Scuola di Dottorato: Geometria proiettiva e birazionale delle varietà algebriche.
Gargnano, 10 - 14 Aprile 2007
Esercizi guidati sullo pfaffiano e su $Gr(1,4)$

Giorgio Ottaviani

Sia $\omega = [\omega_{ij}]$ una matrice antisimmetrica $2n \times 2n$ con coefficienti in un campo K. Sia $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ la base standard di $V = K^{2n}$. A ω corrisponde la 2-forma

$$\tilde{\omega} = \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j \in \wedge^2 V$$

Poniamo

$$\tilde{\omega}^{\wedge n} = (n!)\mathrm{Pf}(\omega) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n}$$

dove $\mathrm{Pf}(\omega) \in K$ si dice lo pfaffiano della matrice ω. Vedremo con l'esercizio 5) che lo pfaffiano è il sostituto naturale del determinante per le matrici antisimmetriche.

Ad esempio

$$\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = a$$

$$\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix} = af - be + cd$$

- 1) Provare che se $g \in GL(2n)$ abbiamo $\mathrm{Pf}(g^t \omega g) = \det g \cdot \mathrm{Pf}(\omega)$. Pertanto Pf non è ben definito su $\wedge^2 V$, ma la condizione $\{\mathrm{Pf} = 0\}$ definisce una ipersuperficie di grado n in $\wedge^2 V$ e anche in $\mathbf{P}(\wedge^2 V)$.

- 2) Provare che ω ha rango $\geq 2k$ se e solo se $\tilde{\omega}^{\wedge k} \neq 0$.

- 3) Dedurre che ω ha rango $\geq 2k$ se e solo se esiste una sottomatrice antisimmetrica $2k \times 2k$ (ottenuta cancellando le stesse righe e colonne) nonsingolare. *(L'enunciato analogo per le matrici simmetriche è falso.)*

- 4) Sia J_r la matrice antisimmetrica $2n \times 2n$ che ha i primi r blocchi diagonali uguali a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Provare che $\mathrm{Pf}(J_n) = 1$ e che esiste $g \in GL(2n)$ tale che

$g^t\omega g = J_r$ per qualche r. *(Suggerimento: si può supporre $\omega_{12} \neq 0$. Si trova, sulla falsariga dell'algoritmo di Gauss, $g \in GL(2n)$ tale che $(g^t\omega g)_{1i} = 0$ per $i \geq 3 \ldots$) Al termine si può dedurre anche che il rango di una matrice antisimmetrica è sempre pari. Osserviamo che non abbiamo avuto bisogno di nessuna ipotesi sul campo K, in contrasto con i risultati di classificazione analoghi per matrici simmetriche. Ad esempio il teorema di Sylvester vale su $\mathbf{R}$ ma non su $\mathbf{Q}$.*

- 5) Dedurre da 1) e da 4) che $\mathrm{Pf}^2(\omega) = \det(\omega)$.

Quando in Geometria Algebrica si lavora con matrici antisimmetriche, lo pfaffiano va preferito al determinante, che definisce degli schemi non ridotti. Si vedano gli eserc. 10) e 11).

Sia ω una matrice antisimmetrica $(2n+1) \times (2n+1)$.

- 6) Sia $\mathrm{ad}\omega$ la matrice aggiunta di ω. Provare che $\mathrm{rk}\,(\mathrm{ad}\omega) \leq 1$ ed inoltre $\mathrm{rk}\,(\mathrm{ad}\omega) = 1$ se e solo se $\mathrm{rk}\,(\omega) = 2n$.

- 7) Sia C_i lo pfaffiano della sottomatrice ottenuta cancellando da ω la riga e la colonna i-esima. Se M_{ij} è la sottomatrice di ω ottenuta cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima, provare che $\det(M_{ij}) = C_iC_j$.

- 8)Provare che $C = (C_1, -C_2, C_3, \ldots, -C_{2n+1}) \in \ker\omega$.

- 9) Sia $V = K^{2n+1}$ e sia $D_k = \{\omega \in \mathbf{P}(\wedge^2 V) | \mathrm{rk}(\omega) \leq 2k\}$. Provare che $\mathrm{Sing}D_k = D_{k-1}$ e che $\mathrm{codim}D_k = \binom{2n+1-2k}{2}$. In particolare $\mathrm{codim}D_{n-1} = 3$ e $\mathrm{codim}D_{n-2} = 10$. Segue che D_{n-1} è liscio e non vuoto solo se $n = 2$, si veda l'esercizio 11).

- 10) Consideriamo i coefficienti di ω come coordinate omogenee in $\mathbf{P}(\wedge^2 V)$. Abbiamo la seguente risoluzione minimale per D_{n-1}

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-n-1) \xrightarrow{C^t} V^\vee \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\omega} V \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{C} \mathcal{I}_{D_{n-1}}(n) \longrightarrow 0$$

  dove C corrisponde al vettore del punto 8).

- 11) Dedurre dall'es. 10) la seguente risoluzione minimale per $G = Gr(1,4) \subset \mathbf{P}^9$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^5 \longrightarrow \mathcal{O}^5 \longrightarrow \mathcal{I}_G(2) \longrightarrow 0$$

  I cinque pfaffiani principali della matrice antisimmetrica 5×5 danno le equazioni di Plücker per $Gr(1,4)$, e sono i generatori dell'ideale omogeneo. Per tutte le Grassmanniane di rette $Gr(1,n)$ le equazioni di Plücker si ottengono in questo modo. Questa risoluzione è un prototipo per i luoghi di degenerazione di morfismi antisimmetrici su un fibrato di rango dispari. Grazie a un teorema di Walter è un modello locale per le risoluzioni di varietà proiettive sottocanoniche di codimensione tre (modulo una condizione aritmetica), analoga alla corrispondenza di Hartshorne-Serre in codimensione due. Per approfondimenti si veda E. Arrondo, A home-made Hartshorne-Serre correspondence, math/0610015 e G. Ottaviani, Varietà proiettive di codimensione piccola, corso INDAM 1994, cap.2, disponibile su web.