Varietà di Grassmann in Geometria Algebrica

Scuola di Dottorato, Gargnano

10-14 Aprile 2007 

Giorgio Ottaviani
ottavian@math.unifi.it

www.math.unifi.it/ottavian

Università di Firenze 

Quarta lezione

  

- Relazione tra il calcolo di Schubert e la teoria delle rappresentazioni.
- Cenni sul calcolo di Schubert quantistico.

Rappresentazioni di $SL(V)$ e di $GL(V)$

- La rappresentazione più semplice di $GL(V)$ è la rappresentazione standard.

Rappresentazioni di $SL(V)$ e di $GL(V)$

- La rappresentazione più semplice di $GL(V)$ è la rappresentazione standard.
- La potenza tensoriale definisce una rappresentazione nel modo seguente

$$g \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = (g \cdot v_1) \otimes \ldots \otimes (g \cdot v_k)$$

Rappresentazioni di $SL(V)$ e di $GL(V)$

- La rappresentazione più semplice di $GL(V)$ è la rappresentazione standard.
- La potenza tensoriale definisce una rappresentazione nel modo seguente

$$g \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = (g \cdot v_1) \otimes \ldots \otimes (g \cdot v_k)$$

- Questa rappresentazione non è irriducibile.

Rappresentazioni di $SL(V)$ e di $GL(V)$

- La rappresentazione più semplice di $GL(V)$ è la rappresentazione standard.
- La potenza tensoriale definisce una rappresentazione nel modo seguente

$$g \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = (g \cdot v_1) \otimes \ldots \otimes (g \cdot v_k)$$

- Questa rappresentazione non è irriducibile.
- La potenza simmetrica $S^k(V) \subset \otimes^k V$ è un addendo diretto.

I funtori di Schur, I

- Per $k = 2$ $V \otimes V = S^2V \oplus \wedge^2V$

I funtori di Schur, I

- Per $k = 2$ $V \otimes V = S^2V \oplus \wedge^2 V$
- Per $k = 3$ $V \otimes V \otimes V = S^3V \oplus \wedge^3 V \oplus \ldots$

I funtori di Schur, I

- Per $k = 2$ $V \otimes V = S^2V \oplus \wedge^2 V$
- Per $k = 3$ $V \otimes V \otimes V = S^3V \oplus \wedge^3 V \oplus \ldots$
- I funtori di Schur riempiono lo spazio mancante

I funtori di Schur, I

- Per $k = 2$ $V \otimes V = S^2V \oplus \wedge^2 V$
- Per $k = 3$ $V \otimes V \otimes V = S^3V \oplus \wedge^3 V \oplus \ldots$
- I funtori di Schur riempiono lo spazio mancante
- Possono essere considerati come generalizzazioni di S^kV o di $\wedge^k V$

I funtori di Schur, II

- Si parte da un diagramma di Young λ con s righe

I funtori di Schur, II

- Si parte da un diagramma di Young λ con s righe
- e λ_i caselle nella i-esima riga, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$

I funtori di Schur, II

- Si parte da un diagramma di Young λ con s righe
- e λ_i caselle nella i-esima riga, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$
- Sia C_λ il gruppo generato dalle permutazioni su ciascuna colonna

I funtori di Schur, II

- Si parte da un diagramma di Young λ con s righe
- e λ_i caselle nella i-esima riga, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$
- Sia C_λ il gruppo generato dalle permutazioni su ciascuna colonna
- Sia R_λ il gruppo generato dalle permutazioni su ciascuna riga

I funtori di Schur, III

- $$T^\lambda := \sum_{\tau \in R_\lambda, \pi \in C_\lambda} (-1)^{\epsilon(\pi)} \pi \circ \tau \in \mathsf{End}(\bigotimes^{|\lambda|} V)$$

I funtori di Schur, III

- $$T^\lambda := \sum_{\tau\in R_\lambda,\pi\in C_\lambda} (-1)^{\epsilon(\pi)}\pi\circ\tau \in \mathsf{End}(\bigotimes^{|\lambda|}V)$$

- $$V^\lambda := Im(T^\lambda)$$

I funtori di Schur, III

- $$T^\lambda := \sum_{\tau \in R_\lambda, \pi \in C_\lambda} (-1)^{\epsilon(\pi)} \pi \circ \tau \in \text{End}(\bigotimes^{|\lambda|} V)$$

- $$V^\lambda := Im(T^\lambda)$$

- **Teorema** (i) V^λ è una rappresentazione irriducibile di $GL(V)$
(ii) Ogni rappresentazione irriducibile di $GL(V)$ (risp. $SL(V)$) si ottiene in questo modo, λ ha al più $n+1$ (risp. n) righe.

Caratteri

- La traccia di $GL(V) \xrightarrow{i_\lambda} GL(V^\lambda)$ cioè $\chi_\lambda(g) = tr(i_\lambda(g))$ è il carattere della rappresentazione

Caratteri

- La traccia di $GL(V) \xrightarrow{i_\lambda} GL(V^\lambda)$ cioè $\chi_\lambda(g) = tr(i_\lambda(g))$ è il carattere della rappresentazione
- Soddisfa alle proprietà dei caratteri, vale a dire

Caratteri

- La traccia di $GL(V) \xrightarrow{i_\lambda} GL(V^\lambda)$ cioè $\chi_\lambda(g) = tr(i_\lambda(g))$ è il carattere della rappresentazione
- Soddisfa alle proprietà dei caratteri, vale a dire
- $\chi_\lambda(h^{-1}gh) = \chi_\lambda(g)$

Caratteri

- La traccia di $GL(V) \xrightarrow{i_\lambda} GL(V^\lambda)$ cioè $\chi_\lambda(g) = tr(i_\lambda(g))$ è il carattere della rappresentazione
- Soddisfa alle proprietà dei caratteri, vale a dire
- $\chi_\lambda(h^{-1}gh) = \chi_\lambda(g)$
- $\chi_{\lambda \otimes \mu} = \chi_\lambda \chi_\mu \qquad \chi_{\lambda \oplus \mu} = \chi_\lambda + \chi_\mu$

I polinomi simmetrici

- Un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ si dice simmetrico se è invariante per l'azione del gruppo simmetrico Σ_n (delle permutazioni)

I polinomi simmetrici

- Un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ si dice simmetrico se è invariante per l'azione del gruppo simmetrico Σ_n (delle permutazioni)
- Definiamo $E(t) = \prod(1 + x_i t) = \sum_{j \geq 0} E_j t^j$

I polinomi simmetrici

- Un polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ si dice simmetrico se è invariante per l'azione del gruppo simmetrico Σ_n (delle permutazioni)
- Definiamo $E(t) = \prod(1 + x_i t) = \sum_{j \geq 0} E_j t^j$
- $E_0 = 1$, $E_1 = \sum x_i$, $E_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$

I polinomi simmetrici

- Un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ si dice simmetrico se è invariante per l'azione del gruppo simmetrico Σ_n (delle permutazioni)
- Definiamo $E(t) = \prod(1 + x_i t) = \sum_{j \geq 0} E_j t^j$
- $E_0 = 1$, $E_1 = \sum x_i$, $E_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$
- E_i si dicono *polinomi simmetrici elementari*

I polinomi simmetrici

- Un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ si dice simmetrico se è invariante per l'azione del gruppo simmetrico Σ_n (delle permutazioni)
- Definiamo $E(t) = \prod(1 + x_i t) = \sum_{j \geq 0} E_j t^j$
- $E_0 = 1$, $E_1 = \sum x_i$, $E_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$
- E_i si dicono *polinomi simmetrici elementari*
- $E_i =$ i-esima classe di Chern di $\oplus \mathcal{O}(x_i)$

Il teorema di Gauss

- **Teorema**(Gauss)$\forall f \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ simmetrico esiste unico polinomio P tale che

$$f(x_1, \ldots, x_n) = P(E_1, \ldots, E_n)$$

Il teorema di Gauss

- **Teorema**(Gauss)$\forall f \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$ simmetrico esiste unico polinomio P tale che

$$f(x_1, \dots, x_n) = P(E_1, \dots, E_n)$$

- $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbf{Z}[E_1, \dots, E_n]$

Polinomi simmetrici completi

- $H(t) = \frac{1}{E(-t)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{j\geq 0} H_j t^j$

Polinomi simmetrici completi

- $H(t) = \frac{1}{E(-t)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{j\geq 0} H_j t^j$
- Da $H(t) = \left(\sum_k x_1^k t^k\right) \dots \left(\sum_k x_n^k t^k\right)$ segue

Polinomi simmetrici completi

- $H(t) = \frac{1}{E(-t)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{j\geq 0} H_j t^j$
- Da $H(t) = \left(\sum_k x_1^k t^k\right) \dots \left(\sum_k x_n^k t^k\right)$ segue
- $H_0 = 1$, $H_1 = \sum x_i$, $H_2 = \sum_{i\leq j} x_i x_j$

Polinomi simmetrici completi

- $H(t) = \frac{1}{E(-t)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{j\geq 0} H_j t^j$
- Da $H(t) = \left(\sum_k x_1^k t^k\right) \dots \left(\sum_k x_n^k t^k\right)$ segue
- $H_0 = 1$, $H_1 = \sum x_i$, $H_2 = \sum_{i\leq j} x_i x_j$
- H_i si dicono *polinomi simmetrici completi*

Polinomi simmetrici completi

- $H(t) = \frac{1}{E(-t)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i t} = \sum_{j\geq 0} H_j t^j$
- Da $H(t) = \left(\sum_k x_1^k t^k\right) \dots \left(\sum_k x_n^k t^k\right)$ segue
- $H_0 = 1$, $H_1 = \sum x_i$, $H_2 = \sum_{i\leq j} x_i x_j$
- H_i si dicono *polinomi simmetrici completi*
- $H_i =$ i-esima classe di Segre di $\oplus \mathcal{O}(x_i)$

Proprietà delle f. simmetriche

- **(A)** $\mathbf{Z}[E_1, \ldots, E_n] = \mathbf{Z}[H_1, \ldots, H_n]$

Proprietà delle f. simmetriche

- **(A)** $\mathbf{Z}[E_1, \ldots, E_n] = \mathbf{Z}[H_1, \ldots, H_n]$
- **(B)** $\prod_{i=1}^n (x - x_i) = \sum_{j=0}^n x^{n-j} (-1)^j E_j$

Proprietà delle f. simmetriche

- **(A)** $\mathbf{Z}[E_1, \ldots, E_n] = \mathbf{Z}[H_1, \ldots, H_n]$
- **(B)** $\prod_{i=1}^n (x - x_i) = \sum_{j=0}^n x^{n-j}(-1)^j E_j$
- **(C)** $\sum_{j\geq 0}(-1)^j E_j H_{p-j} = 0$ per ogni $p \geq 1$

Funzioni invarianti di matrici, I

- Sia A una matrice. Il polinomio caratteristico è
  $\det(A - tI) = \sum_{j=0}^{n} t^{n-j}(-1)^j E_j$ (proprietà **B**)
  dove E_j sono funzioni simmetriche degli autovalori.

Funzioni invarianti di matrici, I

- Sia A una matrice. Il polinomio caratteristico è $\det(A - tI) = \sum_{j=0}^{n} t^{n-j}(-1)^j E_j$ (proprietà **B**) dove E_j sono funzioni simmetriche degli autovalori.
- La funzione $E = (E_1, \ldots, E_n) \colon GL(n) \to K^n$ soddisfa $E(g^{-1}Ag) = E(A)$

Funzioni invarianti di matrici, II

$E\colon GL(n) \to K^n$ è il quoziente geometrico.

Funzioni invarianti di matrici, II

$E\colon GL(n) \to K^n$ è il quoziente geometrico.
Per ogni $h\colon GL(n) \to K$ tale che $h(g^{-1}Ag) = h(A)$

$$\begin{array}{ccc} GL(n) & \xrightarrow{h} & K \\ \big\downarrow{\scriptstyle E} & & \\ K^n & & \end{array}$$

Funzioni invarianti di matrici, II

$E\colon GL(n) \to K^n$ è il quoziente geometrico.
Per ogni $h\colon GL(n) \to K$ tale che $h(g^{-1}Ag) = h(A)$

$$\begin{array}{ccc} GL(n) & \xrightarrow{h} & K \\ \downarrow E & \nearrow f & \\ K^n & & \end{array}$$

esiste unica $f\colon K^n \to K$ tale che $f \cdot E = h$.

I polinomi di Schur, I

- Precisamente abbiamo

$$
\begin{array}{ccc}
GL(n) & \xrightarrow{\chi_\lambda} & K \\
\downarrow E & \nearrow s_\lambda & \\
K^n & &
\end{array}
$$

dove $\chi_\lambda(g) = tr(GL(V) \to GL(V^\lambda)$.

I polinomi di Schur, I

- Precisamente abbiamo

$$
\begin{tikzcd}
GL(n) \arrow[r, "\chi_\lambda"] \arrow[d, "E"] & K \\
K^n \arrow[ur, "s_\lambda"'] &
\end{tikzcd}
$$

  dove $\chi_\lambda(g) = tr(GL(V) \to GL(V^\lambda)$.
- s_λ si dice polinomio di Schur.

I polinomi di Schur, II

- Esempi di polinomi di Schur

I polinomi di Schur, II

- Esempi di polinomi di Schur
- $\lambda = (k, 0, \ldots, 0)$, $V_\lambda = S^k V$, $s_\lambda = H_k$

I polinomi di Schur, II

- Esempi di polinomi di Schur
- $\lambda = (k, 0, \dots, 0)$, $V_\lambda = S^k V$, $s_\lambda = H_k$
- $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ volte}})$, $V_\lambda = \wedge^k V$, $s_\lambda = E_k$

I polinomi di Schur, II

- Esempi di polinomi di Schur
- $\lambda = (k, 0, \dots, 0)$, $V_\lambda = S^k V$, $s_\lambda = H_k$
- $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ volte}})$, $V_\lambda = \wedge^k V$, $s_\lambda = E_k$
- Per λ qualunque , s_λ può essere descritto con le matrici di Vandermonde generalizzate.

I polinomi di Schur, III

- Sia $N \gg 0$. Considero la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^N \end{bmatrix}$$

I polinomi di Schur, III

- Sia $N \gg 0$. Considero la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^N \end{bmatrix}$$

- I minori $n \times n$ estratti sono antisimmetrici.

I polinomi di Schur, III

- Sia $N \gg 0$. Considero la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^N \end{bmatrix}$$

- I minori $n \times n$ estratti sono antisimmetrici.
- Quindi i quozienti di due minori sono simmetrici

I polinomi di Schur, III

- Sia $N \gg 0$. Considero la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^N \end{bmatrix}$$

- I minori $n \times n$ estratti sono antisimmetrici.
- Quindi i quozienti di due minori sono simmetrici
- Il primo minore a sinistra corrisponde a $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ (Vandermonde classico)

I polinomi di Schur, IV

- $$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^N \end{bmatrix}$$

  Sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

I polinomi di Schur, IV

- $$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^N \end{bmatrix}$$
  Sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.
- Sia a_λ il minore ottenuto dalle colonne di posto λ. Se $\delta = (n, n-1, \dots, 1)$ allora a_δ è il minore di Vandermonde

I polinomi di Schur, V

- Per ogni λ, $a_{\lambda+\delta}$ si annulla quando $x_i = x_j$, quindi è divisibile per a_δ.

I polinomi di Schur, V

- Per ogni λ, $a_{\lambda+\delta}$ si annulla quando $x_i = x_j$, quindi è divisibile per a_δ.
- Vale
$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

Veronese nella Grassmanniana

- Le n righe di A sono n punti su $C_N \subset \mathbf{P}^N$ e definiscono

$$\mathbf{P}^n \simeq S^n\mathbf{P}^1 \longrightarrow Gr(\mathbf{P}^{n-1}, \mathbf{P}^N)$$

Dimostrazione della f. di Giambelli, I

- Sia

$$B = \begin{bmatrix} (-1)^n E_n & \dots & -E_1 & 1 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & (-1)^n E_n & & \dots & -E_1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice $(N-n+1) \times (N+1)$

Dimostrazione della f. di Giambelli, I

- Sia

$$B = \begin{bmatrix} (-1)^n E_n & \dots & -E_1 & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & (-1)^n E_n & \dots & -E_1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice $(N-n+1) \times (N+1)$

- Allora abbiamo

$$A \cdot B^t = 0$$

per la proprietà **(B)**.

Dimostrazione della f. di Giambelli, II

- Sia

$$C = \begin{bmatrix} 1 & H_1 & \dots & & & & H_N \\ & 1 & H_1 & \dots & & & H_{N-1} \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & H_1 & \dots & H_{N-n+1} \end{bmatrix}$$

matrice $n \times (N+1)$

Dimostrazione della f. di Giambelli, II

- Sia

$$C = \begin{bmatrix} 1 & H_1 & \dots & & & & H_N \\ & 1 & H_1 & \dots & & & H_{N-1} \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & H_1 & \dots & H_{N-n+1} \end{bmatrix}$$

matrice $n \times (N+1)$

- Allora abbiamo

$$C \cdot B^t = 0$$

per la proprietà **(c)**.

Dimostrazione della f. di Giambelli, III

- Conclusione: A e C generano lo stesso spazio delle righe, quindi le loro coordinate pluckeriane sono proporzionali.

Dimostrazione della f. di Giambelli, III

- Conclusione: A e C generano lo stesso spazio delle righe, quindi le loro coordinate pluckeriane sono proporzionali.
- Segue

$$s_\lambda = \det(H_{\lambda_i + j - i})$$

(formula di Giambelli per polinomi simmetrici, Jacobi-Trudi)

Partizioni di un naturale

- $7 = 3 + 3 + 1 = 3 \cdot n_3 + 1 \cdot n_1$ dove $n_3 = 2, n_1 = 1$ oppure $7 = 5 + 1 + 1 = 5 \cdot n_5 + 1 \cdot n_1$ dove $n_5 = 1, n_1 = 2$.

Partizioni di un naturale

- $7 = 3 + 3 + 1 = 3 \cdot n_3 + 1 \cdot n_1$ dove $n_3 = 2, n_1 = 1$ oppure $7 = 5 + 1 + 1 = 5 \cdot n_5 + 1 \cdot n_1$ dove $n_5 = 1, n_1 = 2$.
- Chiamo P_n il numero di partizioni in cui si può esprimere $n \in \mathbf{N}$. Allora

$$\sum_{n \geq 0} P_n t^n = \sum_{n_1, n_2 \ldots \geq 0} t^{n_1 + 2n_2 + \ldots}$$

Partizioni di un naturale

- $7 = 3 + 3 + 1 = 3 \cdot n_3 + 1 \cdot n_1$ dove $n_3 = 2, n_1 = 1$ oppure $7 = 5 + 1 + 1 = 5 \cdot n_5 + 1 \cdot n_1$ dove $n_5 = 1, n_1 = 2$.
- Chiamo P_n il numero di partizioni in cui si può esprimere $n \in \mathbf{N}$. Allora

$$\sum_{n \geq 0} P_n t^n = \sum_{n_1, n_2 \ldots \geq 0} t^{n_1 + 2n_2 + \ldots}$$

- Segue

$$\sum_{n \geq 0} P_n t^n = \prod_{i \geq 1} \left(\sum_{n_i \geq 0} t^{in_i} \right) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - t^i}$$

Polinomi simmetrici

- $$\sum_{n\geq 0} P_n t^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-t^i}$$

Polinomi simmetrici

- $$\sum_{n\geq 0} P_n t^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-t^i}$$
- P_n è anche la dimensione dello spazio dei polinomi simmetrici di grado n in $N \gg n$ variabili (per il teorema di Gauss !).

Applicaz. alle rappresentazioni irriduc.

- s_λ formano una base dei polinomi simmetrici.

Applicaz. alle rappresentazioni irriduc.

- s_λ formano una base dei polinomi simmetrici.
- Analogamente V^λ sono rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$.

Applicaz. alle rappresentazioni irriduc.

- s_λ formano una base dei polinomi simmetrici.
- Analogamente V^λ sono rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$.
- Inoltre tutte le rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$ sono della forma V^λ

Applicaz. a $H^*(Gr(k,n))$, I

- Definiamo

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_{n-k}]^{S_{n-k}} & \xrightarrow{f} & H^*(Gr(k,n)) \\ s_\lambda & \mapsto & X_\lambda \end{array}$$

In particolare $H_i \to X_i = c_i(Q)$.

Applicaz. a $H^*(Gr(k,n))$, I

- Definiamo

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_{n-k}]^{S_{n-k}} & \xrightarrow{f} & H^*(Gr(k,n)) \\ s_\lambda & \mapsto & X_\lambda \end{array}$$

  In particolare $H_i \to X_i = c_i(Q)$.

- Sappiamo che $\mathbf{C}[x_1,\ldots,x_{n-k}]^{S_{n-k}}$ è generato dagli H_i. Supponiamo che valga la formula di Pieri per $\mathbf{C}[x_1,\ldots,x_{n-k}]^{S_{n-k}}$ e per $H^*(Gr(k,n))$.

Applicaz. a $H^*(Gr(k,n))$, I

- Definiamo

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_{n-k}]^{S_{n-k}} & \xrightarrow{f} & H^*(Gr(k,n)) \\ s_\lambda & \mapsto & X_\lambda \end{array}$$

  In particolare $H_i \longrightarrow X_i = c_i(Q)$.

- Sappiamo che $\mathbf{C}[x_1,\ldots,x_{n-k}]^{S_{n-k}}$ è generato dagli H_i. Supponiamo che valga la formula di Pieri per $\mathbf{C}[x_1,\ldots,x_{n-k}]^{S_{n-k}}$ e per $H^*(Gr(k,n))$.
- Allora f è un morfismo di anelli, quindi vale la formula di Giambelli in $H^*(Gr(k,n))$.

Applicaz. a $H^*(Gr(k,n))$, II

- f è un isomorfismo di anelli, quindi

$$H^*(Gr(k,n)) = \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_{n-k}]/(S_{k+1}, \ldots, S_{n+1})$$

Applicaz. a $H^*(Gr(k,n))$, II

- f è un isomorfismo di anelli, quindi

  $$H^*(Gr(k,n)) = \mathbf{C}[X_1,\ldots,X_{n-k}]/(S_{k+1},\ldots,S_{n+1})$$

- Per dettagli vedi Fulton, Young tableaux.

Corrispondenze

- Intersezione tra cicli di Schubert
  $X_\lambda \cdot X_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} X_\nu$

Corrispondenze

- Intersezione tra cicli di Schubert
  $X_\lambda \cdot X_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} X_\nu$
-

$$\Updownarrow$$

Prod. tensoriale tra rappresentazioni irriduc. di $GL(V)$
$V^\lambda \otimes V^\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} V^\nu$

Corrispondenze

- Intersezione tra cicli di Schubert
  $X_\lambda \cdot X_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} X_\nu$
- $$\Updownarrow$$
  Prod. tensoriale tra rappresentazioni irriduc. di $GL(V)$
  $V^\lambda \otimes V^\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} V^\nu$
- $$\Updownarrow$$
  Prodotto tra polinomi simmetrici
  $s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu$

La Grassmanniana infinita

- Corrispondentemente, da

$$\sum_{n\geq 0} P_n t^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-t^i}$$

abbiamo che P_n è il numero di Betti di ordine $2n$ della Grassmanniana infinita.

La Grassmanniana infinita

- Corrispondentemente, da

$$\sum_{n\geq 0} P_n t^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-t^i}$$

  abbiamo che P_n è il numero di Betti di ordine $2n$ della Grassmanniana infinita.
- $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 3$, $P_4 = 5$, $P_5 = 7, \ldots$

La Grassmanniana infinita

- Corrispondentemente, da

$$\sum_{n\geq 0} P_n t^n = \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-t^i}$$

abbiamo che P_n è il numero di Betti di ordine $2n$ della Grassmanniana infinita.

- $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 3$, $P_4 = 5$, $P_5 = 7, \ldots$
- Per ogni i, $b_{2i}(Gr(k,n)) = P_i$ se $n-k \gg 0$, $k \gg 0$.

Yoga

- Anello di intersezione di una Grassmanniana infinita

  $$\Updownarrow$$

  Anello delle funzioni simmetriche in infinite indeterminate

Il polinomio di Poincaré

- $$P_t(Gr(k,n)) = \sum b_{2i}(Gr(k,n))t^i =$$
  $$= \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-t^i)}{\prod_{i=1}^{k+1}(1-t^i)\prod_{i=1}^{n-k}(1-t^i)}$$

Il polinomio di Poincaré

- $$P_t(Gr(k,n)) = \sum b_{2i}(Gr(k,n))t^i =$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-t^i)}{\prod_{i=1}^{k+1}(1-t^i)\prod_{i=1}^{n-k}(1-t^i)}$$
- $P_t(\mathbf{P}^n) = \frac{1}{1-t}$

Il polinomio di Poincaré

- $$P_t(Gr(k,n)) = \sum b_{2i}(Gr(k,n))t^i =$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-t^i)}{\prod_{i=1}^{k+1}(1-t^i)\prod_{i=1}^{n-k}(1-t^i)}$$
- $P_t(\mathbf{P}^n) = \frac{1}{1-t}$
- $$P_t(Gr(1,3)) = \frac{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)}{(1-t)^2(1-t^2)^2} =$$
$$= \frac{(1-t^3)(1-t^4)}{(1-t)(1-t^2)} = (1+t+t^2)(1+t^2) = 1+t+2t^2+t^3+t^4$$

Invarianti di Gromov-Witten e QH^*

- $$I_d(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, X_{\lambda_3}) = \begin{cases} \#\text{curve razionali di classe } d \\ \text{che incontrano } X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, X_{\lambda_3} \\ \text{ se questo numero è finito,} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Invarianti di Gromov-Witten e QH^*

- $$I_d(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, X_{\lambda_3}) = \begin{cases} \#\text{curve razionali di classe } d \\ \text{che incontrano } X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, X_{\lambda_3} \\ \text{ se questo numero è finito,} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

- Struttura additiva

$$QH^*(G) = H^*(G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[q]$$

Moltiplicazione in QH^*

- Struttura moltiplicativa

$$X_{\lambda_1} * X_{\lambda_2} = \sum_{d \geq 0} q^d \sum_{\mu} I_d(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, X_\mu) X_{\tilde{\mu}}$$

dove $X_{\tilde{\mu}}$ è il duale di Poincaré di X_μ.

Graduazione di QH^*

- $q^d \sum_\mu I_d(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, X_\mu) X_{\tilde{\mu}}$ è non nullo se

$$\text{codim} X_{\lambda_1} + \text{codim} X_{\lambda_2} + \text{codim} X_\mu = dn + \dim G$$

cioè

$$\text{codim} X_{\lambda_1} + \text{codim} X_{\lambda_2} = dn + \text{codim} X_{\tilde{\mu}}$$

Graduazione di QH^*

- $q^d \sum_\mu I_d(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, X_\mu) X_{\tilde{\mu}}$ è non nullo se

$$\text{codim} X_{\lambda_1} + \text{codim} X_{\lambda_2} + \text{codim} X_\mu = dn + \dim G$$

cioè

$$\text{codim} X_{\lambda_1} + \text{codim} X_{\lambda_2} = dn + \text{codim} X_{\tilde{\mu}}$$

- Pertanto se poniamo

$$\deg q = n$$

allora QH^* risulta graduato.

Graduazione di QH^*

- $q^d \sum_\mu I_d(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, X_\mu) X_{\tilde{\mu}}$ è non nullo se

$$\text{codim} X_{\lambda_1} + \text{codim} X_{\lambda_2} + \text{codim} X_\mu = dn + \dim G$$

cioè

$$\text{codim} X_{\lambda_1} + \text{codim} X_{\lambda_2} = dn + \text{codim} X_{\tilde{\mu}}$$

- Pertanto se poniamo

$$\deg q = n$$

allora QH^* risulta graduato.

- Il contributo per $d = 0$ a $X_{\lambda_1} * X_{\lambda_2}$ è il classico $X_{\lambda_1} \cdot X_{\lambda_2}$

Il prodotto quantistico

- **Teorema**
  $*$ è associativo. QH^* è un anello graduato

Il prodotto quantistico

- **Teorema**
  $*$ è associativo. QH^* è un anello graduato
- Esempio. Sia $k = 0$.

$$X_1 * X_n = qX_0 = q$$

(Euclide)

Le relazioni quantistiche

- **Teorema** (Witten)

$$QH^*(Gr(k,n)) =$$

$$= \mathbf{Z}[q, X_1, \ldots, X_{n-k}]/(S_{k+2}, \ldots, S_n, S_{n+1} + (-1)^{n-k} q)$$

cioè le relazioni sono le "quantizzazioni" delle relazioni classiche.

Le relazioni quantistiche

- **Teorema** (Witten)

$$QH^*(Gr(k,n)) =$$

$$= \mathbf{Z}[q, X_1, \ldots, X_{n-k}]/(S_{k+2}, \ldots, S_n, S_{n+1} + (-1)^{n-k} q)$$

cioè le relazioni sono le "quantizzazioni" delle relazioni classiche.

- **Teorema** (Bertram) La formula di Giambelli vale senza modifiche nel caso quantistico. Pieri invece ha degli addendi aggiuntivi ma solo col fattore q.

Il contributo quantistico

- Il prodotto $X_\lambda * X_\mu$ è la somma di vari addendi $q^d X_\nu$.
  Teorema (Fulton-Woodward) d minimo è il numero di "orli" che coprono l'intersezione tra λ e la rotazione di 180° di μ nel rettangolo $(k+1) \times (n-k)$.

Esempio: $QH^*(Gr(1,3))$, I

-

	00	10	20	11	21	22
00	00	10	20	11	21	22
10	10	$20+11$	21	21	$22+q00$	$q10$
20	20	21	22	$q00$	$q10$	$q11$
11	11	21	$q00$	22	$q10$	$q20$
21	21	$22+q00$	$q10$	$q10$	$q(20+11)$	$q21$
22	22	$q10$	$q11$	$q20$	$q21$	$q^2 00$

Esempio: $QH^*(Gr(1,3))$, II

- $(22 * 22 = q^2 00)$ significa che c'è una unica conica per tre punti, equivalentemente c'è una unica quadrica contenente tre rette in $\mathbf{P}^3$.