

•
•
•

Varietà di Grassmann in Geometria Algebrica

Scuola di Dottorato, Gargnano

10-14 Aprile 2007



Giorgio Ottaviani

ottavian@math.unifi.it

www.math.unifi.it/ottavian

Università di Firenze



Presentazione

Studiamo punti di vista diversi sulle
Grassmanniane

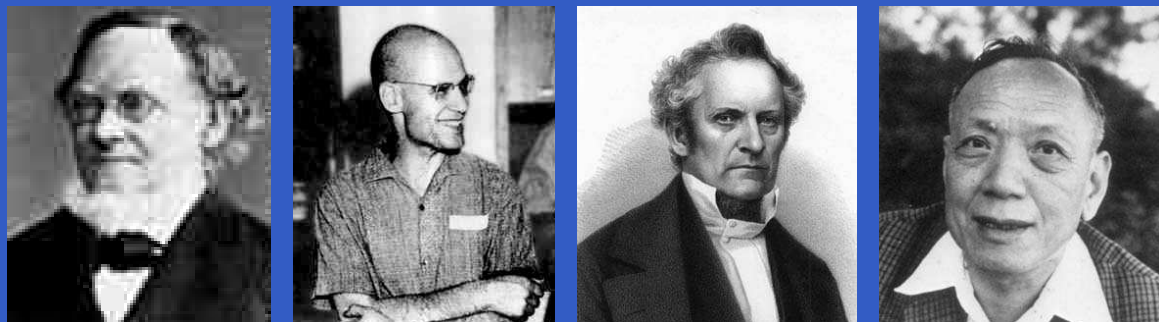
- 1) Tensori e Algebra commutativa
- 2) Topologia, Geometria enumerativa
- 3) Geometria Proiettiva
- 4) Azioni di gruppi, Teoria delle rappresentazioni
- 5) Fibrati vettoriali

Bibliografia

Bibliografia generale

- J. Harris, Algebraic Geometry, A first course, Springer
- Ph. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley cap. 1 §5,
- W. Fulton, Young tableaux, LMS
- G. Ottaviani, Rational Homogeneous varieties, Cortona course 1995, available on the web

Prima lezione



- Grassmanniane come varietà proiettive e come schemi di Hilbert.
- Le relazioni di Plücker.
- Il fibrato universale. Anello di coomologia e di Chow.
(struttura additiva)
- Il fibrato tangente.

L'algebra esterna, I

- Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n + 1$
- $\mathbf{P}(V)$ è lo spazio proiettivo delle rette di V .
- $\wedge V$ è l'algebra esterna su V , definita come il quoziente dell'algebra tensoriale $T(V)$ per l'ideale generato da $x \otimes y + y \otimes x$ per ogni $x, y \in V$
- $\wedge(V)$ ha una graduazione

$$\wedge(V) = \bigoplus_{k=0}^{n+1} \wedge^k V$$

L'algebra esterna, II

Equivalentemente $\wedge^k V$ è l'immagine dell'applicazione lineare

$$A: \otimes^k V \rightarrow \otimes^k V$$

definita da

$$A(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

L'algebra esterna, III

- Si pone

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k := A(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$$

- Quindi in particolare

$$v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$$

(anticommutatività)

Esempio: $\wedge \mathbf{C}^4$

- $\wedge \mathbf{C}^4$ ha i seguenti generatori
- $\wedge^0 \mathbf{C}^4 = \langle 1 \rangle$
- $\wedge^1 \mathbf{C}^4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$
- $\wedge^2 \mathbf{C}^4 = \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4 \rangle$
- $\wedge^3 \mathbf{C}^4 = \langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \rangle$
- $\wedge^4 \mathbf{C}^4 = \langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \rangle$

Dimensioni

- $\dim \wedge^k(V) = \binom{n+1}{k}$
- $\dim \wedge(V) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$

Applicazioni multilineari alternanti

- Lo spazio vettoriale $\wedge^k V$ è isomorfo allo spazio delle applicazioni multilineari alternanti

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ volte}} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$$

I tensori decomponibili, I

- Un tensore $\phi \in \wedge^{k+1}V$ si dice *decomponibile* se esistono v_0, \dots, v_k tali che

$$\phi = v_0 \wedge \dots \wedge v_k$$

- $v_0 \wedge \dots \wedge v_k = 0$ se e solo se v_0, \dots, v_k sono dipendenti.

I tensori decomponibili, II

- Lo stesso tensore decomponibile ha tante rappresentazioni. Vale

$$\langle v_0, \dots, v_k \rangle = \langle w_0, \dots, w_k \rangle$$

e hanno dimensione proiettiva k se e solo se

$$\langle v_0 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \langle w_0 \wedge \dots \wedge w_k \rangle$$

e sono non nulli

I tensori decomponibili, III

- I tensori decomponibili (non nulli) in $\wedge^{k+1}V$ corrispondono quindi ai sottospazi di dimensione $k + 1$ di V , ovvero ai sottospazi proiettivi di dimensione k di $\mathbb{P}(V)$.

La varietà di Grassmann

- L'insieme dei tensori decomponibili in $\wedge^{k+1}V$ è quindi un cono. La varietà proiettiva associata in $\mathbf{P}(\wedge^{k+1}V)$ si dice *varietà di Grassmann* $Gr(k, \mathbf{P}(V)) = Gr(k, n)$.
- Vediamola come varietà omogenea. Il gruppo $SL(V)$ agisce in modo naturale su $\mathbf{P}(\wedge^{k+1}V)$. Ricordiamo che $SL(V)$ è $(n+2)$ -transitivo su $\mathbf{P}(V)$. In particolare dati $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ e $\langle w_0, \dots, w_k \rangle$ esiste $g \in SL(V)$ tale che

$$\langle v_0, \dots, v_k \rangle = \langle g \cdot w_0, \dots, g \cdot w_k \rangle$$

$Gr(k, n)$ è algebrica

- Abbiamo quindi un'azione (algebrica)
 $SL(V) \times \mathbf{P}(\wedge^{k+1}V) \rightarrow \mathbf{P}(\wedge^{k+1}V)$
- La varietà di Grassmann $Gr(k, n)$ è l'orbita di un qualunque tensore decomponibile. Pertanto $Gr(k, n)$ è una varietà algebrica omogenea.

La dimensione

- Il sottogruppo di isotropia di $\langle e_0, \dots, e_k \rangle$ è formato da

*	*	*	*	*
*	*	*	*	*
0	0	*	*	*
0	0	*	*	*
0	0	*	*	*

- Quindi $\dim Gr(k, n) = (k + 1)(n - k)$

Dualità

- I sottospazi di dimensione $k + 1$ in V corrispondono ai sottospazi di dimensione $n - k$ in V^* .
- Quindi $Gr(k, n) = Gr(n - k - 1, n)$
- $Gr(0, n) = Gr(n - 1, n) = \mathbf{P}^n$

Coordinate di Plücker

- I minori della matrice $(k + 1) \times (n + 1)$ che definisce $m \in Gr(k, n)$ danno le sue coordinate pluckeriane p_{i_0, \dots, i_k} .
- Se il primo minore a sinistra è non nullo abbiamo il rappresentante

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{1,1} & \dots & x_{1,n-k} \\ 0 & 1 & & 0 & x_{2,1} & \dots & x_{2,n-k} \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & x_{k+1,1} & \dots & x_{k+1,n-k} \end{bmatrix}$$

- $x_{i,j}$ sono coord. locali su questo aperto di $Gr(k, n)$

L'atlante

- Gli aperti dove un minore p_I è non nullo ricoprono la Grassmanniana e definiscono un atlante.
- Questo atlante permette di definire la Grassmanniana in geometria differenziale.
- Segue che $Gr(k, n)$ è una *varietà razionale*.

Esercizio: equazioni di $Gr(k, n)$, I

- Per ogni $\omega \in \wedge^{k+1}V$ definiamo

$$\begin{aligned} A_\omega: V &\rightarrow \wedge^{k+2}V \\ v &\mapsto \omega \wedge v \end{aligned}$$

- Abbiamo che $v_i \in \text{Ker} A_{v_0 \wedge \dots \wedge v_k}$ per $i = 0, \dots, k$
- Siano v_0, \dots, v_k indipendenti. Vale in più

$$\langle v_0, \dots, v_k \rangle = \text{Ker} A_{v_0 \wedge \dots \wedge v_k}$$

Esercizio: equazioni di $Gr(k, n)$, II

- Perciò se $\omega \in CGr(k, n)$ allora

$$\text{rank} A_\omega = n + 1 - k$$

- Per provare il viceversa dobbiamo scambiare il ruolo tra v e ω
- Scambiando il ruolo otteniamo il complesso di Koszul.

Il complesso di Koszul (locale)

- $v \in V$ definisce un'applicazione

$$\begin{aligned} K_{v,k+1}: \wedge^{k+1} V &\longrightarrow \wedge^{k+2} V \\ \omega &\longmapsto \omega \wedge v \end{aligned}$$

- le applicazioni $K_{v,k}$ definiscono un complesso

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow V \xrightarrow{K_{v,1}} \wedge^2 V \xrightarrow{K_{v,2}} \dots \rightarrow \wedge^{n+1} V \rightarrow 0$$

detto complesso di Koszul

- Il complesso di Koszul è esatto.
- Per la dimostrazione, completa v a una base di V .

Esercizio: equazioni di $Gr(k, n)$, III

- Torniamo a

$$\begin{aligned} A_\omega: V &\rightarrow \wedge^{k+2}V \\ v &\mapsto \omega \wedge v \end{aligned}$$

- L'esattezza del complesso di Koszul ci assicura che $v \in \text{Ker} A_\omega$ se e solo se esiste $\omega' \in \wedge^k V$ tale che $\omega = v \wedge \omega'$.
- Iterando, $v_1, v_2 \in \text{Ker} A_\omega$ (indipendenti) se e solo se $\omega = v_1 \wedge \omega' = v_2 \wedge \omega''$, da cui, completando v_1, v_2 a una base:

- $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \omega'''$

Esercizio: equazioni di $Gr(k, n)$, IV

- Concludendo $\langle v_0, \dots, v_k \rangle \subseteq \text{Ker} A_\omega$ se e solo se $\omega = v_0 \wedge \dots \wedge v_k$ da cui segue che
- $\omega \in CGr(k, n)V \setminus \{0\}$ se e solo se

$$\text{rank} A_\omega = n + 1 - k$$

- e quindi $\omega \in CGr(k, n)$ se e solo se

$$\text{rank} A_\omega \leq n + 1 - k$$

- I minori $(n + 2 - k) \times (n + 2 - k)$ danno le equazioni di $Gr(k, n)$

Esempi: $Gr(1, 3)$

- Sia $\omega = \sum p_{ij} e_i \wedge e_j$. Qui $V = \mathbf{C}^4$ e la matrice di A_ω è

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{23} & -p_{13} & p_{12} \\ -p_{23} & 0 & p_{03} & -p_{02} \\ p_{13} & -p_{03} & 0 & p_{01} \\ -p_{12} & p_{02} & -p_{01} & 0 \end{bmatrix}$$

- La Grassmanniana è definita insiemisticamente dal determinante.

Qui $Gr(1, 3)$ è la quadrica

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

Grassmanniane di rette

- $0 \neq \omega = \sum p_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V$ è decomponibile se e solo se la matrice antisimmetrica $[p_{ij}]$ ha rango 2.

Le sue equazioni sono gli pfaffiani (principali) 4×4 (vedi esercizi), quindi sono quadriche, dette quadriche di Plücker.

$Gr(1, 4)$

- Il secondo esempio fondamentale è $Gr(1, 4)$, definita da 5 quadriche. $Gr(1, 4)$ ha codimensione tre, le relazioni tra le cinque quadriche sono lineari.
- $0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^5 \longrightarrow \mathcal{O}^5 \longrightarrow \mathcal{I}_G(2) \longrightarrow 0$ o in notazione computazionale

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & & & & & \\ & 0 & 5 & 5 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 \end{array}$$

- La dimostrazione segue da proprietà dello pfaffiano (vedi esercizi).

I cicli di Schubert, I

- Consideriamo l'aperto M_0 delle matrici $(k + 1) \times (n + 1)$ di rango massimo.
- Su M_0 agisce $GL(k + 1)$ per moltiplicazione sinistra (eliminazione di Gauss).
- Le orbite di questa azione sono infinite ma hanno un rappresentante descritto da una forma a scalini, e quindi da successioni di interi λ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{k+1}$.
- Conviene rappresentare λ con un diagramma di Young.

I cicli di Schubert, II

- **Definizione** La chiusura in $Gr(k, n)$ di ciascuna forma a scalini si dice un ciclo di Schubert X_λ .
- I cicli di Schubert hanno una interpretazione enumerativa. Precisamente:
- Sia $V_i = \langle e_0, \dots, e_i \rangle$. Identifichiamo $m \in M_0$ con il sottospazio corrispondente di \mathbb{C}^{n+1} . Vale che $m \in X_\lambda$ se e solo se $\dim m \cap V_{n-k+i-\lambda_i} \geq i$ per $1 \leq i \leq k+1$.
- $\lambda_i = 0 \iff$ condizione vuota

I cicli di Schubert, III

- $\text{codim} X_\lambda = |\lambda| = \sum \lambda_i$
- I cicli di Schubert definiscono delle classi in $H^*(Gr(k, n)) = A^*(Gr(k, n))$.
- **Teorema** I cicli di Schubert formano una base additiva (come spazio vettoriale) di $H^*(Gr(k, n))$ oppure di $A^*(Gr(k, n))$.

I cicli di Schubert generano, I

- L'approccio topologico ai cicli di Schubert è basato sui seguenti fatti:
- Ogni sottovarietà irriducibile $Z \subseteq X$ di codimensione d determina una classe di coomologia $[Z] \in H^{2d}(X, \mathbf{Z})$
- Se abbiamo una filtrazione

$$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_s = \emptyset$$

tale che $X_i \setminus X_{i+1}$ è unione disgiunta di celle affini $\mathbf{C}^{n_{i,j}}$ allora $[\overline{\mathbf{C}^{n_{i,j}}}]$ formano una base additiva di $H^{2d}(X, \mathbf{Z})$

I cicli di Schubert generano, II

- Le celle X_λ^0 sono definite da

$$\{m \mid \dim(m \cap V_k) = i \text{ per } n+i-\lambda_i \leq k \leq n+i-\lambda_{i+1}\}$$

$H^*(Gr(1, 3))$

- $X_0 = G, X_1 = \{l | l \cap l_0 \neq \emptyset\}$
- $X_2 = \{l | p_0 \in l\}, X_{11} = \{l | l \subset \pi\}$
- $X_{21} = \{l | p_0 \in l \subset \pi\}, X_{22} = [l_0]$

La famiglia universale

- Consideriamo la varietà di incidenza

$$W \subseteq Gr(k, n) \times \mathbf{P}^n$$

$$W = \{(m, x) \mid m \ni x\}$$

- La proiezione $W \longrightarrow Gr(k, n)$ definisce $\mathbf{P}(U)$ (quindi è piatta) ed è la famiglia universale.

Gr come schema di Hilbert, I

- Il polinomio di Hilbert di $m \simeq \mathbf{P}^k \subset \mathbf{P}^n$ vale $H_m(t) = \chi(\mathcal{O}_m(t)) = \binom{k+t}{k}$. Se $Y \subset \mathbf{P}^n$ è tale che $H_Y(t) = \binom{k+t}{k}$ allora $Y \simeq \mathbf{P}^k$.
- Sia $F \subset Z \times \mathbf{P}^n$ uno schema tale che la proiezione $F \xrightarrow{\pi} Z$ è piatta e $H_{\pi^{-1}(z)}(t) = \binom{k+t}{k} \quad \forall z \in Z$.
- Allora esiste unica $f: Z \rightarrow Gr(k, n)$ tale che

$$F = Z \times_{Gr(k, n)} W$$

Gr come schema di Hilbert, II

- Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & W \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{f} & Gr(k, n) \end{array}$$

è un prodotto fibrato.

- $Grass(k + 1, -)$ è un funtore dai fibrati su S negli schemi su S .

Il fibrato tangente, I

-

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \otimes \mathcal{O} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

dove U è il fibrato universale e Q è il fibrato quoziente.

- Il risultato fondamentale è

$$TG = \text{Hom}(U, Q)$$

- Si considera l'azione di $GL(V)$ su $Gr(k, n)$
Fissiamo $m \in Gr(k, n)$, abbiamo la derivata nell'identità

$$\text{End}(V) \rightarrow T_m Gr(k, n)$$

Il fibrato tangente, II

- $$T_m Gr(k, n) \simeq End(V) / \{g | g \cdot m \subseteq m\}$$

- $$End(V) / \{g | g \cdot m \subseteq m\} \simeq Hom(m, V/m)$$

Il fibrato tangente, III

- Un modo alternativo è pensare a $Gr(k, n)$ come schema di Hilbert. Allora $T_m Gr(k, n) \simeq H^0(N_{m, \mathbf{P}(V)})$

Il fibrato canonico

- Corollario

$$K_{Gr(k,n)} = \mathcal{O}(-n - 1)$$

- Analogamente si ricava $\xi_i = c_i(U^*)$

$$c_1(G) = (n + 1)\xi_1$$

$$c_2(G) = \left(\binom{n+1}{2} + k \right) \xi_1^2 + (n - 2k - 1)\xi_2$$

Campi vettoriali

- $H^0(U^*) = V^*$, $H^0(Q) = V$ inducono $End(V) = V^* \otimes V \rightarrow H^0(TG)$.
- Esplicitamente $A \in End(V)$ induce il campo vettoriale v_A che su m vale $m \longrightarrow V \xrightarrow{A} V \rightarrow V/m$
- $v_A(m) = 0$ se e solo se m è A -invariante.
- Quindi A generica si annulla in $\binom{n+1}{k+1}$ punti.

Gauss-Bonnet

-

$$\chi(X, \mathbf{Z}) = c_m(TX)$$

- Applicazione:

$$\chi(X, \mathbf{Z}) = \binom{n+1}{k+1}$$