Varietà di Grassmann in Geometria Algebrica

Scuola di Dottorato, Gargnano

10-14 Aprile 2007

Giorgio Ottaviani
ottavian@math.unifi.it

www.math.unifi.it/ottavian

Università di Firenze

Terza lezione

 

- Varietà secanti alle Grassmanniane e forme canoniche di tensori.
- I lemmi di Terracini.
- Grassmanniane difettive.
- Varietà duali.

Rette in $Gr(k,n)$

- Fissando due spazi $\mathbf{P}^{k-1}$ e $\mathbf{P}^{k+1}$,

$$\{\mathbf{P}^k | \mathbf{P}^{k-1} \subset \mathbf{P}^k \subset \mathbf{P}^{k+1}\}$$

è una retta in $Gr(k,n)$ e tutte le rette si ottengono in questo modo.

Rette in $Gr(k,n)$

- Fissando due spazi $\mathbf{P}^{k-1}$ e $\mathbf{P}^{k+1}$,

$$\{\mathbf{P}^k | \mathbf{P}^{k-1} \subset \mathbf{P}^k \subset \mathbf{P}^{k+1}\}$$

  è una retta in $Gr(k,n)$ e tutte le rette si ottengono in questo modo.
- Tagliando $Gr(1,3) \subset \mathbf{P}^5$ con un piano si ottiene una conica. Corrisponde a una schiera di rette di una quadrica di $\mathbf{P}^3$.

Rette in $Gr(k, n)$

- Fissando due spazi $\mathbf{P}^{k-1}$ e $\mathbf{P}^{k+1}$,

$$\{\mathbf{P}^k | \mathbf{P}^{k-1} \subset \mathbf{P}^k \subset \mathbf{P}^{k+1}\}$$

  è una retta in $Gr(k, n)$ e tutte le rette si ottengono in questo modo.
- Tagliando $Gr(1, 3) \subset \mathbf{P}^5$ con un piano si ottiene una conica. Corrisponde a una schiera di rette di una quadrica di $\mathbf{P}^3$.
- Due rette di $\mathbf{P}^3$ si toccano se e solo se i punti corrispondenti in $Gr(1, 3)$ sono uniti da una retta in $Gr(1, 3)$.

Varietà secanti

- Sia $X \subset \mathbf{P}(V)$ varietà irriducibile.

Varietà secanti

- Sia $X \subset \mathbf{P}(V)$ varietà irriducibile.
- L'usuale varietà secante $Sec(X)$ è definita come

$$\overline{\bigcup_{x_1, x_2 \in X} < x_1, x_2 >}$$

Varietà secanti

- Sia $X \subset \mathbf{P}(V)$ varietà irriducibile.
- L'usuale varietà secante $Sec(X)$ è definita come
$$\overline{\bigcup_{x_1, x_2 \in X} < x_1, x_2 >}$$
- La sua importanza viene dal fatto che, se X è liscia, $\pi_p \colon X \to H$ è liscia (con $p \notin X$) se e solo se
$$p \notin Sec(X)$$

Il lemma di Terracini

- Sia $Sec(X) \ni z =< x_1, x_2 >$ generale. Allora

$$T_z(Sec(X)) =< T_{x_1}X, T_{x_2}X >$$

Il teorema di Del Pezzo-Severi

Sia $S \subset \mathbf{P}^5$ una superficie nondegenere che non sia un cono.

Il teorema di Del Pezzo-Severi

Sia $S \subset \mathbf{P}^5$ una superficie nondegenere che non sia un cono.

Teorema $Sec(S) \neq \mathbf{P}^5$ se e solo se $S = (\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(2))$ (superficie di Veronese)

Lo spazio tangente

- Sia $m = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in Gr(k, n)$

Lo spazio tangente

- Sia $m = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in Gr(k, n)$
- Lo spazio tangente $T_m Gr(k, n)$ è il proiettivizzato di $(V \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k) + (v_1 \wedge V \wedge \ldots \wedge v_k) + \ldots + (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge V)$

Varietà secanti superiori

- $\sigma_k(X)$ è definita come

$$\overline{\bigcup_{x_1,\ldots,x_k \in X} < x_1, \ldots, x_k >}$$

Varietà secanti superiori

- $\sigma_k(X)$ è definita come

$$\overline{\bigcup_{x_1,\dots,x_k \in X} < x_1, \dots, x_k >}$$

- $\sigma_1(X) = X$, $\sigma_2(X) = Sec(X)$

Varietà secanti superiori

- $\sigma_k(X)$ è definita come

$$\overline{\bigcup_{x_1,\ldots,x_k \in X} < x_1, \ldots, x_k >}$$

- $\sigma_1(X) = X$, $\sigma_2(X) = Sec(X)$
- $\sigma_1(X) \subseteq \sigma_2(X) \subseteq \sigma_3(X) \subseteq \ldots$

Varietà secanti superiori

- Sia $m = \dim X$, $\dim \mathbf{P}(V) = N$, allora la dimensione aspettata di $\sigma_s(X)$ vale

$$\min\{sm + (s-1), N\}$$

Varietà secanti superiori

- Sia $m = \dim X$, $\dim \mathbf{P}(V) = N$, allora la dimensione aspettata di $\sigma_s(X)$ vale

$$\min\{sm + (s-1), N\}$$

- X si dice s-difettiva se $\dim \sigma_s(X) < \min\{sm + (s-1), N\}$

Varietà secanti superiori

- Sia $m = \dim X$, $\dim \mathbf{P}(V) = N$, allora la dimensione aspettata di $\sigma_s(X)$ vale
$$\min\{sm + (s-1), N\}$$
- X si dice s-difettiva se $\dim \sigma_s(X) < \min\{sm + (s-1), N\}$
- X si dice difettiva se è s-difettiva per qualche s.

Grassmanniane di rette

- $Gr(1, n)$ è difettiva per $n \geq 5$.

Grassmanniane di rette

- $Gr(1,n)$ è difettiva per $n \geq 5$.
- Infatti $\sigma_s(Gr(1,n))$ corrisponde alle matrici antisimmetriche $n \times n$ di rango $\leq 2s$.

Grassmanniane di rette

- $Gr(1,n)$ è difettiva per $n \geq 5$.
- Infatti $\sigma_s(Gr(1,n))$ corrisponde alle matrici antisimmetriche $n \times n$ di rango $\leq 2s$.
- Ogni matrice (antisimmetrica) di rango $2s$ è somma di s matrici (antisimmetriche) di rango 2.

Grassmanniane di rette

- $Gr(1,n)$ è difettiva per $n \geq 5$.
- Infatti $\sigma_s(Gr(1,n))$ corrisponde alle matrici antisimmetriche $n \times n$ di rango $\leq 2s$.
- Ogni matrice (antisimmetrica) di rango $2s$ è somma di s matrici (antisimmetriche) di rango 2.
- La codimensione di $\sigma_s(Gr(1,n))$ è uguale a $\binom{n+1-2s}{2}$.

$Gr(1,5)$

- Il primo caso significativo è $Gr(1,5)$, una delle quattro varietà di Severi.

$Gr(1,5)$

- Il primo caso significativo è $Gr(1,5)$, una delle quattro varietà di Severi.
- Infatti $\sigma_2(Gr(1,5)) \subseteq \mathbf{P}^{14}$ è una ipersuperficie di grado 3, ha dimensione 13.

$Gr(1,5)$

- Il primo caso significativo è $Gr(1,5)$, una delle quattro varietà di Severi.
- Infatti $\sigma_2(Gr(1,5)) \subseteq \mathbf{P}^{14}$ è una ipersuperficie di grado 3, ha dimensione 13.
- La dimensione aspettata è $\min\{14,17\} = 14$.

$Gr(1,5)$ e Terracini

- Per due punti di $Gr(1,5)$ passa una $Gr(1,3)$, dove $\mathbb{P}^3$ è generato dalle due rette.

$Gr(1,5)$ e Terracini

- Per due punti di $Gr(1,5)$ passa una $Gr(1,3)$, dove $\mathbf{P}^3$ è generato dalle due rette.
- Quindi gli spazi tangenti nei due punti si incontrano. Per il lemma di Terracini $Gr(1,5)$ è difettiva, questo argomento funziona per $Gr(1,n)$ con $n \geq 5$.

Il lemma di Terracini

- Caso generale del lemma di Terracini:

Il lemma di Terracini

- Caso generale del lemma di Terracini:
- Sia $\sigma_k(X) \ni z =< x_1, \ldots, x_k >$ generale. Allora

$$T_z(\sigma_k(X)) =< T_{x_1}X, \ldots, T_{x_k}X >$$

Il lavoro di Segre

- Segre studia $Gr(2, 5)$ in un lavoro del 1917

Il lavoro di Segre

- Segre studia $Gr(2,5)$ in un lavoro del 1917
- Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni
  Annali di Matematica 27 (1917), 75-122

$Gr(2,5)$

- **Teorema** $Gr(2,5)$ non è difettiva.

$Gr(2,5)$

- **Teorema** $Gr(2,5)$ non è difettiva.
- si dimostra con il lemma di Terracini.

$Gr(2,5)$

- **Teorema** $Gr(2,5)$ non è difettiva.
- si dimostra con il lemma di Terracini.
- Il tensore generico $\omega \in \wedge^3 \mathbb{C}^6$ si scrive come

$$\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_6$$

Orbite

- Il caso $Gr(2,5)$ è ancora *tame*, perché $SL(6)$ agisce su $\wedge^3 \mathbf{C}^6$ con un numero finito di orbite. Precisamente abbiamo quattro orbite in $\mathbf{P}^{19}$.

Orbite

- Il caso $Gr(2,5)$ è ancora *tame*, perché $SL(6)$ agisce su $\wedge^3\mathbf{C}^6$ con un numero finito di orbite. Precisamente abbiamo quattro orbite in $\mathbf{P}^{19}$.
- Consideriamo per ogni (p, H) la sottovarietà $X_{p,H} = \{\mathbf{P}^2 \in Gr(2,5) | p \in \mathbf{P}^2 \subset H\} \simeq Gr(1,3)$

Orbite

- Il caso $Gr(2,5)$ è ancora *tame*, perché $SL(6)$ agisce su $\wedge^3\mathbf{C}^6$ con un numero finito di orbite. Precisamente abbiamo quattro orbite in $\mathbf{P}^{19}$.
- Consideriamo per ogni (p,H) la sottovarietà $X_{p,H} = \{\mathbf{P}^2 \in Gr(2,5) | p \in \mathbf{P}^2 \subset H\} \simeq Gr(1,3)$
- $W := \cup_{(p,H)} < X_{p,H} >$

Orbite

- Il caso $Gr(2,5)$ è ancora *tame*, perché $SL(6)$ agisce su $\wedge^3\mathbf{C}^6$ con un numero finito di orbite. Precisamente abbiamo quattro orbite in $\mathbf{P}^{19}$.
- Consideriamo per ogni (p,H) la sottovarietà $X_{p,H} = \{\mathbf{P}^2 \in Gr(2,5) | p \in \mathbf{P}^2 \subset H\} \simeq Gr(1,3)$
- $W := \cup_{(p,H)} < X_{p,H} >$
- $\dim W = 14$, W è $SL(6)$-invariante.

Forme canoniche

- Gli elementi di W si scrivono come

$$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_0 \wedge e_3 \wedge e_4$$

Forme canoniche

- Gli elementi di W si scrivono come

$$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_0 \wedge e_3 \wedge e_4$$

- Le altre tre forme canoniche sono

$$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \qquad Gr(2,5)$$

$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_0$ varietà tangente

$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$ orbita densa

Forme canoniche

- Gli elementi di W si scrivono come

$$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_0 \wedge e_3 \wedge e_4$$

- Le altre tre forme canoniche sono

$$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \qquad Gr(2,5)$$

$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_0$ varietà tangente

$e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$ orbita densa

- È interessante che per la varietà tangente servono tre addendi.

Tan Gr(2,5)

- La varietà tangente a $Gr(2,5)$ è una ipersuperficie di grado 4.

Tan Gr(2,5)

- La varietà tangente a $Gr(2,5)$ è una ipersuperficie di grado 4.
- È isomorfa alla varietà duale $Gr(2,5)$.

Tan Gr(2,5)

- La varietà tangente a $Gr(2,5)$ è una ipersuperficie di grado 4.
- È isomorfa alla varietà duale $Gr(2,5)$.
- $$X^\vee = \overline{\{H \in \mathbf{P}^\vee | \exists x \in X \text{ tale che } T_x X \subseteq H\}}$$

Tan Gr(2,5)

- La varietà tangente a $Gr(2,5)$ è una ipersuperficie di grado 4.
- È isomorfa alla varietà duale $Gr(2,5)$.
- $$X^\vee = \overline{\{H \in \mathbf{P}^\vee | \exists x \in X \text{ tale che } T_x X \subseteq H\}}$$
- Bibliografia: Gelfand, Kapranov, Zelevinski, multidimensional matrices...

Grassmanniane difettive

- Oltre alle Grassmanniane di rette, le Grassmanniane difettive conosciute sono

Grassmanniane difettive

- Oltre alle Grassmanniane di rette, le Grassmanniane difettive conosciute sono
- $Gr(2, 6)$

Grassmanniane difettive

- Oltre alle Grassmanniane di rette, le Grassmanniane difettive conosciute sono
- $Gr(2,6)$
- $Gr(3,7)$

Grassmanniane difettive

- Oltre alle Grassmanniane di rette, le Grassmanniane difettive conosciute sono
- $Gr(2, 6)$
- $Gr(3, 7)$
- $Gr(2, 8)$

Esempi difettivi

- La spiegazione geometrica si ottiene trovando una curva o una varietà passante per i punti.

$\sigma_3(Gr(3,7))$, I

- Dati P_1, P_2, P_3 generici in $\mathbf{Gr}(\mathbf{P}^3, \mathbf{P}^7)$, c' è una base $e_0, \ldots e_7$ tale che $P_1 =< e_0, e_1, e_2, e_3 >$, $P_2 =< e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $P_3 =< e_0 + e_4, e_1 + e_5, e_2 + e_6, e_3 + e_7 >$.

$\sigma_3(Gr(3,7))$, I

- Dati P_1, P_2, P_3 generici in $\mathbf{Gr}(\mathbf{P}^3, \mathbf{P}^7)$, c' è una base $e_0, \ldots e_7$ tale che $P_1 =< e_0, e_1, e_2, e_3 >$, $P_2 =< e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $P_3 =< e_0 + e_4, e_1 + e_5, e_2 + e_6, e_3 + e_7 >$.
- Otteniamo una curva razionale normale C_4 per i tre punti data da

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & t & & & \\ & 1 & & & & t & & \\ & & 1 & & & & t & \\ & & & 1 & & & & t \end{array}\right]$$

$\sigma_3(Gr(3,7))$, II

- Gli spazi tangenti $T_{P_i}G$ hanno la retta $T_{P_i}C_4$ in comune con il $\mathbb{P}^4$ generato da C_4.

$\sigma_3(Gr(3,7))$, II

- Gli spazi tangenti $T_{P_i}G$ hanno la retta $T_{P_i}C_4$ in comune con il $\mathbb{P}^4$ generato da C_4.
- Quindi

$$\dim < T_{P_1}G, T_{P_2}G, T_{P_3}G > \leq 4+3\cdot 15 = 49 < 50$$

e per il lemma di Terracini $\sigma_3(Gr(3,7))$ non ha la dimensione aspettata.

$\sigma_3(Gr(3,7))$, II

- Gli spazi tangenti $T_{P_i}G$ hanno la retta $T_{P_i}C_4$ in comune con il $\mathbb{P}^4$ generato da C_4.
- Quindi

  $$\dim < T_{P_1}G, T_{P_2}G, T_{P_3}G > \leq 4+3\cdot 15 = 49 < 50$$

  e per il lemma di Terracini $\sigma_3(Gr(3,7))$ non ha la dimensione aspettata.
- Come conseguenza anche $\sigma_4(Gr(3,7))$ non ha la dimensione aspettata.

$Gr(2,8)$

- $Gr(2,8)$ è difettiva per un motivo analogo. Per quattro punti $A =< e_0, e_1, e_2 >$, $B =< e_3, e_4, e_5 >$, $C =< e_6, e_7, e_8 >$, $D =< e_0 + e_3 + e_6, e_1 + e_4 + e_7, e_2 + e_5 + e_8 >$ passa la superficie $(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(4))$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} s & & & t & & & u & & \\ & s & & & t & & & u & \\ & & s & & & t & & & u \end{array}\right]$$

dove (s, t, u) sono coordinate omogenee di $\mathbf{P}^2$.

$Gr(2,6)$, I

- Se $\omega \in \wedge^3 \mathbf{C}^7$ è ben definita la contrazione

$$\phi_\omega \colon \wedge^2 \mathbf{C}^7 \longrightarrow \wedge^5 \mathbf{C}^7$$

$Gr(2,6)$, I

- Se $\omega \in \wedge^3\mathbf{C}^7$ è ben definita la contrazione

$$\phi_\omega \colon \wedge^2\mathbf{C}^7 \longrightarrow \wedge^5\mathbf{C}^7$$

- Sia $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Allora $\phi_\omega(e_i \wedge e_j) \neq 0$ solo se $i, j \geq 4$, e segue $\mathrm{rank}(\phi_\omega) = \binom{4}{2} = 6$.

$Gr(2,6)$, I

- Se $\omega \in \wedge^3 \mathbf{C}^7$ è ben definita la contrazione

$$\phi_\omega \colon \wedge^2 \mathbf{C}^7 \to \wedge^5 \mathbf{C}^7$$

- Sia $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Allora $\phi_\omega(e_i \wedge e_j) \neq 0$ solo se $i, j \geq 4$, e segue $\mathrm{rank}(\phi_\omega) = \binom{4}{2} = 6$.
- Quindi $\mathrm{rank}(\phi_\omega) \leq 6k$ se $\omega \in \sigma_k(Gr(\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^6))$.

$Gr(2,6)$, I

- Se $\omega \in \wedge^3 \mathbf{C}^7$ è ben definita la contrazione

$$\phi_\omega \colon \wedge^2 \mathbf{C}^7 \to \wedge^5 \mathbf{C}^7$$

- Sia $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Allora $\phi_\omega(e_i \wedge e_j) \neq 0$ solo se $i, j \geq 4$, e segue $\mathrm{rank}(\phi_\omega) = \binom{4}{2} = 6$.
- Quindi $\mathrm{rank}(\phi_\omega) \leq 6k$ se $\omega \in \sigma_k(Gr(\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^6))$.
- $\mathrm{rank}(\phi_\omega) \leq 18$ se $\omega \in \sigma_3(Gr(\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^6))$.

$Gr(2,6)$, II

- Per $\omega = e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 + e_1 \wedge e_4 \wedge e_7 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_6 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6 \wedge e_7$
  si calcola rank$(\phi_\omega) = 21$, quindi $\sigma_3(Gr(\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^6))$ non riempie lo spazio ambiente e $Gr(2,6)$ è difettiva.

La congettura di CGG

- Le varietà secanti superiori a $Gr(k,n)$ sono studiate da Catalisano-Geramita-Gimigliano.

La congettura di CGG

- Le varietà secanti superiori a $Gr(k,n)$ sono studiate da Catalisano-Geramita-Gimigliano.
- **Congettura** Non ci sono altre Grassmanniane difettive.

Veronese difettive

- Sia $V_{n,d} = (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(d))$ e consideriamo $p_1, \ldots, p_s \in V_{n,d}$

Veronese difettive

- Sia $V_{n,d} = (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(d))$ e consideriamo $p_1, \ldots, p_s \in V_{n,d}$
- Gli iperpiani che contengono $T_{p_1}V_{n,d}, \ldots, T_{p_s}V_{n,d}$ corrispondono a ipersuperfici singolari in p_i

Il teorema di Alexander-Hirschowitz

Le uniche Veronese difettive sono

- $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(2))$ Veronese quadratiche

Il teorema di Alexander-Hirschowitz

Le uniche Veronese difettive sono

- $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(2))$ Veronese quadratiche
- $(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(4))$ (quartiche di Clebsch)

Il teorema di Alexander-Hirschowitz

Le uniche Veronese difettive sono

- $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(2))$ Veronese quadratiche
- $(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(4))$ (quartiche di Clebsch)
- $(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}(4))$

Il teorema di Alexander-Hirschowitz

Le uniche Veronese difettive sono

- $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(2))$ Veronese quadratiche
- $(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(4))$ (quartiche di Clebsch)
- $(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}(4))$
- $(\mathbf{P}^4, \mathcal{O}(3))$

Unicità della decomposizione

In alcuni casi la decomposizione è unica

- Forme binarie dispari

Unicità della decomposizione

In alcuni casi la decomposizione è unica

- Forme binarie dispari
- Quintiche piane (Hilbert, Richmond, Palatini)

Unicità della decomposizione

In alcuni casi la decomposizione è unica

- Forme binarie dispari
- Quintiche piane (Hilbert, Richmond, Palatini)
- La superficie cubica (teorema pentaedrale di Sylvester)

Il teorema di Mella

- La decomposizione non è unica negli altri casi, se $d > n+1$. Singularities of linear systems and the Waring problem. Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 5523-5538