Geometria Analitica
Giorgio Ottaviani

Queste note di Geometria Analitica possono essere lette solo dopo avere appreso la teoria degli spazi vettoriali. Si cerca di dare una visione autonoma della geometria analitica, che non viene vista come un'appendice dell'algebra lineare. In particolare i morfismi affini e le affinitá sono definiti in modo "intrinseco" dal concetto di combinazione affine. Questo punto di vista é appropriato per varie applicazioni come i politopi convessi e la grafica al computer.

Introduzione

Il nostro oggetto di studio é la geometria degli spazi di dimensione 1, 2 e 3. Nello spazio degli Elementi di Euclide (III sec. a.C.), che é rimasto uno dei manuali standard di Geometria per 2 millenni, le proprietá degli enti geometrici venivano studiate senza fare uso di coordinate. Il metodo seguito nelle dimostrazioni era, come si dice oggi, *sintetico.*

La geometria euclidea ha trovato la sua formalizzazione moderna con i "Fondamenti di Geometria" di D. Hilbert, pubblicati nel 1900, che hanno come punto di partenza una serie di postulati su elementi che non vengono definiti e che prendono il nome di punti, rette e piani. Lo studente di Matematica torneá ad occuparsi dei problemi sollevati da questo punto di vista, ed in particolare dal *postulato delle parallele,* nel corso di Geometria 2, dove verrá studiato il concetto di geodetica, che é alla base della teoria generale della relativitá di A. Einstein.

Il modello di spazio che viene studiato oggi nel biennio universitario prende il nome di *spazio affine,* e si fonda sulla teoria degli spazi vettoriali. Il metodo seguito si dice *analitico* (in contrapposizione a sintetico) ed é basato sull'uso delle coordinate: gli enti geometrici vengono descritti da equazioni. In particolare rette e piani vengono descritti da equazioni lineari, e questo spiega perché i fatti fondamentali su rette e piani che vedremo in queste note possono essere studiati applicando l'algebra lineare.

Gli spazi vettoriali di dimensione 1 (risp. 2 o 3) sul campo $\mathbf{R}$ possono essere visualizzati come rette (risp. piani o spazi). In tale descrizione é fissata l'origine O, che corrisponde al vettore nullo. In particolare le rette per l'origine corrispondono ai sottospazi di dimensione 1, mentre le rette che non passano per l'origine non sono sottospazi (perché?). Quindi il punto corrispondente all'origine ha un ruolo speciale. Questo modello geometrico presenta alcuni limiti, perché nel piano e nello spazio *nessun punto ha un ruolo privilegiato rispetto agli altri* . In sostanza deve essere possibile spostare l'origine delle coordinate in un qualunque punto.

Uno spazio affine puó essere pensato come uno spazio vettoriale dove non c'é nessun punto "privilegiato", come é il vettore nullo nel caso degli spazi vettoriali. In uno spazio affine non c'é quindi nessuna origine "canonica", e *possiamo fissare un sistema di coordinate opportune centrato in un qualunque punto,* se é conveniente per il problema da studiare.

Le trasformazioni in uno spazio affine si chiamano *affinitá.*

Quando in uno spazio affine é definita la distanza tra due punti si parla di *spazio euclideo.* Ogni spazio euclideo é uno spazio affine ("dimenticando" la distanza). Questo modello di spazio euclideo é equivalente a quello che si ottiene con i postulati di Hilbert.

In uno spazio euclideo hanno senso le nozioni di angolo, area e volume. Molti teoremi "classici" della geometria (Euclide, Pitagora, ...) trovano il loro posto negli spazi euclidei.

Le trasformazioni in uno spazio euclideo si chiamano *isometrie* . Le isometrie di spazi di dimensione 2 e 3 si ottengono componendo una traslazione ed una rotazione (vedi [Sernesi] cap.21, oppure [M.Artin] cap. 4 sezione 5).

Vettori applicati e vettori liberi

Cominciamo ricordando il significato geometrico di vettore applicato in un punto, dando per buone le proprietá intuitive del piano e dello spazio affine. Questo paragrafo ha il solo scopo di richiamare la visualizzazione dei vettori e puó essere omesso da chi non sente questa necessitá, che puó cominciare a leggere direttamente il paragrafo successivo "Proprietá di uno spazio affine".

Denotiamo con $\mathbf{A}^2$il piano affine e sia P un suo punto. Un vettore applicato in P é un segmento orientato OA con primo estremo il punto O e secondo estremo un altro punto $A \in\mathbf{A}^2$. L'insieme dei vettori applicati in O ha una struttura naturale di spazio vettoriale di dimensione 2, dove la somma si definisce geometricamente con la ben nota "regola del parallelogramma". Quindi la somma di OA con OB é data da OC dove C é il quarto vertice del parallelogramma individuato da O, A, B. La moltiplicazione di OA per $c \in \mathbf{Z}$ é data dal vettore $OA' = OA + \ldots + OA$ (c volte) se $c > 0$ e da $-(OA + \ldots + OA)$ ($-c$ volte) se $c < 0$. Se $c = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ allora $c\ OA = OA'$ dove A' é l'unico punto che soddisfa $m\ OA = n\ OA'$. Infine se $c \in \mathbf{R}$ $c\ OA$ puó essere definito con un procedimento di limite da c_nOA dove $c_n \in \mathbf{Q}$ e $c_n \to c$ tramite un opportuno assioma di continuitá (il lettore interessato puó trovare i dettagli nel trattato di Hilbert citato nell'introduzione).

É interessante osservare che abbiamo definito il prodotto di un vettore applicato per uno scalare senza usare il concetto di lunghezza, che infatti verrá introdotto quando sará necessario, e cioé per lo studio dei concetti metrici (distanze, aree, angoli). Una volta definita la lunghezza, potremo osservare, come ci aspettiamo, che il rapporto tra le lunghezze di cOA e OA é pari a c.

Denotiamo con $\mathbf{A}^3$ lo spazio affine e sia P un suo punto. Un vettore applicato in P é un segmento orientato OA con primo estremo il punto O e secondo estremo un altro punto $A \in\mathbf{A}^3$. L'insieme dei vettori applicati in O ha ancora una struttura naturale di spazio vettoriale di dimensione 3.

Siano ora P e Q due punti di $\mathbf{A}^2$(o di $\mathbf{A}^3$). La traslazione da P a Q porta i vettori applicati in P nei vettori applicati in Q. Diremo che due vettori applicati, il primo in P e l'altro in Q, sono congruenti se la traslazione da P a Q porta il primo nel secondo. La relazione di congruenza é di equivalenza. Un vettore puó essere definito geometricamente come classe di equivalenza dell'insieme di tutti i vettori applicati rispetto alla congruenza. A tale classe di equivalenza si dá talvolta il nome di vettore libero, per distinguerlo dai vettori applicati. Un vettore (libero) puó essere applicato in un qualunque punto e corrisponde allora al vettore applicato in O la cui classe di congruenza é $\mathbf{v}$ stesso.

I vettori liberi agiscono sui punti nel modo seguente: consideriamo il vettore $\mathbf{v}$ dato dalla classe di equivalenza che ammette come rappresentante OA. Allora $\mathbf{v}$ "agisce" su O portandolo in A , cioé A é il secondo estremo del vettore $\mathbf{v}$ applicato in O. In formula scriveremo $O + \mathbf{v} = A$. In sintesi, l'azione di un vettore su un punto dá ancora un punto.

Nella trattazione moderna degli spazi affini, i vettori non vengono definiti in alcun modo geometrico, essi sono elementi di uno spazio vettoriale che é stato definito assiomaticamente (si veda M. Abate, cap. 4, def. 4.2). Corrispondono ai vettori liberi di cui abbiamo appena parlato.

Proprietá di uno spazio affine

Cominciamo con una discussione informale. Lo spazio affine $\mathbf{A}^n$ (dove $n = 1, 2, 3$) é un insieme di *punti* che denoteremo spesso con le lettere P, Q, ecc. Lo spazio affine viene definito a partire da uno spazio vettoriale V di dimensione n sul campo reale. Gli elementi di V sono detti *vettori* e verranno denotati spesso con le lettere $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, ecc. Quando introdurremo le coordinate, sia i punti che i vettori verranno identificati con n-ple di numeri reali. Eppure il loro ruolo é molto diverso e questa differenza deve essere chiara dall'inizio.

$\forall P \in \mathbf{A}^n, \forall v \in V$ é definito $P + \mathbf{v} \in \mathbf{A}^n$

Il punto $P+\mathbf{v}$ puó essere "pensato" come l'estremo finale del vettore $\mathbf{v}$ applicato in P. La notazione $+$ non é una operazione su $\mathbf{A}^n$, né su V perché é definita su un punto (sempre al primo posto) e su un vettore (sempre al secondo posto). Il risultato é un vettore. Il termine corretto é che $+$ definisce una azione di V su $\mathbf{A}^n$.

Tra breve *definiremo uno spazio affine in modo assiomatico,* dalle proprietá dell'azione. Per apprezzare meglio questa definizione vogliamo prima imparare ad usare l'azione $+$ nella descrizione di alcuni problemi geometrici.

Le proprietá che sono soddisfatte dai punti, dai vettori e dall'azione $+$ sono le seguenti:

1) $P + \mathbf{0} = P \qquad \forall P \in \mathbf{A}^n$
2) $(P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \qquad \forall P \in \mathbf{A}^n, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
3) $\forall P, Q \in \mathbf{A}^n \exists! \mathbf{v} \in V$ tale che $P + \mathbf{v} = Q$

La proprietá 2) corrisponde alla regola del parallelogramma. Il lettore attento noterá che il quarto simbolo $+$ che appare nella proprietá 2) ha un significato diverso dai primi tre (perché ?). É proprio la proprietá 2) che permette di usare un solo simbolo $+$ senza ambiguitá e di omettere le parentesi.

Dalla proprietá 2) e dalla commutativitá della somma tra vettori segue la:

4) $(P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (P + \mathbf{w}) + \mathbf{v}$

Il vettore $\mathbf{v}$ della proprietá 3) verrá indicato con $Q-P$. Con questa notazione possiamo scrivere in modo suggestivo: $P + (Q - P) = Q$. Quindi é definita la *sottrazione tra i punti* (che fornisce un vettore) ma non la somma, mentre naturalmente é ben definita la somma di vettori. *Dato un vettore* $\mathbf{v}$*, ci sono infinite coppie di punti* P*,* Q *tali che* $\mathbf{v} = Q - P$. Infatti, se P, Q é una di queste coppie e se $\mathbf{w}$ é un qualunque vettore, anche $P+\mathbf{w}$, $Q+\mathbf{w}$ é un'altra coppia perché $(Q + \mathbf{w}) - (P + \mathbf{w}) = Q - P$.

Dimostrazione Dobbiamo provare che $(P+\mathbf{w})+(Q-P) = (Q+\mathbf{w})$. Infatti usando la proprietá 4): $(P + \mathbf{w}) + (Q - P) = (P + (Q - P)) + \mathbf{w} = Q + \mathbf{w}$.

Definizione. *Ogni* $\mathbf{v} \in V$ *definisce una traslazione* $t_{\mathbf{v}}\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *definita da* $t_{\mathbf{v}}(P) := P + \mathbf{v}$

Ogni traslazione $t_{\mathbf{v}}$ é un'applicazione biunivoca con inversa $t_{-\mathbf{v}}$.

Rette nel piano

Denotiamo con $\mathbf{A}^2$il piano affine e con V lo spazio vettoriale di dimensione 2 che agisce su V. Sia $P \in\mathbf{A}^2$.

Consideriamo un sottospazio $L \subset V$ di dimensione 1. Tutti i punti $\{P + l | l \in L\}$ individuano una retta passante per P. L si dice *direzione* di questa retta. Ogni vettore non nullo in L (che é una base per L) si dice *vettore direttore* di questa retta. Se P, Q sono punti distinti, allora $Q - P$ é un vettore direttore per la retta passante per P e Q.

Denotiamo la retta passante per P di direzione L con l'espressione $P + L$.

Sistemi di coordinate nel piano

Fissiamo un punto $O \in \mathbf{A}^2$che chiameremo origine.

Fissiamo due vettori indipendenti $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ che formano una base per lo spazio vettoriale V che agisce su $\mathbf{A}^2$.

La scelta di O, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ individua un sistema di coordinate (affini) in $\mathbf{A}^2$(detto anche sistema di riferimento). Le due rette distinte passanti per O che hanno per vettori direttori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ vengono chiamate rispettivamente asse delle ascisse e asse delle ordinate. Si dice che il punto P tale che $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ha coordinate (x, y). Brevemente diremo che abbiamo fissato un sistema di coordinate (affine) Oxy. Il punto P di coordinate (x, y) verrá indicato con la notazione $P = (x, y)$ quando non ci sono ambiguitá sul sistema di coordinate scelto. In particolare $O = (0, 0)$. Se facciamo attenzione a scrivere le coordinate dei vettori nella stessa base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ segue la formula importante:

$$(x, y) + (x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j}) = (x + x_v, y + y_v)$$

Notiamo che un sistema di coordinate affini permette di scegliere delle coordinate sia sui punti in $\mathbf{A}^n$ che sui vettori in V.

La traslazione $t_\mathbf{v}$ si esprime in coordinate come $t_\mathbf{v}(x, y) = (x + x_v, y + y_v)$.

Se cambio origine O' e lascio invariata la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ allora si dice che ho traslato il sistema di riferimento. Siano $(x_{O'}, y_{O'})$ le coordinate di O' nel riferimento Oxy. Nel nuovo riferimento $O'x'y'$ abbiamo le formule di cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \end{cases}$$

Le coordinate di O in $O'x'y'$ sono $(x'_O, y'_O) = (-x_{O'}, -y_{O'})$ per cui le formule precedenti si scrivono anche come:

$$\begin{cases} x' = x + x'_O \\ y' = y + y'_O \end{cases}$$

Coordinate delle retta e dei segmenti

Consideriamo fissato un sistema di coordinate Oxy. La retta per $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ ha vettore direttore $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$ ed ha quindi *equazione parametrica*

$$P = P_1 + t\mathbf{v}$$

al variare di $t \in \mathbf{R}$ che si traduce in coordinate come

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

La sua *equazione cartesiana* é

$$det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} = 0$$

Questa condizione corrisponde alla dipendenza lineare tra $(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$ e $(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j}$ Questo primo esempio illustra come nozioni algebriche su V si traducono in nozioni geometriche su $\mathbf{A}^n$. In particolare i vettori $P_2 - P_1$ e $P - P_1$ sono linearmente dipendenti se e solo se i punti P_1, P_2 e P_3 sono allineati. É proprio il successo di questo "vocabolario" che permette di fondare la teoria degli spazi affini su quella degli spazi vettoriali.

Quando $x_2 - x_1 \neq 0$ e $y_2 - y_1 \neq 0$ l'equazione precedente viene spesso scritta come

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

L'equazione precedente é una equazione di primo grado della forma $ax + by = c$ dove $a = y_2 - y_1$, $b = -(x_2 - x_1)$ e $c = x_1y_2 - x_2y_1$. Pertanto un vettore direttore é $(-b, a)$ (naturalmente sempre definito a meno di costanti). Viceversa ogni equazione di primo grado $ax + by = c$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ individua una retta con vettore direttore $(-b, a)$. Questa retta passa dall'origine se e solo se $c = 0$.

Osservazione. *I coefficienti $(-a, -b, c)$ corrispondono ai tre determinanti dei minori 2×2 (con segno) della matrice*

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto l'equazione della retta per P_1, P_2 si puó scrivere anche come (sviluppando lungo l'ultima riga)

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0$$

e la condizione di allineamento di tre punti P_1, P_2 e P_3 é

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Questa osservazione risulterá piú chiara con gli strumenti della geometria di $\mathbf{A}^3$.

L'*equazione parametrica* della retta precedente é

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

per $t \in \mathbf{R}$

Per $t = 0$ si ottiene il punto (x_1, y_1) mentre per $t = 1$ si ottiene il punto (x_2, y_2). Pertanto il segmento che unisce (x_1, y_1) a (x_2, y_2) é parametrizzato dalle equazioni precedenti per $0 \leq t \leq 1$.

Il *punto medio*tra P_1 e P_2 (soddisfa per definizione $P_2 - M = M - P_1$) si ottiene per $t = \frac{1}{2}$ ed ha quindi coordinate $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. M si dice anche il baricentro di P_1 e P_2.

Versioni equivalenti (e molto utili in vista del concetto di combinazione affine) *delle parametrizzazioni del segmento e della retta sono :*

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases}$$

(doveper $t \in (0,1)$ si ottiene il segmento da P_1 a P_2 e per $t \in \mathbf{R}$ tutta la retta)

oppure:

$$\begin{cases} x = sx_1 + tx_2 \\ y = sy_1 + ty_2 \end{cases}$$

(dove per $(s,t) \in \mathbf{R}^2$, $s \geq 0$, $t \geq 0$, $s+t=1$ si ottiene il segmento da P_1 a P_2 e per $(s,t) \in \mathbf{R}^2$, $s+t=1$ tutta la retta)

In particolare nelle ultime equazioni il ruolo di (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è completamente simmetrico.

Rette parallele

Definizione. *Due rette si dicono parallele quando hanno la stessa direzione, ovvero quando due loro vettori direttori sono proporzionali.*

In coordinate, le rette $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$ sono parallele se

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$$

Due rette sono parallele quando non si incontrano oppure coincidono. Infatti la matrice dei coefficienti del sistema determinato da due rette parallele

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ha rango 1 ed il sistema non ha soluzioni se la matrice completa ha rango 2 (teorema di Rouché-Capelli) mentre ne ha infinite se la matrice completa ha rango 1.

La relazione di parallelismo é di equivalenza.

Esercizi.

i) Scrivere la retta per $P = (2, \sqrt{5})$ parallela alla retta $\frac{x}{2} + 3y = 1$

ii) Scrivere la retta per l'origine passante per il punto medio del segmento che unisce $(2,4)$ e $(5,-7)$.

iii) Scrivere la condizione di allineamento di (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con l'origine.

iv) Provare che 3 rette $a_i x + b_i y = c_i$ per $i = 1,2,3$ sono incidenti (tre rette parallele si considerano incidenti "all'infinito") se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 0$$

La definizione assiomatica di spazio affine

Sia V uno spazio vettoriale (reale) di dimensione n.

Definizione. *Uno spazio affine $\mathbf{A}^n$ su V é un insieme dotato di una applicazione*

$$\begin{array}{rcl} a\colon \mathbf{A}^n \times V & \to & \mathbf{A}^n \\ (P, \mathbf{v}) & \mapsto & a(P, \mathbf{v}) \end{array}$$

che denotiamo con $a(P, \mathbf{v}) = P + \mathbf{v}$ che soddisfa i seguenti assiomi:

1) $P + \mathbf{0} = P \qquad \forall P \in \mathbf{A}^n$
2) $(P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \qquad \forall P \in \mathbf{A}^n, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
3) $\forall P, Q \in \mathbf{A}^n \exists! \mathbf{v} \in V$ tale che $P + \mathbf{v} = Q$. Denotiamo $\mathbf{v} := Q - P$.

Esercizio. *Provare che ogni spazio vettoriale V é uno spazio affine su se stesso definendo*

$$\begin{array}{rcl} a\colon V \times V & \to & V \\ (\mathbf{w}, \mathbf{v}) & \mapsto & \mathbf{w} + \mathbf{v} \end{array}$$

Occorre provare che i tre assiomi sono soddisfatti.

Conviene pensare la definizione di spazio affine in un contesto piú generale.

Definizione. *Sia G un gruppo e X un insieme. Una azione (destra) di G su X é un applicazione*

$$\begin{array}{rcl} a\colon G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & a(g, x) \end{array}$$

che denotiamo con $a(g, x) = x \cdot g$ che soddisfa i seguenti assiomi:

1) $x \cdot e = x \qquad \forall x \in X$, dove e é l'unitá di G
2) $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 \cdot g_2) \qquad \forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G$

Definizione. *Una azione si dice transitiva se $\forall x, y \in X \quad \exists g \in G$ tale che $y = x \cdot g$*

Esercizio. *Data una azione di G su X, si definisce l'orbita di x il sottoinsieme di X $x \cdot G := \{y \in X | \exists g \in G$ tale che $y = x \cdot G\}$. Provare che*

i) *$y \in x \cdot G$ se e solo se $x \cdot G = y \cdot G$*
ii) *La relazione $x \sim y$ se $y \in x \cdot G$ é di equivalenza, e le orbite sono le classi di equivalenza. Dedurre che le orbite formano una partizione di X.*
iii) *Una azione é transitiva se e solo se ammette una unica orbita data da X stesso.*

Definizione. *Una azione si dice libera in $x \in X$, se lo stabilizzatore di x $G_x := \{g \in G | x \cdot g = x\}$ é uguale a $\{e\}$. Una azione si dice libera se é libera in ogni $x \in X$.*

Esercizi.

1) Provare che gli stabilizzatori sono sottogruppi.

2) Provare che una azione é libera se lo é per almeno un punto di ogni orbita. In particolare una azione transitiva é libera se lo é per almeno un punto $x \in X$.

3) Provare che una azione é libera e transitiva se e solo se $\forall x, y \in X \exists! g \in G$ tale che $y = x \cdot g$.

Osservazione. *La definizione di spazio affine puó essere riformulata nel modo seguente: é un insieme su cui agisce uno spazio vettoriale (visto come gruppo abeliano) con una azione libera e transitiva.*

Combinazioni affini

Abbiamo giá osservato che in uno spazio affine non é definita la somma tra punti. Dopo avere scelto un sistema di coordinate, la "somma"

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

dipende dal sistema di coordinate scelto, e precisamente dipende dall'avere fissato una origine O. Se cambio origine il punto "somma" nel nuovo sistema di coordinate cambia anch'esso. Si puó verificare analiticamente questo fatto con il cambiamento di coordinate $x_i' = x_i + a$, $y_i' = y_i + b$. Allora $x_1' + x_2' = x_1 + x_2 + 2a \neq x_1 + x_2 + a$.

Le parametrizzazione della retta e del segmento trovate alla fine paragrafo precedente suggeriscono peró che particolari combinazioni lineari tra punti sono ben definite, si tratta delle combinazioni affini (o baricentriche).

Definizione. *Siano $P_0, \ldots, P_m \in \mathbf{A}^n$ e sia $(a_0, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$ tale che $\sum_{i=0}^m a_i = 1$ La combinazione affine $\sum_{i=0}^m a_i P_i \in \mathbf{A}^n$ é definita nel modo seguente:*

$$\sum_{i=0}^m a_i P_i := P_0 + \sum_{i=1}^m a_i (P_i - P_0)$$

(corrisponde all'azione del vettore $\sum_{i=1}^m a_i (P_i - P_0)$ sul punto P_0).

Una proprietá fondamentale della combinazione affine (che vediamo adesso per $n = 2$) é che in un *qualunque sistema di coordinate* in $\mathbf{A}^2$, se $P_i = (x_i, y_i)$ allora

$$\sum_{i=0}^m a_i P_i = (\sum_{i=0}^m a_i x_i, \sum_{i=0}^m a_i y_i)$$

come si verifica facilmente proprio dalla condizione $\sum_{i=0}^m a_i = 1$. Infatti dalla definizione le coordinate di $\sum_{i=0}^m a_i P_i$ sono $(x_0 + \sum_{i=1}^m a_i (x_i - x_0), y_0 + \sum_{i=1}^m a_i (y_i - y_0)) = (x_0(1 - \sum_{i=1}^m a_i) + \sum_{i=1}^m a_i x_i, y_0(1 - \sum_{i=1}^m a_i) + \sum_{i=1}^m a_i y_i) = (\sum_{i=0}^m a_i x_i, \sum_{i=0}^m a_i y_i)$

Questo calcolo prova anche che la definizione di combinazione affine *non dipende dall'ordine in cui sono scelti gli $m + 1$ punti.*Il ragionamento precedente si estende senza difficoltá al caso $n = 3$.

Fisicamente la combinazione affine sopra definita corrisponde (nel caso in cui $a_i > 0$) al baricentro di $m + 1$ oggetti situati in $P_0, \ldots, P_m$ con masse $M_0, \ldots, M_m$ ponendo $a_i := \frac{M_i}{\sum_j M_j}$

Esercizio. *Fissato un sistema di riferimento Oxy, scrivere le coordinate delle seguenti combinazioni affini di punti*

$$P_1 = \frac{1}{3}(2, 1) + \frac{1}{6}(3, -2) + \frac{1}{2}(0, 0)$$

$$P_2 = -\frac{1}{3}(2,1) + \frac{5}{6}(3,-2) + \frac{1}{2}(0,0)$$

$$\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}(1,1)$$

Coordinate dei triangoli e dei poligoni convessi

Lemma. *Il triangolo di vertici $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ si parametrizza con le equazioni*

$$\begin{cases} x = (1-s-t)x_1 + sx_2 + tx_3 \\ y = (1-s-t)y_1 + sy_2 + ty_3 \end{cases}$$

per $(s,t) \in \mathbf{R}^2, s \geq 0, t \geq 0, s+t \leq 1$

oppure

$$\begin{cases} x = sx_1 + tx_2 + ux_3 \\ y = sy_1 + ty_2 + uy_3 \end{cases}$$

per $(s,t,u) \in \mathbf{R}^3$, $s \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$, $s+t+u = 1$

Dimostrazione Il segmento per P_1 e P_2 è parametrizzato dalla prima terna di equazioni dell'enunciato per $t = 0$, $0 \leq s \leq 1$. Ogni punto P interno al triangolo appartiene al segmento per P_3 e per $Q = (1-\alpha)P_1 + \alpha P_2$ (per qualche $\alpha \in \mathbf{R}$). Pertanto esiste $\beta \in \mathbf{R}$ tale che $P = (1-\beta)Q + \beta P_3$. É sufficiente porre $t = \beta$, $s = \alpha(1-\beta)$.

Osservazioni. *Il segmento per P_2 e P_3 è parametrizzato dalla prima terna di equazioni dell'enunciato per per $s = t-1$, $0 \leq t \leq 1$. Il segmento per P_3 e P_1 per $s = 0$, $1 \geq t \geq 0$.*

La coppia (s,t) della prima parametrizzazione e la terna (s,t,u) della seconda parametrizzazione sono uniche.

Definizione. *Un sottoinsieme X del piano si dice convesso se dati due qualunque punti di X il segmento che li unisce é tutto contenuto in X.*

Esercizio. *Provare che l'angolo convesso di vertice $V = (x_v, y_v)$ delimitato dalle semirette passanti per $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ (non allineati con V) é parametrizzato da*

$$\begin{cases} x = x_v + s(x_1 - x_v) + t(x_2 - x_v) \\ y = y_v + s(y_1 - y_v) + t(y_2 - y_v) \end{cases}$$

per $(s,t) \in \mathbf{R}^2$, $s \geq 0$, $t \geq 0$.

Lemma. *L'intersezione di una famiglia di insiemi convessi $\{X_i\}_{i \in I}$ é un insieme convesso.*

Dimostrazione Se $P_1, P_2 \in \cap_{i \in I} X_i$ allora per ogni $i \in I$ abbiamo $P_1, P_2 \in X_i$ e quindi per l'ipotesi il segmento che unisce P_1 a P_2 é contenuto in X_i. Segue che tale segmento é contenuto in $\cap_{i \in I} X_i$.

Definizione. *Siano P_i per $i = 1, \dots, n$ punti distinti del piano. L'intersezione tra gli insiemi convessi che contengono tutti i P_i si dice l'inviluppo convesso di $\{P_1, \dots, P_n\}$ e si indica con $Conv(P_1, \dots, P_n)$.*

Per il lemma precedente $Conv(P_1, \dots, P_n)$ é un insieme convesso, ed é il piú piccolo insieme convesso che contiene $\{P_1, \dots, P_n\}$, nel senso che un qualunque insieme convesso che contiene $\{P_1, \dots, P_n\}$ contiene anche il loro inviluppo convesso.

Teorema. *Siano $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \dots, n$ punti (distinti) del piano. $Conv(P_1, \dots, P_n)$ si parametrizza con le equazioni*

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n t_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^n t_i y_i \end{cases}$$

per $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$, $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

Il punto $P = (x, y)$ che soddisfa le equazioni precedenti corrisponde alla combinazione affine $\sum_{i=1}^n t_i P_i$.

Attenzione. *Se $n \geq 4$ la n-pla $(t_1, \dots, t_n)$ non è unica.*

Dimostrazione Poniamo $X := \{P \in \mathbf{A}^2 | P = \sum_{i=1}^n t_i P_i,\ t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$

Dalla definizione ogni $P_i \in X$. Si verifica subito che se P, $Q \in X$ anche $(1-t)P + tQ \in X$ per $0 \leq t \leq 1$ e quindi X é convesso.

Se C è un insieme convesso che contiene $P_1, \dots, P_n$ allora in particolare

$$C \supset \{\sum_{i=1}^2 t_i P_i |\ t_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 t_i = 1\}$$

Scrivendo per $t_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 t_i = 1$: $\sum_{i=1}^3 t_i P_i = (1 - t_3) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{t_i}{t_1 + t_2} P_i \right) + t_3 P_3$ anche questi punti stanno in C e quindi $C \supset \{\sum_{i=1}^3 t_i P_i |\ t_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 t_i = 1\}$. Continuando in questo modo si ottiene $C \supset X$ come volevamo.

Consideriamo 4 punti non allineati nel piano. Il loro inviluppo convesso puó essere un triangolo oppure un quadrilatero, che diremo quadrilatero convesso.

Esercizio.

i) Dati tre punti non allineati nel piano, descrivere la regione del piano in cui ponendo un quarto punto, si ottiene che l'inviluppo convesso dei 4 punti é un triangolo.

ii) Descrivere un algoritmo che dalle coordinate di 4 punti $P_i = (x_i, y_i)$ permette di stabilire la forma dell'inviluppo convesso (triangolo, quadrilatero, ...).*

Definizione. *L'inviluppo convesso di n punti nel piano si dice poligono convesso.*

L'esercizio precedente dovrebbe convincere il lettore che si possono provare senza difficoltá i seguenti fatti sull'inviluppo convesso di $P_1, \dots, P_n$:

Alcuni dei punti P_i si possono scrivere come combinazione affine a coefficienti tutti positivi dei rimanenti. Tali punti si dicono interni. I punti non interni si dicono vertici. Allora é possibile riordinare i vertici che chiamiamo $V_1, \dots, V_k$ (con $k \leq n$) in modo che i k segmenti per V_i e V_{i+1} (che chiamiamo lati, dove per convenzione $V_{k+1} = V_1$) si incontrano tra loro soltanto nei vertici ed ogni vertice é comune soltanto a due lati. Inoltre ogni retta che prolunga un lato divide il piano in due semipiani uno dei quali contiene tutti gli altri vertici. Abbiamo cosí descritto un poligono convesso con k lati.

Definizione. *Il baricentro del triangolo di vertici $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \ldots, 3$ é il punto*

$$B = (\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i, \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i) = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3$$

Piú in generale il baricentro del poligono convesso di vertici $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \ldots, n$ é il punto

$$B = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{n}$$

.

Esercizi.

i) Scrivere l'equazione della mediana del triangolo di vertici $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(7, 7)$ passante per $(1, 4)$

ii) Provare che il baricentro di un triangolo coincide con il punto di intersezione delle tre mediane.

iii) Verificare che $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \ldots 4$ sono vertici di un parallelogramma se e solo se

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \end{cases}$$

iv) Provare che i quattro punti medi di un qualunque quadrilatero sono vertici di un parallelogramma (questo esercizio si puó provare sia per via sintetica che per via analitica).

v)* Dare condizioni necessarie e sufficienti perché un punto $P = (x, y)$ sia:

a) interno all'angolo convesso di vertice P_1 e lati passanti per P_2 e P_3

b) interno al triangolo di vertici $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, 2, 3$.

vi) Calcolare il punto di incontro delle diagonali del quadrilatero che ha come coppie di vertici opposti $\{O, P_3\}$ e $\{P_2, P_4\}$.

Risposta: $x = \frac{x3(x2y4-x4y2)}{(x2y3+x3(y4-y2)-x4y3)}, y = \frac{y3(x2y4-x4y2)}{(x2y3+x3(y4-y2)-x4y3)}$

Affinitá

Definizione. *Una applicazione $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ si dice un* **morfismo affine** se conserva le combinazioni affini, cioé se

$$f(\sum_{i=0}^{m} a_i P_i) = \sum_{i=0}^{m} a_i f(P_i)$$

$\forall \quad P_0, \ldots, P_m \in \mathbf{A}^n$, $\forall \quad (a_0, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$ tali che $\sum_{i=0}^{m} a_i = 1$. Un morfismo affine biunivoco si dice una **affinitá**.

Teorema. *Le traslazioni sono affinitá.*

Dimostrazione Se f é una traslazione segue per ogni combinazione affine

$$f(\sum_{i=0}^{m} a_i P_i) = \sum_{i=0}^{m} a_i P_i + \mathbf{w} = \sum_{i=0}^{m} a_i P_i + (\sum_{i=0}^{m} a_i)\mathbf{w} = \sum_{i=0}^{m} a_i(P_i + \mathbf{w}) = \sum_{i=0}^{m} a_i f(P_i)$$

Lemma. *Se* $f: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *è un morfismo affine allora per ogni* P, Q, $R \in \mathbf{A}^n$ *vale*

$$f(P + Q - R) = f(P) + f(Q) - f(R)$$

Dimostrazione
Immediata dalla definizione, infatti in questo caso $\sum_{i=0}^{m} a_i = 1 + 1 - 1 = 1$

Definizione-Teorema. *Se* $f: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *è un morfismo affine allora è ben definita*

$$Df: V \to V$$

dalla formula

$$Df(\mathbf{v}) := f(P + \mathbf{v}) - f(P) \qquad \textit{per } P \in \mathbf{A}^n$$

e Df *risulta una applicazione lineare.*

Dimostrazione Per provare che f è ben definita occorre provare che se P, $Q \in \mathbf{A}^n$ vale

$$f(P + \mathbf{v}) - f(P) = f(Q + \mathbf{v}) - f(Q)$$

per ogni $v \in V$. Questo segue dal lemma precedente perché $P + v = P + ((Q + v) - Q)$ Segue anche che per ogni v_1, $v_2 \in V$ e $P \in \mathbf{A}^n$

$$Df(\mathbf{v}_1) = f(P + \mathbf{v}_1) - f(P)$$

$$Df(\mathbf{v}_2) = f(P + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - f(P + \mathbf{v}_1)$$

Sommando membro a membro le due ultime uguaglianze si ottiene

$$Df(\mathbf{v}_1) + Df(\mathbf{v}_2) = f(P + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - f(P) = Df(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

Per concludere la dimostrazione scegliamo $c \in \mathbf{R}$. Dobbiamo provare che $Df(c\mathbf{v}) = cDf(\mathbf{v})$, cioé che $f(P + c\mathbf{v}) - f(P) = c[f(P + \mathbf{v}) - f(P)]$ Questo segue applicando f ad ambo i membri della combinazione affine

$$P = (P + c\mathbf{v}) - c(P + \mathbf{v}) + cP$$

Osservazione. *Un modo equivalente di definire* Df *é*

$$Df(Q - P) := f(Q) - f(P)$$

Corollario. *Un morfismo affine é una affinitá se e solo se* Df *é biunivoco. In tal caso* f^{-1} *é una affinitá e vale* $(Df)^{-1} = D(f^{-1})$

Dimostrazione Cominciamo col provare che l'inversa di una affinitá é ancora una affinitá. Data una combinazione affine $\sum_{i=0}^{m} a_i P_i$ esistono unici Q_i tali che $f(Q_i) = P_i$. Allora

$$f^{-1}(\sum_{i=0}^{m} a_i P_i) = f^{-1}(\sum_{i=0}^{m} a_i f(Q_i)) = f^{-1}(f(\sum_{i=0}^{m} a_i Q_i) = \sum_{i=0}^{m} a_i Q_i = \sum_{i=0}^{m} a_i f^{-1}(P_i)$$

Sia ora f un morfismo affine. Abbiamo

$$f(P+\mathbf{v}) = f(P) + Df(\mathbf{v})$$

Se f è biunivoco applicando f^{-1} vale

$$P+\mathbf{v} = f^{-1}(f(P)+Df(\mathbf{v})) = P + D(f^{-1})(Df(\mathbf{v}))$$

da cui $(Df)^{-1} = D(f^{-1})$.

Viceversa se Df é biunivoco allora fissiamo un punto P. Ogni altro punto puó essere scritto come $f(P)+\mathbf{v}$ per $\mathbf{v} = Df(\mathbf{w})$ opportuno. Allora $f(P)+\mathbf{v} = f(P+\mathbf{w})$ e quindi f é suriettivo. L'iniettivitá di f é lasciata come esercizio.

Per motivi che risulteranno chiari durante i corsi di Geometria 2 e/o di Analisi 2 (V è lo spazio tangente in ogni punto di $\mathbf{A}^n$) Df é chiamata la derivata di f.

Osservazione. *Piú in generale, dati due spazi affini $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ su cui agiscono rispettivamente due spazi vettoriali V e V', una applicazione $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ si dice un morfismo affine se conserva le combinazioni affini. In questo caso Df é una applicazione lineare da V a V'.*

Sottospazi affini

Definizione. *Se $W \subset V$ è un sottospazio di dimensione d, l'insieme dei punti*

$$P+W := \{P+w | w \in W\}$$

si dice un sottospazio affine e d si dice la sua dimensione. W si dice la direzione (o giacitura) del sottospazio .

In particolare le rette nel piano sono tutte e sole le sottovarietá affini di dimensione 1.

Definizione. *Due sottospazi affini si dicono paralleli se una delle due direzioni che determinano contiene l'altra. In particolare due sottospazi affini della stessa dimensione sono paralleli se hanno la stessa direzione.*

Teorema. *Dati due sottospazi paralleli $P+W$ e $Q+U$ con $W \subset U$ la traslazione t_{Q-P} porta il primo nel secondo, cioé $t_{Q-P}(P+W) = Q+W \subset Q+U$*

Dimostrazione

$$t_{Q-P}(P+\mathbf{w}) = P+\mathbf{w}+Q-P = Q+\mathbf{w} \qquad \forall \mathbf{w} \in W$$

Teorema.
i) Se f é una affinitá e $P+W$ é un sottospazio affine allora $f(P+W) = f(P)+Df(W)$ (che è quindi ancora un sottospazio affine della stessa dimensione)
ii) Le immagini di sottospazi affini paralleli sono ancora sottospazi affini paralleli.

Dimostrazione Per provare i) si prende $\mathbf{w} \in W$. Allora $f(P+\mathbf{w}) = f(P)+Df(\mathbf{w})$ da cui vale i). ii) segue da i).

Esercizi.

i) Provare che dati 3 punti in $\mathbf{A}^2$ P_0, P_1, P_2 non allineati ogni altro punto P ammette una *unica* combinazione affine $P = \sum_{i=0}^{2} a_i P_i$. I coefficienti a_i prendono il nome di *coordinate affini* di P rispetto al *riferimento affine* $\{P_0, P_1, P_2\}$. In generale in $\mathbf{A}^n$ un riferimento affine é dato da $n+1$ punti tali che nessun sottoinsieme di n punti giace su una sottospazio affine di dimensione $n-1$.

ii) Fissato un sistema di coordinate Oxy, e dati 3 punti non allineati $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 0, 1, 2$, trovare esplicitamente le coordinate affini di $P = (x, y)$ rispetto a $\{P_0, P_1, P_2\}$.
Soluzione: Usando la regola di Cramer si ottiene:

$$a_0 = \frac{\det \begin{bmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \qquad , \ldots$$

Piú avanti interpreteremo queste coordinate come rapporti di aree.

iii) Provare che una affinitá $f \colon \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ é determinata univocamente dalle immagini di 3 punti non allineati.

iv) Provare che dati due triangoli T_1 e T_2 in $\mathbf{A}^2$ esiste una affinitá f tale che $f(T_1) = T_2$

v) Provare che l'immagine di un parallelogramma attraverso una affinitá é ancora un parallelogramma. Dedurre che il risultato dell'esercizio iv) non vale per i quadrilateri.

vi) Con le notazioni dell'esercizio i), chiamiamo $O := P_0$, $\mathbf{i} := P_1 - P_0$, $\mathbf{j} := P_2 - P_0$. Provare che il punto $a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2$ ha nel sistema Oxy coordinate (a_1, a_2). Questo prova che le coordinate affini dell'esercizio i) sono essenzialmente equivalenti a quelle giá introdotte.

vii) Sia B il baricentro dei punti $P_1, \ldots, P_m$ e sia f un morfismo affine. Provare che $f(B)$ é il baricentro dei punti $f(P_1), \ldots, f(P_m)$

Coordinate di una affinitá

Consideriamo un sistema di coordinate Oxy. Scriviamo le coordinate in colonna, per cui $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Proposizione. *Sia f un morfismo affine tale che $f(O) = O$. Sia A la matrice di Df (rispetto a $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$). Allora le coordinate di $f(P)$ sono*

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dimostrazione Le coordinate di $f(P)$ sono per definizione quelle del vettore $f(P) - O = f(P) - f(O) = Df(P - O)$. Siccome le coordinate di P sono quelle del vettore $P - O$ segue la tesi.

Proposizione. *Sia f un morfismo affine tale che $f(O) = Q = \begin{pmatrix} x_Q & y_Q \end{pmatrix}$. Allora le coordinate di $f(P)$ sono*

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$$

Dimostrazione Il morfismo affine $t_{O-Q} \circ f$ fissa O e quindi per la proposizione precedente le coordinate di $f(P) + (O - Q)$ sono

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Siccome le coordinate di $Q - O$ sono $\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}$ segue la tesi.

Le equazioni di una affinitá in un sistema di coordinate giustificano l'espressione che le affinitá si ottengono componendo una applicazione lineare ed una traslazione. Tale espressione peró ha senso solo in un fissato sistema di coordinate. In uno spazio affine non c'é "una" origine e non ha senso parlare di applicazioni lineari in uno spazio affine.

Esercizio. *In un sistema di riferimento Oxy consideriamo i punti $P_1 = (1, 0), P_2 = (3, 0), P_3 = (2, 1)$.*

i) Scrivere le equazioni della affinitá f tale che $f(P_1) = P_2$, $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_1$.
ii) Scrivere la matrice di Df rispetto a **i**, **j**.
iii) Verificare che $f \circ f = f^2$ é ancora una affinitá e scrivere le equazioni di f^2 e di $D(f^2)$.
iv) Verificare che $D(f^2) = D(f)^2$ (questo é un fatto generale).
v) Verificare che f^3 é l'identitá.
vi) Notare che f induce una applicazione biunivoca del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3 in se stesso. Descrivere l'immagine dei lati del triangolo. Il gruppo ciclico con 3 elementi $\{1, f, f^2\}$ agisce su questo triangolo.

Esercizio. *Siano f, g morfismi affini.*

i) Provare che $g \circ f$ é un morfismo affine e che $D(g \circ f) = Dg \circ Df$.
ii) Provare che l'identitá (che indichiamo con $1_{\mathbf{A}^n}$) é una affinitá e che $D1_{\mathbf{A}^n} = 1_V$
iii) Provare che l'insieme delle affinitá forma un gruppo.
iv) Se t é una traslazione provare che $Dt = 1_V$. Vivecersa se t é una affinitá tale che $Dt = 1_V$ provare che t é una traslazione.
v) Se f, g sono due affinitá tale che $Df = Dg$ provare che esiste una traslazione t tale che $f = t \circ g$.

Esercizio. *Sia f un morfismo affine del piano tale che il rango di Df é 1. Provare che l'immagine di f é una retta.*

Definizione. *Una affinitá f tale che $Df = c \cdot 1_V$ per $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ si dice una omotetia.*

Esercizio. *Provare che ogni omotetia f con $c \neq 1$ ammette un punto fisso P. Provare che tutte le rette r per P sono invarianti, cioé $f(r) = r$. In questo caso l'omotetia corrisponde ad una "dilatazione" di scala c centrata in P.*

Cambiamento di coordinate

Siano Oxy e $O'x'y'$ due sistemi di riferimento, con basi di V date rispettivamente da $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ e $\{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$. Sia $(\mathbf{i},\mathbf{j}) = (\mathbf{i}',\mathbf{j}') \cdot B$. Siano $\begin{pmatrix} x'_O \\ y'_O \end{pmatrix}$ le coordinate di O in $O'x'y'$. Siano $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le coordinate di P rispetto a Oxy. Allora le coordinate di P rispetto a $O'x'y'$ sono

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_O \\ y'_O \end{pmatrix}$$

Dimostrazione Le coordinate (x',y') di P soddisfano a:

$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' = P - O' = (P-O) + (O-O') = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + (x'_O\mathbf{i}' + y'_O\mathbf{j}') = (\mathbf{i},\mathbf{j}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x'_O\mathbf{i}' + y'_O\mathbf{j}') = (\mathbf{i},\mathbf{j}) \cdot B^{-1} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x'_O\mathbf{i}' + y'_O\mathbf{j}') = (\mathbf{i}',\mathbf{j}') \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x'_O\mathbf{i}' + y'_O\mathbf{j}')$

da cui la tesi.

Osservazione. *Le equazioni di un cambiamento di coordinate sono analoghe a quelle di una affinitá. I due concetti peró sono ben distinti: in una affinitá "muoviamo" i punti nello spazio, mentre in un cambiamento di coordinate i punti rimangono fermi ed é il sistema di riferimento che si muove.*

Esercizio. *Verificare che cambiando sistema di riferimento l'espressione in coordinate di una combinazione affine rimane invariata.*

Esercizio. *Supponiamo di avere due sistemi di riferimento Oxy e $O'x'y'$ con $\mathbf{i} = \mathbf{i}'+\mathbf{j}', \mathbf{j} = \mathbf{i}' - \mathbf{j}'$. Supponiamo che le coordinate di O nel sistema $O'x'y'$ sono $(10, 10)$. Scrivere le equazioni che esprimono le coordinate (x', y') di P in funzione di (x, y) e le relazioni inverse.*

Il rapporto semplice

Lemma. *Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ due spazi affini. Una applicazione lineare $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ é un morfismo affine se e solo se $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall P, Q \in \mathbf{A}$*

$$f((1-t)P + tQ) = (1-t)f(P) + tf(Q)$$

(dove sia a primo che a secondo membro abbiamo una combinazione affine)

Dimostrazione Dobbiamo provare che se sono conservate le combinazioni affini di 2 punti allora sono conservate le combinazioni affini di m punti con $m \geq 2$. Ragioniamo per induzione su m, $m \geq 2$. Dato $\sum_{i=0}^m a_iP_i$ chiamo $a := \sum_{i=1}^m a_i$, da cui $a_0 = 1 - a$. Allora

$$f(\sum_{i=0}^m a_iP_i) = f\left((1-a)P_0 + a \cdot \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{a}P_i\right) = (1-a)f(P_0) + af(\sum_{i=1}^m \frac{a_i}{a}P_i)$$

Usando l'ipotesi induttiva l'ultima espressione é uguale a:

$$(1-a)f(P_0) + a\sum_{i=1}^m \frac{a_i}{a}f(P_i) = \sum_{i=0}^m a_if(P_i)$$

come volevamo dimostrare.

Definizione. *Dati tre punti allineati A, B, C con $A \neq B$ abbiamo visto che esiste un unico $t \in \mathbf{R}$ tale che $C = (1-t)A + tB$. Si pone allora*

$$(A, B, C) := t$$

e si chiama rapporto semplice di A, B, C.

Si verifica immediatamente la definizione equivalente

$$(B - A) \cdot (A, B, C) = (C - A)$$

Infatti $C - A = (1-t)A + tB - A = t(B - A)$.

Quindi in coordinate (con ovvie notazioni)

$$(A, B, C) = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} \qquad \text{se } x_B \neq x_A$$

$$(A, B, C) = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} \qquad \text{se } y_B \neq y_A$$

Se $A = B \neq C$ si pone per convenzione $(A, B, C) := \infty$ mentre (A, B, C) non é definito se $A = B = C$.

Teorema (caratterizzazione delle affinitá con i rapporti semplici). *Una applicazione biunivoca $f\colon \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ é una affinitá se e solo se valgono le due condizioni seguenti:*
i) $\forall A, B, C$ allineati, anche $f(A), f(B), f(C)$ sono allineati.
ii) $\forall A, B, C$ allineati con $A \neq B$ vale $(A, B, C) = (f(A), f(B), f(C))$.

Il teorema precedente afferma che una applicazione biunivoca é una affinitá se e solo se porta rette in rette e conserva il rapporto semplice. Si puó provare (ma non é facile) che sul campo reale la condizione di conservare il rapporto semplice (cioé la ii)) é superflua.

Dimostrazione Se f è una affinitá allora vale i) perché abbiamo giá visto che l'immagine di una retta é una retta.

Vale anche ii) perché posto $t = (A, B, C)$ vale $C = (1-t)A + tB$ da cui $f(C) = (1-t)f(A) + tf(B)$ che implica $t = (f(A), f(B), f(C))$. Viceversa se valgono i), ii) procedendo alla stesso modo abbiamo che $f((1-t)A + tB) = (1-t)f(A) + tf(B)$ e per il lemma precedente f é una affinitá.

Esercizio. *Sia Ox un sistema di coordinate su una retta. Per abuso di notazione si indicano spesso i punti della retta con lo stesso valore della loro ascissa.*
i) Provare che l'affinitá f che porta il segmento $[0, 1]$ nel segmento $[a, b]$ si esprime in coordinate come $f(x) = x(b-a) + a$, con inversa $g(x) = \frac{x-a}{b-a}$.
ii) Calcolare $x \in [a, b]$ come combinazione affine di a e b. Risposta: $x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b = (1 - g(x))a + g(x)b$.

Esercizio. *Sia M il punto medio tra P e Q. Provare che*

$$(P, Q, M) = \frac{1}{2}, \quad (M, P, Q) = -1, \quad (P, M, Q) = 2$$

Esercizio. *Sia Q il punto di intersezione (se esiste) della retta $ax+by-c=0$ con la retta per $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$. Provare che*

$$(Q,P_1,P_2)=\frac{ax_2+by_2-c}{ax_1+by_1-c}$$

I teoremi di Ceva e Menelao

Siano P_0, P_1, P_2 tre punti non allineati e sia $P=\sum_{i=0}^{2} a_iP_i$ una loro combinazione affine.

Lemma. *Se $P\neq P_i$ per $i=0,1,2$ allora*

i) Se la retta per P e P_2 non é parallela a quella per P_0 e P_1 (cioé $a_2\neq 1$) allora la incontra in $\frac{a_0}{1-a_2}P_0+\frac{a_1}{1-a_2}P_1$

ii) Se la retta per P e P_0 non é parallela a quella per P_1 e P_2 (cioé $a_0\neq 1$) allora la incontra in $\frac{a_1}{1-a_0}P_1+\frac{a_2}{1-a_0}P_2$

iii) Se la retta per P e P_1 non é parallela a quella per P_2 e P_0 (cioé $a_1\neq 1$) allora la incontra in $\frac{a_2}{1-a_1}P_2+\frac{a_0}{1-a_1}P_0$

Dimostrazione Per provare i) é sufficiente trovare $t\in\mathbf{R}$ tale che il coefficiente di P_2 nella combinazione affine

$$(1-t)P+tP_2=(1-t)\sum_{i=0}^{2}a_iP_i+tP_2$$

sia nullo. Si ricava $(1-t)a_2+t=0$ da cui $t=\frac{a_2}{a_2-1}$ e risostituendo si ottiene i). ii) e iii) seguono con uno scambio di indici.

Il teorema di Ceva che segue ha importanti applicazioni nella grafica al computer (si veda [G. Farin, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design]).

Teorema di Ceva (XVII secolo). *Dato un triangolo di vertici P_0, P_1, P_2 e dati tre punti Q_0, Q_1, Q_2 rispettivamente sulle rette P_1P_2, P_0P_2,P_0P_1 allora le rette P_iQ_i per $i=0,1,2$ si incontrano se e solo se*

$$(Q_2,P_1,P_0)(Q_1,P_0,P_2)(Q_0,P_2,P_1)=-1$$

Dimostrazione Se le tre rette si incontrano in $P=\sum_{i=0}^{2}a_iP_i$ allora dal lemma $Q_2=\frac{a_0}{1-a_2}P_0+\frac{a_1}{1-a_2}P_1$ Si ricava facilmente

$$(Q_2,P_1,P_0)=-\frac{a_1}{a_0}$$

Analogamente

$$(Q_1,P_0,P_2)=-\frac{a_0}{a_2}$$

$$(Q_0,P_2,P_1)=-\frac{a_2}{a_1}$$

e quindi la tesi. Viceversa sia $P=\sum_{i=0}^{2}a_iP_i$ il punto di incontro di Q_2P_2 e Q_1P_1. Ragionando come sopra si ottiene che Q_0 é allineato con P e P_0 se e solo se $Q_0=\frac{a_1}{1-a_0}P_1+\frac{a_2}{1-a_0}P_2$ e quindi se e solo se $(Q_0,P_2,P_1)=-\frac{a_2}{a_1}$, da cui si conclude facilmente.

Osservazione. *Il teorema di Ceva generalizza quello sulla intersezione delle mediane di un triangolo, dove i tre rapporti semplici dell'enunciato valgono tutti* -1.

Esercizio. *Provare il teorema "duale" di Menelao (I secolo d.C.):*

Dato un triangolo di vertici P_0, P_1, P_2 e dati tre punti Q_0, Q_1, Q_2 rispettivamente sulle rette P_1P_2, P_0P_2,P_0P_1 allora i tre punti sono allineati se e solo se

$$(Q_2, P_1, P_0)(Q_1, P_0, P_2)(Q_0, P_2, P_1) = 1$$

Sistemi di coordinate nello spazio e rette nello spazio

Fissiamo un punto $O \in \mathbf{A}^3$che chiameremo origine.

Fissiamo tre vettori indipendenti $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$ che formano una base per lo spazio vettoriale V che agisce su $\mathbf{A}^3$.

La scelta di O, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ individua un sistema di coordinate (affini) in $\mathbf{A}^3$. Si dice che il punto $P = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ha coordinate (x, y, z). Il punto P di coordinate (x, y, z) nel precedente sistema $Oxyz$ viene spesso indicato con la notazione $P = (x, y, z)$ quando non ci sono ambiguitá sul sistema di coordinate scelto. In particolare $O = (0, 0, 0)$. Scrivendo le coordinate dei vettori nella stessa base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\ , \mathbf{k}\}$ segue la formula importante:

$$(x, y, z) + (x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k}) = (x + x_v, y + y_v, z + z_v)$$

Consideriamo fissato un sistema di coordinate $Oxyz$. Per $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_3)$ distinti passa la retta che ha vettore direttore $(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ ed ha quindi *equazione parametrica*

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

per $t \in \mathbf{R}$

Le tre rette passanti per O che hanno per vettori direttori $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$ vengono chiamate assi delle coordinate.

Il segmento che unisce (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) é parametrizzato dalle equazioni precedenti per $0 \leq t \leq 1$.

Il punto medio tra P_1 e P_2 si ottiene per $t = \frac{1}{2}$ ed ha quindi coordinate $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$. M si dice anche il baricentro di P_1 e P_2.

Nello spazio la condizione di parallelismo di due rette con vettori direttori (l, m, n) e (l', m', n') diventa:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1$$

La condizione di allineamento di 3 punti distinti $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2, 3$ é

$$\text{rango} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 1$$

Osservazione. *Le equazioni in tre dimensioni per i morfismi affini e per i cambiamenti in coordinate sono analoghe a quelle sviluppate in due dimensioni e sono lasciate per esercizio al lettore.*

Esercizi.

i) Parametrizzare la retta per $P = (2, \sqrt{5}, 4)$ con vettore direttore $(1, 1, -2)$. Questa retta passa per l'origine? E per il punto $(1, 1, 1)$?

ii) Parametrizzare la retta per l'origine passante per il punto medio del segmento che unisce $(2, 4, 6)$ e $(5, -7, -1)$.

iii) Scrivere la condizione di allineamento di (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) con l'origine.

Piani nello spazio

Un piano é una sottospazio affine di dimensione 2.

Per tre punti non allineati P_i $i = 1, 2, 3$ passa un unico piano la cui direzione é il sottospazio generato da $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$.

Le equazioni parametriche di questo piano sono

$$\begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) \end{cases}$$

Le equazioni precedenti possono essere viste come un sistema lineare con incognite s, t. In questo caso la condizione di compatibilitá del sistema é data (per il teorema di Rouché-Capelli) da

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

L'equazione precedente é l'equazione cartesiana del piano, che viene usualmente scritta nella forma (sviluppando lungo la prima colonna):

$$ax + by + cz = d$$

dove

$$a = \det \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \quad b = \det \begin{bmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$c = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad d = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

Viceversa ogni equazione della forma $ax + by + cz = d$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ definisce un piano.

I tre piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ contengono a due a due gli assi delle coordinate e si dicono piani coordinati.

La condizione di complanaritá di 4 punti $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \dots, 4$ é quindi

$$\det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

In particolare la condizione che avevamo giá visto di allineamento di tre punti $P_i = (x_i, y_i)$ nel piano data da

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

si interpreta adesso come la complanaritá dei tre punti nello spazio $Q_{i+1} = (x_i, y_i, 1)$ con l'origine Q_1

Esercizio. *Provare che 4 punti $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \ldots, 4$ sono complanari se e solo se*

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Due piani $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$ sono paralleli se e solo se

$$\text{rango} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 1$$

In particolare i piani della forma $ax + by + cz = \lambda$ descrivono al variare di λ un fascio di piani paralleli.

Se il rango precedente é due, i due piani si incontrano nella retta

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Le equazioni precedenti si dicono equazioni cartesiane della retta nello spazio. Un vettore direttore della retta scritta in questa forma é dato da (l, m, n) dove

$$l = \det \begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} \quad m = \det \begin{pmatrix} c & a \\ c' & a' \end{pmatrix} \quad n = \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

(per dimostrarlo basta osservare che ponendo $d = d' = 0$ si ottiene una retta parallela che ha quindi la stessa direzione. Si arriva allora ad un sistema omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite,...)

Al variare di $t \in \mathbf{R}$ l'equazione

$$(ax + by + cz - d) + t(a'x + b'y + c'z - d') = 0 \qquad (F)$$

descrive il fascio dei piani che contengono la retta precedente. Precisamente ogni piano che contiene la retta ha equazione della forma (F) con l'eccezione del piano $a'x+b'y+c'z = d'$. Si dice che quest'ultimo piano appartiene al fascio per $t = \infty$.

I fasci di piani sono utili per risolvere problemi del tipo seguente:

Esercizio. *Sia r la retta per $P = (2,1,1)$ con vettore direttore $(2,-1,7)$. Si trovi il piano passante per r e per il punto $Q = (\frac{1}{3}, 0, -1)$.*

Suggerimento: Equazioni parametriche per r sono $x = 2+2t$, $y = 1-t$, $z = 1+7t$. Sostituendo $t = 1-y$ nelle altre due equazioni si ricavano le equazioni cartesiane $x+2y = 4$ e $7y+z = 8$. Basta allora trovare il valore di $s \in \mathbf{R}$ tale che Q appartiene al piano $(x+2y-4)+s(7y+z-8) = 0, \ldots$

Definizione. *Si dice che una retta ed un piano nello spazio sono paralleli se non si incontrano oppure se la retta é contenuta nel piano. Equivalentemente la direzione della retta deve essere contenuta nella direzione del piano.*

Quando una retta ed un piano sono dati in equazioni parametriche, si hanno immediatamente basi per le loro direzioni ed é facile verificare se sono paralleli.

Esempio. *Verificare se la retta ed il piano seguenti sono paralleli:*

$$\begin{cases} x = 2+4s \\ y = -1 \\ z = 5+\sqrt{7}s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3+5t-7u \\ y = 19-\frac{11}{3}u \\ z = \frac{13}{3}t \end{cases}$$

Occorre verificare se

$$(4,0,\sqrt{7}) \in \ Span\ \{(5,0,\frac{13}{3}),(-7,-\frac{11}{3},0)\}$$

Si verifica facilmente (con un conveniente sistema lineare) che questa condizione non é verificata e quindi la retta ed il piano non sono paralleli.

Nel caso in cui retta e piano sono date in equazioni cartesiane, la condizione di parallelismo si verifica con il seguente:

Esercizio. *Provare che la retta*

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z = d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z = d_2 \end{cases}$$

ed il piano

$$a_3x+b_3y+c_3z = d_3$$

sono paralleli se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 0$$

Esercizio. *Provare che il piano $ax+by+cz = d$ é parallelo ad una retta con vettore direttore (l,m,n) se e solo se $al+bm+cn = 0$.*

Definizione. *Due rette si dicono complanari se esiste un piano che le contiene entrambe, altrimenti si dicono sghembe.*

Due rette sono complanari se e solo se sono incidenti o sono parallele.

Lemma. *Due rette in forma parametrica*

$$\begin{cases} x = x_1 + tl \\ y = y_1 + tm \\ z = z_1 + tn \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1' + ul' \\ y = y_1' + um' \\ z = z_1' + un' \end{cases}$$

sono complanari se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} l & l' & x_1 - x_1' \\ m & m' & y_1 - y_1' \\ n & n' & z_1 - z_1' \end{bmatrix} = 0$$

Dimostrazione La condizione equivale al fatto che la matrice completa del seguente sistema nelle incognite t, u ha rango ≤ 2.

$$\begin{cases} x_1 + tl = x_1' + ul' \\ y_1 + tm = y_1' + um' \\ z_1 + tn = z_1' + un' \end{cases}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli se la matrice incompleta ha rango 2 le rette sono incidenti, mentre se ha rango 1 sappiamo che le rette sono parallele.

Esercizio. *Provare che le rette*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases}$$

sono complanari se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} = 0$$

Esercizi.

1) Scrivere l'equazione del piano per i 3 punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

2) Scrivere l'equazione del piano parallelo a $z + y = 0$ passante per $(1, 1, 1)$.

3) Scrivere l'equazione del piano parallelo all'asse delle ascisse e passante per i punti $(0, \sqrt{51}, 0)$, $(0, 1, 1)$.

4) Scrivere le equazioni di tutti i piani paralleli alle rette

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = \sqrt{79} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 132 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Ne esiste uno passante per l'origine?

5) Scrivere gli 8 vertici del parallelepipedo che ha per spigoli OP_i per $i = 1, 2, 3$. Scrivere le equazioni delle 4 diagonali.

6) Provare che date due quaterne ordinate di punti non complanari, che chiamiamo $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ esiste una unica affinitá $f\colon \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, \ldots, 4$.

7) Scrivere le equazioni di tutte le affinitá che portano il piano $\{z = 0\}$ in se stesso.

8) Scrivere le equazioni della retta passante per l'origine e parallela ai piani $z - y = 5$, $y + 7z = 12$.

9) Scrivere le equazioni del piano contenente l'asse delle ordinate e passante per $(9, 9, 9)$.

10) Scrivere le equazioni del piano contenente la retta

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 132 + t \\ z = -t \end{cases}$$

e passante per il punto $(-1, -2, -3)$.

11) Verificare se la retta

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = \sqrt{79} \end{cases}$$

é sghemba con l'asse delle ascisse.

12) Calcolare il baricentro del tetraedro di vertici l'origine ed i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Calcolare l'intersezione della retta $\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$ con il tetraedro.

13) Scrivere le equazioni della retta per $(6, 3, 1)$ incidente alla retta

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

ed all'asse delle ascisse.

14) Scrivere equazioni cartesiane della retta per i punti $(3, 4, -2)$ e $(\frac{5}{2}, -1, 0)$.

15) Scrivere equazioni cartesiane e parametriche della retta passante per $(0, 7, 1)$ e parallela alla retta

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - 7y + z = 0 \end{cases}$$

16) Qual é la condizione geometrica che corrisponde a

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

17) Date le rette

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = -2t \end{cases}$$

verificare che r, s sono sghembe e scrivere l'equazione del piano passante per r parallelo a s.

18) Scrivere l'equazione della retta per $P = (1, 2, 3)$ parallela ai due piani $x-y-z = 78$, $2x - 4y = 51$.

19) Sia π il piano $x - y - z = 11$ e consideriamo il suo punto $P = (12, 0, 1)$. Scrivere l'equazione della retta r passante per P e contenuta in π parallela al piano $y - z = 0$

Orientazione

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.

Definizione. *Due basi in V si dicono concordi se il determinante della matrice di cambiamento di base é > 0, altrimenti si dicono discordi.*

Sia G l'insieme di tutte le basi di V. La relazione in G:

$$B \sim B' \text{ se e solo se } B, B' \text{ sono concordi}$$

é una relazione di equivalenza che divide G in due classi di equivalenza.

Definizione. *Una orientazione in V é la scelta di una classe di equivalenza di basi concordi. V si dice allora orientato.*

Una base di V orientato si dice orientata (concordemente) se appartiene alla classe di equivalenza scelta.

Sia ora V orientato e $\mathbf{A}^n$ uno spazio affine su V. Un sistema di riferimento orientato per $\mathbf{A}^n$ consiste nella scelta di $O \in \mathbf{A}^n$ e di una base di V orientata concordemente. Diremo che anche $\mathbf{A}^n$ é orientato. Dunque una orientazione su V induce una orientazione su $\mathbf{A}^n$. Deve essere chiaro che ogni volta che si sceglie un sistema di riferimento, si sta implicitamente scegliendo anche una orientazione.

Esercizio. *Provare che $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ e $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{k}\}$ sono discordi.*

Un morfismo affine $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ conserva l'orientazione se $\det\ Df > 0$.

Spazi euclidei

Definizione. *Uno* **spazio (affine) euclideo** *é uno spazio affine su uno spazio vettoriale euclideo V, cioé su uno spazio vettoriale V dotato di una forma bilineare simmetrica $\langle , \rangle$ definita positiva.*

Uno spazio euclideo di dimensione 2 si dice un piano euclideo.

Esempio. *Lo spazio vettoriale* $\mathbf{R}^n$ *con l'usuale prodotto scalare é uno spazio euclideo.*

Un riferimento Oxy in un piano euclideo dove $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ è una base ortonormale si dice un riferimento ortonormale (o sistema di coordinate ortonormale, talvolta chiamato semplicemente "ortogonale").

Analogamente un riferimento $Oxyz$ in uno spazio euclideo dove $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è una base ortonormale si dice un riferimento ortonormale .

Tutti i sistemi di riferimento che consideriamo negli spazi euclidei saranno supposti ortonormali. Un tale riferimento esiste sempre per l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Se $P, Q \in \mathbf{A}^n$ sono punti di uno spazio affine é ben definita la loro distanza $d(P,Q) := |P - Q| = \sqrt{\langle P - Q, P - Q\rangle}$. Pertanto in un sistema di coordinate (ortonormale), se $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, 2$ sono due punti del piano, la loro distanza é

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

mentre se $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2$ sono due punti dello spazio, la loro distanza vale

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

La circonferenza di centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raggio r é il luogo dei punti che hanno distanza r da P_0 ed ha quindi equazione

$$\{(x,y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

In $\mathbf{A}^3$ tale luogo prende il nome di superficie sferica ed ha equazione

$$\{(x,y,z)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$$

Il cerchio di raggio r é definito dai punti

$$\{(x,y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$$

ed analogamente abbiamo la sfera in $\mathbf{A}^3$.

Una *isometria* di uno spazio euclideo é una affinitá f tale che $|P - Q| = |f(P) - f(Q)|$. Si puó provare (vedi [Abate] teor. 13C.2, oppure [Sernesi] teor. 20.8 o anche [Artin] prop. 5.16) che la richiesta di essere una affinitá é superflua. É immediato verificare che ogni traslazione é una isometria. Inoltre $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ é una isometria se e solo se $Df\colon V \to V$ conserva $\langle , \rangle$, cioé $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle Df(\mathbf{v}), Df(\mathbf{w})\rangle$.

Proposizione (coordinate di una isometria). *Una affinitá* $: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *é una isometria se e solo se la matrice di* Df *rispetto ad una base ortonormale é una matrice ortogonale.*

Dimostrazione vedi [Abate] prop. 13C.1

L'angolo θ tra due rette incidenti orientate (nel piano o nello spazio) di vettori direttori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ é dato da

$$\cos\theta := \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle}{|v_1| \cdot |v_2|}$$

che ha unica soluzione per $0 \leq \theta < \pi$.

In uno spazio (risp. piano) euclideo é ben definita una forma di volume che permette di definire il volume (risp. l'area) di una vasta classe di sottoinsiemi, detti misurabili, che includono tutti i poliedri (risp. i poligoni). Rimandiamo al corso di Analisi 2 per le definizioni generali di area e volume. Si ottiene la seguente espressione per l'area di un triangolo T di vertici $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, 2, 3$:

$$area(T) = \left| \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \right|$$

Il valore assoluto é necessario perché il determinante cambia segno se si scambiano le colonne, che equivale a scambiare P_2 con P_3. Per giustificare questa espressione osserviamo innanzitutto che é invariante per isometrie. Infatti, identificando i vettori $P_i - P_1$ con i vettori colonna delle loro coordinate e Df con la matrice 2×2 associata abbiamo che

$$\begin{aligned}[\, f(P_2) - f(P_1) \quad f(P_3) - f(P_1) \,] &= [\, Df(P_2 - P_1) \quad Df(P_3 - P_1) \,] = \\ &= Df \cdot [\, P_2 - P_1 \quad P_3 - P_1 \,]\end{aligned}$$

e quindi considerando i determinanti:

$$area(f(T)) = |\det\ Df| \cdot area(T)$$

Siccome Df é una matrice ortogonale segue $|\det\ Df| = 1$ e quindi l'espressione precedente per l'area di T é invariante per isometrie, oppure equivalentemente é invariante per cambiamenti di coordinate ortonormali. Scegliamo quindi delle coordinate tali che $P_1 = (0, 0)$ é l'origine e $P_2 = (x_2, 0)$ é sull'asse positivo delle ascisse. Si ottiene un triangolo di base x_2 e di altezza $|y_3|$. In questo sistema di coordinate

$$[\, P_2 - P_1 \quad P_3 - P_1 \,] = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix} = x_2 y_3$$

come volevamo.

L'espressione

$$\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

(senza valore assoluto!) prende il nome di area orientata del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3 (in quest'ordine!).

Puó servire a definire una orientazione sul verso di percorrenza della poligonale $P_1 P_2 P_3$ che si dirá (nell'ordine precedente) concorde con l'orientazione del sistema di riferimento se l'area orientata corrispondente é positiva.

Nelle notazioni piú comuni il verso di percorrenza concorde con l'orientazione risulta quello "antiorario".

Il concetto di area orientata é utile quando si vuole calcolare l'area di un poligono di vertici P_i per $i = 1, \ldots, n$. Poniamo $P_{n+1} = P_1$.

L'area del poligono risulta

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \det \begin{bmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{bmatrix} \right|$$

che corrisponde alla somma delle aree orientate dei triangoli di vertici OP_iP_{i+1} (si veda l'eserc. 4 seguente). Il valore assoluto non é necessario se sappiamo giá che il verso di percorrenza del bordo del poligono é concorde con l'orientazione.

Esercizi.

1) Calcolare l'area del triangolo che ha per vertici i tre punti (i, i^2) per $i = 1, 2, 3$.
2) Calcolare l'area del quadrilatero convesso che ha per vertici i quattro punti (i, i^2) per $i = 0, 1, 2, 3$.
3) Calcolare l'angolo tra le due rette $x - y = 5$ e $2x + y = 16$ (naturalmente il risultato puó essere solo approssimato, con l'uso di una calcolatrice).
4) Sia $[ABC]$ l'area orientata del triangolo di vertici A, B, C (in quest'ordine). Siano $P_1, \ldots, P_n$ i vertici di un poligono. Provare che l'espressione

$$\sum_{i=1}^{n} [MP_iP_{i+1}]$$

non dipende da M ed é uguale, a meno del segno, al doppio dell'area del poligono. In particolare prendendo M uguale ad uno dei vertici nella sommatoria due addendi risultano nulli ed il poligono risulta scomposto in $(n - 2)$ triangoli.
5) Provare la formula di Gauss per l'area di un poligono di vertici $P_1, \ldots, P_n$ (dove $P_0 = P_n$ e $P_{n+1} = P_1$):

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i (x_{i-1} - x_{i+1}) \right|$$

6)* Provare che l'area del triangolo limitato dalle tre rette $a_i x + b_i y = c_i$ per $i = 1, 2, 3$ é data dal valore assoluto di

$$\frac{1}{2C_1C_2C_3} \left(\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right)^2$$

dove C_1, C_2, C_3 sono i determinanti dei complementi algebrici di c_1, c_2, c_3.
7) Provare che gli angoli sono invarianti per isometrie, vale a dire se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono vettori di V e f é una isometria allora l'angolo tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ é uguale a quello tra $Df(\mathbf{v}_1)$ e $Df(\mathbf{v}_2)$. Una applicazione che conserva gli angoli si dice conforme. Verificare che l'affinitá espressa in coordinate da $x' = 2x, y' = 2y$ é conforme ma non é una isometria.
8) Provare che le aree dei poligoni sono invarianti per isometrie, vale a dire se K é un poligono e f é una isometria vale $Area(K) = Area(f(K))$. Trovare una affinitá che conserva le aree dei poligoni ma non é una isometria.

9) Provare che il tetraedro di vertici $P_i = (x_i, y_i)$ per $i = 1, \ldots, 4$ ha volume dato da

$$\left| \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \right|$$

Suggerimento: Provare che la formula precedente é invariante per isometrie e quindi ricondursi ad un sistema di riferimento opportuno.

10) Dato il tetraedro di vertici $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 0)$, $(-2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ calcolare le lunghezze dei lati, le aree delle facce ed il volume.

Vettori normali

Un vettore si dice normale ad una retta di direzione L se appartiene a $L^{\perp}$. In particolare (a, b) é un vettore normale alla retta di equazione $ax + by = c$, perché é ortogonale al vettore direttore $(-b, a)$. Tra tutti i vettori normali si distinguono i due versori normali di lunghezza 1, che nel caso precedente sono $\pm N$ dove $N := (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$.

Analogamente il piano di equazione $ax+by+cz = d$ ha vettore normale (a, b, c). Infatti il piano per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ortogonale a $N = (a, b, c)$ ha equazione $\langle N, P - P_0\rangle = 0$ cioé

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Il prodotto vettoriale

In uno spazio vettoriale euclideo orientato V di dimensione 3 vogliamo definire il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \in V$ di due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. In un sistema di coordinate ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, dati $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, definiamo

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} := \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Il determinante va inteso simbolicamente, sviluppando lungo la prima riga, cioé

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{i} \det \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \det \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Lemma. *$\wedge$ non dipende dalla base orientata scelta.*

Dimostrazione Sia $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}P = B'P$ un cambiamento di base con $P \in SO(3)$. Si verifica subito che le coordinate v_i', w_i' di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispetto a B' soddisfano le relazioni:

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1', v_2', v_3'\}(P^t)^{-1} = \{v_1', v_2', v_3'\}P$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{w_1', w_2', w_3'\}(P^t)^{-1} = \{w_1', w_2', w_3'\}P$$

e quindi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix} P$$

Prendendo i determinanti si ottiene la tesi.

Proposizione (proprietá di $\wedge$). *$\forall$ $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{u} \in V$ valgono le proprietá:*

i) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$

ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$

iii) $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$

iv) $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$

Le proprietá i), ii), iii) esprimono che $\wedge$ é una applicazione bilineare antisimmetrica.
Dimostrazione Sono verifiche immediate dalla definizione.

Proposizione. $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *é ortogonale a* $\mathbf{v}$ *ed a* $\mathbf{w}$.

Dimostrazione

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle = \det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

ed analogamente

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle = 0$$

Proposizione. *Se θ é l'angolo tra* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *segue*

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \sin\theta$$

Dimostrazione Possiamo supporre $\mathbf{v} = c\mathbf{i}$. Allora

$$|c\mathbf{i} \wedge \mathbf{w}|^2 = c^2 \, |w_2\mathbf{k} - w_3\mathbf{j}|^2 = c^2 \left(w_2^2 + w_3^2\right)$$

D'altronde

$$|c\mathbf{i}|^2 \cdot |\mathbf{w}|^2 \cdot \sin^2\theta = c^2|\mathbf{w}|^2(1 - \cos^2\theta) = c^2|\mathbf{w}|^2 - c^2|\mathbf{w}|^2 \frac{\langle \mathbf{i}, \mathbf{w} \rangle^2}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} =$$

$$= c^2|\mathbf{w}|^2 - c^2 w_1^2 = c^2 \left(w_2^2 + w_3^2\right)$$

come volevamo

Esercizi.

i) Calcolare $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \wedge (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

ii) Provare che $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$ *corrisponde all'area del parallelogramma di lati* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

iii) In $\mathbf{R}^3$ *dotato del prodotto scalare $\cdot$, il prodotto* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ *si dice il prodotto misto tra* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$. *Provare che*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = \det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

Dedurre che il prodotto misto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ *corrisponde al volume (orientato) del parallelepipedo di spigoli* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ *ed é nullo se e solo se* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ *sono dipendenti.*

iv) Sia π un piano con $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *base del sottospazio direzione. Provare che* $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *é un vettore normale al piano e che* $\frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|}$ *é un versore normale al piano.*

v) *Scrivere un vettore normale al piano che ha direzione Span* $((2,1,4),(1,0,1))$ *e passante per* $(8,0,0)$. *Scrivere l'equazione di tale piano.*

vi) *Provare che se* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *sono indipendenti allora* $\{\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\}$ *é una base orientata concordemente.*

vii) *Provare che* $\wedge$ *é univocamente determinato dalle tre proprietá: a)* $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ *é ortogonale a* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*; b)* $|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}| = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cdot\sin\theta$ *dove* θ *é l'angolo tra* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*; c)* $\{\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\}$ *é orientata concordemente.*

Proiezione ortogonale su un sottospazio affine

Sia $B\subset\mathbf{A}^n$ un sottospazio di uno spazio euclideo di direzione $W\subset V$ e sia P_0 un suo punto, per cui $B=P_0+W$. Sia $\pi_W\colon V\to W$ la proiezione ortogonale (rispetto a $\langle,\rangle$ ([Abate] cap.12]). La proiezione ortogonale $p_B\colon\mathbf{A}^n\to B$ é definita da

$$p_B(P):=P_0+\pi_W(P-P_0)$$

p_B é ben definita (non dipende da P_0). Infatti se P_1 é un altro punto dobbiamo verificare che $P_0+\pi_W(P-P_0)=P_1+\pi_W(P-P_1)$ cioé che $P_0-P_1=\pi_W((P-P_1)-(P-P_0))=\pi_W(P_0-P_1)$. Questa uguaglianza é evidente dalla definizione di π_W perché $P_0-P_1\in W$.

Esempio. *Calcoliamo la proiezione ortogonale di* $P=(2,-1,5)$ *sulla retta* r *per* $P_0=(0,0,1)$ *con vettore direttore* $\mathbf{v}=(2,6,4)$.

Abbiamo che $\pi_{\mathbf{v}}(P-P_0)=\frac{\langle P-P_0,\mathbf{v}\rangle\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}=\frac{14}{56}(2,6,4)=(\frac{1}{4},\frac{3}{2},1)$ e quindi $pi_r(P)=(\frac{1}{4},\frac{3}{2},2)$.

Esercizio. *Calcolare le proiezioni ortogonali di* $P=(x,y,z)$ *sui tre assi coordinati.*

Proposizione. *Sia* $P\in\mathbf{A}^n$. *Allora*

$$|P-p_B(P)|\le|P-Q|\quad\forall Q\in B$$

Dimostrazione La tesi equivale a

$$|P-P_0-\pi_W(P-P_0)|\le|P-P_0+\mathbf{w}|\qquad\forall\mathbf{w}\in W$$

Infatti

$$\mathbf{w}=-\pi_W(P-P_0)+\mathbf{w}'$$

per qualche $\mathbf{w}'\in W$ e vale

$$|P-P_0+\mathbf{w}|^2=\left|P-P_0-\pi_W(P-P_0)+\mathbf{w}'\right|^2=$$

$$=\left|P-P_0-\pi_W(P-P_0)\right|^2+|\mathbf{w}'|^2+2\langle P-P_0-\pi_W(P-P_0),\mathbf{w}'\rangle=$$

$$\left|P-P_0-\pi_W(P-P_0)\right|^2+|\mathbf{w}'|^2\ge|P-P_0-\pi_W(P-P_0)|^2$$

La proposizione precedente esprime che la distanza minima di un punto P da un sottospazio si ottiene considerando la distanza di P dalla sua proiezione ortogonale e motiva la seguente

Definizione. *Sia $B \subset \mathbf{A}^n$ un sottospazio di uno spazio euclideo, e sia $P \in A^n$. La distanza di P da B é per definizione* $|P - p_B(P)|$.

Nel caso di una retta r nel piano di equazione cartesiana $ax + by = c$ la distanza di r da $P_0 = (x_0, y_0)$ é data da

$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dimostrazione Sia $L \subset V$ il sottospazio direzione di r. Una base ortonormale per $L^\perp$ é data da $N := (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$. Allora la distanza di r da P_0 é data da $|P_0 - p_r(P_0)| = |\langle P_0 - p_r(P_0), N\rangle|$. Sia $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto della retta. Allora

$$\langle P_0 - p_r(P_0), N\rangle = \langle P_0 - P_1, N\rangle + \langle P_1 - p_r(P_0), N\rangle$$

L'ultimo addendo é nullo perché $P_1 - p_r(P_0) \in L$. Quindi la distanza cercata é data da

$$|\langle P_0 - P_1, N\rangle| = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Nel caso di un piano π nello spazio di equazione cartesiana $ax+by+cz = d$ la distanza di π da $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é data da

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dimostrazione É analoga alla dimostrazione precedente.

Due rette si dicono ortogonali se sono ortogonali i loro vettori direttori. Una retta é ortogonale ad un piano se il suo vettore direttore é ortogonale alla direzione del piano. In particolare una retta con vettore direttore (l, m, n) é ortogonale al piano $ax + by + cz = d$ se

$$rango \begin{bmatrix} l & m & n \\ a & b & c \end{bmatrix} = 1$$

L'angolo tra due piani é l'angolo tra i loro vettori normali. In particolare i piani $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$ sono ortogonali se e solo se

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

Esercizi.

1) Calcolare la distanza di $P = (3, 4)$ dalla retta $2x - y = 5$.
2) Calcolare la distanza di $P = (3, 4)$ dalla retta parallela a $x + y = 0$ passante per $Q = (0, 3)$.
3) Scrivere la retta ortogonale al piano $x - y + 5z = 6$ passante per $(3, -1, \sqrt{3})$.
4) Scrivere il piano ortogonale ai due piani $2x - y = 0$ e $x - y + 5z = 1$ passante per l'origine.

5) Scrivere il piano contenente la retta

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 7 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

ed ortogonale al piano $y = 0$.

6) Esiste un piano contenente la retta

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 7 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

ed ortogonale all'asse delle ascisse?

7) Calcolare la distanza di $P = (2, -1, 3)$ dal piano $x + y + z + 1 = 0$.

8) Provare che se un piano é ortogonale ad una r retta é ortogonale anche ad ogni piano che contiene r.

9) Calcolare la distanza di $P = (2, -1, 3)$ dal piano passante per $(0, 9, 8)$ ed ortogonale alla retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 5t \end{cases}$$

10) Una retta forma angoli uguali con i tre assi coordinati. Qual é il valore di quest'angolo?

11) Calcolare la proiezione ortogonale del punto $(1, 1, 1)$ sul piano $3x - 5y = 0$ e sulla retta $x = 1 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + 4t$.

12) Calcolare la proiezione ortogonale della retta $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + 4z = 11 \end{cases}$ sul piano $z = 0$

13) Se π_B é la proiezione ortogonale su un sottospazio B la simmetria rispetto a B é $2\pi_B - 1_{\mathbf{A}^n}$. Calcolare il simmetrico di $P = (2, 1, 5) \in \mathbf{A}^3$ rispetto al piano $x - y + 2z = 9$.

Distanza di un punto da una retta

Per calcolare la distanza di un punto P da una retta r un metodo é tagliare r con il piano ortogonale a r e passante per P, come é spiegato dal seguente

Esempio. *Calcolare la distanza di* $P = (1, 0, 1)$ *dalla retta* r

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 7 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

Prima soluzione La retta ha vettore direttore $\mathbf{v} = (-20, 15, 11)$. Il piano ortogonale a r passante per P é $-20(x - 1) + 15y + 11(z - 1) = 0$. Questo piano incontra r in $Q = (\frac{502}{373}, \frac{183}{373}, \frac{358}{373})$ e quindi la distanza cercata é

$$d(P, Q) = \sqrt{(\frac{502}{373} - 1)^2 + (\frac{183}{373})^2 + (\frac{358}{373} - 1)^2} = \frac{3\sqrt{5595}}{373}$$

Il punto $P_0 = (2, 0, \frac{3}{5}) \in r$. Q poteva essere calcolato anche come proiezione ortogonale di P su r dalla formula

$$Q = P_0 + \frac{\langle P - P_0, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$$

Seconda soluzione Nel fascio di piani $(2x - y + 5z - 7) + t(3x + 4y - 6)$ il passaggio per P impone $t = 0$ e quindi il piano $2x - y + 5z = 7$ contiene r e P. Imponendo che un piano del fascio sia ortogonale a quest'ultimo si ottiene $0 = (2+3t, -1+4t, 5) \cdot (2, -1, 5) = 2t+30$ che ha soluzione $t = -15$ che corrisponde al piano $-43x - 61y + 5z + 83 = 0$. Quindi é sufficiente calcolare la distanza di P da quest'ultimo piano che é

$$\frac{|-43 \cdot 1 - 61 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 83|}{\sqrt{43^2 + 61^2 + 5^2}} = \frac{3\sqrt{5595}}{373}$$

Distanza tra due rette

Esempio. *Calcolare la distanza tra le due rette*

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + 9t \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = -2 + 6s \\ y = -3 + 2s \\ z = 4s \end{cases}$$

*Soluzione*I due vettori direttori sono $(1, 1, 9)$ e $(6, 2, 4)$. Sia P il punto variabile sulla prima retta e P' sulla seconda. Imponendo al vettore $P - P'$ di essere ortogonale ai due vettori direttori si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} (4 + t - 6s) + (t - 2s) + 9(5 + 9t - 4s) = 0 \\ 6(4 + t - 6s) + 2(t - 2s) + 4(5 + 9t - 4s) = 0 \end{cases}$$

cha ha soluzione $s = \frac{187}{339}, t = -\frac{101}{339}$ che corrisponde ai punti $P = (\frac{577}{339}, -\frac{1118}{339}, \frac{262}{113})$ e $P' = (\frac{148}{113}, -\frac{643}{339}, \frac{748}{339})$

La distanza cercata corrisponde alla distanza tra P e P' che é $\frac{19\sqrt{678}}{339}$.

Esercizi.

1) Calcolare la distanza tra l'origine e la retta

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 17 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

2) Calcolare la distanza tra la retta

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 17 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

e l'asse delle ascisse.

3)* Sia T un triangolo nello spazio e α un piano. Sia p_α la proiezione ortogonale. Provare che

$$Area(T) \geq Area\ p_\alpha(T)$$

e vale l'$=$ se e solo se il piano di T é parallelo a α.

Vogliamo adesso rivisitare brevemente alcuni teoremi classici

Il Teorema di Pitagora.

i) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo di lati lunghi a e b misura $\sqrt{a^2+b^2}$.

ii) Le diagonali di un parallelepipedo retto (cioé con spigoli incidenti ortogonali tra loro) di spigoli lunghi a, b, c misurano $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Dimostrazione Sia il triangolo di vertici P_i per $i = 1, 2, 3$ retto in P_1. Allora $\langle P_2 - P_1, P_3 - P_1\rangle = 0$. Segue che

$$|P_3 - P_2|^2 = \langle P_3 - P_2, P_3 - P_2\rangle = \langle (P_3 - P_1) + (P_1 - P_2), (P_3 - P_1) + (P_1 - P_2)\rangle =$$

$$= \langle P_3 - P_1, P_3 - P_1\rangle + \langle P_1 - P_2, P_1 - P_2\rangle$$

Questo prova i), ii) é analoga.

Teorema (Talete). *Gli angoli alla circonferenza che sottendono un diametro sono retti.*
Dimostrazione Sia O il centro della circonferenza e B il vertice dell'angolo sul diametro AC. Allora $C - O = O - A$ da cui

$$\langle B - C, B - A\rangle = \langle (B - O) - (C - O), (B - O) + (C - O)\rangle = |B - O|^2 - |C - O|^2 = 0$$

Esercizi.

1) Condurre per il punto (x', y', z') il piano perpendicolare alla retta $x = lz+p, y = mz+q$ e determinare l'intersezione del piano con la retta.
2) Dati due piani paralleli $ax + by + cz = d$ e $ax + by + cz = d'$, calcolare la loro distanza
3) Date due rette parallele con vettore direttore (l, m, n) passanti rispettivamente per i punti (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), calcolare la loro distanza.