio. *Provare che la retta*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

ed il piano

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

sono paralleli se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 0$$

Esercizio. *Provare che il piano $ax + by + cz = d$ é parallelo ad una retta con vettore direttore (l, m, n) se e solo se $al + bm + cn = 0$.*

Definizione. *Due rette si dicono complanari se esiste un piano che le contiene entrambe, altrimenti si dicono sghembe.*

Due rette sono complanari se e solo se sono incidenti o sono parallele.

Lemma. *Due rette in forma parametrica*

$$\begin{cases} x = x_1 + tl \\ y = y_1 + tm \\ z = z_1 + tn \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1' + ul' \\ y = y_1' + um' \\ z = z_1' + un' \end{cases}$$

sono complanari se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} l & l' & x_1 - x_1' \\ m & m' & y_1 - y_1' \\ n & n' & z_1 - z_1' \end{bmatrix} = 0$$

Dimostrazione La condizione equivale al fatto che la matrice completa del seguente sistema nelle incognite t, u ha rango ≤ 2.

$$\begin{cases} x_1 + tl = x_1' + ul' \\ y_1 + tm = y_1' + um' \\ z_1 + tn = z_1' + un' \end{cases}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli se la matrice incompleta ha rango 2 le rette sono incidenti, mentre se ha rango 1 sappiamo che le rette sono parallele.

Esercizio. *Provare che le rette*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases}$$

sono complanari se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} = 0$$

Esercizi.

1) Scrivere l'equazione del piano per i 3 punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

2) Scrivere l'equazione del piano parallelo a $z + y = 0$ passante per $(1,1,1)$.

3) Scrivere l'equazione del piano parallelo all'asse delle ascisse e passante per i punti $(0, \sqrt{51}, 0)$, $(0,1,1)$.

4) Scrivere le equazioni di tutti i piani paralleli alle rette

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = \sqrt{79} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 132 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Ne esiste uno passante per l'origine?

5) Scrivere gli 8 vertici del parallelepipedo che ha per spigoli OP_i per $i = 1,2,3$. Scrivere le equazioni delle 4 diagonali.

6) Un gatto é su una scala a pioli di lunghezza a appoggiata al muro in verticale, ad una altezza $b < a$. Quando la scala scivola parametrizzare il luogo descritto dal gatto. Di che luogo si tratta se $a = 2b$? *Risposta: un arco di circonferenza.*

7) Trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano contenente i 3 punti $P_i = (i, i^2, i^3)$.

8) Scrivere le equazioni della retta passante per l'origine e parallela ai piani $z - y = 5$, $y + 7z = 12$.

9) Scrivere le equazioni del piano contenente l'asse delle ordinate e passante per $(9, 9, 9)$.

10) Scrivere le equazioni del piano contenente la retta

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 132 + t \\ z = -t \end{cases}$$

e passante per il punto $(-1, -2, -3)$.

11) Verificare se la retta

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = \sqrt{79} \end{cases}$$

é sghemba con l'asse delle ascisse.

12) Calcolare il baricentro del tetraedro di vertici l'origine ed i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Calcolare l'intersezione della retta $\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$ con il tetraedro.

13) Scrivere le equazioni della retta per $(6, 3, 1)$ incidente alla retta

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

ed all'asse delle ascisse.

14) Scrivere equazioni cartesiane della retta per i punti $(3, 4, -2)$ e $(\frac{5}{2}, -1, 0)$.

15) Scrivere equazioni cartesiane e parametriche della retta passante per $(0, 7, 1)$ e parallela alla retta

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - 7y + z = 0 \end{cases}$$

16) Qual é la condizione geometrica che corrisponde a

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

17) Date le rette

$$r : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = -2t \end{cases}$$

verificare che r, s sono sghembe e scrivere l'equazione del piano passante per r parallelo a s.

18) Scrivere l'equazione della retta per $P = (1, 2, 3)$ parallela ai due piani $x-y-z = 78$, $2x - 4y = 51$.

19) Sia π il piano $x - y - z = 11$ e consideriamo il suo punto $P = (12, 0, 1)$. Scrivere l'equazione della retta r passante per P e contenuta in π parallela al piano $y - z = 0$

Esercizio. *Dati due sottospazi paralleli $P + W$ e $Q + U$ con $W \subset U$ la traslazione t_{Q-P} porta il primo nel secondo, cioé $t_{Q-P}(P + W) = Q + W \subset Q + U$*

Dimostrazione

$$t_{Q-P}(P + \mathbf{w}) = P + \mathbf{w} + Q - P = Q + \mathbf{w} \qquad \forall \mathbf{w} \in W$$